ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৩**

সরল রৈখিক সমীকরণের লেখ

ভূমিকা

বীজগণিতের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে লেখচিত্র ব্যবহার করে থাকি। লেখচিত্রের সাহায্যে সমস্যার বা সমীকরণের সমাধান অত্যন্ত সহজেই করা সম্ভব। লেখচিত্র বিমূর্তকে মূর্ত ও বাস্তব করে তোলে। সরল রেখার লেখ, সরল রৈখিক সমীকরণের লেখ, বৃত্ত ও অধিবৃত্ত ইত্যাদির লেখ আমরা সহজেই অঙ্কন করতে পারি। লেখচিত্র অঙ্কনের মাধ্যমে সমীকরণের সমাধান করাও সহজতর হয়।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা গণিত শিক্ষণ- ১ এর ইউনিট- ৩, অধিবেশন- ২৫ এ রৈখিক সমীকরণের লেখ অঙ্কন সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধিবেশনে সরল রৈখিক সমীকরণের লেখচিত্র কিভাবে আঁকা যায় এবং লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণের সমাধান কিভাবে করা যায় তা নিয়ে আলোচনা করব।

উদ্দেশ্য

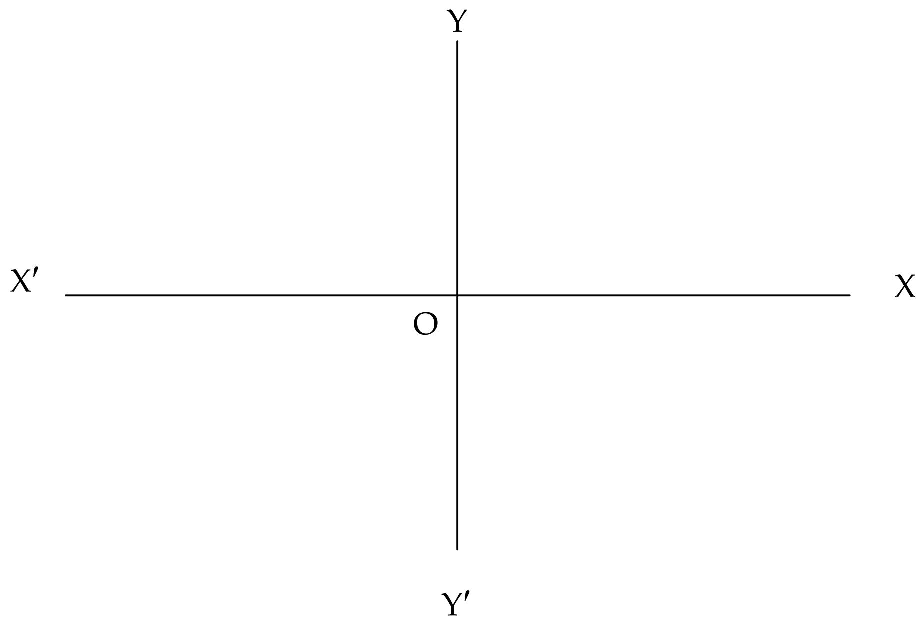
এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- লেখচিত্রের অক্ষ নির্ধারণ ও বিন্দুপাতন করতে পারবেন।
- দ্বিচল সরল রৈখিক সমীকরণের লেখ অঙ্কন করতে পারবেন।
- লেখচিত্রের মাধ্যমে সরল রৈখিক সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: লেখচিত্রের অক্ষ নির্ধারণ ও বিন্দুপাতন

একই সমতলের দুটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা XOX′ এবং YOY′ যদি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে O বিন্দু উভয় রেখারই মূলবিন্দু XOX′ কে X অক্ষ এবং YOY′ কে Y অক্ষ বলা হয়।

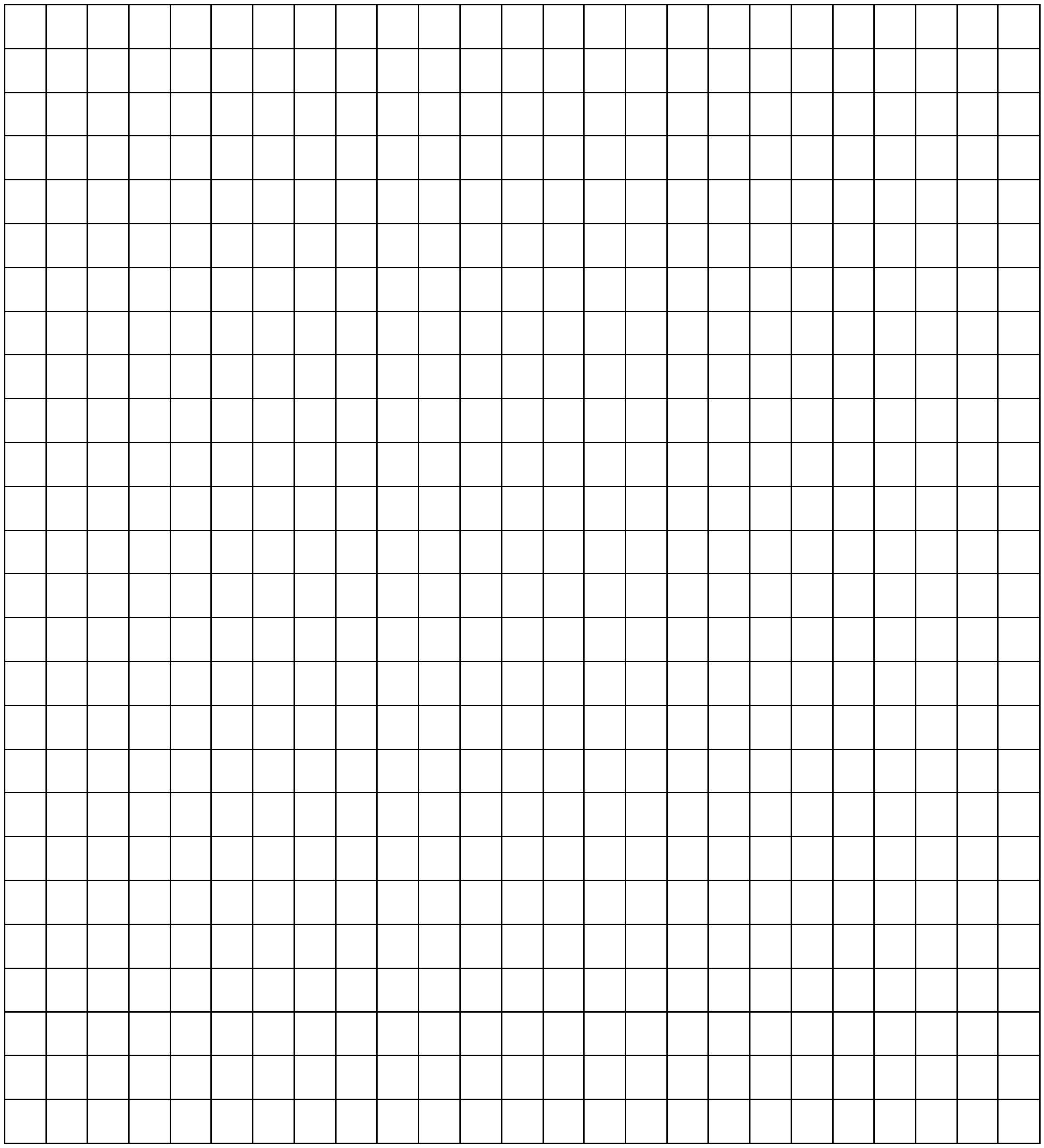


আবার কোন বিন্দুর স্থানাংক দেয়া থাকলে কোন স্থানান্তরিত সমতলে ঐ বিন্দু স্থাপন করাকে বিন্দুপাতন বলে। বিন্দুপাতনের মাধ্যমে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়। ধরা যাক, সমতলস্থ P যে কোন বিন্দু। P এর স্থানাঙ্ক x এবং y বা P(x, y)। এখানে x হলো ভুজ এবং y হলো কোটি।

স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয় সমতলকে চারভাগে ভাগ করে। এই চার ভাগের প্রত্যেক ভাগকে একটি চতুর্ভাগ বলা হয়। প্রথম চতুর্ভাগের ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক; দ্বিতীয় চতুর্ভাগের ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক; তৃতীয় চতুর্ভাগের ভুজ ও কোটি উভয়ই ঋণাত্মক এবং চতুর্থ চতুর্ভাগের ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, আসুন এখন আমরা ছক কাগজে নিচের বিন্দুগুলো স্থাপন করি এবং অবস্থান কোন চতুর্ভাগে উল্লেখ করি।

A(2,5); B(2,7); C(4,0); D(4,5); E(5,6); F(0,8); G(0,0); H(0,6); I(8,0)



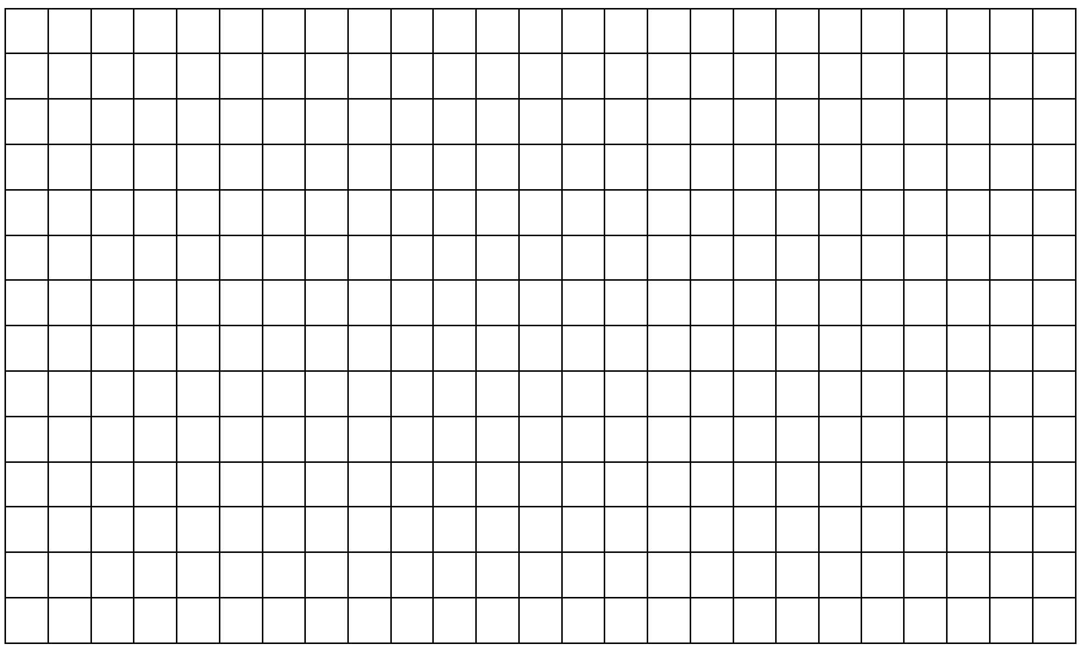
পর্ব- খ: দ্বিচল সরল রৈখিক সমীকরণের লেখ অঙ্কন

দুই চলক বিশিষ্ট এক ঘাত যে কোন সমীকরণের লেখ হবে সরল রেখা। কারণ সরল দ্বিচল সাধারণ সমীকরণ $ax+by = c$ সর্বদা একটি সরল রেখা নির্দেশ করে। যেখানে, a, b এবং c ধ্রুবক।

উপরোক্ত সমীকরণে x বা y এর কয়েকটি সুবিধাজনক মান বসিয়ে y বা x এর সংশ্লিষ্ট মান নির্ণয় করে কয়েকটি সদস্য ক্রমজোড় নির্দিষ্ট করা হয়। অতঃপর রুলার ধরে বিন্দুগুলো যে সরলরেখায় অবস্থিত তা অঙ্কন করে লেখচিত্র পাওয়া যায়। সাধারণত দুটি বিন্দু দ্বারা একটি সরলরেখা নির্দিষ্ট হয়। সুতরাং সরল রৈখিক লেখ অঙ্কনের জন্য দুইটি বিন্দুই যথেষ্ট তবে নিখুঁত অঙ্কনের জন্য তিন বা ততোধিক বিন্দু হলে ভাল হয়।

আসুন, এখন আমরা ছক কাগজে নিচের সমীকরণগুলোর লেখ অঙ্কনের চেষ্টা করি।

(ক) $x + y = 4$ (খ) $2x + y = 8$



পর্ব-গঃ লেখচিত্রের মাধ্যমে সরল রৈখিক সমীকরণের সমাধান

লেখের মাধ্যমে সহসমীকরণের সমাধানের জন্য প্রথমেই সহ সমীকরণের স্থানাঙ্ক নির্ণয়পূর্বক লেখ অঙ্কন করতে হবে।

এখন আমরা $3x+y = 6$ এবং $5x+3y = 12$ এর সমাধান লেখচিত্রের মাধ্যমে করার চেষ্টা করি।

$3x + y = 6$ বা, $y = 6 - 3x$ .... (1)

এর একটি সম্পর্ক ছক:

x	1	2	3
y	3	0	–3

তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক: (1,3), (2,0), (3, –3)

