ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৪৯**

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (১)

ভূমিকা

গণিত বিষয় সঠিকভাবে হৃদয়ঙ্গম করতে হলে গণিতের সমস্যা সমাধানের বিভিন্ন পদ্ধতি সম্পর্কে জানতে হবে। সমস্যা সমাধানের বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে দু'টি উলে-খযোগ্য পদ্ধতি হলো: আরোহী এবং অবরোহী পদ্ধতি। অনেক ক্ষেত্রে সমস্যা সমাধানের একটি পদ্ধতি আর একটি পদ্ধতির পরিপূরক হিসেবে কাজ করে। তবে প্রত্যেকটি পদ্ধতির একটি নিজস্ব বৈশিষ্ট্য রয়েছে। বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে বিশেষ বিশেষ পদ্ধতি অন্যান্য পদ্ধতি অপেক্ষা অধিক কার্যকরী। এই অধিবেশনে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি, আরোহী পদ্ধতি ও গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির মধ্যে পার্থক্য এবং বিভিন্ন ধরনের গাণিতিক পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি–

- গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- আরোহী পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন।
- আরোহী পদ্ধতি ও গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির মধ্যে পার্থক্য সনাক্ত করতে পারবেন।
- বিভিন্ন ধরনের গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব-ক: আরোহী পদ্ধতি ও গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি

কতকগুলো বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে সাধারণ সিদ্ধান্তে পৌছানোর পদ্ধতি হলো আরোহী পদ্ধতি। এ পদ্ধতিতে কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হলেই তাকে সর্বদা সত্য বলা যায় না। আরোহী পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সূত্রকে বা সিদ্ধান্তকে যে পদ্ধতি দ্বারা প্রমাণ করা হয় তাকে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি বলে। আরোহী পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সিদ্ধান্ত বা সূত্রকে সম্ভাবনাপূর্ণ বলা যেতে পারে। অপরপক্ষে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রতিষ্ঠিত সূত্রটি হলো নির্ভুল।

প্রিয় শিক্ষার্থীবৃন্দ, আসুন এখন আমরা আরোহী পদ্ধতি ও গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির তুলনামূলক পার্থক্য নিম্নের ছকে লেখার চেষ্টা করি এবং আপনার উত্তর মূল শিখনীয় বিষয়ের সাথে মিলিয়ে নেন।

আরোহী পদ্ধতি	**গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি**
▪	▪
▪	▪
▪	▪
▪	▪
▪	▪

পর্ব- খঃ বিভিন্ন ধরনের গাণিতিক আরোহ

গাণিতিক যুক্তি গঠনের কৌশলগুলো হলোঃ আরোহী, অবরোহী, সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ। আরোহ কৌশলের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত নেওয়া হলে এ পদ্ধতিটিকে বলা হয় আরোহী পদ্ধতি। যুক্তিবিদ্যা আরোহী পদ্ধতিকে বহুভাগে বিভক্ত করেছে। গণিতে আরোহী পদ্ধতিকে প্রধানত তিন ভাগে ভাগ করা যায়। যেমন- সাধারণ আরোহ, বিকল্প আরোহ ও গাণিতিক আরোহ।

আসুন, এখন আমরা নিম্নের সমস্যাটি যে কোন একটি পদ্ধতিতে সমাধানের চেষ্টা করি।

সমস্যাঃ

$x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য।

সমাধানঃ

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৪৭**

মূল শিখনীয় বিষয়

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (১)

গাণিতিক আরোহ

গাণিতিক ও বৈজ্ঞানিক সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য দুটি পদ্ধতির যুক্তিধারা আছে। পদ্ধতিগুলো হচ্ছে আরোহী ও অবরোহী পদ্ধতি।

আমরা জানি যে প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি হচ্ছে $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ এটি একটি সাধারণ ফলাফল। এখান থেকে আমরা উদাহরণ হিসেবে প্রথম ১০টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় করতে পারি $\frac{10(10+1)(20+1)}{6}=385$ সাধারণ ফলাফল থেকে এভাবে বিশেষ ফলাফল প্রক্রিয়াকে বলে অবরোহ পদ্ধতি।

বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত থেকে সাধারণ সূত্রে পৌছানোর পদ্ধতিকে বলে আরোহী পদ্ধতি। আরোহী পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সিদ্ধান্তে কিছুটা সন্দেহ বা দূর্বলতা থেকে যায়। কোন ঘটনা দুই/তিনটি ক্ষেত্রে সত্য হলেও সকল ক্ষেত্রে সত্য নাও হতে পারে।

আরোহী পদ্ধতির সাহায্যে যে সমস্ত সূত্র নির্ণীত হয় তা নির্ভুল একথা বলা যায় না। সূত্রগুলি গাণিতিক প্রমাণের অপেক্ষা রাখে। “আরোহী পদ্ধতি দ্বারা প্রাপ্ত সূত্রকে যে পদ্ধতি দ্বারা প্রমাণ করা হয় তাকে বলা হয় গাণিতিক আরোহ (Mathematical Induction)”।

আরোহ অনুমানের সত্যতা নির্ণয় করা হয় গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে। পদ্ধতিটি এমন হওয়া প্রয়োজন যার দ্বারা বলা যেতে পারে সূত্রটি সর্বক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

$n = 1$ এর জন্য একটি বাক্য সত্য হলে $n = m$ এর জন্য বাক্যটিকে সত্য ধরে যখন $m + 1$ এর জন্যও তা সত্য হয় তখন $m = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য বলে $(m + 1)$ বা $1 + 1 = 2$ এর জন্যও সত্য হয়।

আবার $m = 2$ এর জন্য বাক্যটি সত্য বলে $(m + 1)$ বা $2 + 1 = 3$ এর জন্যও সত্য হয়।
$m = 3$ এর জন্য বাক্যটি সত্য বলে $(m + 1)$ বা $3 + 1 = 4$ এর জন্যও সত্য হয়।
এরূপে যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য বাক্যটি সত্য হয়।

অতএব $n = 1$ এর জন্য কোন গাণিতিক বাক্য সত্য হলে $n = m$ এর জন্য বাক্যটিকে সত্য ধরে যে শর্ত পাওয়া যায়, এ শর্ত প্রয়োগ করে $n = m + 1$ এর জন্যও যদি বাক্যটিকে সত্য প্রমাণ করা যায় তবে সকল $n \in N$ এর জন্য তা সত্য প্রমাণিত হয় একেই গাণিতিক আরোহ (Mathematical Induction) বলে।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির ব্যাখ্যা

n এর মান 1 থেকে 4 পর্যন্ত পর পর ধরে নিয়ে 1 থেকে n পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফলের যে সম্ভাব্য সূত্রটি পাওয়া যায় তার থেকে বলা যাবে না যে, 1 থেকে n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল $\frac{n(n+1)}{2}$ হবে।

n এর যে কোন একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য সূত্রটি সত্য ধরে নিয়ে যদি প্রমাণ করা যায় যে, n এর অন্য যে কোন মানের জন্য সূত্রটি সত্য, তাহলে সূত্রটির গাণিতিক সত্যতা প্রমাণিত হবে। এটিই হল গাণিতিক আরোহ।

n এর মান 1, 2, 3, 4 ধরে n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল কত হয় তা নির্ণয় করা যাক। n এর উপরিউক্ত মানসমূহের জন্য যোগফলের সঙ্গে ওদের অনুপাতও নির্ণয় করে দেখতে হবে। কারণ n এর মানের সঙ্গে সঙ্গে যোগফলগুলোও পরিবর্তিত হয়। n এর মান 1, 2, 3 এবং 4 বসিয়ে যে তালিকা পাওয়া যায় তা হল:

n এর মান	শ্রেণী	যোগফল	যোগফল ও হ এর অনুপাত
1	1	1	1/1 বা 2/2
2	1 + 2	3	3/2
3	1 + 2 + 3	6	6/3 বা 2 বা 4/2
4	1 + 2 + 3 + 4	10	10/4 বা 5/2

দেখা যাচ্ছে যে, $n = 1$ হলে যোগফল এবং n এর অনুপাত $\frac{2}{2}$

$n = 2$ হলে যোগফল এবং n এর অনুপাত $\frac{3}{2}$

$n = 3$ হলে যোগফল এবং n এর অনুপাত $\frac{4}{2}$

$n = 4$ হলে যোগফল এবং n এর অনুপাত $\frac{5}{2}$

সুতরাং $n = n$ হলে যোগফল ও n এর অনুপাত= $\frac{n+1}{2}$

অতএব বলা যায়, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল $\frac{n(n+1)}{2}$ হওয়া সম্ভব।

এখানে n এর যে কোন বিশেষ মানের জন্য সূত্রটি সত্য হবে ধরে নিয়ে যদি প্রমাণ করা যায় যে, n এর যে কোন মানের জন্য সূত্রটি সত্য, তবে প্রমাণিত হবে যে সূত্রটি সত্য।

ধরা যাক, $n = p$ এর জন্য সূত্রটি সত্য।

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p + (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)$$

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (p+1) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

সুতরাং প্রমাণিত হল যে, $n = p$ এর জন্য সূত্রটি সত্য হলে $n = (p + 1)$ এর জন্যও সূত্রটি সত্য। কিন্তু পূর্বে দেখা গেছে যে, $n = 1, 2, 3$ এবং 4 এর জন্য সূত্রটি সত্য হয়েছে। সুতরাং $n = 4 + 1$ বা 5 এর জন্য সূত্রটি সত্য। অনুরূপভাবে $n = 6$ এর জন্য সূত্রটি সত্য। এভাবে প্রমাণ করা যায় যে, n এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য সূত্রটি সত্য। সূত্র প্রমাণের এই পদ্ধতিটি হল গাণিতিক আরোহ।

বিচ্ছিন্ন কতিপয় উদাহরণ থেকে সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পদ্ধতিকে বলে আরোহী পদ্ধতি। আরোহী পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সিদ্ধান্তে কিছুটা সন্দেহ বা দুর্বলতা থেকে যায়। কোন ঘটনা দুই/তিনটি ক্ষেত্রে সত্য হলেও সকল ক্ষেত্রে সত্য নাও হতে পারে। তাই আরোহী পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সিদ্ধান্তকে সাধারণ ক্ষেত্রে প্রয়োগ করে যাচাই করে নিলে সন্দেহ মুক্ত হওয়া যায়। যুক্তি বিদ্যা থেকে উদাহরণ দিয়ে বলা যায়ঃ পরশু সকালে সূর্য পূর্বদিকে উদিত হয়েছে, গতকাল সকালে সূর্য পূর্বদিকে উদিত হয়েছে আজ সকালে সূর্য পূর্ব দিকে উদিত হয়েছে। সুতরাং আরোহী পদ্ধতিতে সাধারণ সিদ্ধান্ত হল সূর্য পূর্ব দিকে উদিত হয়; এরূপ সিদ্ধান্ত সর্বদা গ্রহণ যোগ্য নয়।

যেমন: পরশু সকালে বৃষ্টি হয়েছে, গতকাল সকালে বৃষ্টি হয়েছে, আজ সকালে বৃষ্টি হয়েছে- এ থেকে যদি সিদ্ধান্ত নেওয়া হয় যে, প্রত্যহ সকালে বৃষ্টি হয়। এরূপ সিদ্ধান্তে যে ভুল রয়েছে গণিতের কোন কোন ক্ষেত্রেও আরোহী পদ্ধতির এরূপ সিদ্ধান্ত বিভ্রান্তি সৃষ্টি করতে পারে। তাই নিশ্চিত সাধারণ সিদ্ধান্ত নেওয়ার পূর্বে সাধারণ ক্ষেত্রে প্রয়োগ করে সিদ্ধান্তের অভ্রান্ততা যাচাই করে নিতে হয়। যেমন সূর্য উঠার ক্ষেত্রে বলা যায়, আজ, গতকাল, পরশুর সাথে মিলিয়ে যদি বলা হয় যতদিন দেখেছি সূর্য পূর্বদিকেই উদিত হয়েছে। তাহলে "সূর্য পূর্বদিকে উদিত হয়" কথাটি সন্দেহাতীতভাবে প্রমাণিত হয়। কিন্তু বিগত দুই, তিন, চার বা কয়েকদিনের সকালে বৃষ্টি হওয়ার সাথে যতদিন দেখেছি সবদিনই সকালে বৃষ্টি হয়েছে প্রয়োগ করার মত সত্য পাওয়া যাচ্ছেনা। কাজেই এখানে বৃষ্টি হওয়ার ব্যাপারটি সাধারণ সত্য নয়। তাই গণিত, যুক্তিবিদ্যার আরোহী পদ্ধতিতে প্রাপ্ত সত্যকে সাধারণ ক্ষেত্রে প্রয়োগ করে যাচাই করে সিদ্ধান্ত নেয়।

কোন গাণিতিক প্রকল্প, উক্তি বা বাক্য যখন $n = 1$ এর জন্য সত্য হয়, $n = m$ এর জন্য সত্য ধরে প্রাপ্ত শর্ত দ্বারা যদি $n = m + 1$ এর জন্যও প্রকল্পটি সত্য বলে প্রতীয়মান হয়, তখন সকল $n \in N$ এর জন্য প্রকল্পটি সত্য হয়। গাণিতিক প্রকল্প বা বাক্য প্রমাণের এই নীতিকেই বলা হয় গাণিতিক আরোহ।

সেটতত্ত্বে গাণিতিক আরোহের সংজ্ঞা হল: যদি $S \subset N$ এমন হয় যে,

$1 \in S$,
$m \in S => m + 1 \in S$ সত্য হয়
তবে $S = N$

গাণিতিক আরোহ নীতিতে
$m = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য বলে $(m + 1)$ বা $1 + 1 = 2$ এর জন্যও সত্য হয়।
আবার $m = 2$ এর জন্য বাক্যটি সত্য বলে $(m + 1)$ বা $2 + 1 = 3$ এর জন্যও সত্য হয়।
$m = 3$ এর জন্য বাক্যটি সত্য বলে $(m + 1)$ বা $3 + 1 = 4$ এর জন্যও সত্য হয়।
এরূপে যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যার জন্য বাক্যটি সত্য হয়।

আরোহী পদ্ধতি ও গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি

সাধারণ আরোহী পদ্ধতিতে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অবলম্বন করা সম্ভব নয়। তর্কশাস্ত্রে গৃহীত একটি আরোহের উদাহরণ নেওয়া যাক। উদাহরণটিতে বলা হয়েছে- 'সূর্য এ পর্যন্ত প্রতিদিন সকালে পূর্বদিকে উদিত হয়েছে'। সুতরাং 'আগামীকাল সূর্য পূর্বদিকে উদিত হবে'। কিন্তু গণিতের কোন ছাত্রই প্রদত্ত শর্ত থেকে এরূপ সিদ্ধান্ত মেনে নেবেন না। গণিতশাস্ত্র অনুযায়ী এরূপ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ায় বাধা আছে। গণিতে শুধু একমাত্র বলা যেতে পারে যে, সিদ্ধান্তটি

সম্ভাবনাপূর্ণ। সিদ্ধান্তটি অভ্রান্ত হ'তে হলে কয়েকটি প্রকল্পিত শর্ত (Hypothetical Conditions) মেনে নিতে হয়। এই শর্তগুলি হচ্ছে- (১) সূর্য ও পৃথিবীর আপেক্ষিক অবস্থান কাল পর্যন্ত বর্তমান থাকবে। (২) পৃথিবী তার অক্ষের চারদিকে আগামীকাল পর্যন্ত ঘুরতে থাকবে। গণিত বিপরীত সম্ভাবনাগুলোকে উড়িয়ে দিতে বা অস্বীকার করতে পারে না। গাণিতিক আরোহ প্রতিটি বিশেষ ক্ষেত্রেই সূত্রটি প্রযোজ্য হবে। এর কোন ব্যতিক্রম হবে না। একটি গণিতের উদাহরণ দেয়া যাক, $n^2 - n + 11$ সূত্র $n = 1, 2....$ ইত্যাদি মানের জন্য মৌলিক সংখ্যা উৎপন্ন করলেও $n = 11$ এর ক্ষেত্রে অকৃতকার্য হয়।

গাণিতিক আরোহ সূত্র সকল এর জন্য কার্যকর হতে হলে তাকে দুটো শর্ত পালন করতে হয়, যথা-

(ক) সূত্রটি অবশ্যই ১ এর জন্য সত্য হবে, এবং

(খ) সূত্রটি যদি কোন সংখ্যা k এর জন্য সত্য হয়, তবে $k + 1$ এর জন্যও সত্য হবে।

বিভিন্ন ধরনের গাণিতিক পদ্ধতি

যুক্তিগঠন বা মৌলিক যৌক্তিক পদ্ধতি চারটি : আরোহী, অবরোহী, সংশে-ষণ ও বিশে-ষণ। আরোহী পদ্ধতিকে নিম্নরূপে শ্রেণীবিভাগ করা যায়।

আরোহী পদ্ধতির একটা বিশেষ রূপ হল গাণিতিক আরোহ। কোন জানা সত্যের আলোকে অজানা কোন তথ্যের সত্যতা সম্পর্কে সিদ্ধান্ত নেওয়ার যুক্তিকে আরোহী যুক্তি বলে।

যে যুক্তির মাধ্যমে বিশেষ বিশেষ উদাহরণ থেকে সাধারণ সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় তাহাই আরোহী পদ্ধতি। এক কথায় বিশেষ থেকে সাধারণ বা সর্বায়ন করার পদ্ধতিই আরোহী পদ্ধতি। আরোহী পদ্ধতির মাধ্যমে সূত্র গঠিত হয়।

গাণিতিক যুক্তি গঠনের কৌশলগুলো হল- আরোহ, অবরোহ, সংশে- ষণ ও বিশে- ষণ। আরোহ কৌশল অবলম্বন করে সিদ্ধান্ত নেওয়া হলে এ পদ্ধতিটিকে বলা হয় আরোহী পদ্ধতি। যুক্তিবিদ্যা আরোহী পদ্ধতিকে বহুভাবে ভাগ করে। গণিতে আরোহী পদ্ধতিকে প্রধানত তিনভাগে ভাগ করা যায়। সাধারণ আরোহ, বিকল্প আরোহ ও গাণিতিক আরোহ।

একটি সাধারণ সত্যকে বা তথ্যকে স্বীকার করে নিয়ে বিশেষ বিশেষ সত্যতা প্রমাণ করা হল অবরোহী পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে ব্যবহৃত সূত্রাবলী বা সিদ্ধান্তসমূহ পূর্বেই সত্য বলে প্রমাণিত বা গবেষণালব্ধ ফলাফল।

অতএব বলা যেতে পারে অবরোহী পদ্ধতি হল আরোহী পদ্ধতির উল্টোক্রম।

উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে যে কোন জোড়সংখ্যা ২ দ্বারা বিভাজ্য। সংখ্যা শ্রেণী দশ ভিত্তিক হওয়ায় দশক, শতক, হাজার ইত্যাদি স্থানীয় সংখ্যাগুলো ২ দ্বারা বিভাজ্য। একক স্থানীয় অংক ২ দ্বারা বিভাজ্য হলে যে কোন সংখ্যা ২ দ্বারা বিভাজ্য যা জোড় সংখ্যা হবে।

কতিপয় সমস্যা সমাধানে বিভিন্ন পদ্ধতির উদাহরণের মাধ্যমে পদ্ধতিগুলোর সম্পর্কে ধারণা নিম্নে বর্ণনা করা হল।

উদাহরণ- ১: $x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্যতার প্রমাণ, যখন $n \in N$

(ক) আরোহী পদ্ধতি:

$x^1 - y^1 = x - y$ যা $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য
$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$, ইহা $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য
$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$, ইহা $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য
$x^4 - y^4 = (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^2)$, ইহা $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য

এভাবে অগ্রসর হয়ে $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + x^{n-3}y^3 + \dots + y^{n-1})$, যা $(x - y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

(খ) অবরোহী পদ্ধতি:

$(x^n - y^n) \div (x - y)$

$\frac{(x^n - y^n)}{(x - y)} = (x - y)$) $x^n - y^n$ ($x^{n-1} + x^{n-1}y$ ….

$x^n - x^{n-1}y$

$x^{n-1}y - y^n$

$x^{n-1}y - x^{n-2}y^2$

$x^{n-2}y^2 - y^n$

……………………….

$\therefore (x^n - y^n) \div (x - y)$

$\Rightarrow x^{n-1} + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + y^{n-1}$

$\therefore (x^n - y^n)$ রাশিটি $(x - y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

(গ) সংশে- ষণ পদ্ধতি:

$x^n - y^n$ রাশিটি একটি বহুপদী যার ঘাত n। সকল পদের অস্তিত্ব থাকলে n ঘাত বিশিষ্ট বহুপদীর পদসংখ্যা $n-1$ বহুপদীর অনুল্লিখিত পদগুলো যোগ-বিয়োগ আকারে সংশ্লেষণ করে পাওয়া যায়:

$x^n - y^n = x^n - (x^{n-1}y - x^{n-1}y) - (x^{n-2}y^2 - x^{n-2}y^2) - \ldots\ldots\ldots\ldots - y^n$

$= x^n - x^{n-1}y + x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 + x^{n-2}y^2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - y^n$

$= x^{n-1}(x-y) + x^{x-2}y^2(x-y) + x^{n-3}y^2(x-y) + \ldots + y^{n-1}(x - y)$

$= (x - y)(x^{n-1} + x^{x-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + y^{n-1})$

$\therefore (x - y)$, $x^n - y^n$ এর একটি উৎপাদক।

$x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য।

(ঘ) বিশে- ষণ পদ্ধতিঃ

$x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

যদি $x^n - y^n = (x - y)\, Q\,(x, y)$ সত্য হয় এবং

$Q\,(x, y)$ একটি $n-1$ ঘাতের বহুপদী হয়।

অর্থাৎ যদি $Q\,(x, y) = \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ রাশিটি একটি $(n - 1)$ ঘাতের বহুপদী হয়।

$=> Q\,(x, y) = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots\ldots\ldots.. + y^{n-1}$

ভাগ প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত ভাগফল বহুপদী। ইহা $(n - 1)$ ঘাতের বহুপদী।

$x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য।

(ঙ) বিকল্প আরোহঃ

ধরি $x^n - y^n$ রাশিটির $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়, $x^n - y^n$ কে $x-y$ দ্বারা ভাগ করা হলে ধরি ভাগফল হয় $Q\,(x, y)$ এবং ভাগশেষ হয় $r \neq 0$

$\therefore\ x^n - y^n = (x-y)\, Q\,(x,y) + r$, ইহা একটি অভেদ; উভয়পক্ষে $x = y$ বসিয়ে পাই $r = 0$

অর্থাৎ $x^n - y^n$ কে $x-y$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষের মান হয় শূন্য।

সুতরাং প্রথমে ধরে নেওয়া প্রকল্পটি সত্য নয় বলে তার বিকল্পটি সত্য।

অর্থাৎ $x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য।

(চ) গাণিতিক আরোহঃ

প্রকল্পঃ $x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য যখন $n \in N$

যখন $n = 1$, $x^n - y^n = x^1 - y^1 = x - y$ যা $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য।

ধরি, $n = m$ এর জন্য প্রকল্পটি সত্য।

অর্থাৎ $x^n - y^n = x^m - y^m = (x - y)\, Q\,(x, y)$ এখানে $x - y$ একটি

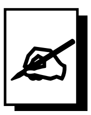
একঘাত উৎপাদক বলে $Q\,(x, y)$ অবশ্যই $m-1$ ঘাতের বহুপদী।

যখন $n = m + 1$, m এর স্থলে $m + 1$ বসিয়ে পাওয়া যায়ঃ

$X^{m+1} - y^{m+1} = (x-y)\, Q(x, y)$ যখন $Q(x, y)$ একটি m ঘাত বিশিষ্ট বহুপদী

সুতরাং ডান পক্ষে $(x - y)$ একটি উৎপাদক রয়েছে বলে তা $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$ সকল $n \in N$ এর জন্য $x^n - y^n$ রাশিটি $x - y$ দ্বারা বিভাজ্য।



মূল্যায়নঃ

১. শ্রেণীকক্ষে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির মাধ্যমে সমস্যা সমাধানের সুবিধা ও অসুবিধাসমূহ বর্ণনা করুন।

২. শ্রেণীকক্ষে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির মাধ্যমে সমস্যা সমাধানের যৌক্তিকতা ব্যাখ্যা করুন।

ইউনিট- ৪

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫০**

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (২)

ভূমিকা

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে বাস্তবভিত্তিক তথ্যের মাধ্যমে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা সম্ভব হয়। এর মাধ্যমে কোন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে ''কেন ও কিভাবে'' এসব প্রশ্নের উত্তর পেতে পারে ফলে মুখস্ত করণের বিশেষ চাপ থাকে না। শিক্ষার্থীরা পাঠদান কার্যাবলীতে সক্রিয়ভাবে অংশগ্রহণ করতে পারে। উপরিল্লিখিত গুণাবলির কারণে গাণিতিক সমস্যা সমাধানে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির গুরুত্ব অপরিসীম। এই অধিবেশনে গাণিতিক আরোহের প্রয়োজনীয়তা ও তার প্রমাণ, গাণিতিক আরোহের প্রতিজ্ঞা এবং বিভিন্ন সমস্যা সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি–

- গাণিতিক আরোহের প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- গাণিতিক আরোহের প্রমাণ করতে পারবেন।
- গাণিতিক আরোহের প্রতিজ্ঞা সম্পর্কে ধারণা ব্যক্ত করতে পারবেন।
- গাণিতিক আরোহের সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব-ক: গাণিতিক আরোহের প্রয়োজনীয়তা ও তার প্রমাণ

গণিতিক আরোহের মাধ্যমে কোন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে ''কেন ও কিভাবে'' এসব প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যায় বিধায় শিক্ষার্থীরা গণিতকে ভয় না পেয়ে বরং গণিতের প্রতি আগ্রহী হয়ে উঠে। সুতরাং কোন নূতন গাণিতিক সমস্যা বোঝার জন্য গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসরণ করাই উত্তম।

গাণিতিক আরোহের প্রমাণের জন্য দুইটি ধাপ অনুসরণ করতে হয়।

প্রথম ধাপ: $P(1)$ এর জন্য সত্য প্রমাণ।

দ্বিতীয় ধাপ: $P(m)$ এর জন্য সত্য হলে $P(m+1)$ এর জন্য সত্য হবে যেখানে $m \in N$.

আসুন বন্ধুরা, S সেটটি ''2 দ্বারা $n(n+1)$ বিভাজ্য'' তা নিম্নের ছকে প্রমাণের চেষ্টা করি এবং পরে মূল শিখনীয় বিষয়ের সাথে মিলিয়ে নেই।

প্রথম ধাপ: দ্বিতীয় ধাপ:

পর্ব- খঃ গাণিতিক আরোহের প্রতিজ্ঞা এবং সমস্যার সমাধান

গাণিতিক আরোহের প্রতিজ্ঞা বলতে, স্বাভাবিক সংখ্যা চলক n সম্বলিত কোন খোলা বাক্য সকল $n \in N$ এর জন্য সত্য হবে যদি

(১) বাক্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য হয় এবং

(২) বাক্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য হয়, যেখানে $m \in N$.

আসুন, এখন আমরা উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে নিম্নের সমস্যাটি ছকে সমাধানের চেষ্টা করি এবং পরে মূল শিখনীয় বিষয়ের সাথে মিলিয়ে নেই।

সমস্যাঃ $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

সমাধানঃ

প্রথম ধাপঃ প্রতিজ্ঞাটি $n = 1$ এর জন্য সত্য প্রমাণ করুন।

দ্বিতীয় ধাপঃ প্রতিজ্ঞাটি $n = m+1$ এর জন্যও সত্য প্রমাণ করুন তাহলেই প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণিত হবে।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫০**

মূল শিখনীয় বিষয়

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (২)

গাণিতিক আরোহের প্রয়োজনীয়ত

গাণিতিক সমস্যা সমাধানে গাণিতিক আরোহের প্রয়োজনীয়তা অপরিসীম। এই পদ্ধতিতে বাস্তব ভিত্তিক তথ্যের মাধ্যমে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা সম্ভব হয়। এর মাধ্যমে বিস্তারিত ব্যাখ্যা সহকারে প্রশিক্ষণার্থীদের/শিক্ষার্থীদের গাণিতিক তথ্য, প্রক্রিয়া এবং সূত্র উপস্থাপন করা হয়। ফলে প্রশিক্ষণার্থীরা/শিক্ষার্থীরা কোন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে “কেন ও কিভাবে” এসব প্রশ্নের উত্তর পাওয়া সম্ভব হয়। এই পদ্ধতিতে পাঠদানের সময় প্রশিক্ষণার্থীরা/শিক্ষার্থীরা সক্রিয়ভাবে পাঠদান কার্যাবলীতে অংশগ্রহণ করতে পারে এবং তারা নিজেরাই পরীক্ষিত তথ্যের মাধ্যমে সমস্যা সমাধানে সিদ্ধান্ত নিতে পারে। এর মাধ্যমে প্রশিক্ষণার্থীদের/শিক্ষার্থীদের সমস্যা সমাধানের দক্ষতা ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষমতার উন্নতি ঘটে। যেহেতু এই পদ্ধতিতে বাস্তব ভিত্তিক বা পরীক্ষিত তথ্যের মাধ্যমে সমস্যার সমাধান করা হয় সেহেতু প্রশিক্ষণার্থীদের/শিক্ষার্থীদের মুখস্তকরণের প্রয়োজন হয় না।

গাণিতিক আরোহের প্রমাণ

S সেটটি “2 দ্বারা $n(n+1)$ বিভাজ্য”

খোলা বাক্যের সমাধান সেট, যেখানে n চলকের ডোমেন বা ব্যাপ্তি সেট N এরূপ খোলা বাক্যকে $P(n)$ দ্বারা সূচিত করে n স্থলে স্বাভাবিক সংখ্যা 1, 2 ইত্যাদি প্রতিস্থাপন করে $P(1)$, $P(2)$ ইত্যাদি গাণিতিক উক্তি পাওয়া যায়। যেমন উপরে উল্লিখিত খোলা বাক্যটিকে $P(n)$ ধরে আমরা পাই,

$P(n)$: “2 দ্বারা $n(n+1)$ বিভাজ্য” এতে n স্থলে 1, 2 ইত্যাদি বসিয়ে প্রাপ্ত উক্তিগুলো হল,

$P(1)$: “2 দ্বারা $1(1+1)$ বিভাজ্য”

$P(2)$: “2 দ্বারা $2(2+1)$ বিভাজ্য” ইত্যাদি।

উল্লেখিত উদাহরণটিতে দেখা যায় যে, $P(n)$ খোলা বাক্যের সমাধান সেট $S=N$. এ থেকে বলা যায় যে, সকল $n \in N$ এর জন্য $P(n)$ প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণিত হল। সমাধানটি পর্যালোচনা করলে দেখা যাবে যে, এজন্য নিম্নোক্ত দুইটি ধাপ প্রমাণ করাই যথেষ্ট।

প্রথম ধাপঃ $P(1)$ সত্য।

দ্বিতীয় ধাপঃ $P(m)$ সত্য হলে $P(m+1)$ সত্য, যেখানে $m \in N$.

গাণিতিক আরোহ বিধি এরূপ প্রমাণের ভিত্তি বলে একে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির প্রমাণ বলা হয়।

গাণিতিক আরোহের প্রতিজ্ঞা

স্বাভাবিক সংখ্যা চলক n সম্বলিত কোন খোলা বাক্য সকল $n \in N$ এর জন্য সত্য হবে যদি

(১) বাক্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য হয় এবং

(২) বাক্যটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য হয়, যেখানে $m \in N$.

উদাহরণ- ১ঃ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে,

$1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2n - 1) = n^2$; যেখানে n যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা।

প্রমাণঃ (প্রথম ধাপ)ঃ এখানে $1 + 3 + 5 + \dots\dots + (2n - 1) = n^2 \dots$ (1)

$n = 1$ হলে, (1)এর বামপক্ষ $= 1$ এবং ডানপক্ষ $= 1^2 = 1$

$\therefore n = 1$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য।

(দ্বিতীয় ধাপ)ঃ ধরি, $n = m$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য।

অর্থাৎ $1 + 3 + 5 + \dots\dots\dots + (2m - 1) = m^2 \dots\dots\dots\dots$ (2)

এখন (1) বাক্যটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$1 + 3 + 5 + \dots + (2m + 1) = (m + 1)^2 \dots\dots\dots\dots$ (3) সত্য হয়।

(2) এর উভয়পক্ষে $2m + 1$ যোগ করে পাই,

$1 + 3 + 5 + \dots + (2m-1) + (2m + 1) = m^2 + (2m + 1) = (m + 1)^2$

এখন (1) এর উভয়পক্ষে $n = m + 1$ বসালে (1) এর বামপক্ষ এবং ডানপক্ষ যথাক্রমে (3) এর বামপক্ষ ও ডানপক্ষের সাথে মিলে যায়। সুতারাং সূত্রটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য।

$\therefore$ (3) সত্য, অর্থাৎ $n = m + 1$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য (1) সত্য।

উদাহরণ- ২: গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, সকল $n \in N$ এর জন্য $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

প্রমাণ: (প্রথম ধাপ): এখানে, $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ....(1)

$n = 1$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য, কারণ তখন বামপক্ষ $=1$ এবং ডানপক্ষ $= \frac{1(1+1)}{2} = 1$

(দ্বিতীয় ধাপ): ধরি, $n = m$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য, অর্থাৎ

$1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2}$ ....(2)

এখন (১) বাক্যটি $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য হবে যদি

$1 + 2 + 3 + ... + (m + 1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ ....(3) সত্য হয়।

এখন (2) এর উভয়পক্ষে $(m + 1)$ যোগ করে পাই,

$1 + 2 + 3 + ... + m + (m + 1)$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$\therefore$ (3) প্রমাণিত হল অর্থাৎ $n = m + 1$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য (1) উক্তিটি সত্য।

উদাহরণ- ৩: গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, n যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা হলে, $x^{2n} - y^{2n}$ রাশিটি $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য।

প্রমাণ: (প্রথম ধাপ) প্রতিজ্ঞাটি $n = 1$ এর জন্য সত্য। কারণ $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ যা $(x + y)$ দ্বারা বিভাজ্য।

(দ্বিতীয় ধাপ): ধরি, প্রতিজ্ঞাটি $n=m$ এর জন্য সত্য। অর্থাৎ $x^{2m} - y^{2m}$ রাশিটি $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য।

এখন প্রতিজ্ঞাটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$x^{2(m+1)} - y^{2(m+1)} = x^{2m+2} - y^{2m+2}$ রাশিটি $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য হয়।

এখানে, $x^{2m+2} - y^{2m+2} = (x^{2m+2} - x^2y^{2m}) + (x^2y^{2m} - y^{2m+2})$

$=x^2 (x^{2m} - y^{2m}) + y^{2m} (x^2 - y^2)$…………(ক)

এখন (ক) এর ডানপক্ষের প্রথম ও দ্বিতীয় পদ $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং (ক) এর বামপক্ষ $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ প্রতিজ্ঞাটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য। সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী যে কোন $n \in N$ এর জন্য প্রতিজ্ঞাটি সত্য।

গাণিতিক আরোহের সমস্যা সমাধান

সমষ্টি নির্ণয়:

উদাহরণ- ১: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots + n^2$

সমাধান: মনে করুন, $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots + n^2$

আমরা জানি,

$$p^3 - (p-1)^3 = p^3 - (p^3 - 3p^2 + 3p - 1)$$
$$= p^3 - p^3 + 3p^2 - 3p + 1$$
$$= 3p^2 - 3p + 1$$

এখন, $p=1, 2, 3, \dots n$ বসিয়ে পাই

$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$

$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$

………………………………

………………………………

$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

যোগ করে পাই-

$$n^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2) - 3\,(1 + 2 + \ldots\ldots + n) + (1 + 1 + \ldots\ldots\ldots + 1)$$

$$= 3S - \frac{3n(n+1)}{2} + n \quad \left[\because\ 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\therefore 3S = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

উদাহরণ- ২: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ n^3$

সমাধান: মনে করুন,

$$S=1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ n^3$$

আমরা জানি,

$$(p+1)^2.p^2 - p^2(p-1)^2 = p^2\{(p+1)^2 - (p-1)^2\}$$

$$= p^2.4p$$

$$= 4p^3$$

এখন, p=1, 2, 3, ... n বসিয়ে পাই

$$2^2.1^2 - 1^2.0^2 = 4.1^3$$

$$3^2.2^2 - 2^2.1^2 = 4.2^3$$

$$4^2.3^2 - 3^2.2^2 = 4.3^3$$

....

....

$$(n+1)^2.n^2 - n^2(n-1)^2 = 4.n^3$$

যোগ করে পাই-

$$(n+1)^2.n^2 = 4\,(1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ n^3)$$

বা, $(n+1)^2.n^2 = 4S$

$$\therefore S = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

মূল্যায়ন:

গাণিতিক আরোহের প্রতিজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ করুন:

১. $1+2+2^2+ .... + 2^{n-1}=2^n-1$

২. $2 +4+6+ ....+2n=n(n+1)$

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫১**

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (৩)

ভূমিকা

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সমস্যার স্বরূপ অনুযায়ী পাঠদানের এবং সমস্যা সমাধানের কৌশল ঠিক করতে হয়। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির প্রয়োগ কৌশল সকল ক্ষেত্রে সমান হলেও সমস্যা সমাধানের কৌশলে ভিন্নতা রয়েছে। এই অধিবেশনে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির প্রয়োগ কৌশল, পাঠদানের কৌশল এবং বিভিন্ন সমস্যা সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি–

- শ্রেণীকক্ষে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ কৌশল ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির পাঠদানের কৌশল বর্ণনা করতে পারবেন।
- গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: শ্রেণীকক্ষে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ কৌশল

গাণিতিক আরোহ বিধি প্রয়োগ করে যে কোন গাণিতিক বাক্যের সত্যতা প্রমাণের জন্য দু'টি ধাপ অনুসরণ করতে হয়।

প্রথম ধাপে, $n=1$-এর জন্য গাণিতিক বাক্যটি সত্য প্রমাণ করতে হয়।

দ্বিতীয় ধাপে, গাণিতিক বাক্যটি $n=m+1$-এর জন্যও সত্য হবে। তা হলেই গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী গাণিতিক বাক্যটি সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্যও সত্য হবে।

আসুন, এখন আমরা উপরোক্ত কৌশল অবলম্বন করে নিম্নের সমস্যাটি ছকে সমাধানের চেষ্টা করি এবং পরে মূল শিখনীয় বিষয়ের সাথে মিলিয়ে নেই।

সমস্যা: $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (2n - 1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$

সমাধান:

প্রথম ধাপ:

দ্বিতীয় ধাপ:

পর্ব- খঃ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির পাঠদানের কৌশল এবং বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে মাধ্যমিক পর্যায়ে বিভিন্ন ধারার যোগফল নির্ণয়ে একটি বিশেষ কৌশল অবলম্বন করতে হয়। যেমন- প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল, বর্গের যোগফল, সমান্তর ধারার যোগফল, গুণোত্তর ধারার যোগফলের ক্ষেত্রে ভিন্ন ভিন্ন কৌশল অবলম্বন করতে হয়।

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে,

ধরি,

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

আবার, এখন S কে উল্টোভাবে সাজিয়ে নেই-

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1 \ldots\ldots\ldots(2)$$

এখন (1) ও (2) যোগ করলেই প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল পাওয়া যাবে।

আসুন, এখন আমরা সমস্যাটির বাকি অংশ নিম্নের ছকে করার চেষ্টা করি এবং পরে মূল শিখনীয় বিষয়ের সাথে মিলিয়ে নেই। এ রকম আরও কিছু সমস্যা সমাধানের কৌশল মূল শিখনীয় বিষয় থেকে জেনে নেই।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫১**

মূল শিখনীয় বিষয়

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (৩)

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ

নিচের ধারাগুলোর n পদ পর্যন্ত যোগফল দেয়া আছে। সবগুলোর ক্ষেত্রেই গাণিতিক আরোহ বিধি প্রয়োগ করে n পদ পর্যন্ত যোগফলের সত্যতা যাচাই করা হয়েছে।

উদাহরণ- ১: গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, সকল $n \in N$ এর জন্য, $1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$

প্রমাণ:

$1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots\ldots\ldots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$ ... ... (1)

$n = 1$ হলে (1) এর বাম পক্ষ $= 2$ এবং ডানপক্ষ $= 1^2.2 = 2$

অতএব, $n = 1$ হলে (1) গাণিতিক বাক্যটি সত্য।

এখন মনে করি, $n = m$ এর জন্য (1) সত্য।

অর্থাৎ $1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots\ldots + m(3m - 1) = m^2(m + 1)$ ... ... (2)

এখন (1) বাক্যটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (m + 1)(3m + 2) =$

$(m + 1)^2(m + 2)$ ... ... (3)

সত্য হয়।

(2) এর উভয় পক্ষে $(m + 1)(3m + 2)$ যোগ করে পাই

$1.2 + 2.5 + 3.8 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + m(3m - 1) + (m + 1)(3m + 2)$

$= m^2(m + 1) + (m+1)(3m + 2) = (m+1)(m^2 + 3m + 2)$

$= (m + 1)(m + 1)(m + 2)$

$= (m + 1)^2(m + 2)$

অতএব, (3) প্রমাণিত হল অর্থাৎ, সূত্রটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য।

অতএব, গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী (1) সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য সত্য।

উদাহরণ- ২: গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, সকল $n \in N$ এর জন্য,

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2n - 1)^3 = n^2 (2n^2 - 1)$

প্রমাণ:

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots + (2n - 1)^3 = n^2 (2n^2 - 1) \quad \ldots \quad \ldots (1)$

$n = 1$ হলে (1) এর বামপক্ষ $= 1$ এবং ডানপক্ষ $= 1.1 = 1$

অতএব, $n = 1$ হলে (1) বাক্যটি সত্য।

এখন মনে করি, $n = m$ এর জন্য (1) বাক্যটি সত্য। অর্থাৎ

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots + (2m - 1)^3 = m^2 (2m^2 - 1) \quad \ldots \quad \ldots (2)$

এখন (1) বাক্যটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে, যদি

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2m + 1)^3 =$

$(m + 1)^2 \{2 (m + 1)^2 - 1\} \quad \ldots \quad \ldots (3)$

সত্য হয়।

(2) এর উভয় পক্ষে $(2m + 1)^3$ যোগ করে পাই,

$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots\ldots + (2m - 1)^3 + (2m + 1)^3 = m^2 (2m^2 - 1) + (2m + 1)^3$

$= 2m^4 + 8m^3 + 11m^2 + 6m + 1$

$= (m + 1) (2m^3 + 6m^2 + 5m + 1)$

$= (m + 1)^2 (2m^2 + 4m + 1)$

$= (m + 1)^2 \{ 2 (m+1)^2 - 1\}$

অতএব, (3) প্রমাণিত হল। অর্থাৎ সূত্রটি $n = m$ এর জন্য সত্য হলে, তা $n = m + 1$ এর জন্যও সত্য। অতএব, গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী (1) সকল স্বাভাবিক সংখ্যা n এর জন্য সত্য।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে পাঠদানের কৌশল

বিভিন্ন অনুচ্ছেদসমূহে মাধ্যমিক পর্যায়ে পঠিত কয়েকটি ধারার যোগফল প্রায়শই প্রয়োজন হবে। শ্রেণীকক্ষে নিম্নোক্ত উদাহরণসমূহ কিভাবে পাঠদান করা হবে সে সম্পর্কে আলোচনা করা হল। ধারার যোগফল একটি বিশেষ কৌশল অবলম্বন করে সহজে নির্ণয় করা যায়।

(i) **প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফলঃ**

মনে করি,

$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n \ldots\ldots\ldots (1)$

$\therefore S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots\ldots\ldots + 1 \ldots\ldots\ldots (2)$

(1) এবং (2) যোগ করে পাই,

$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \ldots\ldots \ldots\ldots + (n + 1) = n(n + 1)$

$\therefore S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(ii) **প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফলঃ**

মনে করি, $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \quad \ldots + n^2$

আমরা পাই,

$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

$n^3 - (n - 1)^3 = 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1$

$(n - 1)^3 - (n - 2)^3 = 3(n - 2)^2 + 3(n - 2) + 1$

....