$5x + 3y = 12$

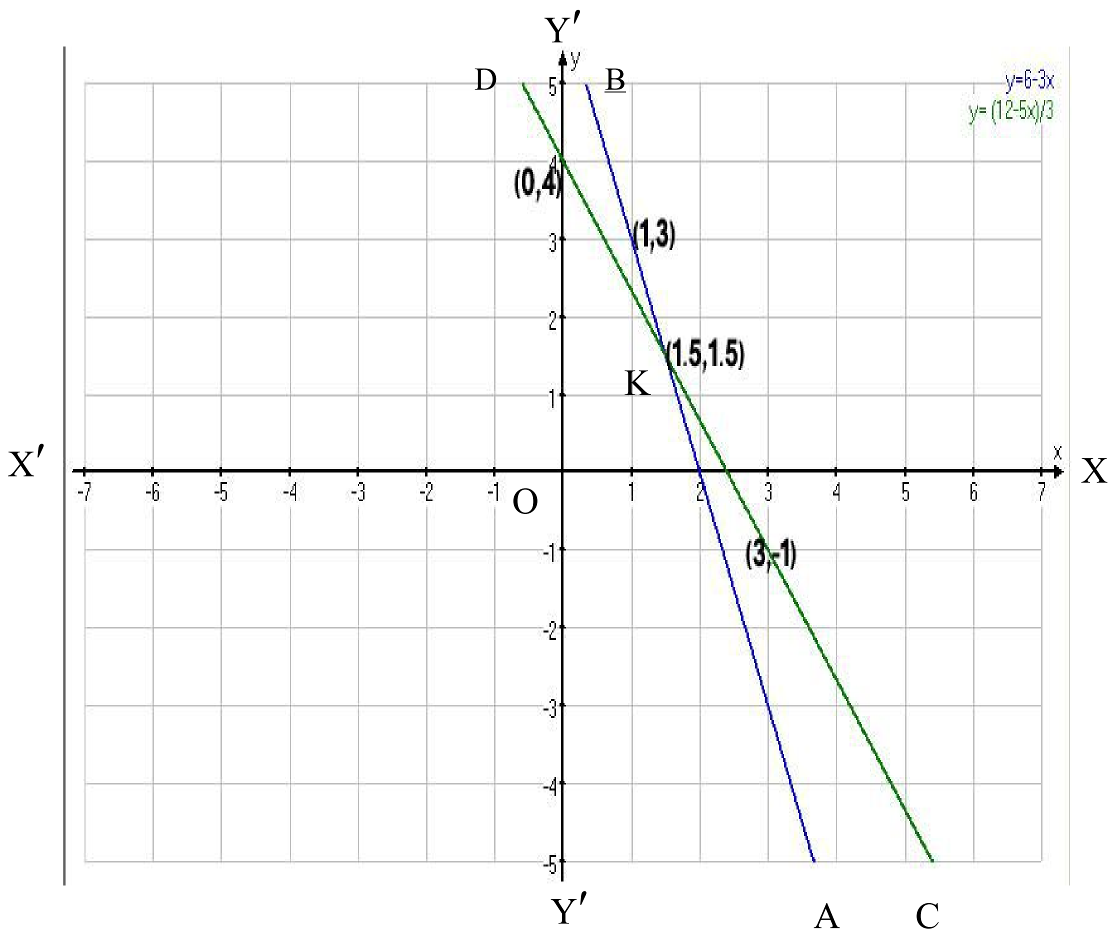
বা, $y = (12-5x)/3$ .... (2)

এর একটি সম্পর্ক ছক:

x	0	6	3
y	4	–6	–1

তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক: (0,4), (6, –6), (3,1);

ছক কাগজে বিন্দু পাতন করে যথারীতি লেখ আঁকা হল:



লেখ অঙ্কনের বিবরণঃ

অক্ষ পরিচিতিঃ x অক্ষ XOX' এবং y অক্ষ YOY' পরস্পর O বিন্দুতে লম্ব।

স্কেলঃ ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য।

মূল বিন্দুঃ O(0,0)

অঙ্কনঃ ১ম ও ২য় সমতা থেকে প্রাপ্ত বিন্দু পাতন করে যথাক্রমে AB ও CD সরল রেখা আঁকা হল।

সমাধানঃ AB ও CD রেখা পরস্পর K বিন্দুতে ছেদ করে, যার স্থানাংক (1.5, 1.5)।

সুতরাং (x , y) = (1.5, 1.5)

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, এখন আমরা নিম্নের সমস্যাগুলো লেখের সাহায্যে সমাধান করার চেষ্টা করি।

(ক) $x + y = 5$ (খ) $x + 4y = 11$

$10x + 6y = 4$ $x - y = 3$

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৩**

মূল শিখনীয় বিষয়

সরল রৈখিক সমীকরণের লেখ

লেখচিত্র

যে কোন রূপ অন্বয়, সমতা, সমীকরণ বা অসমতার চলক সম্পর্কিত আপেক্ষিক চিত্ররূপ হল লেখচিত্র।

লেখচিত্রের মাধ্যমে গণিতের অন্যান্য শাখার সাথে জ্যামিতির সম্পর্ক স্থাপিত হয়।

লেখচিত্র বিমূর্তকে মূর্ত করে তুলে।

পরস্পর লম্ব দুইটি সরল রেখা ব্যবহার করে সমতলের সকল বিন্দুর অবস্থান নির্দিষ্ট করা হয়। এই পরস্পর লম্ব ভাবে ছেদী সরলরেখা দুটির একটি আনুভূমিক রেখা যাকে বলা হয় x অক্ষ এবং অপরটি উলম্ব রেখা যাকে বলা হয় y অক্ষ। এই উভয় অক্ষধারী তলকে বলা হয় কার্তেসীয় তল (এর আবিষ্কারক ডেকার্তের নামানুসারে)।

বিন্দুপাতন

কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে কোন স্থানাঙ্কায়িত সমতলে ঐ বিন্দু স্থাপন করাকে বিন্দু পাতন বলে।

লেখচিত্রে অবস্থিত কয়েকটি বিন্দু স্থাপন করলেই সম্পূর্ণ লেখচিত্র সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়।

সমীকরণের মাধ্যমে সমাধান

দুই চলক বিশিষ্ট সরল (এক ঘাত বিশিষ্ট) কোন সমীকরণের লেখ একটি সরল রেখা।

সরল রেখার লেখ অংকনের জন্য দুইটি বিন্দুই যথেষ্ট তবে নিখুঁত অঙ্কনের জন্য তিন বা ততোধিক বিন্দু হলে ভাল হয়।

দুইটি পরস্পর ছেদী রেখার ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্কই সংশ্লিষ্ট সহসমীকরণের সমাধান; কারণ এই স্থানাঙ্কের x ও y এর মান দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

একটি বিন্দুর x স্থানাঙ্ককে ভুজ এবং y স্থানাঙ্ককে কোটি বলা হয়।

দুইটি সমান্তরাল রেখার কোন ছেদ বিন্দু নাই এবং এদের সমাধানও নাই।

মূল বিন্দুর স্থানাঙ্ক (০, ০)।

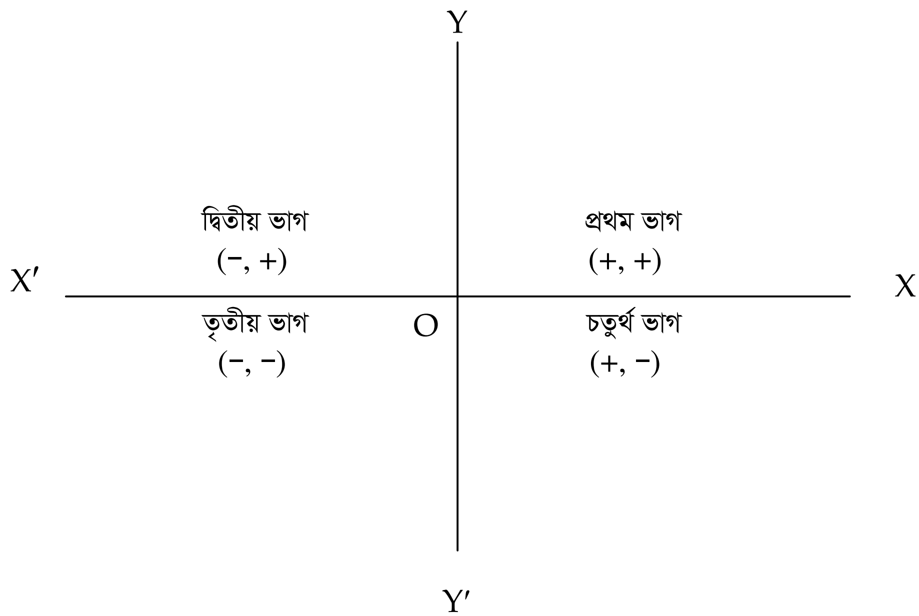
y অক্ষ থেকে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব $= |a|$

x অক্ষ থেকে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব $= |b|$

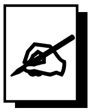
x অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর কোটি শূন্য।

y অক্ষের উপর প্রতিটি বিন্দুর ভুজ শূন্য।

x অক্ষ ও y অক্ষ তাদের ধারক (কার্তেসীয়) তলকে চারটি সমকোণীয় চতুর্ভাগে বিভক্ত করে, যাদেরকে ঘড়ির কাটার বিপরীতক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ (বা কোয়াড্র্যান্ট) বলে।



প্রথম চতুর্ভাগের ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক; দ্বিতীয় চতুর্ভাগের ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক; তৃতীয় চতুর্ভাগের ভুজ ও কোটি উভয়ই ঋণাত্মক এবং চতুর্থ চতুর্ভাগের ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক।



মূল্যায়নঃ

১. সরল রৈখিক সমীকরণের লেখ অঙ্কন করুন।

(ক) $4x + 3y = 6$ (খ) $2x - y = 10$

(গ) $3x - 2y = 9$ (ঘ) $y = 3x - 7$

(ঙ) $3x + 4y = 0$ (চ) $x - 2y - 5 = 0$

(ছ) $2x = 6 - 3y$ (জ) $2x - 5y + 12 = 0$

২. লেখচিত্রের মাধ্যমে রৈখিক সহসমীকরণের সমাধান করুন।

(ক) $3x - y = 5$, $4x - y = 10$

(খ) $3x - 4y = 0$, $3x - 2y = 4$

(গ) $5x - 3y = 8$, $2x - 3y = 1$

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব-গ

(ক) $(4, 1)$ (খ) $(3, 2)$

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৪**

অন্বয় ও ফাংশন

ভূমিকা

অন্বয় ও ফাংশন গণিতের একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন সম্পর্কের কথা বলি। যেমন- পিতা-মাতা সম্পর্ক, শিক্ষক-ছাত্র সম্পর্ক ইত্যাদি। এরকম সম্পর্ক বর্ণনার জন্য প্রত্যেক ক্ষেত্রে দু'টি সেট এবং এক সেটের কোন সদস্য অপর সেটের কোন সদস্যের সাথে সম্পর্কিত তা ম্যাপিং (Mapping) বা চিত্রন অথবা গুণজ সেটের মাধ্যমে নির্ধারণ করা যায়।

অপরদিকে ফাংশন একটি বিশেষ ধরনের সম্পর্ক যখন A ও B দু'টি সেটের মধ্যে এমন একটি সম্পর্ক স্থাপন করা যায় যে, A সেটের প্রতিটি সদস্যের জন্য B সেটে একটি মাত্র সদস্য নির্ধারিত থাকে তখন সে সম্পর্ককে ফাংশন বা অপেক্ষক বলে। এই অধিবেশনে অন্বয়ের ধারণা ও তার প্রয়োগ; ডোমেন, রেঞ্জ, কো-ডোমেন এবং ফাংশন ও ফাংশনের প্রকারভেদ নিয়ে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- অন্বয় কী তা বর্ণনা করতে পারবেন।
- অন্বয় এর বাস্তব প্রয়োগ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ইমেজ, প্রিইমেজ, ডোমেন, রেঞ্জ, কো-ডোমেন ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ফাংশন কী তা বর্ণনা করতে পারবেন।
- ফাংশনের প্রকারভেদ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

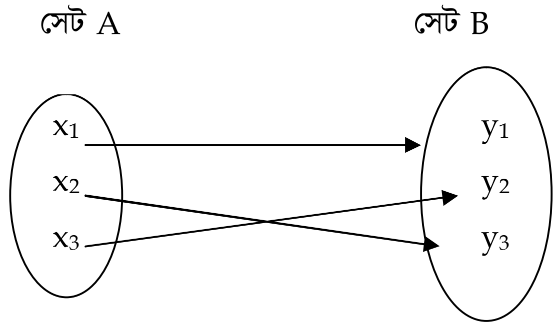
পর্ব-ক: অন্বয় ও তার বাস্তব প্রয়োগ

দু'টি সেটের সদস্যদের মিল করার বা জোড় গঠন করার পদ্ধতিকে অন্বয় বলে। আমরা দৈনন্দিন চলার পথে বিভিন্ন জনের/বস্তুর সাথে সম্পর্ক দেখতে পাই। যেমন- করিম সাহেবের ৪ জন ছেলেমেয়ে রয়েছে, করিম সাহেব ঐ অফিসে চাকুরী করেন ইত্যাদি। এই সকল দ্বৈত সম্পর্ক (x, y) ক্রমজোড় দ্বারা বুঝান যেতে পারে। আসুন আমরা চিত্রের সাহায্যে এই দ্বৈত সম্পর্ক বুঝানোর চেষ্টা করছি।

সেট A = স্ত্রীর দল = $\{x_1, x_2, x_3\}$

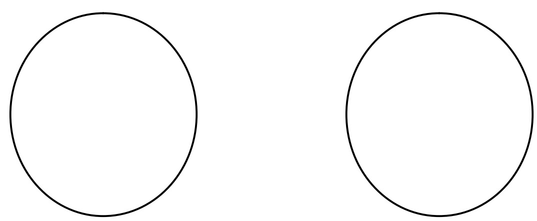
সেট B = স্বামীর দল = $\{y_1, y_2, y_3\}$

ভেদচিত্রের সাহায্যে সেট A ও সেট B এর অন্বয় নিম্নরূপে লেখা যায়:

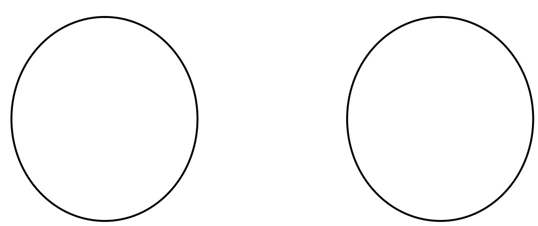


আসুন বন্ধুরা, এখন আমরা আরও দু’টি অন্বয়ের বাস্তব উদাহরণ নিম্নের ছকে ভেদচিত্রের সাহায্যে দেখানোর চেষ্টা করি।

উদাহরণ- ১:



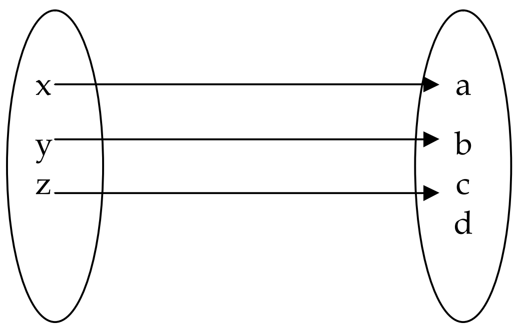
উদাহরণ- ২:



পর্ব- খ: ইমেজ, প্রিইমেজ, ডোমেন, রেঞ্জ ও কো-ডোমেনের ধারণা

অন্বয়কে ক্রমজোড়ের মাধ্যমে প্রকাশ করলে ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান আসে ডোমেন থেকে এবং দ্বিতীয় উপাদান আসে রেঞ্জ থেকে। দ্বিতীয় উপাদানকেই প্রথম উপাদানের ছবি (Image) বলা হয়। আবার প্রথম উপাদানকে দ্বিতীয় উপাদানের পূর্বছবি (Pre-image) বলা হয়। ছবির সেটকে বলা হয় রেঞ্জ। রেঞ্জ হল কো-ডোমেনের উপসেট।

আসুন, এখন আমরা এ সম্পর্কিত নিম্নের সমস্যাটি সমাধান করার চেষ্টা করি।



$A \xrightarrow{\quad R \quad} B$; R, অন্বয়

(ক) A সেটে x, y কি?