$3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.1 + 1$

যোগ করে পাই,

$(n + 1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \quad \ldots n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n) + n$

বা, $n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \dfrac{3n(n+1)}{2} + n$

$$\therefore 3S = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n$$

$$= \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

$$\therefore S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(iii) **সমান্তর ধারা:**

সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d এবং শেষ পদ m হলে প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots\dots\dots + \{a + (n-1)d\}$$

$$= na + d(1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots\dots + n-1)$$

$$= na + d\,\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\{2a + (n-1)d\}$$

$$= \frac{1}{2}\{a + a + (n-1)d\}$$

$= \frac{1}{2}n(a+m)$ [যেখানে, শেষ পদ $m = \{a + (n-1)d\}$]

(iv) **গুণোত্তর ধারা**

প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল,

$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots.. + ar^{n-1}$ .... (1)

r দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে পাই,

$\therefore Sr = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-1} + ar^n$ .... (2)

(1) থেকে (2) বিয়োগ করে পাই,

$\therefore S - Sr = a - ar^n$

বা, $S(1 - r) = a(1 - r^n)$

$\therefore S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, এখানে $r \neq 1$

যখন $r < 1$ তখন

$S = a\frac{1-r^n}{1-r}; \quad r \neq 1$

আবার, যখন $r > 1$ তখন

$S = a\frac{r^n - 1}{r-1}; \; r \neq 1$

লক্ষণীয় যে, $r = 1$ হলে প্রত্যেকটি পদই a এবং $S = na$ হবে।

যখন, $n \to \infty$ এবং $r < 1$, তখন $S = \frac{a}{1-r}$

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান

উদাহরণ- ১: n সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয়।

1.2 + 2.5 + 3.8 + ...

সমাধান:

n তম পদ,

$u_n = n(3n - 1) = 3n^2 - n$

$\therefore u_1 = 3.1^2 - 1$

$u_2 = 3.2^2 - 2$

$u_3 = 3.3^2 - 3$

....

অতএব, ধারাটির n তম পদ পর্যন্ত যোগফল,

$S_n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 .... + n^2) - (1 + 2 + 3 + ... + n)$

$$= 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(2n+1-1) = n^2(n+1)$$

অন্তর প্রক্রিয়ার ধারার সমষ্টি নির্ণয়ঃ

মনে করি প্রদত্ত ধারাটি

$u_1 + u_2 + u_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$

ধারার nতম পদ u_n কে যদি $v_n - v_{n-1}$ রূপে প্রকাশ করা যায় তবে n তম পদ পর্যন্ত প্রদত্ত ধারার সমষ্টি S_n সহজেই নির্ণয় করা যায়, কেননা $u_n = v_n - v_{n-1}$

$$u_{n-1} = v_{n-1} - v_{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

$$u_2 = v_2 - v_1$$

$$u_1 = v_1 - v_0$$

অতএব, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots + u_n$

$$= v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots + v_n - v_{n-1}$$

$$= v_n - v_0$$

উদাহরণ- ২ঃ n তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয়।

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)} + \frac{1}{(1+2x)(1+3x)} + \frac{1}{(1+3x)(1+4x)} + \ldots\ \ldots\ \ldots$$

সমাধানঃ

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)} = \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{(1+x)}$$

$$\frac{1}{(1+2x)(1+3x)} = \frac{3}{1+3x} - \frac{2}{1+2x}$$

-    -   -   -   -   -

-    -   -   -   -   -

$$\frac{1}{(1+nx)\{1+(n+1)x\}}=\frac{n+1}{1+(n+1)x}-\frac{n}{1+nx}$$

$$\therefore S_n = \frac{n+1}{1+(n+1)x}-\frac{1}{1+x}=\frac{n}{\{1+(n+1)x\}(1+x)}$$

সংখ্যক উৎপাদকের গুণফল এবং পদগুলোর প্রথম উৎপাদক একই সমান্তর শ্রেণীভুক্তঃ

ধরা যাক, ধারাটি $u_1 + u_2 + u_3 .. \ ... \ ... \ .... + u_n$

যেখানে, $u_n = (a + nb)\{a + (n+1)b\} .... \ .... \ ... \{a + (n + r - 1)b\}$

a, b এবং r তিনটি ধ্রুবক।

এখন, $U_n = \dfrac{\{a+(n+r)b\}u_n - \{a+(n-1)b\}u_n}{(r+1)b}$

$$= \frac{\{a+(n+r)b\}u_n}{(r+1)b} - \frac{\{a+(n-1)b\}u_n}{(r+1)b}$$

$= v_n - v_{n-1}$, যেখানে $v_n = \dfrac{\{a+(n+r)b\}u_n}{(r+1)b}$

$\therefore S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... \ .... \ ..... \ ... + u_n$

$= v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + ... \ ... \ .... + v_n - v_{n-1}$

$= v_n - v_0$

যেখানে, v_0 একটি ধ্রুবক যা n এর উপর নির্ভরশীল নয়। অতএব, প্রদত্ত ধারার nতম পদ পর্যন্ত যোগফল উল্লেখিত সূত্র দ্বারা নির্ণয় করা যাবে।

মন্তব্যঃ n-তম পদে সর্বশেষ উৎপাদকের পরবর্তী সমান্তর শ্রেণীভুক্ত উৎপাদক অন্তর্ভুক্ত করুন এবং উৎপাদকের সংখ্যা ও সমান্তর শ্রেণীর সাধারণ অন্তরের গুণফল দ্বারা ভাগ করে একটি ধ্রুবক যোগ করুন। ধ্রুবকটির মান n = 1 অথবা n = 0 বসিয়ে নির্ণয় করা যাবে।

উদাহরণ- ৩: nতম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয়।

$1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + ... \ ... \ ... \ ...$

এখানে, $u_n = (2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)$

অতএব, $S_n = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{8} + C$

n = 1 বসিয়ে পাই,

$$15 = \frac{1.3.5.7}{8} + C$$

অতএব, $C = \frac{15}{8}$

$$\therefore S_n = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{8} + \frac{15}{8}$$

$$= n(2n^3 + 8n^2 + 7n - 2)$$

n তম পদ পর্যন্ত এরূপ ধারার যোগফল নির্ণয়, যার প্রতিটি পদ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত r সংখ্যক উৎপাদকের গুণফলের বিপরীত এবং পদগুলোর প্রথম উৎপাদক একই সমান্তর শ্রেণীভুক্ত:

মনেকরি ধারাটি, $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots + u_n$

যেখানে, $U_n = \frac{1}{(a+nb)\{a+(n+1)b\}\{a+(n+2)b\}\ldots\ldots\{a+(n+r-1)b\}}$

এখন $U_n = \frac{1}{(r-1)b} . \frac{\{a+(n+r-1)b\} - (a+nb)}{(a+nb)\{a+(n+1)b\}\ldots\ldots\{a+(n+r-1)b\}}$

$$= \frac{1}{(r-1)b} . \frac{1}{(a+nb)\{a+(n+1)b\}\ldots\ldots\{a+(n+r-2)b\}}$$

$$= \frac{1}{(r-1)b} . \frac{1}{\{a+(n+1)b\}\{a+(n+2)b\}\ldots\{a+(n+r-1)b\}}$$

$$= v_{n-1} - v_n$$

$\therefore S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots + u_n$

$= v_0 - v_1 + v_1 - v_2 + v_2 - v_3 + \ldots \quad \ldots \quad \ldots + v_{n-1} - v_n$

$= v_0 - v_n$, যেখানে $v_n = \frac{(a+nb)u_n}{(r-1)b}$ এবং v_0 একটি ধ্রুবক যা n এর উপর নির্ভরশীল নয়।

উদাহরণ- ৪: n তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয়।

$$\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+\ \ldots$$

এখানে, $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

$$S_n = C - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$$

n = 0 বসিয়ে পাই, $0 = C - \dfrac{1}{12}$, বা $C = \dfrac{1}{12}$

$$S_n = \frac{1}{12} - \frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$$

মূল্যায়ন:

নিম্নলিখিত সমস্যাগুলো সমাধানের ক্ষেত্রে পাঠদানের কৌশল বর্ণনা করুন এবং তাদের একটি তালিকা প্রস্তুত করুন।

১। $1^2+2^2+3^2$ + ... + 40^2 = কত

২। $1^3+2^3+3^3$ + ... + 15^3 = কত

৩। 10 + 15 + 20 + ... ধারাটির 30তম পদ কত?

৪। $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+$.......... ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি কত?

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫২**

আংশিক ভগ্নাংশ (প্রকৃত)

ভূমিকা

গণিতে ব্যবহারিক ক্ষেত্রে আংশিক ভগ্নাংশের ব্যবহার ব্যাপক। দৈনন্দিন জীবনের নানা গাণিতিক সমস্যার সমাধান করার জন্য ভগ্নাংশের ব্যবহার করতে হয়। ভগ্নাংশ সাধারণত দুই প্রকার প্রকৃত ভগ্নাংশও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। ভগ্নাংশের যোগ, বিয়োগ, ভগ্নাংশ নির্ণয়ের স্তর, ভগ্নাংশ বিভক্তিকরণের পদ্ধতি, প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করার প্রক্রিয়া সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের স্বচ্ছ ধারণা থাকা অত্যাবশ্যক। প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তিকরণের পদ্ধতি সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা ছাড়া শিক্ষার্থীদের পক্ষে অনেক সময় গণিতের নানারকম ব্যবহারিক সমস্যার সমাধান করা সম্ভব নয়। এ অধিবেশনে আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয়ের স্তর, আংশিক ভগ্নাংশ বিভক্তিকরণ ও প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয়ের স্তর ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- আংশিক ভগ্নাংশ বিভক্তিকরণের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন।
- প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব-ক: আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয়ের স্তর

যদি লব, হর অপেক্ষা নিম্নঘাতের হয় তাহলে ভগ্নাংশটি প্রকৃত ভগ্নাংশ। আবার লব, হর অপেক্ষা উচ্চ ঘাতের হয় তাহলে ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। যদি কোন ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ করা যায় তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলে। আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয়ের স্তরগুলো হলোঃ

১. প্রথমত ভগ্নাংশের প্রকৃতি নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ ভগ্নাংশটি প্রকৃত না অপ্রকৃত তা নির্ধারণ করতে হবে।

২. ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ হলে তাকে প্রকৃত ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে হবে।

৩. হরের উৎপাদক নির্ণয় করতে হবে।

৪. হরের উৎপাদকের সংখ্যা ও প্রকৃতি দেখে ধ্রুবক ও সমতা গঠন করতে হবে।

৫. সমতাকে অভেদে প্রকাশ করতে হবে।

৬. অভেদ থেকে কল্পিত ধ্রুবকের মান নির্ণয় করতে হবে চলকের মান স্থাপন করে।

৭. সহগ সমীকৃত করে কল্পিত ধ্রুবকের মান নির্ণয় করতে হবে।

পর্ব- খ: প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ

পর্ব-ক এ আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয়ের স্তর সম্পর্কে জেনেছি। এবার আমরা নিম্নের সমস্যাটি সমাধানের মাধ্যমে কীভাবে প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা করা যায় তা দেখব।

সমস্যা: $(3x^2-8x-4) / (x^3 + x^2 - 2x)$

সমাধান:

এখন $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$

মনে করি, $(3x^2-8x-4) / (x^3+x^2-2x) = A/x + B/(x-1)+C/(x+2)$

$x(x-1)(x+2)$ দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া

$(3x^2-8x-4x-4) = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2)+Cx (x-1)$ ....(1)

যেহেতু ইহা একটি অভেদ, সুতরাং ইহা x এর সকল মানের জন্যই সত্য। x-এর যে সকল মানের জন্য হরের প্রত্যেকটি উৎপাদক শূন্য ক্রমাগত ভাবে x এর ঐ মানগুলি ব্যবহার করা হল।

(১) এ $x = 0$ বসালে	$-4=-2A$	অতএব $A = 2$
(১) এ $x = 1$ বসালে	$3-8-4=3B$	অতএব $B =-3$
(১) এ $x =-2$ বসালে	$12+16-4=6C$	অতএব $C = 4$

সুতরাং $(3x^2-8x-4) / (x^3+x^2-2x)=2/x-3/(x-1) + 4/(x+2)$

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫২**

মূল শিখনীয় বিষয়

আংশিক ভগ্নাংশ (প্রকৃত)

ভগ্নাংশের প্রকৃতি

প্রকৃত ভগ্নাংশ: যদি লব, হর অপেক্ষা নিম্ন ঘাতের হয় তাহলে ভগ্নাংশটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

অপ্রকৃত ভগ্নাংশ: যদি লব, হর অপেক্ষা উচ্চ ঘাতের হয় তাহলে ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

আংশিক ভগ্নাংশ: যদি কোন ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায় তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলে।

আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয়ের সূত্র

১. প্রথমত ভগ্নাংশের প্রকৃতি নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ ভগ্নাংশটি প্রকৃত না অপ্রকৃত তা নির্ধারণ করতে হবে।
২. ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ হলে তাকে প্রকৃত ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে হবে।
৩. হরের উৎপাদক নির্ণয় করতে হবে।
৪. হরের উৎপাদকের সংখ্যা ও প্রকৃতি দেখে ধ্রুবক ও সমতা গঠন করতে হবে।
৫. সমতাকে অভেদে প্রকাশ করতে হবে।
৬. অভেদ থেকে কল্পিত ধ্রুবকের মান নির্ণয় করতে হবে চলকের মান স্থাপন করে।
৭. সহগ সমীকৃত করে কল্পিত ধ্রুবকের মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তিকরণের পদ্ধতি:

লব $f(x)$ এর ঘাত হর $\varphi(x)$ এর ঘাত অপেক্ষা কম হলে $f(x) / \varphi(x)$ ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তিকরণের পদ্ধতি নিম্নরূপ:

১. প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে কতকগুলো ধ্রুবক সমন্বয়ে গঠিত সহজতর ভগ্নাংশের যোগফলে প্রকাশ করতে হবে।

২. $\varphi(x)$ এর প্রতিটি $(x - a)$ অপুনরাবৃত্ত এক ঘাত উৎপাদকের জন্য $A/(x- a)$ আকারের আংশিক ভগ্নাংশ থাকবে।

৩. $\varphi(x)$ এর প্রতিটি n $(x - b)^n$ বার পুনরাবৃত্ত একঘাত উৎপাদক অর্থাৎ প্রতিটি $(x - b)^n$ উৎপাদকের জন্য $B_1/(x-b) + B_2/(x - b)^2 + \text{----------} + B_n/(x - b)^n$ আকারে n-সংখ্যক আংশিক ভগ্নাংশের একটি দল থাকবে।

৪. $\varphi(x)$ এর প্রতিটি অপুনরাবৃত্ত দ্বিঘাত উৎপাদক $x^2 + px + q$ এর জন্য $(Cx + D)/(x^2 + px + q)$ আকারে একটি আংশিক ভগ্নাংশ থাকবে।

৫. $\varphi(x)$ এর m বার পুনরাবৃত্ত প্রতিটি দ্বিঘাত উৎপাদক, অর্থাৎ $(x^2 + px + q)^m$ উৎপাদকের জন্য

$(C_1x + D_1)/(x^2 + px + q) + (C_2x + D_2)/(x^2 + px + q)^2 + \text{---------} + (C_mx + D_m)/(x^2 + px + q)^m$ আকারে n-সংখ্যক আংশিক ভগ্নাংশের একটি দল থাকবে।

প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশঃ

সমস্যা- ১ঃ $\dfrac{16}{(x+1)^2(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ

ধরুন, $\dfrac{16}{(x+1)^2(x-3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x-3}$

মনে করি, $(3x^2-8x-4)/(x^3 + x^2-2x) \equiv A/x + B/(x-1) + C/(x + 2)$

উভয় পক্ষকে $(x+1)^2(x-3)$ দ্বারা গুণ করে

$16 \equiv A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2$..............$(i)$

এটি একটি অভেদ বলে x– এর সকল মানের জন্যই সত্য, x = 3 বসিয়ে

$16 = A\times 0+B\times 0+C(3+1)^2$ অথবা 16C = 16 $\therefore\ C=1$ আবার $x=-1$ বসিয়ে

$16 = A\times 0+B\times(-1-3)+C\times 0$ অথবা –4B = 16 $\therefore\ B=-4$

এই অভেদটির ডান পার্শ্বে x^2 এর সহগ A ও C এবং বামপক্ষ x^2 মুক্ত।

$\therefore\ (i)$ নং এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

0 = A + C

অথবা 0 = A + 1 [C এর মান বসিয়ে]

$\therefore\ A=-1$

অতএব, নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $\dfrac{16}{(x+1)^2(x-3)} = \dfrac{-1}{x+1}+\dfrac{-4}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x-3}$

সমস্যা- ২: $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান:

ধরুন, $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

উভয় পক্ষকে $(x+1)(x^2+1)$ দিয়ে গুণ করলে

$3x-1 \equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$

যেহেতু এটি একটি অভেদ, x এর যে কোন মানের জন্য এটি সত্য

এতে, $x=-1$ বসিয়ে

$3(-1)-1=A\{(-1)^2+1\}+B\times 0$ অথবা $2A=-4$ $\therefore\ A=-2$

আবার উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

A + B = 0 অথবা B – 2 = 0 $\therefore\ B=2$

আবার উভয় পক্ষ হতে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

B +C = 3 ev 2+C = 3 $\therefore\ C = 1$

অতএব, নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $\dfrac{3x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{-2}{x+1} + \dfrac{2x+1}{x^2+1}$

সমস্যা- ৩: $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ

ধরুন, $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+3}$

উভয় পক্ষকে $(x^2+2)(x^2+3)$ দ্বারা গুণ করে

$x^3+x^2+1 \equiv (Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2)$......................$(i)$

$\therefore\ (i)$ এ $x^2 = -2$ বসিয়ে পাই

$-2x-2+1 = (Ax+B)(-2+3)$

বা, $-2x-1 = Ax+B$ ....(ii)

(ii) নং অভেদ হতে যথাক্রমে x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

A =–2, B= –1

আবার (i) এ $x^2 = -3$ বসিয়ে পাই,

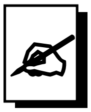
$-3x-3+1 = (Cx+D)(-3+2)$

বা, $-3x-2 = -Cx-D$..........................(iii)

(iii) নং অভেদ হতে যথাক্রমে x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

C = 3, D = 2

$$\therefore \frac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{3x+2}{x^2+3} - \frac{2x+1}{x^2+2}$$



মূল্যায়নঃ

১. প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের পদ্ধতি বর্ণনা করুন।

২. আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুনঃ

ক) $\dfrac{3x^2+14x-8}{x^3-2x^2-8x}$

খ) $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)^2}$

গ) $\dfrac{5x-12}{(x+2)(x^2-1)}$

সম্ভাব্য উত্তরঃ

মূল্যায়ন- ২:

ক) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{4}{x-4}$

খ) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{(x-1)}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$

গ) $\dfrac{-22}{3(x+2)}+\dfrac{17}{2(x+1)}+\dfrac{7}{6(x-1)}$

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৩**

আংশিক ভগ্নাংশ (অপ্রকৃত)

ভূমিকা

ভগ্নাংশ মূলত দুই প্রকার: প্রকৃত ভগ্নাংশ ও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। যে ভগ্নাংশের লব ছোট কিন্তু হর বড় তাকে বলে প্রকৃত ভগ্নাংশ। অন্যদিকে যে ভগ্নাংশের লব বড় কিন্তু হর ছোট তাকে বলে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা প্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে পরিবর্তনের পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করেছি। প্রকৃত ভগ্নাংশের মত অপ্রকৃত ভগ্নাশকেও আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করা সম্ভব এবং ব্যবহারিক ও তাত্ত্বিক গণিতের নানা প্রক্রিয়ায় এ ধরনের রূপান্তর প্রায়শই প্রয়োজনীয় হয়ে দাড়ায়। বর্তমান অধিবেশনে অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে রুপান্তর প্রক্রিয়া আলোচনা করা হলো-

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে রুপান্তর করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ

যদি কোন মূলদ বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের লব হর অপেক্ষা নিম্নমাত্রার না হয় তবে ভগ্নাংশটিকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ ভাগের প্রক্রিয়ায় একটি পূর্ণ অংশ ও একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন, অপ্রকৃত ভগ্নাংশ

$$(x)/\ \varphi(x) = (x^2 + 1)/\ (x - 1) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

পর্ব- খঃ অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর

যদি কোন ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ (Partial fraction) বলা হয়।

আমরা এখন $\frac{N(x)}{D(x)}$ আকারের কতিপয় সহজ ভগ্নাংশকে কিভাবে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয় তা নিয়ে আলোচনা করব, যেখানে $N(x)$ ও $D(x)$ উভয়ই চলকের বহুপদী। $\frac{N(x)}{D(x)}$ আকারের মূলদীয় ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলা হয় যদি লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট হয়। লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রার সমান অথবা তা অপেক্ষা বড় হলে ভগ্নাংশটিকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper fraction) বলা হয়।

যেমন, $\frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং $\frac{2x^2}{(x+1)(x+2)}$ ও $\frac{x^3}{(x+1)(x+2)}$ উভয়ই অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

উল্লেখ্য যে, অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা সাধারণ নিয়মে ভাগ করে অথবা লবের পদগুলোকে সুবিধাজনকভাবে পুনর্বিন্যাস করে ভগ্নাংশটিকে একটি বহুপদী (ভাগফল) এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $\frac{x^2+5x+8}{x+3} = (x+2) + \frac{2}{x+3}$

এবার আমরা নিম্নের অপ্রকৃত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করিঃ

$(2x^2+5x-11)/\ (x^2+2x-3)$

ধরা যাক, $(2x^2+5x-11)/\ (x^2+2x-3) = \frac{2x^2+5x-11}{(x+3)(x-1)} =$

$A + B/\ (x+3) + C/\ (x-1)$

উভয় পক্ষকে x^2+2x-3 দ্বারা গুণ করে পাই,

$(2x^2+5x-11) = A(x+3)(x-1) + B(x-1) + C(x+3)$

$x = -3$ হলে,

$18 - 15 - 11 = -4B$ বা, $-4B = -8$ বা, $B = 2$

$x = 1$ হলে,

$2 + 5 - 11 = 4C$ বা, $4C = -4$ বা, $C = -1$

উভয় পক্ষ হতে x^2 এর সহগ সমান লিখে, $A = 2$

অতএব, $(2x^2+5x-11)/(x^2+2x-3) = 2 + 2/(x+3) - 1/(x-1)$

উপরোক্ত নিয়মানুসারে $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের চেষ্টা করি:

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৩**

মূল শিখনীয় বিষয়

আংশিক ভগ্নাংশ (অপ্রকৃত)

প্রকৃত ও অপ্রকৃত ভগ্নাংশ

- লব f(x) এর ঘাত হর φ(x) এর ঘাত অপেক্ষা বেশী হলে $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যেমন: ৮/৫
- লব f(x) এর ঘাত হর φ(x) এর ঘাত অপেক্ষা কম হলে $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যেমন: $\frac{৫}{৮}$

অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর

লব f(x) এর ঘাত হর φ(x) এর ঘাত অপেক্ষ বেশী হলে $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে।

অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্তিকরণের পদ্ধতি

১. অপ্রকৃত ভগ্নাংশ ভাগের প্রক্রিয়ায় একটি পূর্ণ অংশ ও একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন:

অপ্রকৃত ভগ্নাংশ, $f(x) / \varphi(x) = (x^2 + 1)/(x - 1) = x + 1 + \frac{2}{x-1}$

২. যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের ঘাত সমান:

অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লব ও হরের ঘাত সমান হলে ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে ইহাকে $f(x)/\varphi(x) \equiv A + \Psi(x)/\varphi(x)$ আকারে লেখা যায়, যেখানে A একটি ধ্রুবক এবং Ψ (x) এর ঘাত φ(x) এর ঘাত অপেক্ষা কম অর্থাৎ Ψ(x)/ φ(x) একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

যেমন: $(2x^2 + 5x - 11)/(x^2 + 2x - 3) \equiv A + B/(x + 3) + C/(x - 1)$

৩. যখন অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবের ঘাত হরের মাত্রা অপেক্ষা এক বেশী:

এইরূপ ক্ষেত্রে ভগ্নাংশটিকে ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে f(x) / φ(x) Ξ Ax + B + Ψ(x)/φ(x) আকারে লেখা যায় যেখানে Ψ(x)/φ(x) একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং A ও B দুইটি ধ্রুবক।

যেমন: $x^4/(x^3+1) \equiv Ax + B + C/(x+1)+(Dx+E)/(x^2-x+1)$

অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ

সমস্যা- ১: $\frac{x^3}{x^2-9}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।

সমাধানের পদ্ধতি:

$\frac{x^3}{x^2-9}$ কে ভেঙ্গে পেতে পারি,

$x+\frac{9x}{x^2-9}$

এখন x^2-9 এর উৎপাদক বের করি।

$x^2-9=(x-3)\ (x+3)$

$$\therefore \frac{x^3}{x^2-9}=x+\frac{9x}{x^2-9}=x+\frac{9x}{(x+3)(x-3)} \text{ .... (১)}$$

মনে করি,

$$\frac{9x}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3} \text{ .... (২)}$$

$$\therefore 9x \equiv \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3} \text{ .... (৩)}$$

যেহেতু ইহা একটি অভেদ, সুতরাং ইহা x এর সকল মানের জন্যই সত্য। x-এর যে সকল মানের জন্য হরের প্রত্যেকটি উৎপাদক শূণ্য ক্রমাগতভাবে x-এর ঐ মানগুলো ব্যবহার করা হল।

(৩) এ $x = 3$ বসালে $27 = 6A \therefore A = \frac{9}{2}$

(৪) এ $x =-3$ বসালে $B = \frac{9}{2}$

$\therefore$ (২) নং হতে

$$\frac{9x}{(x-3)(x+3)} = \frac{9}{2}\left\{\frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(x+3)}\right\}$$

এখন (১) নং হতে পাই,

$$\frac{x^3}{x^2-9} = x + \frac{9}{2}\left\{\frac{1}{(x-3)} + \frac{1}{(x+3)}\right\}$$

সমস্যা- ২। $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ **কে আাংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।**

সমাধানঃ ধরি, $\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে (x-1)(x-2) দ্বারা গুণ করলে পাই,

$5x-7 \equiv A(x-2) + B(x-1)$ (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। এখন (2) এর উভয় পক্ষে x=1 বসিয়ে পাই,

$5-7=A(1-2)+B(1-1)$ বা, $-2=-A$ $\therefore A=2$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে x=2 বসিয়ে পাই,

$10-7=A(2-2)+B(2-1)$ ev, $3=B$ $\therefore B=3$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$$

এতেই প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আাংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত হল।

সমস্যা- ৩ঃ $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)}$ কে আাংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ ধরি, $\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে (-2)(x+3) দ্বারা গুণ করলে পাই,

$x+8 \equiv A(x+3) + B(x-2)$ (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। এখন (2) এর উভয় পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$10=5A+0$ বা, $A = 2$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x =-3$ বসিয়ে পাই,

$5 = 0 +B(-5)$ বা, $B =-1$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} \equiv \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+3}$$

এতেই প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত হল।

সমস্যা- ৪: $\frac{12x+11}{x^2+x-6}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান: $x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6 = (x-2)(x+3)$

$\frac{12x+11}{x^2+x-6} = \frac{12x+11}{(x-2)(x+3)}$ ধরি, $\frac{12x+11}{(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করলে পাই,

$12x+11 \equiv A(x+3) + B(x-2)$ .... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। এখন (2) এর উভয় পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$24+11=5A+0$ বা, $35=5A \therefore A=7$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x =-3$ বসিয়ে পাই,

$-36+11=0 +B(-5)$ বা, $B = 5$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{12x+11}{(x-2)(x+3)} = \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+3} \text{ বা, } \frac{12x+11}{x^2+x-6} = \frac{7}{x-2} + \frac{5}{x+3}$$

এতেই প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত হল।

মূল্যায়ন

১। $\frac{x^4}{x^4 - 1}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তরিত করুন।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৪**

বৃত্ত সম্পর্কিত সমস্যা (১)

ভূমিকা

অতি প্রাচীনকাল থেকেই নানারকম গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য বৃত্ত সম্পর্কিত ধারণা ও উপপাদ্য ব্যবহার করা হচ্ছে। গণিতের অন্যতম মৌলিক ধারণা হিসেবে গণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে বৃত্ত সম্পর্কিত ধারণা ব্যবহার করা হচ্ছে। বৃত্তের পরিধি, ক্ষেত্রফল, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, জ্যা, বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতা ইত্যাদি নানা বিষয় মানুষের গাণিতিক ধারণাকে সমৃদ্ধ করছে। তাই শিক্ষার্থীদের বৃত্তের মৌলিক বিষয়সমূহ জানা একান্ত প্রয়োজন। আর এ লক্ষ্যেই বর্তমান অধিবেশনে বৃত্ত সম্পর্কিত সমস্যাসমূহ সমাধানের কৌশল বর্ণনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- বৃত্ত ও সমবৃত্ত ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ ও জ্যা চিত্রসহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতা বিষয়ক দুইটি সূত্রের বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহের উপর উপকরণ তৈরি করতে পারবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহের শ্রেণীকক্ষে পাঠদান সম্পর্কে ধারণা ব্যক্ত করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- কঃ বৃত্ত, সমবৃত্ত, কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ ও জ্যা চিত্রসহ ব্যাখ্যাকরণ

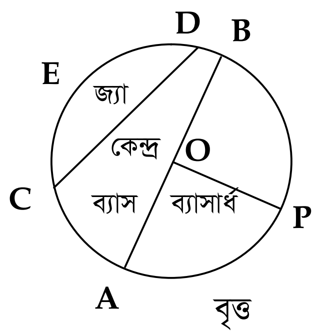
বৃত্তঃ

সংজ্ঞা (সেট): কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সেটকে বৃত্ত বলে।

সংজ্ঞা (জ্যামিতিক): একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সংযোগ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে বৃত্ত বলে।

সমবৃত্তঃ সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায়। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয়।

প্রদত্ত চিত্র অনুযায়ী বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ ও জ্যা ব্যাখ্যা করুনঃ



পর্ব- খঃ বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতা বিষয়ক দুইটি সূত্রের বর্ণনা

বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতার সূত্র দুইটি হলঃ

(ক) কোন বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু ও বহিঃস্থ একটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটিকে একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(খ) যদি কোন বৃত্তের একটি বিন্দু অপর একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে থাকে এবং প্রথমোক্ত বৃত্তের অপর একটি বিন্দু শেষোক্ত বৃত্তের বহির্ভাগে থাকে, তবে বৃত্তদ্বয়ের দুইটি ও কেবল দুইটি ছেদ বিন্দু থাকে।

পর্ব- গঃ বৃত্ত সম্পর্কীয় উপপাদ্য এর অনুশীলনীর সমস্যাসমূহের উপকরণ তৈরী ও শ্রেণীকক্ষে পাঠদান।

“দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এমন সব বৃত্তের কেন্দ্রগুলো এক সরলরেখায় অবস্থিত”

সমস্যাটি শ্রেণীকক্ষে পাঠদানের জন্য উপকরণের প্রয়োজন হবে পোস্টার, ককশীট এবং সরুকাঠি।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, আসুন এখন আমরা উপরোক্ত সমস্যাটির শ্রেণীকক্ষে পাঠ উপস্থাপন ও মূল্যায়ন (উপকরণ ব্যবহার করে) নিম্নের ছকে লেখার চেষ্টা করি।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৪**

মূল শিখনীয় বিষয়

বৃত্ত সম্পর্কিত সমস্যা (১)

বৃত্ত

সংজ্ঞা (সেট): কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সেটকে বৃত্ত বলে।

সংজ্ঞা (জ্যামিতিক): একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সংযোগ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রকে বৃত্ত বলে।

জ্যা: কোন সরল রেখা যদি একটি বৃত্তকে দুইটি অংশে বিভক্ত করে তবে ঐ সরল রেখার বৃত্তস্থিত অংশকে জ্যা বলে।

কেন্দ্র: যে বিন্দু থেকে বৃত্তের পরিধিস্থ সকল বিন্দুর দূরত্ব সমান তাকে ঐ বৃত্তের কেন্দ্র বলে।

ব্যাস: কোন বৃত্তের সর্ববৃহৎ জ্যাকে ব্যাস বলে।

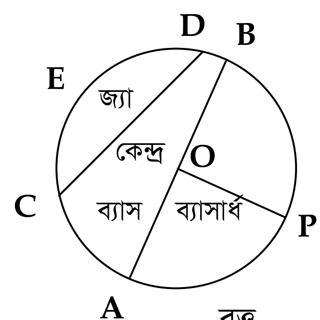
ব্যাসার্ধ: পরিধি থেকে কেন্দ্রের দূরত্বকে ব্যাসার্ধ বলে।

পরিধি: বৃত্তের পরিসীমার দৈর্ঘ্যকে পরিধি বলে।

বৃত্তচাপ: কোন বৃত্তের খন্ডিত পরিধিকে বৃত্তচাপ বলে।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল: πr^2 বর্গ একক।

মাত্রা: বৃত্ত দ্বিমাত্রিক



বৃত্ত

সমবৃত্ত: সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায়। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয়।

বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতার সূত্র

বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতার সূত্র দুইটি। এগুলো হল:

(ক) কোন বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু ও বহিঃস্থ একটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটিকে একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(খ) যদি কোন বৃত্তের একটি বিন্দু অপর একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে থাকে এবং প্রথমোক্ত বৃত্তের অপর একটি বিন্দু শেষোক্ত বৃত্তের বহির্ভাগে থাকে, তবে বৃত্তদ্বয়ের দুইটি ও কেবল দুইটি ছেদ বিন্দু থাকে।

মূল্যায়ন:

১. বৃত্তের কেন্দ্র কাকে বলে?

২. সংজ্ঞা দিন- জ্যা, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, সমবৃত্ত ইত্যাদি।

৩. বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতা বিষয়ক সূত্র দুইটি কী কী?

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৫**

বৃত্ত সম্পর্কিত সমস্যা- ২

ভূমিকা

গণিতের অন্যতম মৌলিক ধারণা হচ্ছে বৃত্ত সম্পর্কীয় ধারণা। কেবলমাত্র বৃত্তের বিভিন্ন অংশ সম্পর্কে যথেষ্ট ধারণা থাকাই যথেষ্ট নয়। বরং বৃত্ত সম্পর্কীয় বিভিন্ন উপপাদ্য এবং তার মাধ্যমে প্রাপ্ত সূত্রসমূহ প্রয়োগ করে গণিতের নানারকম সমস্যার সমাধান করা সম্ভব। সে জন্য প্রয়োজন বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য এর বিভিন্ন সমস্যা ও তার যৌক্তিক প্রয়োগ সম্পর্কে সার্বিক জ্ঞান ও দক্ষতা। গণিতের প্রায় সকল শাখায়ই বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য এর ধারণাসমূহ প্রয়োগ করা হয়। বাংলাদেশের শিক্ষকদের গাণিতিক ধারণাকে আরও স্বচ্ছ করতে বর্তমান অধিবেশনে তাই বৃত্ত সম্পর্কিত উপপাদ্য-এর বিভিন্ন সমস্যা ও যৌক্তিক প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা করা হলো:

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- বৃত্তচাপ, অর্ধবৃত্ত, উপচাপ ও অধিচাপ-এর চিত্রসহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্তস্থ কোণ ও কেন্দ্রস্থ কোণ সম্পর্কিত বিভিন্ন তথ্যাবলী পুন:পর্যালোচনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহের সমাধান তৈরী করতে পারবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহের উপর পাঠদান সম্পর্কে ধারণা ব্যক্ত করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- কঃ বৃত্তচাপ, অর্ধবৃত্ত, উপচাপ ও অধিচাপ

বৃত্তচাপ, অর্ধচাপ, উপচাপ ও অধিচাপ এর অঙ্কন প্রক্রিয়া নিম্নে আলোচনা করা হলোঃ

বৃত্তচাপ

১. একটি ককশীটে O বিন্দু চিহ্নিত করুন।

২. O-কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকুন।

৩. বৃত্তের কেন্দ্র বরাবর পরিধিস্থ দুটি বিন্দু A, B চিহ্নিত করুন।

৪. A, B যোগ করুন।

৫. AB রেখাংশ বৃত্তের ব্যাস।

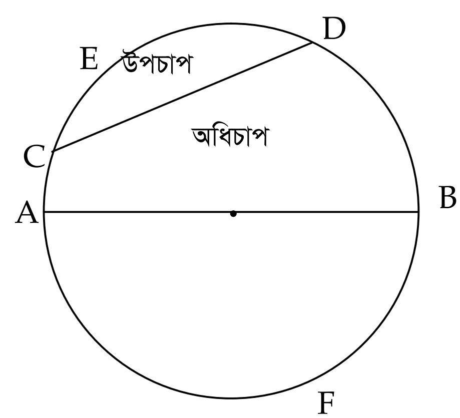
৬. বৃত্তের পরিধিতে একটি বিন্দু C চিহ্নিত করুন।

৭. AB ব্যাস বরাবর কেটে ফেলুন।

৮. তাহলে ACB বৃত্তটির একটি চাপ।

৯. বাকী অংশটি বৃত্তের আরেকটি চাপ।

অর্ধবৃত্ত



১. একটি ককশীটে O বিন্দু চিহ্নিত করুন।

২. O-কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকুন।

৩. বৃত্তের কেন্দ্র বরাবর পরিধিস্থ দুটি বিন্দু A, B চিহ্নিত করুন।

৪. A, B যোগ করুন।

৫. AB রেখাংশ বৃত্তের ব্যাস।

৬. বৃত্তের পরিধিতে একটি বিন্দু C চিহ্নিত করুন।

৭. AB ব্যাস বরাবর কেটে ফেলুন।

৮. তাহলে ACB বৃত্তটির একটি চাপ।

৯. এই ACB কে অর্ধবৃত্ত বলা হয়।

উপচাপ

১. একটি ককশীটে O বিন্দু চিহ্নিত করুন।

২. O-কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকুন।

৩. বৃত্তের কেন্দ্র বরাবর পরিধিস্থ দুটি বিন্দু A, B চিহ্নিত করুন।

৪. A, B যোগ করুন।

৫. AB রেখাংশ বৃত্তের ব্যাস।

৬. বৃত্তের পরিধিস্থ দুইটি বিন্দু C, D চিহ্নিত করুন।

৭. C, D যোগ করুন।

৮. বৃত্তের কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে E বিন্দু চিহ্নিত করুন।

৯. CD রেখাংশ বরাবর বৃত্তটিকে কেটে ফেলুন।

১০. তাহলে CDE একটি উপচাপ।

অধিচাপ

১. একটি ককশীটে O বিন্দু চিহ্নিত করুন।

২. O-কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকুন।

৩. বৃত্তের কেন্দ্র বরাবর পরিধিস্থ দুটি বন্দু A, B চিহ্নিত করুন।

৪. A, B যোগ করুন।

৫. AB রেখাংশ বৃত্তের ব্যাস।

৬. বৃত্তের পরিধিস্থ দুইটি বিন্দু C, D চিহ্নিত করুন।

৭. C, D যোগ করুন।

৮. বৃত্তের কেন্দ্র AB এর একই পার্শ্বে F চিহ্নিত করুন।

৯. CD রেখাংশ বরাবর বৃত্তটিকে কেটে ফেলুন।

১০. CDF একটি অধিচাপ।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, উপরোক্ত আলোচনা থেকে বৃত্তচাপ, অর্ধবৃত্ত, উপচাপ ও অধিচাপ সংজ্ঞায়িত করার চেষ্টা করি।

পর্ব- খঃ বৃত্তস্থ কোণ ও কেন্দ্রস্থ কোণ

কেন্দ্রস্থ কোণ

১. ককশীটে O বিন্দু চিহ্নিত করুন।

২. O-কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকুন।

৩. বৃত্তের পরিধিস্থ A, B বিন্দু চিহ্নিত করুন।

৪. O, A এবং O, B যোগ করুন।

৫. $\angle$OAB বরাবর ককশীটটি কেটে নিন।

৬. $\angle$OAB-ই বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ।

বৃত্তস্থ কোণ

১. ককশীটে O বিন্দু চিহ্নিত করুন।

২. O-কে কেন্দ্র করে একটি বৃত্ত আঁকুন।

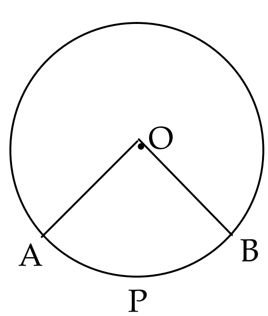
৩. বৃত্তের পরিধি বরাবর কেন্দ্রের একপাশে A বিন্দু চিহ্নিত করুন।

৪. কেন্দ্রের অপর পাশে B, C দুটি বিন্দু চিহ্নিত করি।

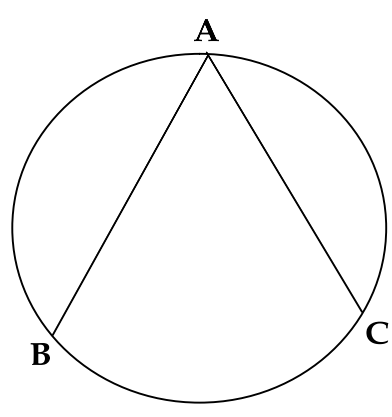
৫. A, B এবং A, C যোগ করুন।

৬. $\angle$BAC বরাবর কেটে নিন।

৭. $\angle$BAC-ই বৃত্তের বৃত্তস্থ কোণ।



কেন্দ্রস্থ কোণ

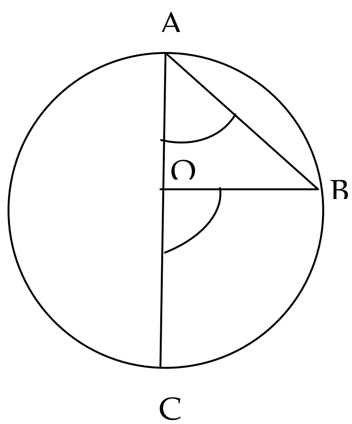


বৃত্তস্থ কোণ

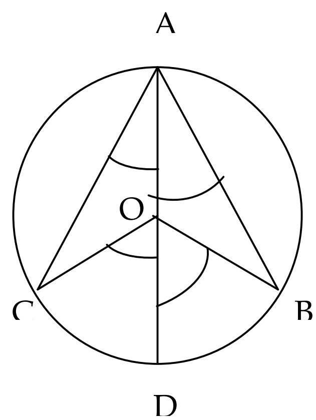
শিক্ষার্থী বন্ধুরা, উপরোক্ত আলোচনা থেকে বৃত্তস্থ কোণ ও কেন্দ্রস্থ কোণকে সংজ্ঞায়িত করার চেষ্টা করি।

পর্ব- গঃ বৃত্ত সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহের পাঠদান

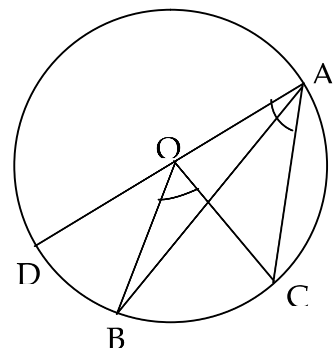
“বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক” উপপাদ্যটির চিত্র নিম্নানুসারে অঙ্কন করা যেতে পারে-



চিত্র-১



চিত্র-২



চিত্র-৩

এখন আমরা উপরোক্ত সমস্যাটির পাঠদান কৌশল ও সমাধান নিম্নের ছকে লেখার চেষ্টা করি। পরে মুল শিখনীয় বিষয় থেকে জেনে নেই।

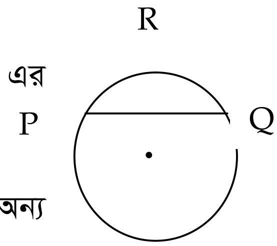
ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৫**

মূল শিখনীয় বিষয়

বৃত্ত সম্পর্কিত সমস্যা (২)

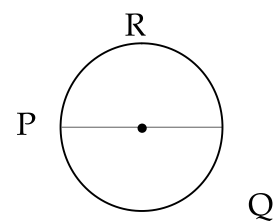
বৃত্তচাপ, উপচাপ, অর্ধবৃত্ত ও অধিচাপঃ

কোন বৃত্তে P ও Q দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হলে P, Q এবং PQ এর একই পার্শ্বে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির এ চাপ বলা হয়। P ও Q এই চাপের প্রান্তবিন্দু এবং চাপের অন্য সকল বিন্দু তার অন্তঃস্থ বিন্দু। চাপটির অন্তঃস্থ বিন্দু R হলে চাপটিকে PRQ চাপ বলা হয় এবং $\overrightarrow{PRQ}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এটাকে PQ চাপও বলা যেতে পারে।



চিত্র- ১

সুতরাং কোন বৃত্তের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের এক পাশে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলা হয়।

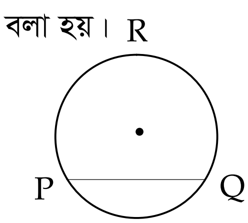


চিত্র- ২

চিত্র- ১ এ $\overrightarrow{PRQ}$ চাপের অন্তঃস্থ বিন্দুসমূহ PQ এর যে পাশে কেন্দ্র আছে তার বিপরীত পাশে অবস্থিত। সুতরাং $\overrightarrow{PRQ}$ চাপকে উপচাপ বলা হয়।

চিত্র- ২ এ PQ রেখাংশ কেন্দ্র দিয়ে যায়। সুতরাং $\overrightarrow{PRQ}$ চাপকে অর্ধবৃত্ত বলা হয়।

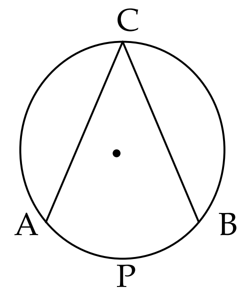
চিত্র- ৩ এ $\overrightarrow{PRQ}$ চাপের সকল বিন্দু এবং কেন্দ্র PQ এর একই পাশে অবস্থিত। সুতরাং $\overrightarrow{PRQ}$ চাপকে অধিচাপ বলা হয়।



চিত্র- ৩

বৃত্তস্থ কোণ

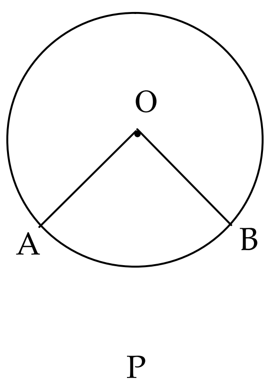
একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোণটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে একটি বৃত্তস্থ কোণ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোণ বলা হয়।



বৃত্তস্থ কোণ

কেন্দ্রস্থ কোণ

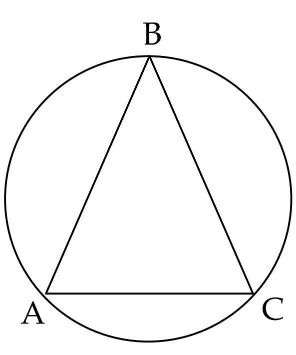
একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয় এবং কোণটি বৃত্তে যে চাপ খন্ডিত করে সেই চাপের উপর তা অবস্থিত বা দন্ডায়মান বলা হয়।



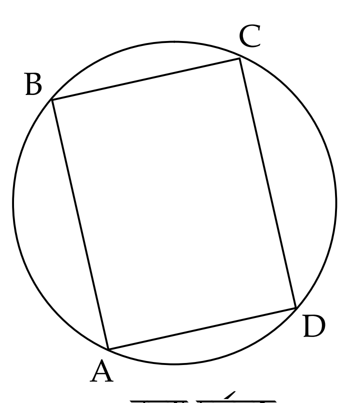
কেন্দ্রস্থ কোণ

বৃত্তস্থ বহুভুজ

কোন বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো একটি বৃত্তে অবস্থিত হলে বহুভুজটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়েছে বলা হয়। সে ক্ষেত্রে বৃত্তটিকে বহুভুজটির পরিবৃত্ত বলা হয় এবং বহুভুজটিকে ঐ বৃত্তে বৃত্তস্থ বহুভুজ বলে।

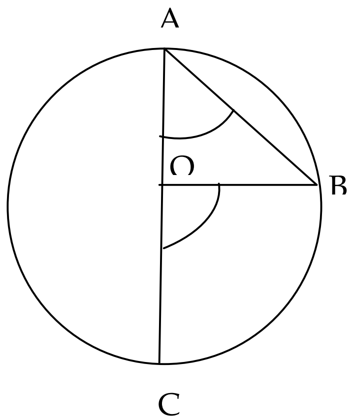


বৃত্তস্থ ত্রিভুজ

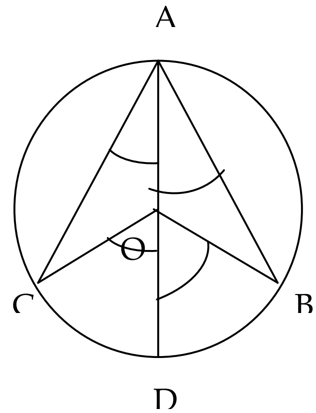


বৃত্তস্থ চর্তুভুজ

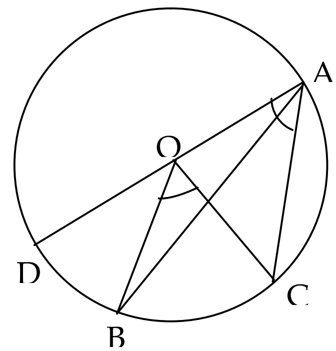
উপপাদ্য **বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।**



চিত্র- ১



চিত্র- ২



চিত্র- ৩

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং তার একই চাপ BC এর উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

প্রমাণঃ (১) প্রথমে মনে করি, AC রেখাংশ কেন্দ্র দিয়ে যায় (চিত্র– ১)

এ ক্ষেত্রে, ΔOAB এ

$OA = OB$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$

কিন্তু ΔAOB এর

বহিঃস্থ $\angle BOC = \angle OAB + \angle OBA = \angle OAB + \angle OAB = 2\angle OAB$

$\therefore \angle OAB = \frac{1}{2}\angle BOC$

অর্থাৎ $\boldsymbol{\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC}$

(২) এখন মনে করি, AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয় (চিত্র– ২ ও চিত্র– ৩)। এ ক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে ব্যাস AD আঁকি।

এখন, CD চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle CAD$ এর AD বাহু কেন্দ্রগামী।

সুতরাং (১) অনুযায়ী, $\angle CAD = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle COD$

আবার, BD চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAD$ এর AD বাহু কেন্দ্রগামী।
সুতরাং (১) অনুযায়ী

$\angle BAD = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$

এখন, চিত্র– ২ এ (যেখানে B ও C বিন্দু AD রেখাংশের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত)

$$\angle CAD + \angle BAD = \frac{1}{2}(\angle COD + \angle BOD)$$

বা, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

আবার, চিত্র- ৩ এ (যেখানে B ও C বিন্দু AD রেখাংশের একই পার্শ্বে অবস্থিত)

$$\angle CAD - \angle BAD = \frac{1}{2}(\angle COD - \angle BOD)$$

বা, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

$\therefore$ সকল ক্ষেত্রেই, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$ (প্রমাণিত)

মূল্যায়নঃ

১. বৃত্তচাপ কাকে বলে?

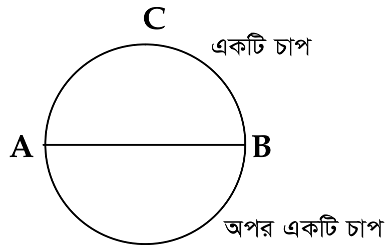
২. উপচাপ ও অধিচাপ এর চিত্রসহ সংজ্ঞা দিন।

৩. বৃত্তস্থ ও কেন্দ্রস্থ কোণ কাকে বলে?

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- কঃ

বৃত্তচাপঃ কোন বৃত্তে A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু হলে A, B এবং AB এর এক পার্শ্বে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলা হয়।

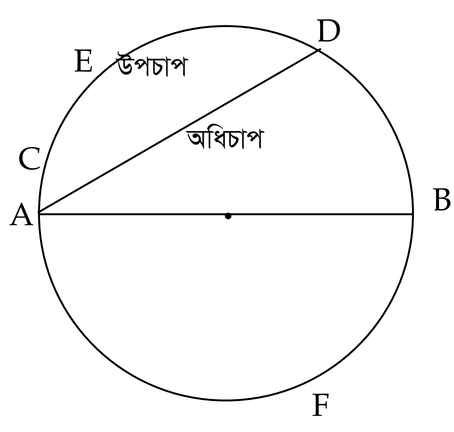


A ও B এই চাপের প্রান্ত বিন্দু এবং চাপের অন্য সকল বিন্দু তার অন্তঃস্থ বিন্দু। চাপের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু C নির্দিষ্ট করে চাপটিকে ACB চাপ বলে অভিহিত করা হয় এবং ACB প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্ধবৃত্তঃ কোন বৃত্তে ACB কে একটি অর্ধবৃত্ত বলা হয় যদি $\overline{AB}$ কেন্দ্র দিয়ে যায়।

উপচাপঃ উপচাপ বলা হয় যদি চাপটির অন্তঃস্থ বিন্দুসমূহ $\overline{AB}$ এর যে পার্শ্বে বৃত্তের কেন্দ্র অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে থাকে।

অধিচাপঃ অধিচাপ বলা হয় যদি চাপটির অন্তঃস্থ বিন্দুসমূহ ও বৃত্তের কেন্দ্র $\overline{AB}$ এর একই পার্শ্বে থাকে।



পর্ব- খ

বৃত্তস্থ কোণঃ একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোনটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে একটি বৃত্তস্থ কোণ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোণ বলা হয়।

কেন্দ্রস্থ কোণঃ একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয় এবং কোণটি বৃত্তে যে চাপ খন্ডিত করে সেই চাপের উপর তা অবস্থিত বা দন্ডায়মান বলা হয়।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৬**

বৃত্ত সম্পর্কিত সমস্যা (৩)

ভূমিকা

বৃত্তের কোন বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর অংকিত লম্ব কেন্দ্রগামী। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে এর কোন স্পর্শকের উপর অংকিত লম্ব স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায়। এ অধিবেশনে বৃত্তের ছেদক, স্পর্শক, সাধারণ স্পর্শক, স্পর্শ জ্যা, স্পর্শ রেখাংশ এবং বৃত্তের স্পর্শক সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহ আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

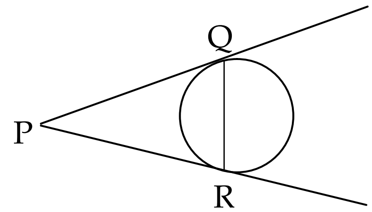
- ছেদক, স্পর্শক, সাধারণ স্পর্শক, স্পর্শ জ্যা এবং স্পর্শ রেখাংশ চিত্রসহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্তের স্পর্শক সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহের সমাধান তৈরি করতে পারবেন।
- বৃত্তের স্পর্শক সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহের শ্রেণীকক্ষে পাঠদান সম্পর্কে ধারণা ব্যক্ত করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: ছেদক, স্পর্শক, সাধারণ স্পর্শক, স্পর্শ জ্যা ও স্পর্শ রেখাংশ

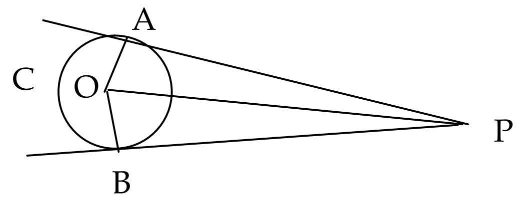
সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরল রেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয় এবং যদি একটি ও কেবল একটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়। আবার, একটি সরল রেখা যদি দুইটি বৃত্তের স্পর্শক হয় তবে তাকে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক বলা হয়।

আসুন এখন আমরা নিচের চিত্র থেকে স্পর্শ জ্যা এবং স্পর্শ রেখাংশ চিহ্নিত করে তার সংজ্ঞা তৈরি করার চেষ্টা করি।



পর্ব- খঃ বৃত্তের স্পর্শক সম্পর্কীয় বিভিন্ন সমস্যাসমূহের সমাধান ও শ্রেণীকক্ষে পাঠদান

‘‘বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান হবে” উপপাদ্যটির চিত্র নিম্নানুসারে অঙ্কন করা যেতে পারে-



এখন আমরা উপরোক্ত সমস্যাটির পাঠদান কৌশল ও সমাধান নিচের ছকে লেখার চেষ্টা করি। পরে মূল শিখনীয় বিষয় থেকে সমাধান জেনে নেই।

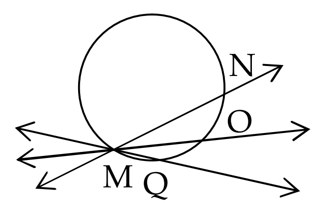
ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৬**

মূল শিখনীয় বিষয়

বৃত্ত সম্পর্কিত সমস্যা (৩)

ছেদক:

সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরল রেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয় এবং যদি একটি ও কেবল একটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়। সাধারণ বিন্দুটিকে স্পর্শকের স্পর্শ বিন্দু বলা হয়। চিত্রে $\overleftrightarrow{MN}$, $\overleftrightarrow{MO}$ বৃত্তটির ছেদক এবং $\overleftrightarrow{MQ}$ বৃত্তটির একটি স্পর্শক। M এই স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু।

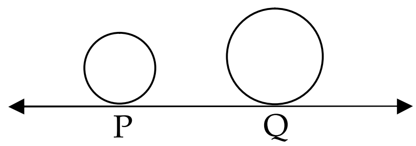


বৃত্তের স্পর্শক

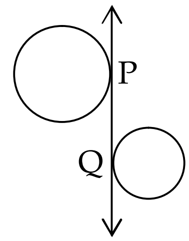
কোন রেখা কোন বৃত্তকে সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করলে সরলরেখাকে বৃত্তের স্পর্শক বলা হয়। সমাপতিত বিন্দুকে স্পর্শ বিন্দু বলা হয়। কোন বৃত্তের স্পর্শ বিন্দুগামী স্পর্শকের উপর লম্ব রেখাকে ঐ বিন্দুতে বৃত্তের অভিলম্ব বলা হয়।

সাধারণ স্পর্শক

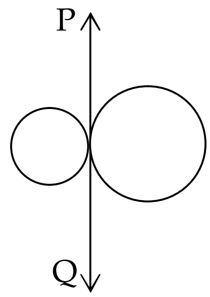
একটি সরলরেখা যদি দুইটি বৃত্তের স্পর্শক হয় তবে তাকে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক বলা হয়। চিত্রে PQ উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক।



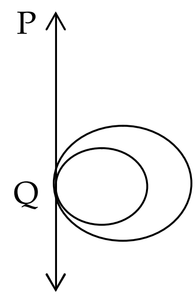
চিত্র-১



চিত্র-২



চিত্র-৪



চিত্র-৩

দুইটি বৃত্তের কোন সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি ভিন্ন হলে স্পর্শকটিকে-

(১) সরল সাধারণ স্পর্শক বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং
(২) তীর্যক সাধারণ স্পর্শক বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে।
চিত্র ১ এবং চিত্র ৩ সরল সাধারণ স্পর্শক। চিত্র ২ এবং চিত্র ৪ তীর্যক সাধারণ স্পর্শক।

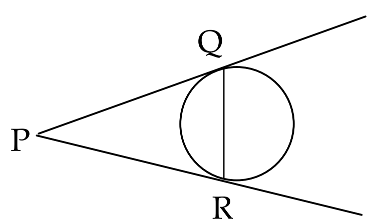
স্পর্শ জ্যা

কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হতে বৃত্তে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শকের স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটিতে ঐ বিন্দুর স্পর্শ জ্যা বলা হয়। চিত্রে QR, P বিন্দুর স্পর্শ জ্যা।

স্পর্শ রেখাংশ

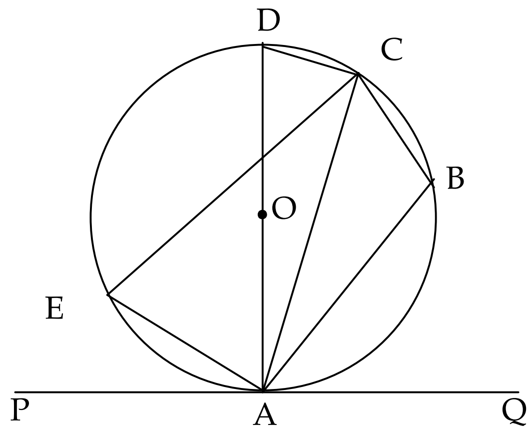
কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু এবং ঐ বিন্দু দিয়ে যায় এমন স্পর্শকের স্পর্শ বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে ঐ বৃত্তে অংকিত একটি স্পর্শ রেখাংশ বলা হয়।

চিত্রে PQ এবং PR রেখাংশ P বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ রেখাংশ।



উপপাদ্য

বৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং ঐ বিন্দুগামী যে কোন জ্যা এর অন্তর্গত কোণ তার একান্তর বৃত্তাংশস্থ যে কোন কোণের সমান।



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের উপরস্থ A বিন্দুতে PAQ একটি স্পর্শক এবং ঐ বিন্দুগামী AC একটি জ্যা। মনে করি, AC জ্যা বৃত্তটিকে ABC এবং AEC চাপে বিভক্ত করেছে যেখানে B বিন্দু Q এর দিকে এবং E বিন্দু P এর দিকে আছে। তাহলে $\angle AEC$, $\angle QAC$ এর একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ এবং $\angle ABC$, $\angle PAC$ এর একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle QAC=$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle AEC$

এবং $\angle PAC=$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle ABC$।

অঙ্কন: A বিন্দুগামী ব্যাস AD আঁকি এবং D, C যোগ করি।

প্রমাণ: যেহেতু A স্পর্শ বিন্দুতে PAQ স্পর্শক এবং AD ব্যাস।

অতএব, $\angle DAQ =$ এক সমকোণ

এবং $\angle ACD =$ এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\angle DAC+\angle ADC =$ এক সমকোণ

এবং $\angle DAC+\angle QAC = \angle DAQ =$ এক সমকোণ

অতএব, $\angle DAC+\angle ADC = \angle DAC+\angle QAC$

$\therefore \angle ADC = \angle QAC.$

কিন্তু $\angle ADC = \angle AEC$ [যেহেতু একই চাপ এর উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore \angle QAC = \angle AEC.$

যেহেতু ABCE চতুর্ভূজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত,

$\therefore \angle ABC + \angle AEC =$ দুই সমকোণ

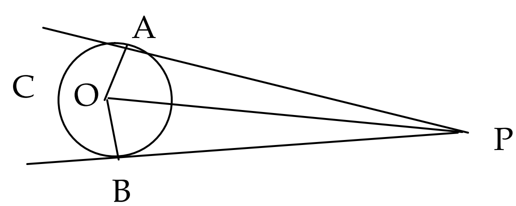
আবার, $\angle PAC + \angle QAC =$ দুই সমকোণ। [রৈখিক যুগল কোণ]

অতএব, $\angle PAC + \angle QAC = \angle ABC + \angle AEC$

$\therefore \angle PAC = \angle ABC$ [যেহেতু $\angle QAC = \angle AEC$] (প্রমাণিত)

উপপাদ্য

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান হবে।



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে P একটি বিন্দু। PA ও PB রেখাদ্বয় বৃত্তের দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে, PA= PB.