(খ) A R B তে x, y কি?

(গ) a ও d, B সেটের কি?

(ঘ) A R B তে a, c কি?

(ঙ) A R B তে {x, y, z} কি?

(চ) A R B তে {a, b, c} কি?

(ছ) A R B তে {a, b, c, d} কি?

সমাধানঃ

(ক)

(খ)

(গ)

(ঘ)

(ঙ)

(চ)

(ছ)

পর্ব- গ: ফাংশন ও তার প্রকারভেদ

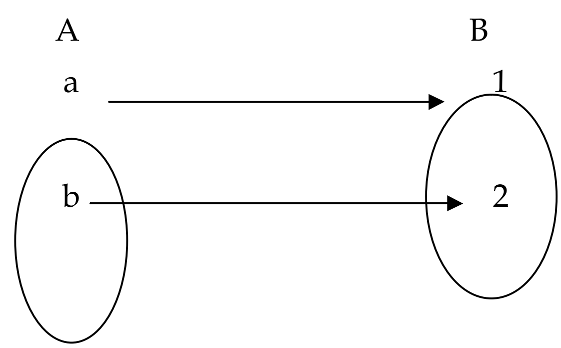
দু'টি চল যদি এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে, একটির কোন স্বাধীন মানের জন্য অধীন চলের কেবল একটি মান আসে তবে এ সম্পর্ককে বলা হয় ফাংশন বা অপেক্ষক। ফাংশন বিভিন্ন রকমের হতে পারে। যেমন- এক-এক ফাংশন, উপর ফাংশন, ভিতর ফাংশন, ধ্রুব ফাংশন, সংযুক্ত ফাংশন, বিপরীত ফাংশন ইত্যাদি।

এক-এক ফাংশন বলতে বোঝায় যদি X সেটের প্রত্যেক উপাদানের জন্য Y সেটে একটি এবং কেবলমাত্র একটি ছবি থাকে।

আবার উপর ফাংশন বলতে বোঝায় যদি অন্বয়ে কো-ডোমেনের সব কয়টি উপাদান ছবি (Image) হিসাবে সম্পর্কিত হয়। কো-ডোমেনের সকল উপাদান বা সদস্য যদি ছবি না হয় তবে তাকে ভিতর ফাংশন বলে।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, এবার এ সম্পর্কিত নিম্নের সমস্যাগুলো সমাধান করার চেষ্টা করি।

(ক)



$A \xrightarrow{R} B$; R, অন্বয়

(i) A R B এক এক ফাংশন কেন?

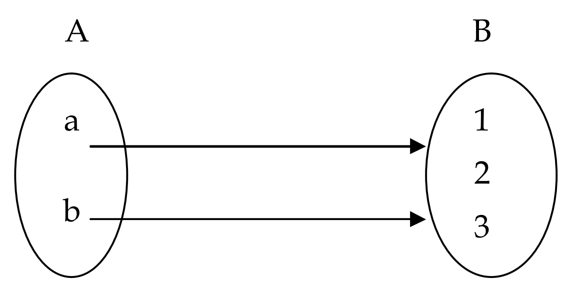
(ii) A R B উপর ফাংশন কেন?

সমাধান:

(i)

(ii)

(খ)



$A \xrightarrow{R} B$; R, অন্বয়

(i) A R B কী ধরনের ফাংশন? পক্ষে/বিপক্ষে যুক্তি দিন।

(ii) A R B ভিতর ফাংশন কেন?

সমাধানঃ

(i)

(ii)

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৪**

মূল শিখনীয় বিষয়

অন্বয় ও ফাংশন

অন্বয়

দুটি সেট A ও B এর উপাদান গুলো নিয়ে যদি ক্রমজোড় গঠন করা হয়, ক্রমজোড়ের সংখ্যা হবে দুই সেটের উপাদান সংখ্যার গুণফলের সমান। সকল ক্রমজোড়ের সেটকে বলা হয় A ও B এর কার্তেসীয় গুণজ সেট।

সেট গঠন পদ্ধতিতে লেখা হয় $A\times B=\{(x, y): x\in A, y\in B\}$। এই গুণজ সেটের যে কোন অশূন্য উপসেটই হল এক একটি অন্বয়। যেমনঃ $A = \{0, 1\}$ ও $B = \{0, 2\}$ হলে $A\times B=\{(0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\}$। এই ক্রমজোড়ের পুরা সেটই একটি অন্বয় এবং এটি নি:শর্ত অন্বয়। এই ৪ উপাদানের সেটের $২^৪$ বা ১৬টি উপসেট রয়েছে। এর মধ্যে ফাঁকা সেট বাদে বাকি ১৫টি উপসেট হল এক একটি অন্বয়। এসব অন্বয় থেকে কোন অন্বয় বিবেচনায় নিতে হলে পূর্ব প্রদত্ত কোন শর্ত বা সূত্র সাপেক্ষে নির্বাচন করতে হয়:

(i) $y = x$ শর্তে অন্বয়টি হবে $\{(0,0)\}$;

(ii) $y = 2x$ শর্তে অন্বয়টি হবে $\{(1,2)\}$;

(iii) $y \le x$ শর্তে অন্বয়টি হবে $\{(0,0),(1,0),\}$;

(iv) $y \ge x$ শর্তে অন্বয়টি হবে $\{(0,0), (0,2), (1,2)\}$ ইত্যাদি।

ফাংশন

দুটি চল যদি এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত হয় যে, একটির কোন স্বাধীন মানের জন্য অধীন চলের কেবল একটি মান আসে তবে এ সম্পর্ককে বলা হয় ফাংশন বা অপেক্ষক (Function)।

মনে করি, X ও Y দুটি অশূন্য সেট। যদি এমন নিয়ম (Rule) বা সূত্র (Formula) f দেয়া থাকে যে, X এর যে কোন উপাদান x এর জন্য Y সেটে সংশ্লিষ্ট একটি এবং কেবল মাত্র একটি উপাদান y পাওয়া যায়, তবে f কে X থেকে Y এ বর্ণিত একটি ফাংশন বলা হয় এবং তখন লেখা হয় $y = f(x)$। উপরের অন্বয়ের উদাহরণে প্রথম তিনটি ফাংশন।

চারণস্থল এবং সহচারণস্থল (Domain and Co-domain)

বিশ্ব সেটের কোন উপসেটের সাথে সে একই উপসেটের বা অপর উপসেটের কোন-না-কোন সর্ম্পক রয়েছে। সর্ম্পকের আদি সেটকে বলা হয় ডোমেন বা চারণস্থল এবং অন্ত সেটকে বলা হয় সহচারণস্থল বা কো-ডোমেন। ডোমেন এর সদস্যকে বলা হয় উপাদান।

ছবি ও রেঞ্জ (Image & Range)

অন্বয়কে ক্রমজোড়ের মাধ্যেমে প্রকাশ করলে ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান আসে ডোমেন থেকে এবং দ্বিতীয় উপাদান আসে রেঞ্জ থেকে। দ্বিতীয় উপাদানকেই প্রথম উপাদনের ছবি (Image) বলা হয়। ছবির সেটকে বলা হয় রেঞ্জ। রেঞ্জ হল কোডোমেনের উপসেট।

পূর্বছবি (Pre-image)

অন্বয়কে ক্রমজোড়ের মাধ্যেমে প্রকাশ করলে ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান আসে ডোমেন থেকে এবং দ্বিতীয় উপাদান আসে রেঞ্জ থেকে। প্রথম উপাদানকে দ্বিতীয় উপাদনের পূর্বছবি (Pre-image) বা কেবল উপাদানও বলা হয়।

পাল্লা (Range)

কো-ডোমেনের যে সকল সদস্য সম্পর্কের আওতায় পড়ে অর্থাৎ ডোমেনের কোন বা কোন উপাদানের ছবি হয়, এদের সেটকে বলা হয় পাল্লা বা রেঞ্জ। রেঞ্জ হল কো- ডোমেন এর একটি উপসেট।

ফাংশনের প্রকারভেদ:

১. চিত্রণ অনুসারে ফাংশন

২. প্রকাশভঙ্গি ভেদে ফাংশন

১. চিত্রণ (Mapping) অনুসারে ফাংশন:

এক-এক ফাংশন (One-One Function)

ডোমেন বা আধারের প্রতিটি উপাদান যদি বিস্তারের কেবল একটি করে উপাদানের সাথে সর্ম্পকিত হয় তবে তাকে এক-এক ফাংশন (One-One Function) বলা হয়।

$f: X \leftrightarrow Y$ দ্বারা সূচিত ফাংশনকে এক-এক ফাংশন বলা হয়; এর দ্বারা বোঝায় X সেটের প্রত্যেক উপাদানের জন্য Y সেটে একটি এবং কেবলমাত্র একটি ছবি আছে। অর্থাৎ এক-এক ফাংশনে X সেটের দুটি উপাদানের একই ছবি থাকতে পারে না।

উপর ফাংশন (Onto Function)

অন্বয়ে কো-ডোমেনের সব কয়টি উপাদান যদি ছবি হিসাবে সম্পর্কিত হয় তবে তাকে উপর ফাংশন বলা হয়। উপর ফাংশনকে সর্বগ্রাহী ফাংশনও বলা হয়।

ভিতর ফাংশন (Into Function)

কো-ডোমেনের সকল উপাদান বা সদস্য যদি ছবি না হয় তবে তাকে ভিতর ফাংশন বলে।

বহু-এক উপর ফাংশন (Many-one onto Function)

একাধিক উপাদানের একই ছবি হলে এবং কো-ডোমেনের সকল উপাদানই ছবি হলে তাকে বহু-এক উপর ফাংশন বলে।

বহু-এক ভিতর ফাংশন (Many-one into Function)

ডোমেনের একাধিক উপাদানের এক ছবি কিন্তু কো-ডোমেনের সকল উপাদান ছবি নয় তাকে বহু- এক ভিতর ফাংশন বলে।

ধ্রুব ফাংশন (Constant Function)

সকল উপাদানের যদি একটি এবং কেবল একটি মাত্র ছবি থাকে তাকে ধ্রুব ফাংশন বলে। অর্থাৎ যে সকল ফাংশনের মান সর্বদাই একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা হয় তবে তাকে ধ্রুব ফাংশন বলা হয়ঃ

$y = 3$ বা, $F(x) = 5$ ইত্যাদি।

অভেদ ফাংশন (Identity Function)

যদি কোন ফাংশন কোন সেটের উপাদানকে একই সেটের ঐ উপাদানের সাথেই অন্বিত করে, তখন তাকে অভেদ ফাংশন বলেঃ $F(x) = x$

সংযুক্ত ফাংশন বা ফাংশনের ফাংশন (Composite Function/Function of a Function)

$F(x) = x^2$, $f(x)= 2x$ **হলে,**

$F(f(x))= F(2x) = (2x)^2 = 4x^2$

এবং $f(F(x)) = f(x^2)= 2x^2$

কোন ফাংশনের চল হিসাবে যখন অপর একটি ফাংশন ব্যবহৃত হয় তখন তাকে সংযুক্ত ফাংশন বা ফাংশনের ফাংশন বা কম্পজিট ফাংশন বলা হয়। কম্পজিট ফাংশন $F(f(x))$ কে $Fof(x))$ রূপেও লেখা হয়।

বিপরীত ফাংশন (Inverse Function)

কোন ফাংশনের সম্পর্ক সূত্রে স্বাধীন চলকে অধীন চলের মাধ্যমে প্রকাশ করে এবং রেঞ্জকে ডোমেন ধরে বিপরীত সম্পর্ক বা অন্বয় গঠিত হয়। ফাংশনের বিপরীত অন্বয়টি ফাংশন নাও হতে পারে।

ধরা যাক একটি ফাংশন $F: R \rightarrow R_+, F(x) = x^2$

এখানে, $F(x) = y \Rightarrow x = F^{-1}(y)$

এবং $y = x^2$

$\Rightarrow x^2 = \mathbf{y}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\mathbf{y}}, \ \mathbf{y} \in R_+$; [স্বাধীন চলকে অধীন চলের মাধ্যমে প্রকাশ]

$\Rightarrow F^{-1}(\mathbf{y}) = \pm\sqrt{\mathbf{y}} \in R$

$\Rightarrow F^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}, R_+ \rightarrow R$; [x কে y ধরে রেঞ্জ কে ডোমেনে রূপান্তর]

$\Rightarrow F^{-1}: R_+ \rightarrow R, \ F^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$; [বিপরীত অন্বয় রূপে প্রকাশ], এটি ফাংশন নয়। কিন্তু দুইটি সম্পর্ক আলাদাভাবে লেখা হলে, অর্থাৎ $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$ একটি ফাংশন এবং $F^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ একটি ভিন্ন ফাংশন। তবে $F^{-1}: R_+ \rightarrow R_+$ হলে, F^{-1} একটি ফাংশন হবে।

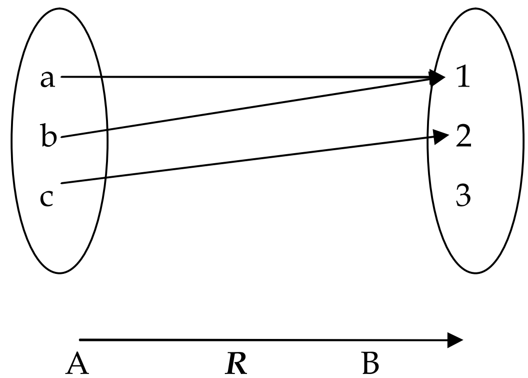
কোন চলের উপর দুইটি বিপরীত ফাংশনের যৌথ প্রয়োগ, স্বাধীন চলটিকে অপরিবর্তিত রেখে যৌগিক ফাংশনের অধীন চলে পরিণত করে:

ধরি $F(x)=x^2$ এবং $H(x)=\sqrt{x}$, দুইটি বিপরীত ফাংশন; এখানে বাস্তবতার কারণে $x \geq 0$ তা হলে $F(H(x))=F(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2 = x$, এবং

$H(F(x)) = H(x^2)=\sqrt{x^2} = x$, যেহেতু $x \geq 0$

মূল্যায়নঃ

১.