অঙ্কন: O, A; O, B এবং O, P যোগ করুন।

প্রমাণ: $\angle OAP = \angle OBP =$ এক সমকোণ

এখন, ΔPAO ও ΔPBO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

OA বাহু = OB বাহু [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং অতিভুজ PO সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$

সুতরাং PA = PB (প্রমাণিত)

মূল্যায়নঃ

১.চিত্রসহ ব্যাখ্যা করুনঃ ছেদক, স্পর্শক, সাধারণ স্পর্শক, স্পর্শ জ্যা ও স্পর্শ রেখাংশ।

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- ক

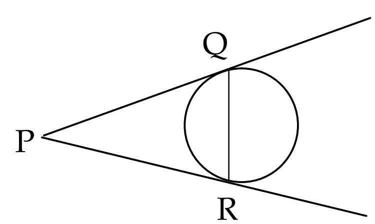
স্পর্শ জ্যা

কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হতে বৃত্তে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শকের স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটিতে ঐ বিন্দুর স্পর্শ জ্যা বলা হয়। চিত্রে QR, P বিন্দুর স্পর্শ জ্যা।

স্পর্শ রেখাংশ

কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু এবং ঐ বিন্দু দিয়ে যায় এমন স্পর্শকের স্পর্শ বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে ঐ বৃত্তে অংকিত একটি স্পর্শ রেখাংশ বলা হয়।

চিত্রে PQ এবং PR রেখাংশ P বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ রেখাংশ।



ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৭**

ভেক্টর (১)

ভূমিকা

এতদিন মাধ্যমিক শ্রেণীতে গণিতে বীজগণিত, পাটিগণিত, জ্যামিতি, ত্রিকোণমিতি ইত্যাদি শেখানো হয়েছে। বর্তমানে গণিতের নতুন সিলেবাসে 'ভেক্টর' শাখাটি যুক্ত করা হয়েছে। বিজ্ঞানের বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধানে বিশেষ করে গণিত শাস্ত্রের অনেক সমস্যা সমাধানে ভেক্টরের প্রয়োগ খুবই অপরিহার্য বিধায় স্কুল হতেই ভেক্টর শিক্ষাদানের একটি বিশেষ পদক্ষেপ নেয়া হয়েছে। এ পদক্ষেপটি গণিত শিক্ষাব্যবস্থার একটি মহতী উদ্যোগ বলা চলে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- রাশি কি তা বলতে পারবেন।
- রাশির শ্রেণীবিভাগ করতে পারবেন।
- ভেক্টর রাশি, স্কেলার রাশি ও ধারক রেখা কি তা বলতে পারবেন।
- বিভিন্ন প্রকার ভেক্টরের ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ বিধি বলতে পারবেন।
- ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ বিধি প্রমাণ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

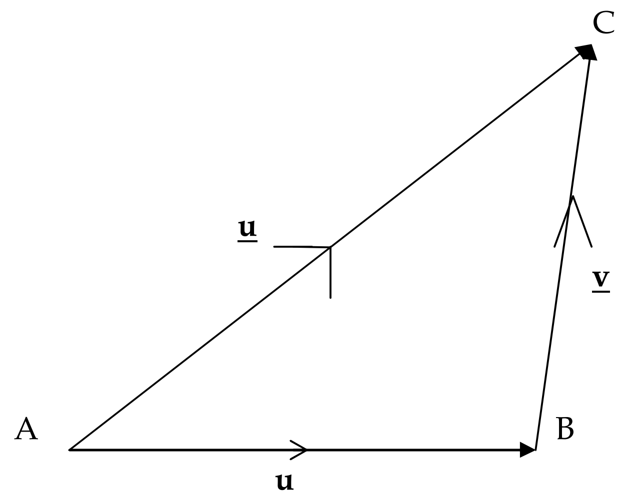
পর্ব- ক: রাশি ও ভেক্টরের বর্ণনা এবং তাদের শ্রেণীবিভাগ রাশি দুই প্রকার। যথা: (১) স্কেলার রাশি ও (২) ভেক্টর রাশি

নিচের রাশিগুলো স্কেলার না ভেক্টর তা চিহ্নিত করে নির্দিষ্ট ঘরে বসান।

বেগ, ত্বরণ, আয়তন, ভর, ওজন, দ্রুতি, বল, তাপমাত্রা, কাজ, সময়।

স্কেলার রাশি	ভেক্টর রাশি
দৈর্ঘ	সরণ

পর্ব- খ: ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ বিধি



উপরের ত্রিভুজ থেকে ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগবিধি কি হতে পারে? চিন্তা করুন এবং তা লিখতে চেষ্টা করুন।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৭**

মূল শিখনীয় বিষয়

ভেক্টর (১)

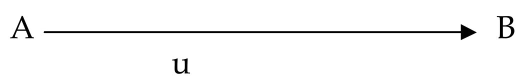
রাশি: ভৌত জগতের যা কিছু পরিমাপ করা যায়, তা সংখ্যার মধ্যমে প্রকাশ করলে রাশি পাওয়া যায়। যেমন: দূরত্ব পরিমাপ, বেগ, পরিমাপ ইত্যাদি।

রাশি ২ প্রকার। যথা- ১। স্কেলার রাশি, ২। ভেক্টর রাশি

স্কেলার রাশি: যে সকল রাশির শুধু মান আছে তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে। যেমন: দূরত্ব, ভর ইত্যাদি।

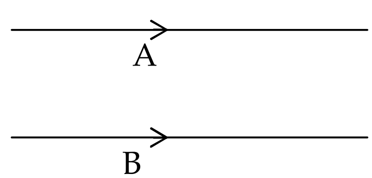
ভেক্টর রাশি: যে সকল রাশির মান ও দিক উভয়ই বিদ্যমান তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে। যেমন: বল, ওজন ইত্যাদি।

ধারক রেখা: কোন ভেক্টরের দিক নির্দেশক রেখাংশ যে অসীম সরলরেখার অংশ বিশেষ, তাকে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখা বা ধারক বলা হয়।



ভেক্টরের দৈর্ঘ্য: কোন ভেক্টরের যতটুকু দৈর্ঘ্য দ্বারা সূচিত হয় ততটুকু দৈর্ঘ্যের পরিমাপকে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য বলে। যেমন: AB ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $|\underline{AB}|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

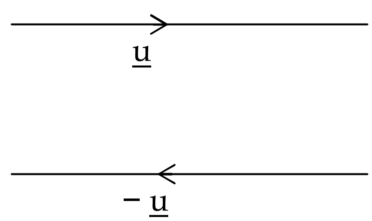
উদাহরণ:



সমান ভেক্টর: যদি দুইটি ভেক্টরের মান সমান, ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল এবং ভেক্টর দুইটির দিক একই অভিমুখী হয় তবে ভেক্টরদ্বয়কে সমান ভেক্টর বলা হয়। যেমন: দুইটি ভেক্টর $|\underline{A}| = |\underline{B}|$

বিপরীত ভেক্টর: যদি দুইটি ভেক্টরের মান সমান, ধারকরেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল এবং ভেক্টর দুইটির দিক বিপরীত মুখী হয় তবে ভেক্টর দুইটির একটিকে অপরটির বিপরীত ভেক্টর বলা হয়। যেমন: $\underline{U} = -\underline{U}$

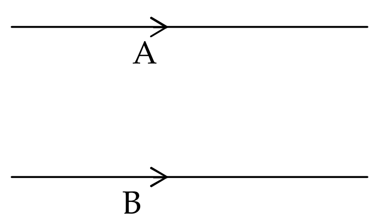
উদাহরণ:



শূন্য ভেক্টর: যে ভেক্টরের পরমমান শূন্য এবং যার দিক দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায় না তাকে শূন্য ভেক্টর বলা হয় তা $\underline{0}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত হয়।

সদৃশ ভেক্টর: দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্ড়্রাল হলে এবং দিক একই হলে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলা হয়।

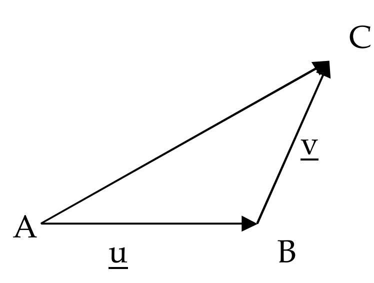
উদাহরণ:



একক ভেক্টর: যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য এক একক তাকে একক ভেক্টর বলে।

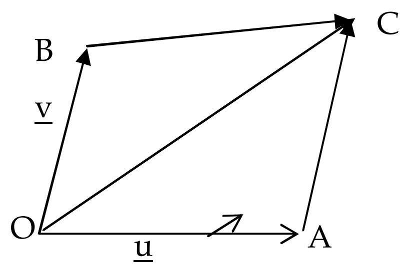
ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ বিধি

কোন ত্রিভুজের সন্নিহিত দুটি বাহু একই ক্রমে দুটি একই জাতীয় ভেক্টরকে নির্দেশ করে, তাহলে ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটি বিপরীতক্রমে ভেক্টরের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে। কোন $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্ত বিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বোঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।



$\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু $\underline{A}$ হতে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ সূচিত হলে $\underline{u}$ এর আদি বিন্দু এবং $\underline{v}$ এর প্রান্ত বিন্দু সংযোগ সরলরেখা $\underline{OC}$, $(\underline{u} + \underline{v})$ কে উক্ত ভেক্টরদ্বয়ের লব্ধি ভেক্টর বলে। $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরোক্ত যোজন পদ্ধতিকে ত্রিভুজ বিধি বলা হয়।

ভেক্টরের সামান্তরিক বিধি



মনে করি $\underline{OA} = \underline{u}$ এবং $\underline{OB} = \underline{v}$, OACB সামান্তরিক ও তার $\underline{OC}$ কর্ণ অংকন করি। ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\underline{OA} + \underline{AC} = \underline{OC}$

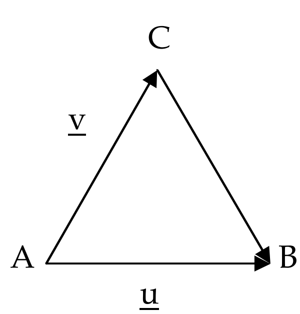
বা, $\underline{OA} + \underline{OB} = \underline{OC}$ $[\because \overline{AC} = \overline{OB} = \underline{v}]$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \underline{OC}$

যদি কোন সামান্তরিকের একই বিন্দু থেকে অঙ্কিত দুটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা কোন কোণের উপর এককালিন ক্রিয়াশীল একই জাতীয় দুটি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করা হয়, তাহলে ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টর দুটির মিলিত ফলের বা লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

ভেক্টরের বিয়োগ বিধি

ভেক্টর বিয়োগের ক্ষেত্রে যে ভেক্টরকে বিয়োগ করতে হবে তার ঋণাত্মক ভেক্টরকে অপর ভেক্টরের সাথে যোগ করলেই বিয়োগ ফল পওয়া যায়।



$\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টর দ্বয়ের বিয়োগফল $\underline{u} - \underline{v}$ বলতে $\underline{u}$ এবং $(- \underline{v})$ ($\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর) ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল $\underline{u} + (- \underline{v})$ বোঝায়।

$\underline{u} = \underline{AB}$, $\underline{v} = \underline{AC}$ হলে $\underline{u} - \underline{v} = \underline{CB}$

অর্থাৎ $\underline{AB} - \underline{AC} = \underline{CB}$

ভেক্টর রাশি ও স্কেলার রাশির পার্থক্যঃ

ভেক্টর রাশি	স্কেলার রাশি
১. যে সকল রাশিকে প্রকাশের জন্য মান ও দিক উভয় প্রয়োজন হয় তাহাই ভেক্টর রাশি।	১. যে সকল রাশিকে শুধু মান দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় তাই স্কেলার রাশি।
২. শুধু মান বা শুধু দিক বা উভয়ের পরিবর্তন হলে ভেক্টর রাশির পরিবর্তন হয়।	২. শুধু মান পরিবর্তন হলে স্কেলার রাশি পরিবর্তন হয়।
৩. ভেক্টর রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ ইত্যাদি সাধারণ গণিতের নিয়মে হয়না, ভেক্টরের নিয়মানুসারে হয়।	৩. স্কেলার রাশির যোগ, বিয়োগ, গুণ ইত্যাদি সাধারণ গণিতের নিয়মে হয়।
৪. দুটি ভেক্টর রাাশির গুণফল স্কেলার রাশি অথবা ভেক্টর রাশি হতে পারে।	৪. দুটি স্কেলার রাশির গুণফল সর্বদা একটি স্কেলার রাশি।

মূল্যায়নঃ

১। নিম্নের রাশিগুলো থেকে ভেক্টর রাশি ও স্কেলার রাশি আলাদা করুন।

(ক) দৈর্ঘ্য, (খ) ত্বরণ, (গ) আয়তন, (ঘ) ভর, (ঙ) দ্রুতি, (চ) তাপমাত্রা, (ছ) সরণ, (জ) কাজ, (ঝ) বেগ, (ঞ) সময় , (ট) ওজন, (ঠ) বল।

২। নিম্নের ভেক্টরগুলো চিত্রসহ ব্যাখ্যা করুন।

(ক) সমান ভেক্টর, (খ) বিপরীত ভেক্টর, (গ) শূন্য ভেক্টর, (ঘ) একক ভেক্টর, (ঙ) সদৃশ ভেক্টর।

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- ক ও পর্ব- খ

মূল শিখনীয় বিষয় থেকে জেনে নিন।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৮**

ভেক্টর (২)

ভূমিকা

বর্তমান যুগে 'ভেক্টর'-এর জ্ঞান অর্জন ও এর প্রয়োগ গণিতশাস্ত্রে একটি অতীব গুরুত্বপূর্ণ শাখা হিসেবে বিবেচিত। গণিতবিদ, পদার্থবিদ, প্রকৌশলী ও বিভিন্ন শাখার বিজ্ঞানীগণ তাদের গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য 'ভেক্টর' ব্যবহার করে থাকেন। বিশেষ করে ফলিত বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে, জ্যামিতিক ধ্যান ধারণা ব্যাখ্যায়, বলবিদ্যার ক্ষেত্রে ভেক্টরের প্রয়োগ অপরিসীম। সংক্ষিপ্তভাবে বলা যায়, ফিজিক্যাল সায়েন্স-এর অনেক গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য 'ভেক্টর' একটি সহজ ভাষা ও পদ্ধতি হিসেবে ব্যবহার করা হয়ে থাকে।

উদ্দেশ্য

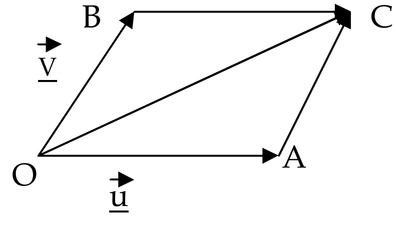
এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- ভেক্টরের বিধি ও ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ভেক্টরের বিধি ও ধর্ম প্রয়োগ করতে পারবেন।
- ভেক্টরের সাহায্যে জ্যামিতির প্রমাণ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: ভেক্টরের বিধি ও ধর্ম ব্যাখ্যাকরণ ও তার প্রয়োগ

আগের অধিবেশনে ভেক্টর সম্পর্কে জেনেছেন। এখন ভেক্টর সম্পর্কিত কিছু বিধি লিখতে চেষ্টা করুন।



উপরের চিত্র থেকে ভেক্টরের যোগের বিধিটি লিখুন এবং তার প্রমাণ দিতে চেষ্টা করুন।

পর্ব- খ: ভেক্টরের সাহায্যে জ্যামিতির প্রমাণ

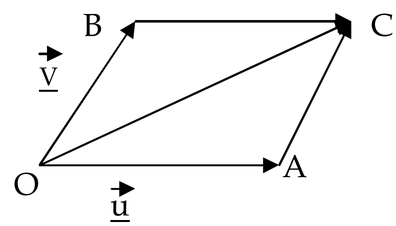
পূর্বে জ্যামিতিক রাশির সাহায্যে জ্যামিতির প্রমাণ করেছেন। এখন ভেক্টর রাশির সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে। চিন্তা করুন মূল পার্থক্য কোথায় এবং ভেক্টরের সাহায্যে জ্যামিতির প্রমাণ করতে গেলে কি ধরনের উপকরণ প্রয়োজন তার একটি তালিকা প্রস্তুত করুন।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৮**

মূল শিখনীয় বিষয়

ভেক্টর (২)

যোগের বিনিময় সূত্রঃ



যে কোন $\underline{u}$, $\underline{v}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ ।

প্রমাণঃ

মনে করি $\underline{OA} = \underline{u}$ এবং $\underline{OB} = \underline{v}$, OACB সামান্তরিক ও তার $\underline{OC}$ কর্ণ অঙ্কন করি।

$\underline{OA}$ ও $\underline{BC}$ সমান ও সমান্তরাল এবং $\underline{OB}$ ও $\underline{AC}$ সমান ও সমান্তরাল।

অতএব $\underline{OC} = \underline{OA} + \underline{AC} = \underline{u} + \underline{v}$

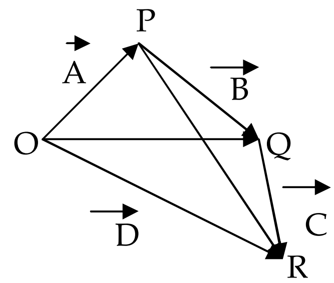
আবার $\underline{OC} = \underline{OB} + \underline{BC} = \underline{v} + \underline{u}$

$\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

প্রমাণিত।

যোগের সংযোগ সূত্রঃ

$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$



প্রমাণঃ

মনে করি $\underline{OP} = \underline{A}$, $\underline{PQ} = \underline{B}$ এবং $\underline{QR} = \underline{C}$

এখন OQ, PR এবং OR যোগ করে ত্রিভুজ সূত্রানুসারে পাই।

$\underline{OP} + \underline{PQ} = \underline{OQ} =(\underline{A} + \underline{B})$

এবং $\underline{PQ} + \underline{QR} = (\underline{B} + \underline{C})$

এখন $\underline{OQ} + \underline{QR} = \underline{OR}$

$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{D}$ .... (১)

আবার, O$\underline{P}$ + $\underline{PR} = \underline{OR}$

$\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{D}$ .... (২)

(১) ও (২) নং হতে পাই

$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$

প্রমাণিত।

বন্টনসূত্রঃ

m, n দুটি স্কেলার এবং $\underline{U}$, $\underline{V}$ দুটি ভেক্টর হলে,

(১) $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

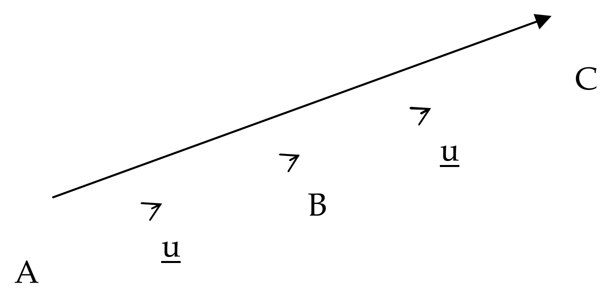
(২) $m(\underline{u} +\underline{v})= m\underline{u} + m\underline{v}$

প্রমাণ:

(১) m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।

মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\vec{AB} = m\underline{u}$

$\therefore \left|\vec{AB}\right| = m|\underline{u}|$



AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $\left|\vec{BC}\right| = n|\underline{u}|$ হয়।

$\vec{BC} = n\underline{u}$ এবং

$\left|\vec{AC}\right| = \left|\vec{AB}\right| + \left|\vec{BC}\right| = m\left|\underline{u}\right| + n|\underline{u}| = (m+n)|\underline{u}|$

$\left|\vec{AC}\right| = (m+n)\underline{u}$

কিন্তু $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$\therefore \; m\underline{u} + n\underline{u} = (m+n)\underline{u}$

m, n উভয়ে ঋণাত্মক হলে (m+n)$\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে

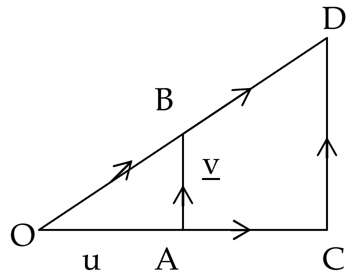
$(m+n)|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত দিক, তখন

m$\underline{u}$ + n$\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m||\underline{u}| + |n||\underline{u}| = (|m| + |n|)|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক। যেহেতু m<0 এবং n<0 হলে

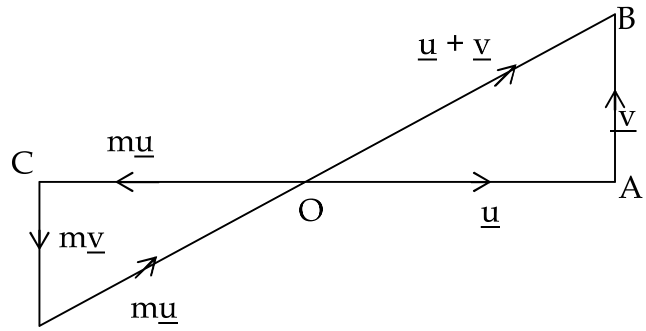
$|m| + |n| = |m+n|$ হয়, সেহেতু এ ক্ষেত্রেও

(m+n)$\underline{u}$ =m$\underline{u}$+n$\underline{u}$

(২)



চিত্র- ১



চিত্র- ২

মনে করি, $\vec{OA} = \underline{u}$, $\vec{AB} = \underline{v}$

তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = m.OA হয়। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল CD রেখা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

যেহেতু $\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$

$\therefore \overrightarrow{CD} = m\,\overrightarrow{AB} = m\underline{v}$

চিত্র- ১ এ m ধনাত্মক, চিত্র- ২ এ m ঋণাত্মক।

$\therefore$ OC = m. OA, CD = m. AB, OD=m. OB

এক্ষণে $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

বা, $m(\overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{OB})$

$\therefore$ m$\underline{u}$ + m$\underline{v}$ = m ($\underline{u}$ + $\underline{v}$) (প্রমাণিত)

বর্জন বিধিঃ

যে কোন $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে, $\underline{v} = \underline{w}$ হবে।

প্রমাণঃ

$\because \underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

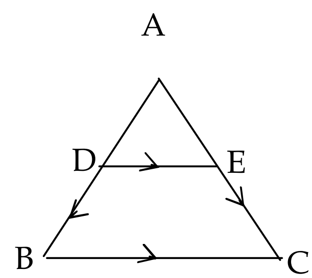
$\therefore \underline{u} + \underline{v} + (-\underline{u}) = \underline{u} + \underline{w} + (-\underline{u})$ (উভয়পক্ষে $-\underline{u}$ যোগ করে)

বা, $\underline{u} - \underline{u} + \underline{v} = \underline{u} - \underline{u} + \underline{w}$

বা, $\underline{v} = \underline{w}$

ভেক্টর বিধির সাহায্যে প্রমাণ করুন, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক

মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, DE ∥ BC এবং DE = ½ BC



প্রমাণঃ ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\vec{AE} - \vec{AD} = \vec{DE}$ ………………(1)

এবং $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$

কিন্তু $\vec{AC} = 2\,\vec{AE}, \vec{AB} = 2\,\vec{AD}$ [$\because$ D, E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ থেকে পাই

$2\vec{AE} - 2\vec{AD} = \vec{BC}$ অর্থাৎ $2(\vec{AE} - \vec{AD}) = \vec{BC}$

$\therefore 2\,\vec{DE} = \vec{BC}$ [(1) হতে]

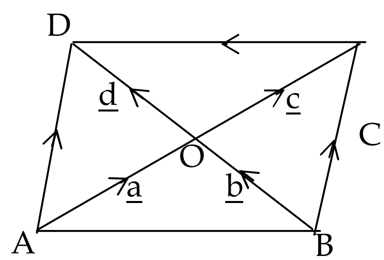
সুতরাং $\left|\vec{DE}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{BC}\right|$ বা $DE = \frac{1}{2}\vec{BC}$ এবং $\vec{DE}$ ও $\vec{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\vec{DE}$ ও $\vec{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

ভেক্টর বিধির সাহায্যে প্রমাণ করুন, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করেঃ

মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

মনে করি, $\vec{AO} = \underline{a}, \vec{BO} = \underline{b}, \vec{OC} = \underline{c}, \vec{OD} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|, |\underline{b}| = |\underline{d}|$



প্রমাণঃ $\vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AD}$ এবং $\vec{BO} + \vec{OC} = \vec{BC}$

যেহেতু সামান্তরিকের বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল, $\therefore \vec{AD} = \vec{BC}$

অর্থাৎ $\vec{AO} + \vec{OD} = \vec{BO} + \vec{OC}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

অর্থাৎ $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$ [উভয়পক্ষে $-\underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

$\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC. $\therefore$ $\underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC.

$\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD. $\therefore$ $\underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD.