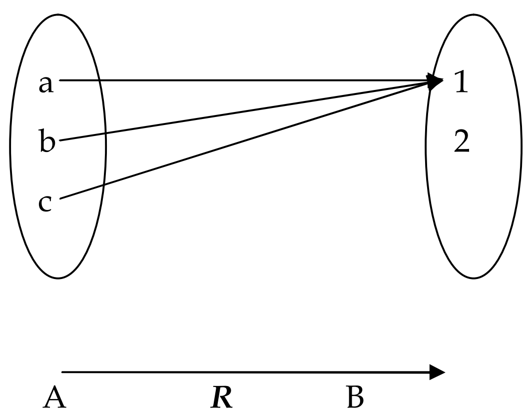


(i) A ***R*** B বহু-এক ফাংশন কেন?

(ii) A ***R*** B কিরূপ বহু-এক ফাংশন?

(iii) বহু-এক ফাংশনের সংজ্ঞা লিখুন?

২.



(i) A ***R*** B কিরূপ ফাংশন?

(ii) ধ্রুব ফাংশন কাকে বলে?

(iii) ধ্রুব ফাংশনের বাস্তব উদাহরণ দিন।

৩.

(i) বহু-এক উপর ফাংশনের চিত্র অংকন করুন।

(ii) বহু-এক উপর ফাংশন কাকে বলে?

(iii) বহু-এক উপর ফাংশনটির রেঞ্জ ও ডোমেন নির্ণয় করুন।

৪.

(i) $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ কে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন?

(ii) সংযুক্ত ফাংশন $(gof): A \rightarrow C$ কে ভাষায় প্রকাশ করুন?

৫.

(i) $f: A \rightarrow B$ এবং $f^{-1}: B \rightarrow A$ কে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করুন?

(ii) $f: A \rightarrow B$ এবং $f^{-1}: B \rightarrow A$ এর পারস্পরিক সম্পর্ক কি?

(iii) এই অন্বয় বা সম্পর্ককে সাধারণ ভাষায় প্রকাশ করুন।

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৫**

প্রকাশভঙ্গি হিসাবে ফাংশন ও তার প্রয়োগ

ভূমিকা

পূর্ববর্তী অধিবেশন-৩৪ এ অন্বয় ও ফাংশন সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছি। ফাংশন সম্বন্ধে জানতে হলে বা ফাংশন চিনতে হলে আমাদের অন্বয় বা সম্বন্ধ সম্পর্কে জ্ঞান থাকতে হবে। ফাংশন হল এমন একটি প্রক্রিয়া যার মাধ্যমে দুইটি সেটের মধ্যে একটি সম্পর্ক সৃষ্টি হয়। ফাংশনকে আমরা কয়েকটি ভাগে ভাগ করতে পারি, যেমন- চিত্রণ অনুসারে ফাংশন ও প্রকাশভঙ্গি ভেদে ফাংশন। পূর্ববর্তী অধিবেশনে চিত্রণ অনুসারে ফাংশন সম্পর্কে জেনেছি। এ অধিবেশনে প্রকাশভঙ্গি ভেদে ফাংশন ও তার প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করব।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- প্রকাশভঙ্গি ভেদে ফাংশনের শ্রেণীকরণ করতে পারবেন।
- অন্বয় ও ফাংশনের পার্থক্য নির্ণয় করতে পারবেন।
- অন্বয় ও ফাংশনের সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: প্রকাশভঙ্গি ভেদে ফাংশন

প্রকাশভঙ্গি ভেদে ফাংশনকে আবার কয়েকটি ভাগে ভাগ করা যায়। যেমন- সেট ফাংশন, গ্রাফ ফাংশন, অবর্ণিত ফাংশন, বর্ণিত ফাংশন, ছক ফাংশন, সমীকরণ ফাংশন, চল ফাংশন, ধ্রুব ফাংশন, ব্যক্ত ফাংশন ও অব্যক্ত ফাংশন।

সেট ফাংশন হল যে কোন ক্রমজোটের সেটই ফাংশন যদি তার শেষ উপাদান ছাড়া আগের উপাদানগুলোর বিন্যাস ভিন্নতর হয়। আবার গ্রাফ ফাংশন হল কার্তেসীয় গ্রাফ বা লেখ যাকে y অক্ষ বা তার সমান্তরাল রেখা কেবল একটি বিন্দুতেই ছেদ করে।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, আসুন এবার আমরা প্রকাশভঙ্গি ভেদে অন্যান্য ফাংশন বলতে কী বোঝায় তা উদাহরণসহ নিম্নের ছকে লেখার চেষ্টা করি।

ছক ফাংশন	
অবর্ণিত ফাংশন	
বর্ণিত ফাংশন	
সমীকরণ ফাংশন	

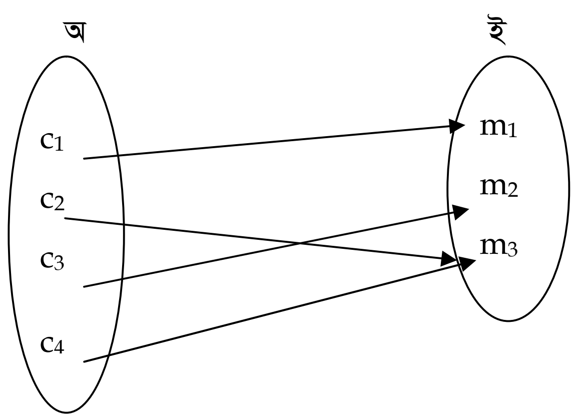
পর্ব- খ: অন্বয় ও ফাংশনের পার্থক্য

উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে,
অ = একদল শিশু = {$প_{১}$, $প_{২}$, $প_{৩}$, $প_{৪}$} এবং
ই = একদল মা ={$স_{১}$, $স_{২}$, $স_{৩}$}

এখানে A ও B এর মধ্যে মা ও শিশু অথবা শিশু ও মায়ের মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করে। এ দু’টি সম্পর্কে কোনটি ফাংশন তা বলার চেষ্টা করি।

এখানে শিশু বা সন্তান ও মায়ের সম্পর্ক ফাংশন। কারণ প্রত্যেক সন্তানের কেবলমাত্র একজন মা আছে। কিন্তু মা ও সন্তানের সম্পর্ক ফাংশন নয়। কারণ একই মায়ের একাধিক সন্তান থাকতে পারে।

চিত্রে সন্তান ও মায়ের সম্পর্ক ফাংশন তা দেখানো হল:



আসুন, আমরা নিম্নের ছকে অন্বয় বা সম্পর্ক ও ফাংশনের পার্থক্য লেখার চেষ্টা করি।

অন্বয় বা সম্পর্ক	ফাংশন
•	•
•	•
•	•

পর্ব- গ: অন্বয় ও ফাংশনের সমস্যা সমাধান

আমরা নিম্নের সমস্যাটি সমাধান করার চেষ্টা করি।

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ হলে $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y=2x\} =?$

$x =$ ০ হলে $y =$ ০

$x =$ ১ হলে $y = 2$

$x =$ ২ হলে $y =$ ৪; $y =$ ৪ $\notin$ অ

$\mathbf{x} = -$১ হলে $y = -$২; $y = -$ ২ $\notin A$

$\therefore S = \{$(০, ০), (১, ২)$\}$

এখানে ডোমেন $= \{0, 1\}$

রেঞ্জ $= \{$০, ২$\}$

S ফাংশনটি কি এক এক?

$S = \{$(০, ০), (১, ২)$\}$

আমরা জানি, যদি কোন ফাংশনের অধীনে তার ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক এক ফাংশন বলা হয়। আর যদি ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি একই হয়, তবে ফাংশনটিকে এক এক ফাংশন বলা হয় না।

এখন S ফাংশনটি পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যায় যে, এ ফাংশনের অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন।

$\therefore S = \{$(০, ০), (১, ২)$\}$ ফাংশনটি এক এক।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, এখন আরও এ ধরনের কয়েকটি সমস্যার সমাধান নিম্নে করার চেষ্টা করি।

সমস্যা- ১: $F(x) = 2x-1$ ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় পূর্বক এক-এক ফাংশন কিনা যাচাই করুন। আবার ইনভার্স অন্বয়ে প্রকাশ করে অন্বয়টি এক-এক ফাংশন কিনা তাও যাচাই করুন।

সমাধানঃ

সমস্যা- ২ঃ $F(x) = \sqrt{x} - 1$ অন্বয়টির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়পূর্বক অন্বয়টি ফাংশন বা এক-এক ফাংশন কিনা তা নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ

মূল শিখনীয় বিষয়

প্রকাশ ভঙ্গি হিসাবে ফাংশন ও তার প্রয়োগ

প্রকাশভঙ্গি ভেদে ফাংশন

সেট ফাংশনঃ

ক্রমোজোড়, ক্রমত্রয়ী বা যে কোন ক্রমজোটের সেটই ফাংশন যদি তার শেষ উপাদান ছাড়া আগের উপাদান গুলোর বিন্যাস ভিন্ন হয়।

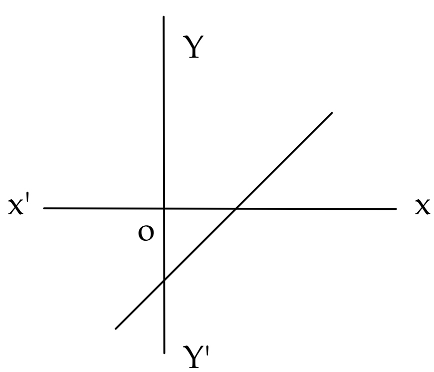
ছক ফাংশনঃ

কমপক্ষে দুই দল তথ্য বিশিষ্ট ছককে ছক ফাংশন বলা যায় যদি প্রথম চলের একই মান একাধিকবার না থাকে এবং একই মান একাধিকবার থাকলে তা হবে অন্বয়।

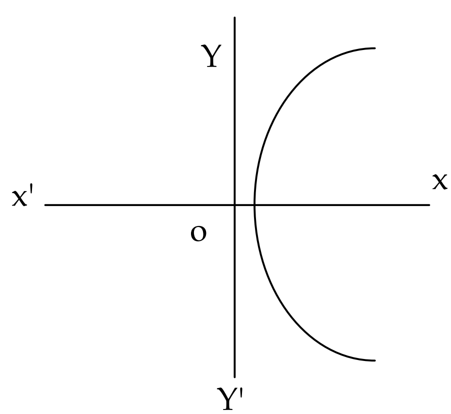
গ্রাফ ফাংশনঃ

কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ধারণা অনুযায়ী x কে সর্বদা স্বাধীন ও y কে অধীন চল ধরা হয়। তাই y কে x এর ফাংশন বলা হয়।

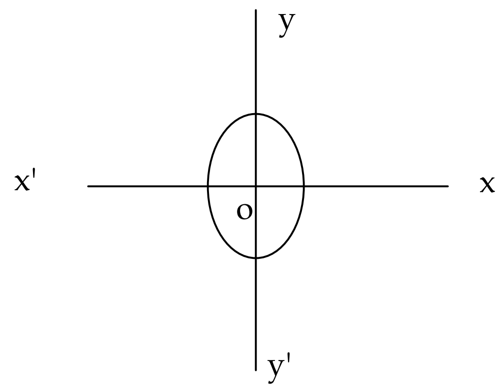
ক্রমোজোড় (x, y) এর মান দিয়ে যদি কোন গ্রাফ আঁকা হয় তা বিচ্ছিন্ন বিন্দুর সমাহার, সরল রেখা বা বক্র রেখা হতে পারে।



ফাংশন



ফাংশন নয়



ফাংশন নয়

কার্তেসীয় গ্রাফে y-অক্ষ বা তার কোন সমন্তরাল বেখা গ্রাফটিকে কেবল এক বিন্দুতে ছেদ করলে গ্রাফটি হল ফাংশন এবং একাধিক বিন্দুতে ছেদ করলে অন্বয়।