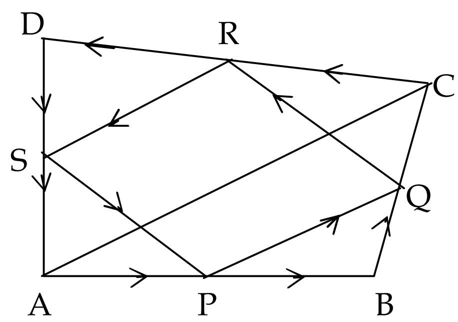
$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে কিন্তু AC ও BD দুইটি পৃথক অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ $\underline{a} - \underline{c} = 0$ বা $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$ বা $\underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

$\therefore$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে। (প্রমাণিত)

ভেক্টর বিধির সাহায্যে প্রমাণ করুন, কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে



মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S এবং S ও P যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামন্তরিক।

প্রমাণঃ মনে করি, $\vec{AB} = \underline{a}, \vec{BC} = \underline{b}, \vec{CD} = \underline{c}, \vec{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\vec{PQ} = \vec{PB} + \vec{BQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\vec{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}), \vec{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\vec{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AC} - \vec{AC} = \underline{0}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{b} = -(\underline{c} + \underline{d})$

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\vec{RS} = \vec{SR}$$

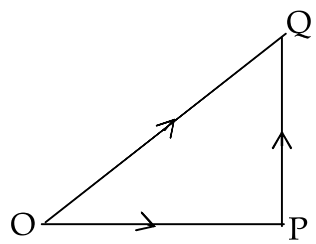
$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS একটি সামন্তরিক। (প্রমাণিত)

$\underline{A}$, $\underline{B}$ দুটি ভেক্টর হলে

$|\underline{A} + \underline{B}| \leq |\underline{A}| + |\underline{B}|$:



প্রমাণঃ

মনে করি OPQ ত্রিভুজের $\underline{OP} = \underline{A}$, $\underline{PQ} = \underline{B}$ তবে $\underline{OQ} = \underline{A} + \underline{B}$,

$|\underline{A} + \underline{B}| = |\underline{OQ}|$

আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোন দুই বাহুর যোগফল অপর বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব, $OQ < OP + PQ$

$\Rightarrow |\underline{A} + \underline{B}| < |\underline{A}| + |\underline{B}|$ .... (১)

যখন ঙ,চ এবং ছ বিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থান করে তখন

$|\underline{A} + \underline{B}| = |\underline{A}| + |\underline{B}|$ .... (২)

১ ও ২ নং হতে পাই

$|\underline{A} + \underline{B}| \leq |\underline{A}| + |\underline{B}|$ (প্রমাণিত)

মূল্যায়নঃ

১। m, n দুটি স্কেলার এবং u, v দুটি ভেক্টর হলে প্রমাণ করুন:

(i) $(m+n)v = mv + nv$

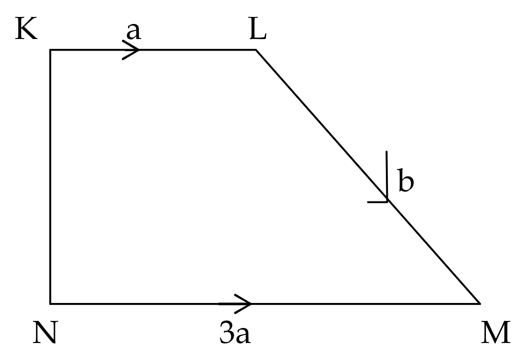
(ii) $m(u + v) = mu + mv$

২। বর্জন বিধি প্রমাণ করুন।

৩। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

৪। A + B দু'টি ভেক্টর হলে দেখান যে, $\underline{A} + \underline{B}| \leq |\underline{A}| + |\underline{B}|$

৫।



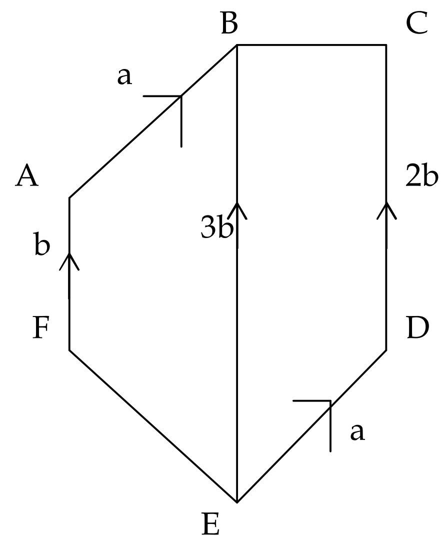
(a) $\vec{MK} = ?$

(b) $\vec{NK} = ?$

(c) $\vec{NL} = ?$

(d) $\vec{KN} = ?$

৬।



(a) $\vec{FE} = ?$

(b) $\vec{BC} = ?$

(c) $\vec{FC} = ?$

(d) $\vec{DA} = ?$

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- ক ও পর্ব- খঃ

মূল শিখনীয় বিষয় থেকে জেনে নিন।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৯**

ত্রিকোণমিতি (১)

ভূমিকা

গণিতের একটি ধারা বা বিভাগ হল ত্রিকোণমিতি। অনেক ক্ষেত্রেই দূরত্ব বা উচ্চতা সোজাসুজি পরিমাপ করার উপায় ছিল না। ত্রিভুজের বিভিন্ন অংশ নির্ণয়ের মাধ্যমেই শুরু হয় এরূপ দূরত্ব বা উচ্চতাকে সূক্ষ্ম ও সঠিকভাবে পরিমাপের। এভাবেই উদ্ভব হয় ত্রিকোণমিতি বা Trigonometry। গণিতের ইতিহাস পর্যালোচনা করলে দেখা যায় ত্রিকোণমিতির উদ্ভবকাল খৃষ্টপূর্ব দ্বিতীয় শতাব্দীর মাঝামাঝি। গ্রীক শব্দ Tri (ত্রি) Gonia (কোণ) Metron (পরিমাপ) অর্থাৎ বুৎপত্তিগতভাবে ত্রিকোণমিতি হল তিন কোণ বা ত্রিভুজের পরিমাপ।

উদ্দেশ্য

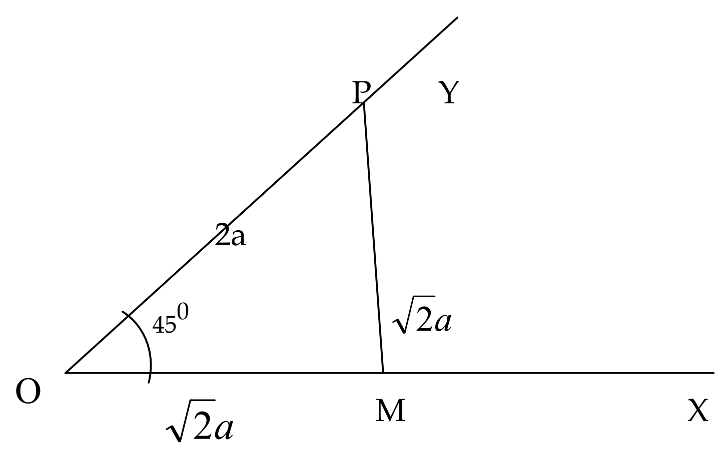
এই অধিবেশন শেষে আপনি–

- $30^0, 45^0, 60^0$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন।
- 0^0 ও 90^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন।
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ছক আকারে সাজাতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- কঃ 30^0, 45^0 এবং 60^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়

অনুপাত শব্দের অর্থ নিশ্চয়ই জানেন। ত্রিকোণমিতিক অনুপাত কি হতে পারে চিন্তা করুন।



উপরের চিত্রের ক্ষেত্রে একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নিচে দেখানো হলো। বাকী অনুপাতগুলি নিজে নিজে করতে চেষ্টা করুন।

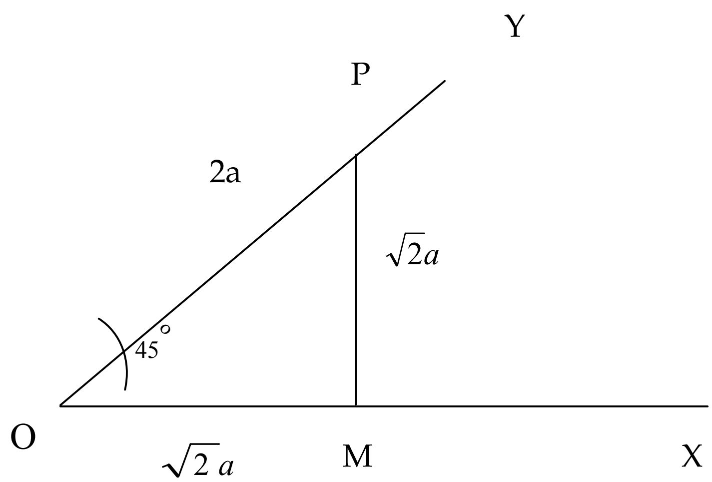
$$Sin45^{\circ} = \frac{PM}{OP} = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ঠিক একইভাবে 0°, 30^{0}, 60^{0} এবং 90^{0} কোণের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করবেন। প্রথমে নিজে নিজে চেষ্টা করবেন। পরে মূল শিখনীয় বিষয় থেকে জেনে নিন।

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৫৯**

মূল শিখনীয় বিষয়
ত্রিকোণমিতি (১)

45^0 কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাত:



মনেকরি, $\angle XOY = 45^0$ এবং P, OY এর উপরস্থ একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি। ΔOPM সমকোণী ত্রিভুজ $\angle POM = 45^0$। সুতরাং $\angle OPM = 45^0$। অতএব PM = OM

এখন, ΔOPM এ, $OM^2 + PM^2 = OP^2$

২. $OM^2 = OP^2$ [যেহেতু PM = OM]

বা, $OM^2 = \frac{1}{2} . OP^2$

বা, $OM = \frac{1}{\sqrt{2}} OP$

যদি OP = 2a হয়, তবে $PM = OM = \frac{1}{\sqrt{2}} . 2a = \sqrt{2}\ a$

$\text{Sin } 45^0 = \frac{OM}{OP} == \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Cos } 45^0 = \frac{OM}{OP} == \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

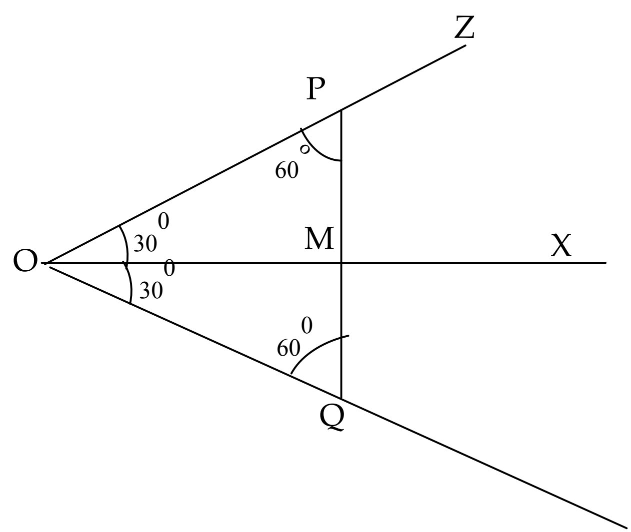
$$\tan 45^0 = \frac{PM}{OP} == \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = 1$$

$$\cot 45^0 = \frac{\text{OM}}{\text{PM}} = \frac{\sqrt{2}\text{a}}{\sqrt{2}\text{a}} = 1$$

$$\text{See } 45^0 = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{2}$$

$$\text{Cosec } 45^0 = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{2}$$

30^0 কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাত:



মনে করি, $\angle XOZ=30^0$ এবং OZ বাহুতে P একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি এবং PM কে **Q** পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন MQ = PM হয়। O, Q যোগ করি। এখন ΔPOM ও ΔQOM এর মধ্যে PM = MQ, OM সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle PMO$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle QMO$

$\therefore \Delta POM \cong \Delta QOM$

অতএব, $\angle QOM = \angle POM = 30^0$ এবং $\angle OQM = \angle OPM = 60^0$

Δ OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ

যদি OP = 2a হয়, তবে OQ = 2a

PM = a এবং OM = $\sqrt{(OP^2 - PM^2)} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}\,a$

Sin $30^0 = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

Cos $30^0 = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

tan $30^0 = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

cot $30^0 = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$

sec $30^0 = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

cosec $30^0 = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2$

60^0 কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাতঃ

Sin $60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Cos $60^0 = \frac{1}{2}$

tan $60^0 = \sqrt{3}$

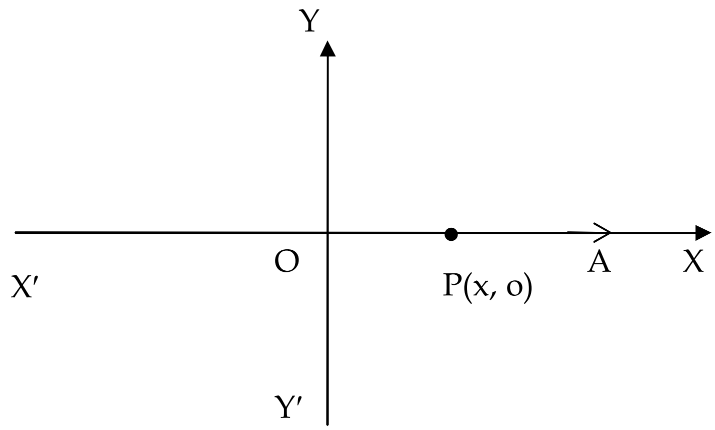
Cot $60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Sec $60^0 = 2$

cosec $30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

0^0 ও 90^0 কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাত:

0^0 কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাত:



0^0 কোণের আদি বাহু OX ও প্রান্তিক রেখা OA অভিন্ন। এক্ষেত্রে P বিন্দু XOX′ অক্ষে মূলবিন্দুর ডান পার্শ্বে অবস্থিত। ফলে OA বাহুর যে কোন P বিন্দুর স্থানাংক (x, 0) এবং r = OP = x।

সুতরাং

$\text{Sin } 0^0 = \frac{0}{r} = 0$

$\text{Cos } 0^0 = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$

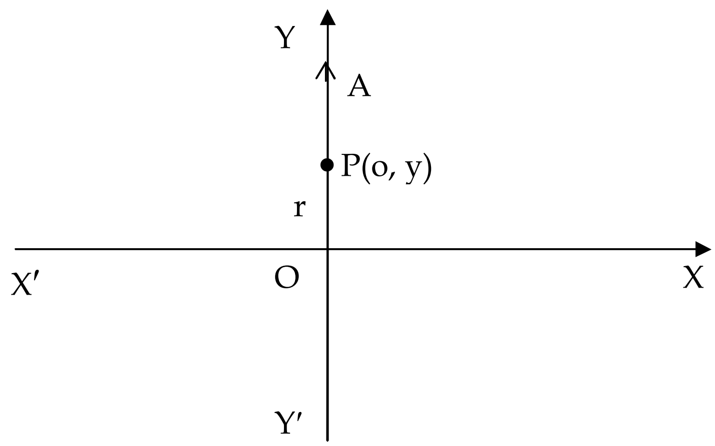
$\tan 0^0 = \frac{0}{r} = 0$

$\cot 0^0 = \frac{x}{0}$, যা সংজ্ঞায়িত নয়

$\sec 0^0 = \frac{r}{x} = \frac{r}{r} = 1$

$\text{cosec } 0^0 = \frac{r}{0}$, যা সংজ্ঞায়িত নয়

90^0 কোণের ত্রিকোণমিতির অনুপাত:



90^0 কোণের প্রান্তিক রেখা OA এর অবস্থান ধনাত্মক y অক্ষ OY এর উপর অবস্থিত হবে। ফলে OA বাহুর যে কোন P বিন্দুর স্থানাংক (o, y) এবং r = OP = y।

সুতরাং

$\text{Sin } 90^0 = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$

$\text{Cos } 90^0 = \frac{0}{r} = 0$

$\tan 90^0 = \frac{y}{0}$, যা সংজ্ঞায়িত নয়

$\cot 90^0 = \frac{0}{y} = 0$

$\sec 90^0 = \frac{r}{0}$, যা সংজ্ঞায়িত নয়

$\text{cosec } 90^0 = \frac{r}{y} = \frac{y}{y} = 1$

মূল্যায়নঃ

১. 30^0, 45^0 ও 60^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করুন।

২. 0^0 ও 90^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করুন।

সম্ভাব্য উত্তরঃ

ত্রিকোণমিতি অনুপাতের মান ছক আকারে নিম্নরূপঃ

কোণ অনুপাত	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosin	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
Cotangent	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
Secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
Cosecant	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৬০**

ত্রিকোণমিতি (২)

ভূমিকা

মানুষের জ্ঞানের চাহিদা ও অজানাকে জানার অদম্য কৌতুহল থেকে জ্যামিতিক জ্ঞানের বিকাশের ফলে সৃষ্টি হয় ত্রিকোণমিতি। পাটিগণিতের ধারণাকে সর্বায়ন করে যেমন বীজগণিতের সৃষ্টি হয়েছে। তেমনি জ্যামিতির ধারণাকে সর্বায়ন করে ত্রিকোণমিতি সৃষ্টি করা হয়েছে। ত্রিকোণমিতি বলতে আমরা সেই বিজ্ঞানকেই বুঝি যার সাহায্যে ত্রিভুজের বিভিন্ন অংশের পরিমাপ নির্ণয় করা যায়। প্রাথমিক পর্যায়ে ত্রিকোণমিতি আবিষ্কারের মূল উদ্দেশ্য এর মধ্যেই সীমাবদ্ধ ছিল। কিন্তু সময়ের প্রেক্ষিতে নতুন নতুন অনুপাত ও তত্ত্ব আবিষ্কারের ফলে এ বিজ্ঞানের পরিধি ব্যাপকতর হয়েছে। এই অধিবেশনে ত্রিকোণমিতিক কোণ, কোণ পরিমাপের একক, সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও এর পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

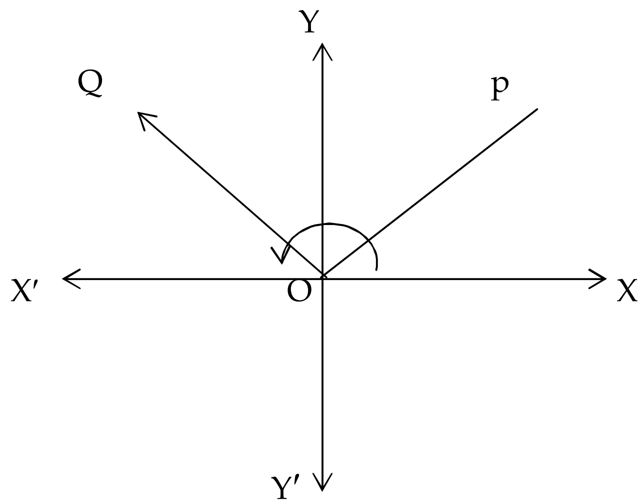
উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক কোণ ও জ্যামিতিক কোণ কী তা বলতে পারবেন।
- কোণ পরিমাপের এককগুলো বর্ণনা করতে পারবেন।
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।
- রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ তা প্রমাণ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: ত্রিকোণমিতিক কোণ এবং কোণ পরিমাপের একক



ত্রিকোণমিতিতে কোণের সংজ্ঞা জ্যামিতিক কোণের সংজ্ঞা থেকে ভিন্নতর। জ্যামিতির সংজ্ঞানুসারে-একটি কোণের উৎপত্তি হয় দুটি পরস্পর ছেদী সরলরেখা দ্বারা। জ্যামিতিতে কোণের পরিমাপ শূন্য ডিগ্রী থেকে ৩৬০ ডিগ্রীর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে। কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে কোণের ধারণা হল যে, এর উৎপত্তি হয় একটি সরলরেখার ঘূর্ণনের ফলে। এ ক্ষেত্রে কোণের পরিমাপ 0^0 থেকে 360^0 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে না।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, আসুন এবার মনে মনে চিন্তা করে নিজের ভাষায় নিচের ছকে জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণ এর সংজ্ঞা তৈরি করি-

জ্যামিতিক কোণ:

ত্রিকোণমিতিক কোণ:

ত্রিকোণমিতিতে কোণ পরিমাপের জন্য সাধারণত তিন প্রকারের পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এগুলো হল-

- ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal System)
- শতমূলক পদ্ধতি (Centestimal System)
- বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

ষাটমূলক পদ্ধতি:

ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। এক সমকোণকে ৯০ ভাগে বিভক্ত করলে প্রতি অংশের পরিমাপ এক ডিগ্রী হয়। এক ডিগ্রীকে সমান ৬০ ভাগ করলে প্রতিভাগকে এক মিনিট এবং এক মিনিটকে সমান ৬০ ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক সেকেন্ড বলা যায়।

৬০$''$ (সেকেন্ড) = ১$'$ (মিনিট)

৬০$'$ (মিনিট) = ১$^\circ$ (ডিগ্রী)

৯০$^\circ$ (ডিগ্রী) = ১ সমকোণ

শতমূলক পদ্ধতি:

এ পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান ১০০ ভাগে ভাগ করলে প্রতি অংশকে বলা হয় এক গ্রেড (1^g)। এক গ্রেডকে সমান ১০০ ভাগে ভাগ করলে প্রতি অংশকে বলা হয় এক শতমূলক মিনিট এবং প্রতি মিনিটকে ১০০ ভাগে ভাগ করলে প্রতি অংশকে বলা হয় এক শতমূলক সেকেন্ড। অর্থাৎ, ১ সমকোণ = ১০০ গ্রেড (100^g)

১ গ্রেড = ১০০ শতমূলক মিনিট ($100'$)

১ শতমূলক মিনিট = ১০০ শতমূলক সেকেন্ড ($100''$)

এ পদ্ধতিকে ফরাসি পদ্ধতি বলা হয়।

বৃত্তীয় পদ্ধতিঃ

বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ানকে কোণ পরিমাপের একক ধরা যায়।

কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে, তাকেই এক রেডিয়ান (১^c) বলা হয়।

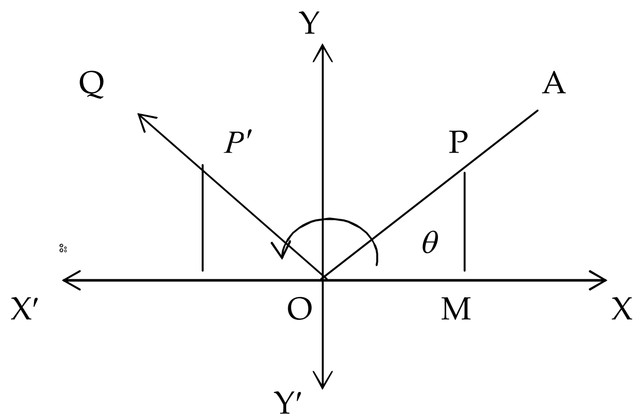
শিক্ষার্থীবৃন্দ এবার আসুন নিচের ছকে কোণের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি-