অবর্ণিত ফাংশনঃ $y = f(x)$ ধরনের ফাংশন যেখানে সূত্র-রূপ বর্ণিত নয়।

বর্ণিত ফাংশনঃ $y = 4x+3$ বা, $F:R\rightarrow R_+, F(x)= x^2$ ধরনের ফাংশন যেখানে সূত্ররূপ বর্ণিত।

সমীকরণ ফাংশনঃ $x +2y = 8$

চল ফাংশনঃ কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক x কে সর্বদা স্বাধীন ও y কে অধীন চল ধরা হয়। অধীন চলকে বলা হয় স্বাধীন চলের ফাংশন। তাই y হল x এর চল ফাংশন।

ধ্রুব ফাংশনঃ $y = 4$ এখানে x এর মান যাই হউক y এর মান সর্বদা 4।

অব্যক্ত ফাংশনঃ $x +2y = 8$ এই রূপ হল অব্যক্ত ফাংশন।

ব্যক্ত ফাংশনঃ $y=(8 – x)/2$ এই রূপ হল ব্যক্ত ফাংশন।

সমস্যার সমাধান

$F(x)=x^2$ ফাংশনের, $F: R \rightarrow R_+$

(i) ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

(ii) এক-এক ফাংশন কিনা যাচাই করুন।

(iii) ইনভার্স অন্বয়ে প্রকাশ করে অন্বয়টি এক-এক কিনা যাচাই করুন।

সমাধানঃ

(i) F: $R \rightarrow R_+$

$F(x)=x^2 \in R$ যদি ও কেবল যদি

$x^2 \geq 0$

$\therefore\ x \geq 0$

$\therefore$ ডোমেন, $F=\{x: x \geq 0\}=R$

$\therefore$ রেঞ্জ, $F=\{x \in R: x \geq 0\}=R_+$

(ii) F: $R \rightarrow R_+$, $F(x)=x^2$

এখানে ডোমেন, F = R

ধরি, ডোম F এর যে কোন সদস্য x_1 ও x_2 হয়

তবে $x_1 = -1$, এবং $x_2 = 1$ নিয়ে পাই,

$F(x_1) = F(-1) = (1)^2 = 1$

এবং $F(x_2) = F(1) = 1^2 = 1$

অর্থাৎ $F(x_1) = F(x_2)$

সুতরাং F এক-এক ফাংশন নয়।

(iii) $F(x)=x^2$

ধরি, $y= x^2$

x	1	2	3	–1	–2	–3	-
y	1	4	9	1	4	9	-

$\therefore F=\{(1, 1)\ (2, 4), (3, 9)\ (-1, 1), (-2, 4)\ (-3, 9)---\}$

$\therefore\ F^{-1}=\{(1, 1)\ (4, 2), (9, 3)\ (1, -1), (4, -2)\ (9, -3)---\}$

কিন্তু প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $F=R_+$ বলে

$F^{-1}=\{(1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$

যেহেতু এ অন্বয়ে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড় নেই, সেহেতু ইহা একটি ফাংশন।

মূল্যায়নঃ

নিম্নের অন্বয়গুলোর-

(i) ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

(ii) এক এক কিনা যাচাই করুন।

(iii) ইনভার্স অন্বয়ে প্রকাশ করে অন্বয়টি এক এক কিনা তাও যাচাই করুন।

(ক) $F(x) = \sqrt{(1- x)}$

(খ) $F(x) = x- 1| + |x - 2|$

(গ) $S = \{(x, y):x\in A, y\in A$ এবং $y^2=x\}, A = \{-2, -1, 0, 1,2\}$

(ঘ) $F(x) = 1/(x-2)$

(ঙ) $F(x) = e^x$

(চ) $F(x) = x|$

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- গ

সমস্যা- ১ঃ

ডোমেন $F = R$, রেঞ্জ $F = R$

সমস্যা- ২ঃ

ডামেন $F = \{x : x \geq 0\} = R_+$

রেঞ্জ $F = \{ x : x \geq -1\}$

ফাংশন এবং এক-এক ফাংশন।

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৬**

পীথাগোরাসের উপপাদ্য (১)

ভূমিকা

খ্রিষ্টের জন্মের প্রায় ৬০০ বছর আগে গ্রীক পন্ডিত পীথাগোরাস ৩ একক, ৪ একক এবং ৫ একক বাহু বিশিষ্ট একটি সমকোণী ত্রিভুজ নিয়ে একটি সূত্র আবিষ্কার করেন। এটিই বর্তমানে পীথাগোরাসের উপপাদ্য নামে পরিচিত। কিন্তু পীথাগোরাসের প্রায় ১০০০ বছর পূর্বে মিশরীয় ভূমি জরিপকারীদেও এই উপপাদ্য সম্বন্ধে ধারণা ছিল বলে জানা যায়। এই অধিবেশনে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের ধারণা এবং বিভিন্ন পদ্ধতিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ সম্বন্ধে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- পীথাগোরাসের উপপাদ্যের ধারণা বর্ণনা করতে পারবেন।
- বিভিন্ন পদ্ধতিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: পীথাগোরাসের উপপাদ্যের ধারণা

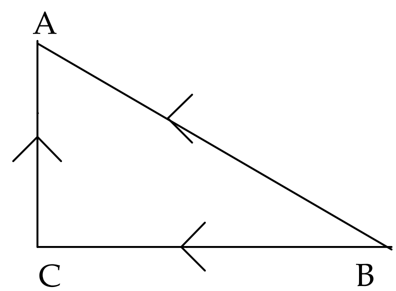
৩ একক, ৪ একক এবং ৫ একক বাহু বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। এটিই পীথাগোরাসের উপপাদ্য নামে পরিচিত।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, উপরিলি- খিত বর্ণনা অনুসারে ৩ একক, ৪ একক এবং ৫ একক বাহু বিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করে পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি সমীকরণের মাধ্যমে নিম্নের ছকে লেখার চেষ্টা করি।

পর্ব- খঃ বিভিন্ন পদ্ধতিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রমাণ

পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা যেতে পারে। যেমন- ইউক্লিড পদ্ধতি, ভেক্টর পদ্ধতি, গ্রাফ পেপার ব্যবহারের মাধ্যমে এবং বিকল্প পদ্ধতিতে প্রমাণ ইত্যাদি।

আসুন, এখন আমরা ভেক্টরের সাহায্যে পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি প্রমাণের চেষ্টা করি।



চিত্রে ΔABC সমকোণী এবং $\angle C$ সমকোণ

মনে করি $\overline{BC} = \underline{a}$, $\overline{CA} = \underline{b}$ এবং $\overline{AB} = \underline{c}$

এখানে $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ [ভেক্টরের সমতা অনুসারে]

এখন, ভেক্টরের ডট গুণন করে প্রমাণের বাকি অংশ নিচের ছকে করার চেষ্টা করি।

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৬**

মূল শিখনীয় বিষয়

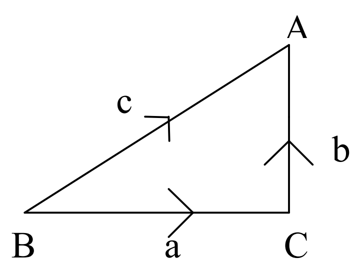
পীথাগোরাসের উপপাদ্য (১)

পীথাগোরাসের উপপাদ্য বিভিন্ন নিয়মে প্রমাণ।

প্রথম পদ্ধতি

- ৩ একক, ৪ একক এবং ৫একক বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকুন।
- প্রত্যেক বাহুর নাম দিন এবং প্রত্যেক বাহুতে বর্গক্ষেত্র অংকন করুন
- ৩ একক বর্গক্ষেত্রেটিকে ক্ষুদ্র একক বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত করুন। (প্রত্যেক বাহুকে ৩ অংশে বিভক্ত করুন এবং বিপরীত বাহু পর্যন্ত বর্ধিত করুন)
- অনুরূপভাবে ৪ একক এবং ৫ একক বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রকে ক্ষুদ্র একক বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত করুন।
- প্রাপ্ত একক বর্গক্ষেত্রের মধ্যে সমতার সম্পর্ক স্থাপন করুন।
- সম্পর্কটিকে ত্রিভুজের বাহুর নামের মাধ্যমে ভাষায় প্রকাশ করুন।
- এই সর্ম্পকটি পীথাগোরাসের উপপাদ্য।

দ্বিতীয় পদ্ধতি:



চিত্রে ΔABC সমকোণী এবং $\angle C$ সমকোণ

মনে করি $\overline{BC} = \underline{a}$, $\overline{CA} = \underline{b}$ এবং $\overline{AB} = \underline{c}$

এখানে $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

বা, $(\underline{a} + \underline{b}) \bullet (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{c} \bullet \underline{c}$

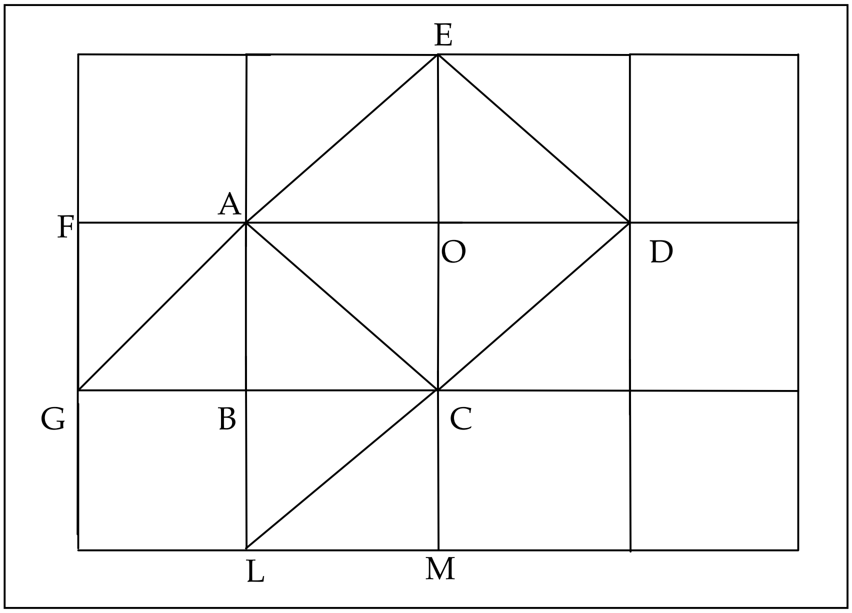
বা, $|a|^2 + |b|^2 + 2|a| \,.\, |b| \cos C = |c|^2$

বা, $a^2 + b^2 = c^2$; [$\cos C = \cos 90^0 = 0$]

অতএব $a^2 + b^2 = c^2$ প্রমাণিত।

পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হলো।

তৃতীয় পদ্ধতি:



- ৪/৫/৬ একক বিশিষ্ট একটি গ্রাফপেপার তৈরী করি।
- এই গ্রাফ পেপারে সমদ্বিবাহু একটি সমকোণী ΔABC অংকন করতে হবে।
- AC অতিভুজের উপর ACDE বর্গক্ষেত্র অংকন এবং CE ও AD কর্ণদ্বয় যোগ করুন।
- লম্ব AB ও ভূমি BC এর উপর যথাক্রমে AFGB এবং BCML বর্গক্ষেত্র আঁকুন।
- AFGB বর্গক্ষেত্রের AG কর্ণ এবং BCML বর্গক্ষেত্রের CL কর্ণ যোগ করুন।
- চিত্র থেকে AB বাহুর উপর অংকিত বর্গক্ষেত্র থেকে দুইটি ত্রিভুজ এবং BC বাহুর উপর অংকিত বর্গক্ষেত্র থেকে ২টি ত্রিভুজ পাওয়া যাবে। এই ত্রিভুজ চারটি কেটে নিলে দেখা যাবে প্রত্যেকটি সর্বসম। আবার AC বাহুর উপর অংকিত বর্গক্ষেত্রে ৪ টি সর্বসম ত্রিভুজ পাওয়া যাবে (প্রতিস্থাপন করে)।

এবার প্রতিস্থাপন করে দেখুন AB বাহুর উপর অংকিত বর্গ থেকে দুইটি ত্রিভুজ এবং BC বাহুর উপর অংকিত বর্গ থেকে ২টি ত্রিভুজ মোট ৪টি ত্রিভুজ পাওয়া গেল তা AC বাহুর উপর অংকিত বর্গে যে ৪ টি সর্বসম ত্রিভুজ আছে তার সমান।

অতএব, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
অর্থাৎ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৭**

পীথাগোরাসের উপপাদ্য (২)

ভূমিকা

গণিতের তাত্ত্বিক ও প্রায়োগিক উভয়ক্ষেত্রেই পীথাগোরাসের উপপাদ্য অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। বিভিন্ন গাণিতিক সূত্র প্রমাণ ও সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রয়োগ করা হয়। তাই গণিতের শিক্ষক ও শিক্ষার্থী উভয়েরই পীথাগোরাসের উপপাদ্য সম্পর্কে ধারণা থাকা প্রয়োজন। আমরা জানি, পীথাগোরাসের উপপাদ্য একাধিকভাবে প্রমাণ করা যায়। ইউক্লিডের পদ্ধতি ব্যবহার করে যেমন এটি প্রমাণ করা যায়, তেমনি বিকল্প পদ্ধতিতেও তা প্রমাণ করা সম্ভব। এই উপপাদ্য সম্পর্কে সম্যক ধারণার জন্য উভয় প্রকার প্রমাণ সম্বন্ধে শিক্ষক-শিক্ষার্থীদের জ্ঞান থাকা প্রয়োজন, যাতে শিক্ষার্থীরা প্রায়োগিক গণিতের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের জন্য উপযুক্ত পদ্ধতি ব্যবহারে সক্ষম হয়।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- ইউক্লিডীয় নিয়মে উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন।
- ইউক্লিডীয় নিয়ম ছাড়া অন্য পদ্ধতিতে উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: ইউক্লিডীয় নিয়মে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ

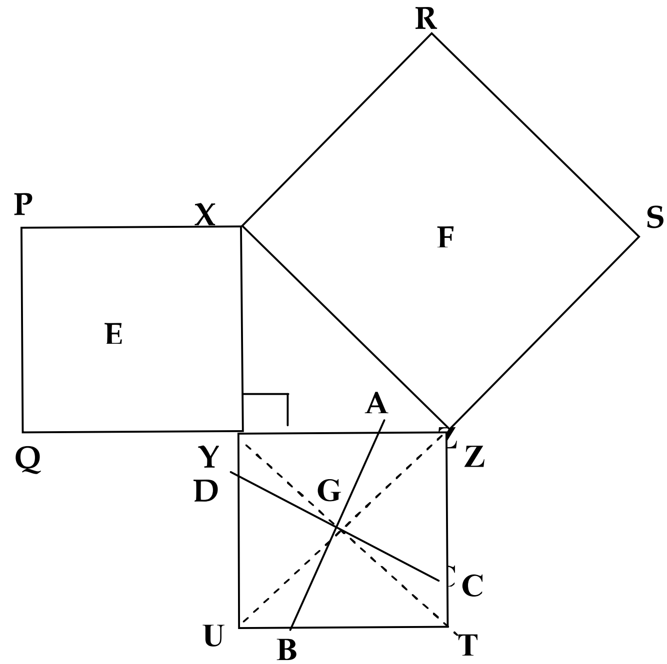
পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণের ক্ষেত্রে ইউক্লিডের পদ্ধতি একটি বহুল ব্যবহৃত ও বহুল আলোচিত পদ্ধতি। ইউক্লিডের পদ্ধতি ব্যবহার করে সহজেই পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ করা যায়। সহজ সরল বর্ণনা ও শিখন উপযোগী উপকরণের সাহায্যে খুব সহজেই তা আয়ত্ব করা যায়।

আসুন বন্ধুরা, এবারে আমরা ইউক্লিডীয় পদ্ধতি ব্যবহার করে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ করি।

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই:

১) XYZ সমকোণী ত্রিভুজের বাহু তিনটির ওপর E,F,G বর্গ তিনটি এঁকে নিন।

২) YZTU বর্গের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল করে RX এবং DC এর সমান্তরাল করে XZ এঁকে নিন।



৩) E ও G বর্গ দুইটিকে ট্রেসিং পেপারে কপি করে কেটে নিন।

৪) G বর্গকে AB ও CD বরাবর কেটে চার টুকরা করুন।

৫) E ও G বর্গের টুকরা চারটিকে F বর্গের ওপর স্থাপন করে পুরোপুরি মিলিয়ে নিন।

এখন আমরা লক্ষ্য করি যে,

F বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = E বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + G বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

বা, $XZ^2 = XY^2 + YZ^2$

পীথাগোরাসের উপপাদ্যটির সত্যতা প্রমাণিত হল।

পর্ব- খঃ ইউক্লিডীয় নিয়ম ছাড়া পীথাগোরাসের উপপাদ্য বিশ্লেষণ

পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণের ক্ষেত্রে ইউক্লিডের পরবর্তীকালে গণিতবিদগণ বিকল্প পদ্ধতি বের করেন যা পূর্বের তুলনায় অপেক্ষাকৃত সহজ। এই পদ্ধতিতে ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল যে কোন তিনটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান, এই সূত্র ব্যবহার করে এই উপপাদ্য প্রমাণ করা যায়। এজন্য এ পদ্ধতিকে ট্রাপিজিয়াম পদ্ধতিও বলা হয়।

আসুন শিক্ষার্থীবৃন্দ এবারে আমরা বিকল্প পদ্ধতিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ করি।

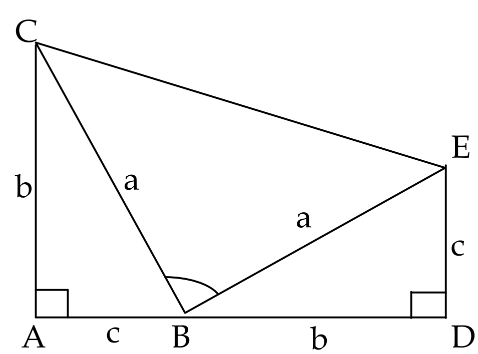
বিকল্প প্রমাণঃ

মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ, BC = a, AB = c ও AC = b.

প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 = AC^2 + AB^2$

অর্থাৎ, $a^2 = b^2 + c^2$

অঙ্কনঃ AB বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন BD = AC = b হয়। D বিন্দুতে AD রেখাংশের উপর লম্বভাবে DE রেখাংশ আঁকি যেন DE=AB=c হয়। C,E ও B,E যোগ করি।



প্রমাণঃ এখন, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEB$ এ

AB=DE=c, AC=DB=b [অঙ্কন অনুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDB$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEB$

$\therefore$ BC=EB=a এবং $\angle BCA = \angle EBD$

এখন যেহেতু $CA \perp AD$ এবং $ED \perp AD$ সুতরাং $CA \parallel ED$

অতএব, CADE একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, $\angle ABC + \angle BCA$ = এক সমকোণ।

$\therefore$ $\angle ABC + \angle EBD$ = এক সমকোণ

কিন্তু $\angle ABC + \angle CBE + \angle EBD$ = দুই সমকোণ

$\therefore \angle CBE$ = এক সমকোণ

এখন, CADE ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\triangle$ ক্ষেত্র CAB এর ক্ষেত্রফল + $\triangle$ ক্ষেত্র CBE এর ক্ষেত্রফল + $\triangle$ ক্ষেত্র EBD এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ $\frac{1}{2}AD(AC + DE) = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2 + bc$

বা, $\frac{1}{2}(c + b)(b + c) = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}(b + c)^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}(b^2 + 2bc + c^2) = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}b^2 + bc + \frac{1}{2}c^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a^2$

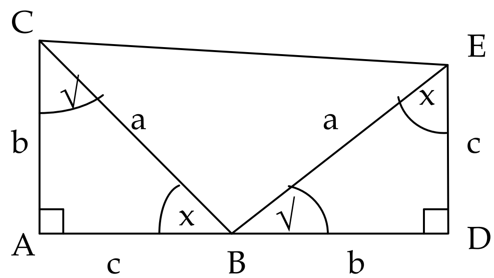
$\therefore b^2 + c^2 = a^2$

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৭**

মূল শিখনীয় বিষয়

পীথাগোরাসের উপপাদ্য (২)

বিকল্প নিয়মে (ট্রাপিজিয়াম পদ্ধতিতে) পীথাগোরাসের উপপাদ্য প্রমাণ



চিত্র ক

- এখানে ΔABC সমকোণী। 'চিত্র ক' এর সমকোণী ত্রিভুজ, বাহু এবং কোণের চিহ্ন দেওয়া আছে। তা দেখে সমান সমান বাহু ও কোণগুলো সনাক্ত করুন।
- এখানে ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে তার ক্ষেত্রফল, ভূমি ও লম্বের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।
- প্রথমে ΔABC এঁকে তা থেকে 'চিত্র ক' কিভাবে সম্পন্ন করা হয়েছে তা লিখুন।
- 'চিত্র ক' থেকে প্রমাণ করুন $\Delta ABC \cong \Delta BDE$।
- দেখান যে, ADEC একটি ট্রাপিজিয়াম।
- এই ADEC ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল কত? (ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল এর সূত্র ব্যবহার করুন)
- ADEC ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল কোন তিনটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান?
- এই তিনটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত?
- ADEC ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল=ত্রিভুজত্রয়ের ক্ষেত্রফলের যোগফল তা গাণিতিক ভাষায় লিখুন।

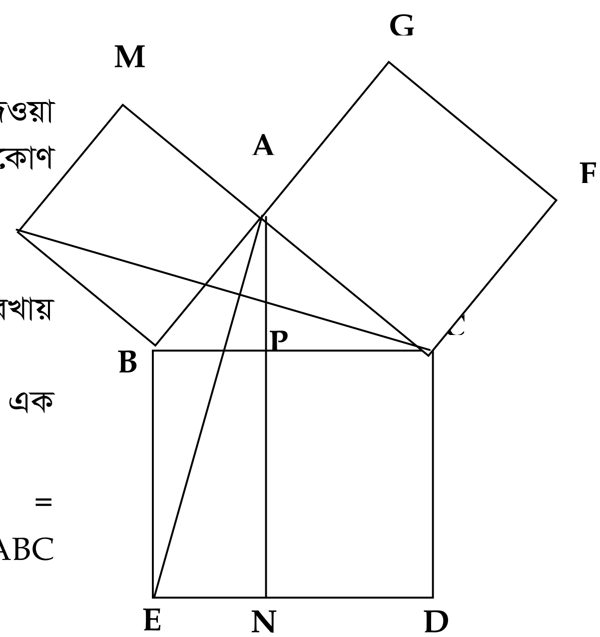
- এই সমতা থেকে প্রমাণ করুন, $a^2 = b^2 + c^2$।
- এবার পীথাগোরাসের উপপাদ্য কী তা লিখুন এবং এই সমতার সথে মিল করে কী পেলেন লিখুন।

উপপাদ্য

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A$ = এক সমকোণ।
প্রমাণ করতে হবে যে, অতিভুজ BC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।
অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

অঙ্কনঃ ABC ত্রিভুজের বহির্ভাগে BCDE, ACFG এবং ABLM বর্গক্ষেত্র তিনটি অঙ্কন করি। A বিন্দু দিয়ে BE রেখাংশের সমান্তরাল AN রেখাংশ অঙ্কন করি যা BC রেখাংশকে P বিন্দুতে এবং ED রেখাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। A ও E এবং C ও L যোগ করি।



প্রমাণঃ $\angle BAC$ =এক সমকোণ (দেওয়া আছে) এবং $\angle BAM$ = এক সমকোণ [$\because$ ABLM একটি বর্গক্ষেত্র]

$\angle BAC + \angle BAM$ = ২ সমকোণ

$\therefore$ CA এবং AM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

আবার, $\angle CBE = \angle ABL$ = এক সমকোণ।[অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore \angle CBE + \angle ABC = \angle ABL + \angle ABC$ [উভয়পক্ষে $\angle ABC$ যোগ করে]

$\therefore \angle ABE = \angle CBL$

এখন, $\triangle ABE$ ও $\triangle CBL$ এ
AB=BL, BE=BC এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABE$ =অন্তর্ভুক্ত $\angle CBL$

∴ $\triangle$ABE এর ক্ষেত্রফল = $\triangle$CBL এর ক্ষেত্রফল

∴ $\triangle$ ক্ষেত্র ABE এর ক্ষেত্রফল =$\triangle$ ক্ষেত্র CBL এর ক্ষেত্রফল।

এখন, $\triangle$ABE এবং আয়তক্ষেত্র BPNE একই ভূমি BE এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাংশ যুগল BE ও AN এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ আয়তক্ষেত্র BPNE এর ক্ষেত্রফল = 2 ($\triangle$ক্ষেত্র ABE এর ক্ষেত্রফল)

আবার, $\triangle$CBL এবং ABLM বর্গক্ষেত্র একই ভূমি BL এর উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাংশ যুগল BL এবং CM এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ বর্গক্ষেত্র ABLM এর ক্ষেত্রফল = 2 ($\triangle$ক্ষেত্র CBL এর ক্ষেত্রফল)

∴ আয়তক্ষেত্র BPNE এর ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্র ABLM এর ক্ষেত্রফল।

একইভাবে, A, D এবং B, F যোগ করে প্রমাণ করা যায় যে,

আয়তক্ষেত্র CDNP এর ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্র ACFG এর ক্ষেত্রফল।

∴ আয়তক্ষেত্র BPNE এর ক্ষেত্রফল + আয়তক্ষেত্র CDNP এর ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্র ABLM এর ক্ষেত্রফল + বর্গক্ষেত্র ACFG এর ক্ষেত্রফল

অর্থাৎ, বর্গক্ষেত্র BCDE এর ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্র ABLM এর ক্ষেত্রফল + বর্গক্ষেত্র ACFG এর ক্ষেত্রফল

∴ BC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

অর্থাৎ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

মূল্যায়নঃ

১। ইউক্লিডীয় পদ্ধতি ছাড়া বিকল্প পদ্ধতিতে পীথাগোরাসের উপপাদ্যটি প্রমাণ করুন।

ইউনিট-৩ **অধিবেশন- ৩৮**

সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজ (১)

ভূমিকা

জ্যামিতিক আকৃতিসমূহের মধ্যে অন্যতম হলো ত্রিভুজ। ত্রিভুজ সংক্রান্ত নানা আলোচনা মানুষের গাণিতিক জ্ঞান বৃদ্ধিতে বিশেষ অবদান রেখেছে। রেখা ও কোণ ভেদে ত্রিভুজের আকৃতির নানারূপ পার্থক্য দেখা যায়, যেমনঃ সমবাহু ত্রিভুজ, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, বিষমবাহু ত্রিভুজ, সমকোণী, স্থূলকোণী ও সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। ত্রিভুজের রেখা ও কোণ ভেদে ত্রিভুজের মধ্যে সর্বসমতা ও সাদৃশ্য লক্ষ্য করা যায়। ত্রিভুজ সম্পর্কিত শিক্ষণ-শিখনে ত্রিভুজের কোণ, বাহু সম্পর্কে যেমন স্বচ্ছ ধারণা আবশ্যক একইরকমভাবে কোণ ও বাহুর ভিত্তিতে একাধিক ত্রিভুজের মধ্যকার সর্বসমতা ও সাদৃশ্য সম্পর্কে বিশেষ ধারণা একান্ত আবশ্যক। এ অধিবেশনে ত্রিভুজের সর্বসমতা ও সাদৃশ্য সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- সর্বসম সদৃশ ত্রিভুজের সংজ্ঞা বলতে পারবেন।
- সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজের মধ্যে পার্থক্য চিহ্নিত করতে পারবেন।
- সর্বসম ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যটি বর্ণনা ও প্রমাণ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজ

সমসংখ্যক বাহু বিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের মিলকরণের ফলে যদি পরিমাপ অর্থে তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং দৈর্ঘ্য অর্থে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমান হয় তবে বহুভুজ দুইটিকে সর্বসম বলে।

আবার, সমান সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট দুইটি বহুভূজের একটির শীর্ষগুলো যদি অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে বহুভুজ দুইটির-

- অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়, এবং
- অনুরূপ বাহুযুগলের অনুপাত সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ বলা হয়।

শিক্ষার্থী বন্ধুরা, আসুন এবারে আমরা সর্বসম ত্রিভুজ ও সদৃশ ত্রিভুজের সংজ্ঞা নিচের ছকে লেখার চেষ্টা করি।

সর্বসম ত্রিভুজঃ

১। একটি ককশীট নিন। এতে এরূপ একটি ত্রিভুজ ABC আঁকুন যার AB=7 ইঞ্চি, BC=7 ইঞ্চি এবং AC=5 ইঞ্চি হয়।

২। $\triangle$ABC এর সমান করে ককশীটটি কেটে নিন।

৩। আরেকটি ককশীটের উপর $\triangle$ABC রেখে সমান করে কেটে নিন।

৪। এ ত্রিভুজটিকে A এর স্থলে D, B এর স্থলে E এবং C এর স্থলে F নামকরণ করুন।

৫। এবার ত্রিভুজ দুইটির বাহু এবং কোণগুলো মেপে দেখুন AB=DE, BC=EF, AC=DF এবং $\angle$ABC=$\angle$DEF, $\angle$BCA=$\angle$EFD, $\angle$BAC = $\angle$EDF হয় কিনা।

৬। যদি অনুরূপ বাহু ও কোণগুলো সমান হয় তাহলে বলা যাবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

৭। এবারে সর্বসম ত্রিভুজের সংজ্ঞা লিখুন।

সদৃশ ত্রিভুজঃ

১. প্রথমে একটি ককশীটের উপর যেকোন পরিমাপে একটি $\triangle$ABC আঁকুন।

২. $\triangle ABC$ পরিমান ককশীট কেটে নিন।

৩. এখন এমন একটি ত্রিভুজ DEF আঁকুন যাতে $\angle ABC = \angle DEF$ এবং $\angle BAC = \angle EDF$ হয়।

৪. $\triangle DEF$ কেটে নিন।

৫. এখন ত্রিভুজ দুটির AB, DE,BC, DF বাহুগুলো মেপে দেখুন $AB/DE = BC/DF$ হয় কিনা।

৬. ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ কোণগুলো সমান এবং বাহুযুগলের অনুপাত সমান হওয়ায় তারা সদৃশ।

৭. এবারে সদৃশ ত্রিভুজের সংজ্ঞা লিখুন।

৮. ত্রিভুজ দুটিকে সদৃশকোণী ত্রিভুজও বলা হয়।

পর্ব- খঃ সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজের মধ্যে পার্থক্য

সর্বসম ত্রিভুজের ও সদৃশ ত্রিভুজের মধ্যে সুস্পষ্ট পার্থক্য বিদ্যমান। সদৃশ ত্রিভুজ সমূহের আকৃতি এক হলেও আকার ভিন্ন হতে পারে। আবার সর্বসম ত্রিভুজ সমূহের আকার ও আকৃতি উভয়ই এক। এছাড়া দুইটি ত্রিভুজের কোণসমূহ যথাক্রমে সমান হলে তাকে সদৃশ ত্রিভুজ বলা যায়। কিন্তু সর্বসম ত্রিভুজের তিন বাহু পরস্পর সমান হতে হয়। দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে অবশ্যই তারা সদৃশ হবে কিন্তু দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে তারা সর্বসম নাও হতে পারে। শিক্ষার্থী বন্ধুরা আসুন এবারে সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজের মধ্যকার পার্থক্য খুঁজে বের করে লিখি।

সদৃশ ত্রিভুজ	সর্বসম ত্রিভুজ
■	
■	
■	
■	
■	
■	
■	
■	

পর্ব- গঃ সর্বসম ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যের বর্ণনা ও প্রমাণ

ত্রিভুজের সর্বসমতার ক্ষেত্রে অনেকগুলি উপপাদ্য রয়েছে। যেমন যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু যেমন কখ, খগ, কগ অপর ত্রিভুজের তিনবাহুর পফ, ফব, বম এর সমান হয় তাহলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে। এরকমভাবে সর্বসম ত্রিভুজের সাধারণ বৈশিষ্ট্য অনুসারে সর্বসম ত্রিভুজ সংক্রান্ত বেশ কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণের চেষ্টা করি। আসুন আমরা প্রথমে সর্বসম ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো বোঝবার এবং বর্ণনা করার চেষ্টা করি।

ক. উভয় ত্রিভুজের তিন বাহুর যথাক্রমিক সমতা।

১) $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ দু'টি ত্রিভুজ আঁকুন।

২) $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর বাহুগুলো পরিমাপ করে দেখুন।

৩) $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর বাহুগুলো পরিমাপ করে দেখুন।

৪) যদি $AB=DE$; $BC=EF$ এবং $AC=DF$ হয় তবে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম।

খ. উভয় ত্রিভুজের দুইটি করে কোণ ও তাদের অন্তর্গত বাহুর সমতা।

১) $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ দু'টি ত্রিভুজ আঁকুন।

২) $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর $\angle ABC$, $\angle ACB$, $\angle DEF$, $\angle DFE$ কোণগুলো পরিমাপ করে দেখুন।

৩) $\angle ABC=\angle DEF$, $\angle ACB=\angle DFE$ হয় কিনা দেখুন।

৪) যেহেতু $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$-এর কোণদ্বয় এবং দুটি কোণের অন্তর্গত বাহু $BC=EF$। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

গ. উভয় ত্রিভুজের দুইটি করে বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমতা।

১) $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ দু'টি ত্রিভুজ আঁকুন।

২) পরিমাপ করে দেখুন, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর AB=DE, BC= EF এবং বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $\angle ABC = \angle DEF$।

৩) সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

ঘ. উভয় ত্রিভুজের দুইটি করে কোণ ও যে কোন এক বাহুর সমতা।

১) $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ দু'টি ত্রিভুজ আঁকুন।

২) $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ ত্রিভুজের কোণগুলো পরিমাপ করুন।

৩) ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle ABC = \angle DEF$ এবং $\angle ACB = \angle DFE$।

৪) এছাড়াও এদের একটি কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় AB = DE হয় কিনা তা মিলিয়ে নিন।

৫) যেহেতু ত্রিভুজ দুইটির দুই জোড়া কোণ এবং এদের একটির বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান তাই এরা সর্বসম।

ঙ. দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-অতিভুজ ও অপর যে কোন এক বাহু-বাহু সমতা।

১) একটি ট্রেসিং পেপারে একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকুন।

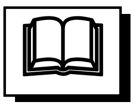
২) $\triangle ABC$ এর অনুরূপ একটি সমকোণী ত্রিভুজ DEF আঁকুন যার অতিভুজ DF= অতিভুজ AC হয়।

৩) যদি $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$-এর BC = EF হয় তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

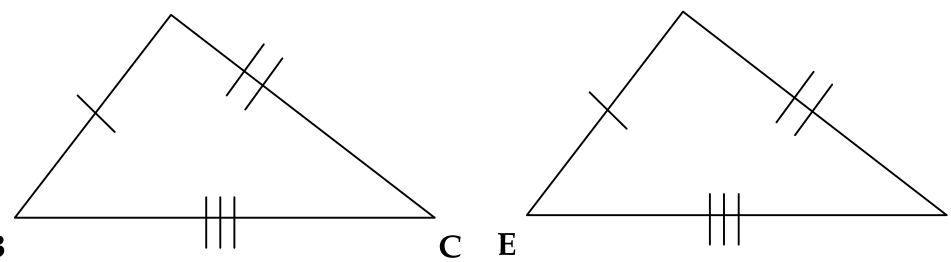
ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৮**

মূল শিখনীয় বিষয়

সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজ (১)



সর্বসম (Congruent): সমসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের কোণ মিলকরণের ফলে যদি অনুরূপ কোণগুলো সমান (পরিমাপ অর্থে) হয় এবং অনুরূপ বাহুগুলো সমান (দৈর্ঘ্য অর্থে) হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সর্বসম বলা হয়। (ত্রিভুজও এক ধরনের বহুভুজ)



সদৃশ (Similar): সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিলে যায় যে, বহুভুজ দুইটির-

- অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং
- অনুরূপ বাহুযুগলের অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ বলা হয়।

সদৃশকোণী (Equiangular): সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো ক্রম অনুসারে অপরটির কোণগুলোর সমান হলে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী (Equiangular) বলা হয়।

সদৃশ ত্রিভুজের সমালোচনা

সদৃশ ত্রিভুজের আকৃতি একই কিন্তু সাইজ (Size) বা আকার আলাদাও হতে পারে। অর্থাৎ দেখতে একই রকম; কিন্তু বড় বা ছোট হতে পারে।

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ হবে যদিঃ

১. দুইটি ত্রিভুজ থেকে দুইটি করে নেওয়া, এরূপ দুই জোড়া কোণ পরস্পর সমান হয়।

২. যে কোন দুই বাহুর অনুপাত অপর দুই বাহুর অনুপাতের সমান হয়।

সর্বসম ত্রিভুজের আলোচনা

সর্বসম ত্রিভুজ বিশেষ ধরনের সদৃশ ত্রিভুজ। সর্বসম ত্রিভুজের আকার ও আকৃতি একই। নিচের চারটি শর্তে দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হয়:

১. উভয় ত্রিভুজের তিন বাহুর যথাক্রমিক সমতা। সংক্ষেপে লেখা যায়ঃ বাবাবা (SSS)

২. উভয় ত্রিভুজের দুইটি করে বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমতা। বাকোবা (SAS)

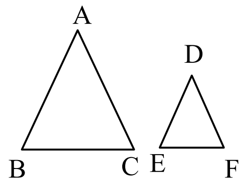
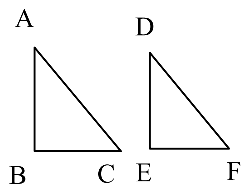
৩. উভয় ত্রিভুজের দুইটি করে কোণ ও যে কোন এক বাহুর সমতা। কোবাকো/ কোকোবা

৪. দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-অতিভুজ ও অপর যে কোন এক বাহু-বাহু সমতা। অতিবা/(HS)

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয় তবে তারা সর্বসম।

দুইটি ত্রিভুজের কোণগুলো যদি-

- ভিন্ন হয়, তবে ত্রিভুজগুলো সদৃশ/সর্বসম কোনটিই হয় না।
- সমান হয়, তবে ত্রিভুজগুলো সদৃশ হয়। (AAA)
- সমান এবং অনুরূপ বাহু সমান দৈর্ঘ্যের হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (SSS)

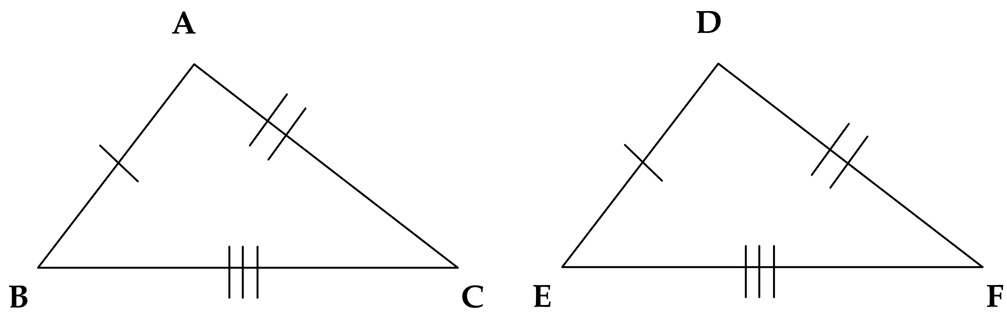
ত্রিভুজের সম্পর্ক	প্রতীকীয়রূপ	চিত্ররূপ	নূন্যতম শর্ত	সার্বিক বৈশিষ্ট্য
সদৃশ	$\Delta ABC \approx \Delta DEF$		▪ $\angle A = \angle D$, ▪ $\angle B = \angle E$ ▪ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$	$\angle A = \angle D$ $\angle B = \angle E$ $\angle C = \angle F$ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$
সর্বসম	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$		▪ বাবাবা (SSS) ▪ বাকোবা ▪ কোবাকো/ কাকোবা ▪ অতিবা	$\angle A = \angle D$ $\angle B = \angle E$ $\angle C = \angle F$ $AB = DE$ $BC = EF$ $AC = DF$ $\Delta ABC = \Delta DEF$

সদৃশ ও সর্বসম ত্রিভুজের তুলনা

সদৃশ ত্রিভুজ	সর্বসম ত্রিভুজ
১. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের আকৃতি এক; কিন্তু, আকার ভিন্ন হতে পারে। অর্থাৎ ক্ষেত্রফল সমান নাও হতে পারে।	১. সর্বসম ত্রিভুজের আকৃতি এক এবং আকারও এক। অর্থাৎ ক্ষেত্রফল সমান।
২. ২. যে কোন দুই বাহুর অনুপাত অনুরূপ দুই বাহুর অনুপাতের সমান। অর্থাৎ সদৃশ ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক।	২. সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু যুগল পরস্পর সমান।
৩. ৩. একটির তিন কোণ যথাক্রমে অপরটির তিন কোণের সমান হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।	৩. একটির তিন বাহু যথাক্রমে অপরটির তিন বাহুর সমান হলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।
৪. ৪. উভয় ত্রিভুজের দুই জোড়া কোণ পরস্পর সমান হলেই, তৃতীয় জোড়াও পরস্পর সমান হবে।	৪. দুই জোড়া বাহু পরস্পর সমান হলে, তৃতীয় জোড়া সমান নাও হতে পারে। তবে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান হলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবে।
৫. ৫. উভয় ত্রিভুজের তিন জোড়া কোণ, তিন জোড়া বাহু ও ক্ষেত্রফলের মধ্যে কেবল তিন জোড়া কোণ পরস্পর সমান।	৫. তিন জোড়া কোণ পরস্পর সমান, তিন জোড়া বাহু পরস্পর সমান এবং ক্ষেত্রফলও পরস্পর সমান।
৬. ৬. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে সর্বসম নাও হতে পারে	৬. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে অবশ্যই সদৃশ হবে।