ষাটমূলক ও শতমূলক এককের মধ্যে সম্পর্ক:

পর্ব- খ: সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

ত্রিকোণমিতিতে একটি সরলরেখার ঘূর্ণনের ফলে কোণের উৎপত্তি হয়। এই ঘূর্ণায়মান সরলরেখার আদি অবস্থান ও শেষ অবস্থানকে দুটি ভিন্ন রেখা ধরতে হয়। নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে ঘূর্ণায়মান রেখা যে অবস্থানে দাঁড়ায় তার উপরের যে কোন বিন্দু হতে আদি অবস্থানের উপর লম্ব অঙ্কন করলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যায়। এই ত্রিভুজের বাহু তিনটির পরিমানকে পরস্পর ভাগ করলে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায়। এই অনুপাতগুলোকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলে।

কাজেই ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলতে সাধারণত একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যে থেকে যে কোন দুটি বাহু নিয়ে গঠিত অনুপাতকে বুঝায়। এই অনুপাত সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ব্যতীত অপর যে কোন একটি কোণের প্রেক্ষিতে গঠিত হয়।

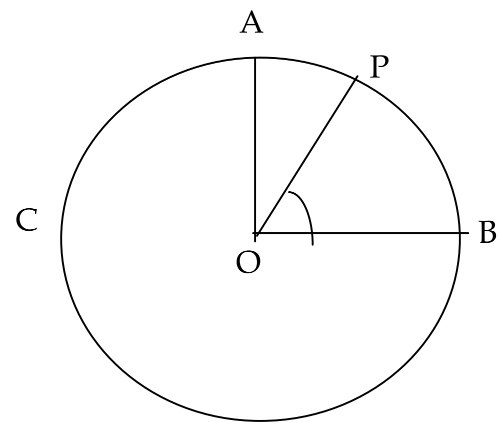


মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যে কোন একটি বিন্দু P নেই। P থেকে OX বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। তাতে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হল। এই ΔPOM এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায় তাদের $\angle XOA$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয় এবং তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সুনির্দিষ্ট নামে নামকরণ করা হয়।

এবার আসুন শিক্ষার্থীবৃন্দ, নিচের ছকটি বাম পাশের সাথে ডান পাশের মিল করি-

১। সমকোণ	A) 1
২। ত্রিকোণমিতিক এককগুলো	B) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$
৩। 1 সমকোণ	C) 60″ (সেকেন্ড)
৪। 1^0 (ডিগ্রী)	D) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$
৫। ১´ (মিনিট)	E) ষাট মূলক এবং বৃত্তীয় একক
৬। tan ø	F) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$
৭। Sin ø	G) ৬০° (মিনিট)
৮। Cos ø	H) ৯০° (ডিগ্রী)
৯। Cot^2 ø	I) $Cosec^2$- 1
১০। Sin^2 ø +Cos^2 ø	J) একটি সরলরেখা আর একটি সরলরেখার উপর দন্ডায়মান হলে উৎপন্ন সন্নিহিত কোণ দুইটি যদি সমান হয় তবে তাদের প্রত্যেকটি
১১। Sec^2 ø	K) $1+tan^2θ$

পর্ব- গ: রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ



মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তে $\angle POB$ একটি রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POB$ একটি ধ্রুব কোণ। OB রেখাংশের উপর O বিন্দুতে OA লম্ব আঁকি। OA পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, চাপ AB = পরিধির এক-চতুর্থাংশ

$$= \frac{1}{4} \times 2\pi r \quad (\therefore \text{পরিধি} = 2\pi r)$$

$$= \frac{\pi r}{2}$$

এবং চাপ PB = r (ব্যাসার্ধ)

আমরা জানি,

বৃত্তের কোন চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তের বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক হয়।

সুতরাং $\frac{\angle POB}{\text{চাপ PB}} = \frac{\angle AOB}{\text{চাপ } AB}$

অতএব, $\angle POB = \dfrac{\text{চাপ PB}}{\text{চাপ AB}} \times \angle AOB$

$= \dfrac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times 1$ সমকোণ

$= \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ

যেহেতু π এবং সমকোণ উভয়ই ধ্রুবক সেহেতু রেডিয়ান কোণ ∠POB একটি ধ্রুবক কোণ।

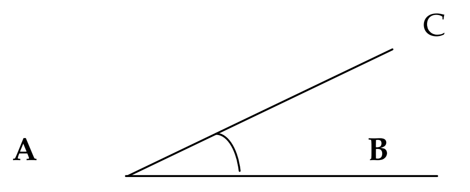
শিক্ষার্থীবন্ধুরা, নিচের ছকটিতে ডিগ্রী ও রেডিয়ানের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করি-

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৬০**

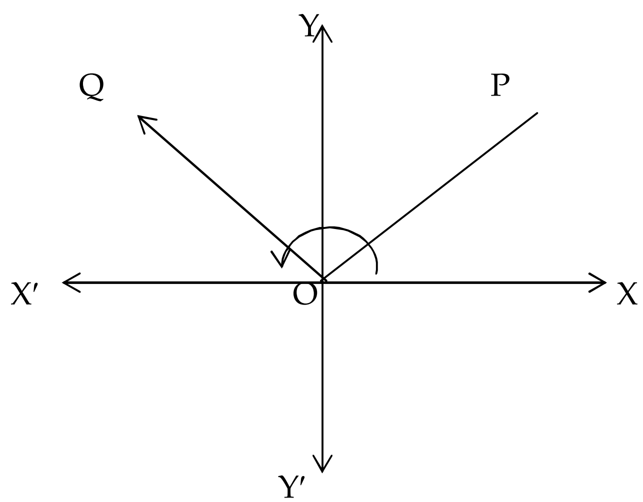
মূল শিখনীয় বিষয়

ত্রিকোণমিতি (২)

জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণ



জ্যামিতিতে দুইটি সরল রেখা এক অপরকে ছেদ করলে কোণ উৎপন্ন হয়। জ্যামিতিক কোণের পরিমাপ 0° থেকে 360° এর মধ্যে সীমিত। কোণের মান অনুযায়ী কোণগুলোকে সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ, সরল ও প্রবৃদ্ধ কোণ বলা হয়। এ কোণগুলো সবই ধনাত্মক। জ্যামিতিতে ঋণাত্মক কোণ অর্থহীন।



ত্রিকোণমিতিতে একটি সরলরেখার একটি স্থির প্রান্ত-বিন্দুকে কেন্দ্র করে আবর্তিত হলে কোণ উৎপন্ন হয়। আবর্তনের পরিমানই কোণের পরিমান। ঘূর্ণায়মান রেখাটি আদিতে কোণের একটি বাহুর সাথে এবং এর স্থির প্রান্তবিন্দুটি কোণের শীর্ষের উপর থাকে। ঘূর্ণন শেষে রেখাটি কোণের অপর বাহুর সাথে মিলিত হয়।

চিত্রে XOP কোণ একটি সরলরেখার ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন হয়েছে। আদি অবস্থান OX থেকে O বিন্দুকে কেন্দ্র করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে রেখাটি OP অবস্থানে এসে XOP কোণ উৎপন্ন করে।

আবার, OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরে এসে রেখাটি OQ অবস্থানে থেকে যেতে পারে। এরূপভাবে উৎপন্ন XOQ কোণটি এক সমকোণ অপেক্ষা বড়।

অর্থাৎ, "একটি সরলরেখা অপর একটি স্থির সরলরেখার পরিপ্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমাণে আবর্তিত হয়, তাকে ত্রিকোণমিতিক কোণ বলে।"

সরলরেখা যদি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তার বিপরীত দিকে ঘুরতে ঘুরতে নির্দিষ্ট অবস্থানে এসে পৌছায় তখন যে কোণ পাওয়া যায় তাকে প্রচলিত রীতি অনুযায়ী ধনাত্মক কোণ বলে এবং ঘড়ির কাঁটার মত একই দিকে ঘুরে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাকে ঋণাত্মক কোণ বলে।

মূল্যায়নঃ

১. 45^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করুন।

সম্ভাব্য উত্তর

পর্ব- খ

১। J; ২। E; ৩। H; ৪। G; ৫। C; ৬। F; ৭। D; ৮। B;
৯। I; ১০। A; ১১। K.

ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৬১**

ত্রিকোণমিতি (৩)

ভূমিকা

অতি প্রাচীন কাল থেকেই দূরবর্তী কোন বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ করা হয়। বর্তমান যুগেও এর গুরুত্ব অপরিসীম। যে সব পাহাড় ও পর্বতের উচ্চতা বা নদ-নদীর প্রস্থ সহজে মাপা যায় না, সে সব ক্ষেত্রে উচ্চতা বা প্রস্থ ত্রিকোণমিতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এজন্য কোণের পরিমাপগুলো জেনে রাখা খুবই প্রয়োজন। 'সেক্সট্যান্ট' নামক যন্ত্র ব্যবহার করে কোণ মাপা যায়। এই অধিবেশনে উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণের ধারণা, এবং দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

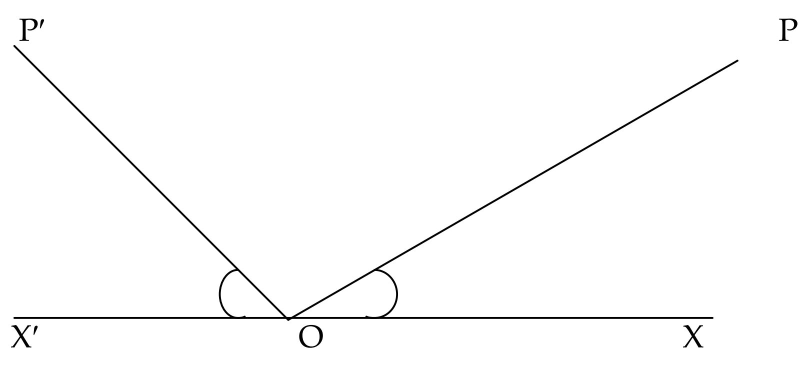
উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- উন্নতি ও অবনতি কোণ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় সংক্রান্ত সহজ সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

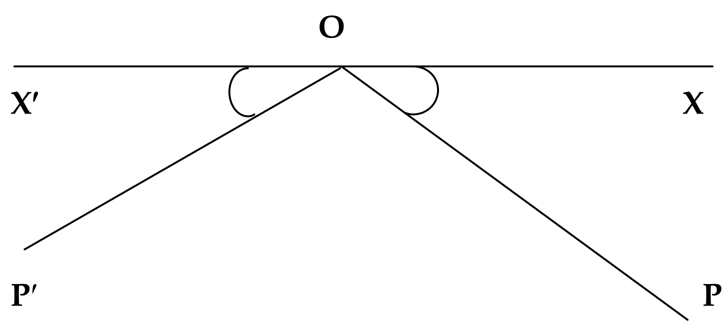
পর্ব- ক: উন্নতি ও অবনতি কোণের ধারণা এবং এর ব্যবহার



চিত্র- ১

মনে করি, ভু-রেখার সমান্তরাল রেখা XOX′ (চিত্র-১) এ O, P, X বিন্দুগুলি একই উলম্ব তলে অবস্থিত এবং P বিন্দু XOX′ রেখার উপরের দিকে অবস্থিত। তাহলে O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ হচ্ছে $\angle$ POX.

অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে P′ বিন্দুর উন্নতি কোণ হচ্ছে $\angle$P′OX′.



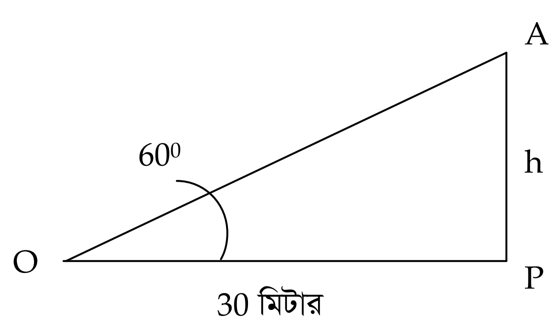
চিত্র- ২

চিত্র- ২ এ O, P, X বিন্দুগুলো একই উলম্ব তলে অবস্থিত এবং P বিন্দু ভু-রেখার সমান্তরাল রেখা XOX´ রেখার নিচের দিকে অবস্থিত। তাহলে O বিন্দুতে P বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle$POX.

অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে P´ বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle$P′OX′।

শিক্ষার্থীবন্ধুরা এবার নিচের ছকে প্রদত্ত চিত্র এর আলোকে h এর মান নির্ণয় করি-

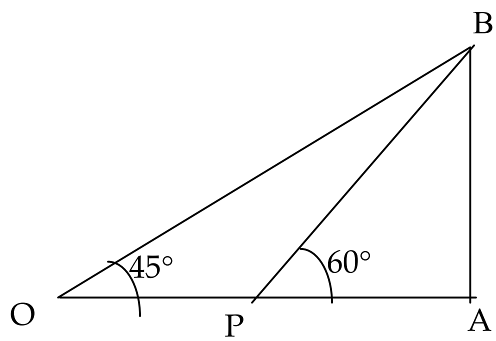
১। h নির্ণয় করুন।



পর্ব- খ: উন্নতি ও অবনতি কোণের ধারণা ব্যবহার করে দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় সংক্রান্ত সহজ সমস্যার সমাধান

ভূতলস্থ কোন স্থানে একটি দালানের ছাদের কোন বিন্দুর উন্নতি কোণ $45°$, ঐ স্থান থেকে দালানের দিকে ৬০ মিটার এগিয়ে গেলে ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ $60°$ হয়। তবে দালানটির উচ্চতা নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ



চিত্রে দালানটির উচ্চতা AB.

$\angle AOB=45^\circ$ এবং OP=60 মি.

এখন, $Cot 45^\circ = \frac{OA}{AB}$ এবং $Cot 60^\circ = \frac{AP}{AB}$

$\therefore \frac{OA}{AB} - \frac{AP}{AB} = Cot 45^\circ - Cot 60^\circ$

বা, $\frac{OA-AP}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{OP}{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{60}{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$

বা, $AB = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

বা, $AB = \frac{60\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{60(3+\sqrt{3})}{3-1}$

$= \frac{60(3+\sqrt{3})}{2}$

$= 30(3+\sqrt{3})$

= 30(3+1.732)

= 141.96 (প্রায়)

$\therefore$ দালানটির উচ্চতা 141.96 মিটার (প্রায়)

এবার আসুন শিক্ষার্থীবৃন্দ নিচের ছকের সমস্যাটি সমাধান করি-

সমস্যা: দুইটি কিলোমিটার পোস্টের মধ্যবর্তী কোন স্থানের উপরে একটি হেলিকপ্টার থেকে ঐ কিলোমিটার পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে $60°$ ও $30°$ হলে হেলিকপ্টারটির উচ্চতা কত?

সমাধান:

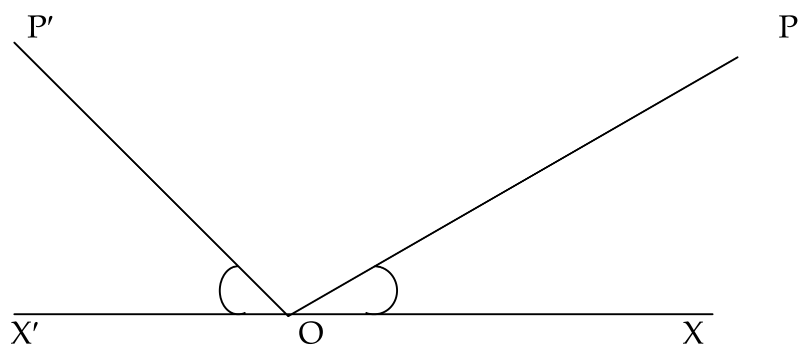
ইউনিট- ৪ **অধিবেশন- ৬১**

মূল শিখনীয় বিষয়

ত্রিকোণমিতি (৩)

উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ

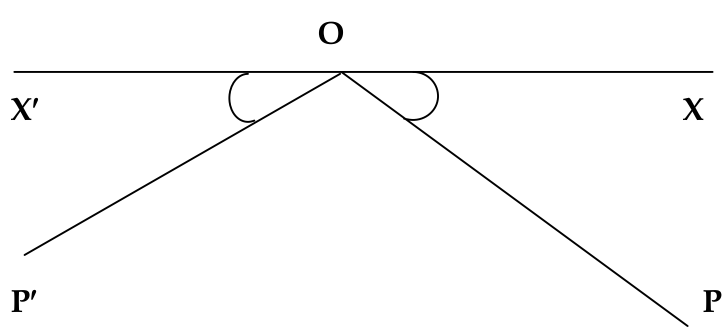
ভূ-রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যে কোন সরলরেখা। ভূ-রেখাকে শয়নরেখাও বলা হয়। আবার, উধর্ক্ষরেখা হচ্ছে ভূমি তলের উপর লম্ব যে কোন সরলরেখা। একে উলম্ব রেখাও বলা হয়। ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ-রেখা ও উর্ধ্ব রেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে। এ তলকে উলম্ব তল বলা হয়।



চিত্র- ১

মনে করি, ভূ-রেখার সমান্তরাল রেখা XOX' (চিত্র- ১) এ O, P, X বিন্দুগুলি একই উলম্ব তলে অবস্থিত এবং P বিন্দু XOX' রেখার উপরের দিকে অবস্থিত। তাহলে O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ হচ্ছে $\angle POX$.

অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে P' বিন্দুর উন্নতি কোণ হচ্ছে $\angle P'OX'$.



চিত্র- ২

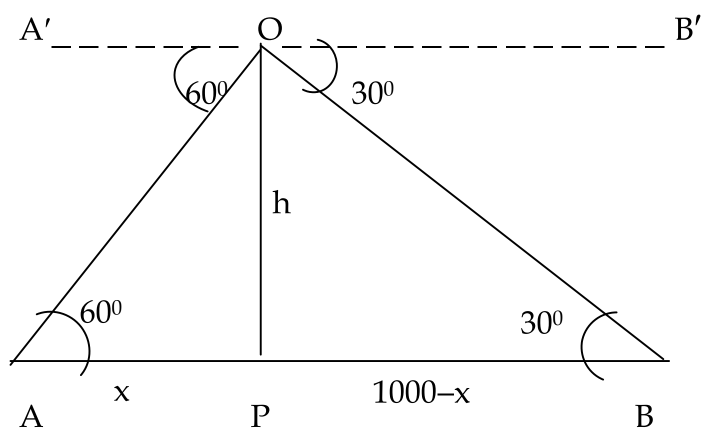
চিত্র- ২ এ O, P, X বিন্দুগুলো একই উলম্ব তলে অবস্থিত এবং P বিন্দু ভূ-রেখার সমান্তরাল রেখা XOX' রেখার নিচের দিকে অবস্থিত। তাহলে O বিন্দুতে P বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle POX$.

অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে P' বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle P'OX'$।

উচ্চতা ও দূরত্ব সংক্রান্ত সমস্যা

দুইটি কিলোমিটার পোস্টের মধ্যবর্তী কোন স্থানের উপরে একটি হেলিকপ্টার থেকে ঐ কিলোমিটার পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে $60°$ ও $30°$ হলে হেলিকপ্টারটির উচ্চতা কত?

মনে করি, A ও B দুইটি কিলোমিটার পোস্ট। ধরি, O বিন্দুটি হেলিকপ্টারটির অবস্থান। O বিন্দুতে A ও B এর অবনতি কোণ যথাক্রমে $60°$ ও $30°$। O বিন্দু হতে AB এর উপর OP লম্ব অঙ্কন করি।



$\therefore$ হেলিকপ্টারটির উচ্চতা = OP = h মিটার

ধরি, AP = x মিটার

প্রশ্নমতে, AB = 1 কিলোমিটার = 1000 মিটার

$\therefore$ BP = AB–AP = (1000–x) মিটার

প্রশ্নমতে, $\angle A'OA = 60°$ এবং $\angle B'OB = 30°$

যেহেতু A′ B′ ও AB সমান্তরাল

$\therefore \angle AOB=60°$ এবং $\angle OBA=30°$

এখন $\tan 60° = \dfrac{OP}{AP}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$

বা, $x\sqrt{3} = h$..................................(1)

$$\tan 30° = \frac{OP}{BP}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{1000-x}$$

$$1000 - x = h\sqrt{3}$$

$$1000 - x = x\sqrt{3}.\sqrt{3}$$

$$1000 - x = 3x$$

$$4x = 1000$$

$$\therefore x = 250$$

এখন x এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$h = \sqrt{3x} = \sqrt{3} \times 250$

$= 250 \times 1.732$ (প্রায়)

$= 433$ মি. (প্রায়)

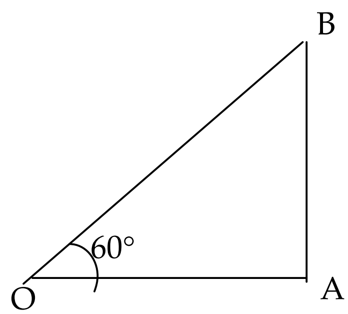
$\therefore$ হেলিকপ্টারটির উচ্চতা = 433 মিটার (প্রায়)

সমস্যা:

একটি মিনারের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোন বিন্দুতে মিনারের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করুন।

সমাধান:

চিত্রে মিনারটির উচ্চতা AB, ভূমিস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু O এবং মিনারটির শীর্ষবিন্দু B। ফলে $\angle AOB = 60°$ এবং OA = 20 মিটার।



এখন, $\tan 60° = \dfrac{AB}{OA}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{AB}{20}$

বা, $AB = 20\sqrt{3}$

বা, $AB = 20 \times 1.732$

বা, $AB = 34.640$

$\therefore$ মিনারটির উচ্চতা 34.64 মিটার।

মূল্যায়নঃ

১. একটি মিনারের পাদদেশ থেকে 30 মিটার দূরে ভূতলের কোন বিন্দুতে মিনারের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় করুন।

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- ক ও খ

মূল শিখনীয় বিষয় থেকে জেনে নিন।