(১) বাবাবা/SSS

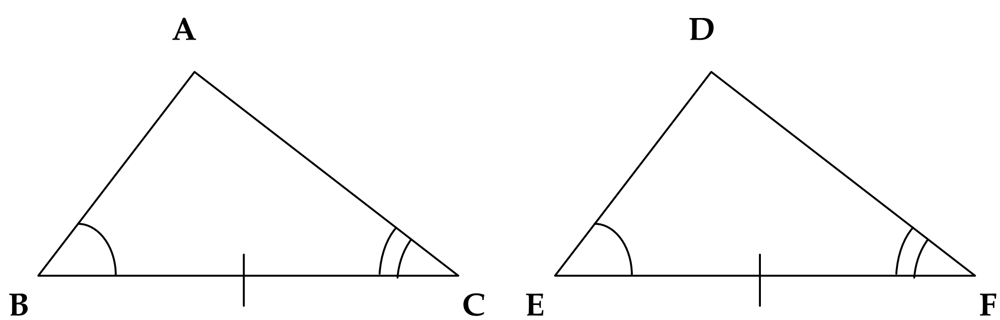
যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয় তবে তারা সর্বসম। (বাবাবা/SSS)



(২) কোবাকো/ASA

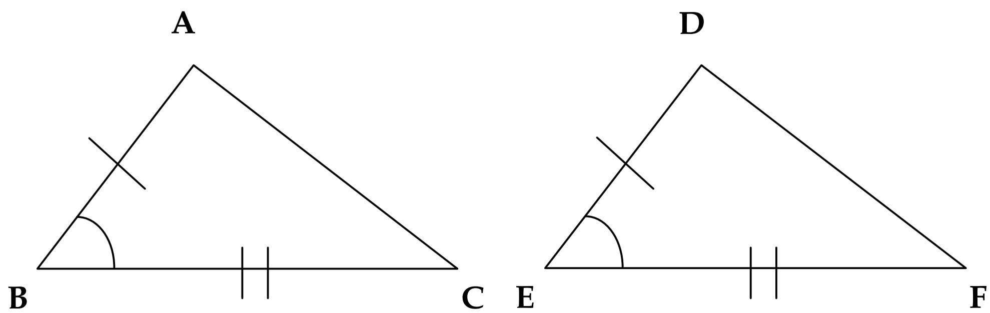
যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং দুইটি কোণের অন্তর্গত বাহু, অপর ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং দুইটি কোণের অন্তর্গত বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

(কোবাকো/ASA)



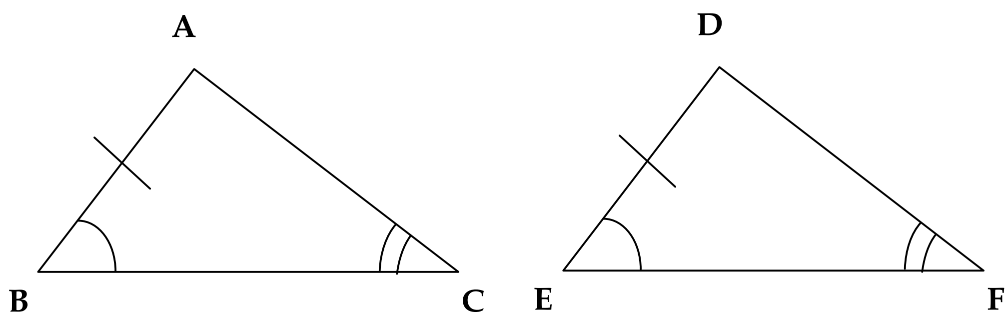
(৩) বাকোবা/SAS

যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ, অপর কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (বাকোবা/SAS)



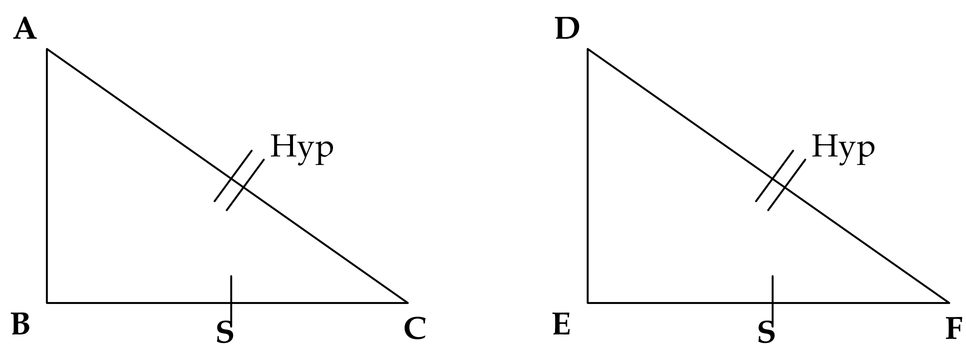
(৪) <u>কোকোবা/AAS</u>

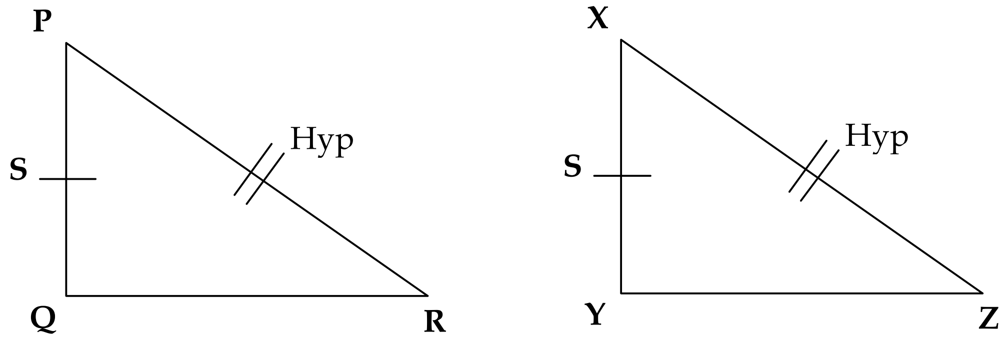
যদি কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং এদের একটির বিপরীত বাহু, অপর ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। (<u>কোকোবা/AAS</u>)



(৫) <u>অতিবা/Hyp-S</u>

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অপর যে কোন একটি বাহু সমান হয়, তবে সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হয়। (<u>অতিবা/Hyp-S</u>)





সদৃশ ও সর্বসম

(১) বাবাকো/SSA

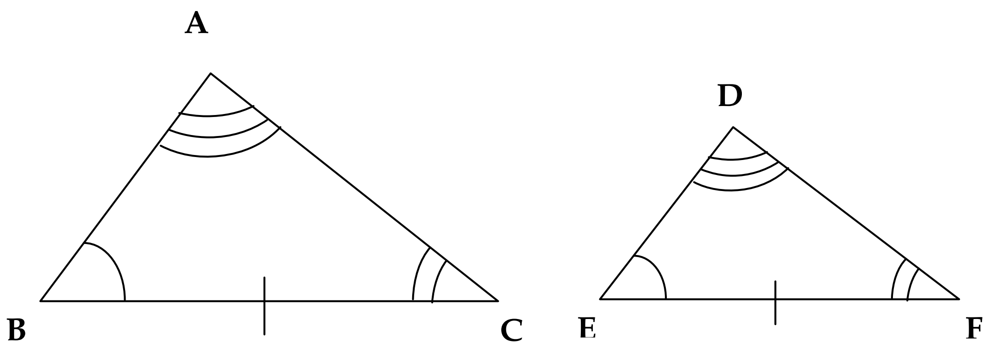
যদি দুইটি ত্রিভুজের দুই বাহু এবং একটি বর্হিভুক্ত কোণ সমান হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হতেও পারে, আবার নাও পারে কিন্তু সদৃশ হবে।

(২) কোকোবা/AAS

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ, অপর ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমান হয় ,তবে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ কিন্তু সর্বসম নয়। তবে এর সাথে একটি করে বাহু সমান হলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

(৩) কোকোকো/AAA

দুইটি ত্রিভুজ থেকে দুই জোড়া কোণ সমান হলেই ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে। তবে দুই জোড়া কোণ সমান হলে তৃতীয় জোড়া সমান হবেই।



দুই জোড়া বাহুর অনুপাত সমান হলেই ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে। তবে তৃতীয় জোড়ার অনুপাতও একই হবে। অর্থাৎ সদৃশ ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক।

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF},$$

অর্থাৎ, $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ বা, $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$

মূল্যায়নঃ

১। সর্বসম ত্রিভুজ কাকে বলে?

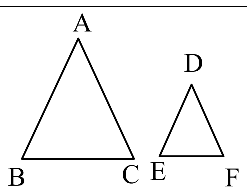
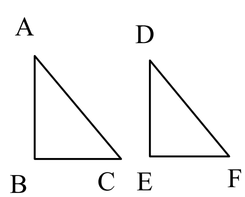
২। সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভূজের পার্থক্য কী?

সম্ভাব্য উত্তর

মূল্যায়ন- ১ঃ

সমসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভূজের মিলকরণের ফলে যদি পরিমাপ অর্থে তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং দৈর্ঘ্য অর্থে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমান হয় তা বহুভুজ দুইটিকে সর্বসম বলে।

মূল্যায়ন- ২ঃ

ত্রিভুজের সম্পর্ক	প্রতীকীয় রূপ	চিত্ররূপ	ন্যূনতম শর্ত	সার্বিক বৈশিষ্ট্য
সদৃশ	$\Delta ABC \approx \Delta DEF$		▪ $\angle A=\angle D$, ▪ $\angle B=\angle E$ ▪ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$	$\angle A=\angle D$ $\angle B=\angle E$ $\angle C=\angle F$ $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DF}$
সর্বসম	$\Delta ABC \cong \Delta DEF$		▪ বাবাবা (SSS) ▪ বাকোবা ▪ কোবাকো /কাকোবা ▪ অতিবা	$\angle A=\angle D$ $\angle B=\angle E$ $\angle C=\angle F$ AB=DE BC=EF AC=DF $\Delta ABC = \Delta DEF$

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৯**

সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজ (২)

ভূমিকা

ত্রিভুজের আকার ও আকৃতি অনুযায়ী ত্রিভুজকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। এরা হলো সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজ। সর্বসম ত্রিভুজ বিশেষ ধরনের সদৃশ ত্রিভুজ। সর্বসম ত্রিভুজের আকার ও আকৃতি একই। অন্যদিকে সদৃশ ত্রিভুজের আকৃতি একই হলেও সাইজ বা আকার আলাদাও হতে পারে। অর্থাৎ দেখতে একই রকম কিন্তু বড় বা ছোট হতে পারে। এক্ষেত্রে জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কিত জ্ঞান শিক্ষার্থীদের সদৃশ ও সর্বসম ত্রিভুজ চিহ্নিতকরণে বিশেষ সহায়ক হয়। বর্তমান অধিবেশনে প্রশিক্ষণার্থীদের জ্যামিতিক অনুপাত ও সাদৃশ্য সম্পর্কিত উপপাদ্য ও তার যৌক্তিক প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- জ্যামিতিক অনুপাত চিহ্নিত করতে পারবেন।
- জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্যসমূহ প্রয়োগ করতে পারবেন।
- সাদৃশ্য সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- কঃ জ্যামিতিক অনুপাত

সদৃশ ত্রিভুজের ধারণার ক্ষেত্রে জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কিত জ্ঞান অত্যাবশ্যক। কারণ ত্রিভুজের আকার সমান না হলেও তাদের বাহু ও কোণসমুহের সমান অনুপাতের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হতে পারে।

বন্ধুরা আসুন এবারে আমরা দুইটি সমউচ্চতা বিশিষ্ট ত্রিভুজের মধ্যকার ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করি।

১। একটি পোস্টার পেপারে একটি ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC আঁকুন।

২। $\triangle$ABC-এর ভূমি BC এর উপর A শীর্ষবিন্দু থেকে একটি লম্ব আঁকুন যা BC কে বিন্দুতে ছেদ করে।

৩। অপর একটি পোস্টার পেপারে DEF এমন একটি ত্রিভুজ আঁকুন যাতে লম্ব Aa = লম্ব Dd হয়।

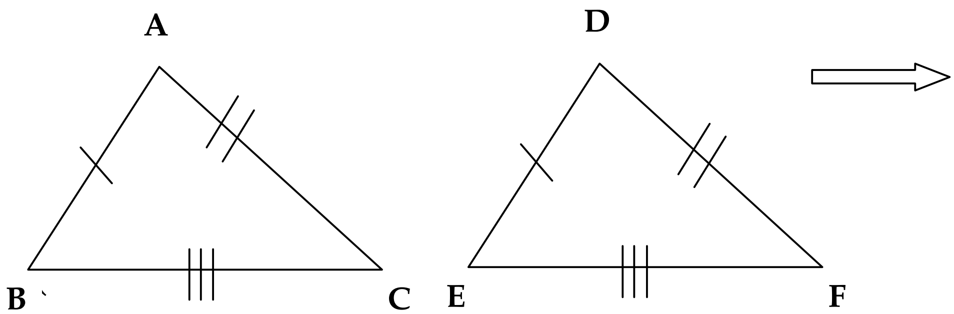
৪। এখন ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র ব্যবহার করে $\triangle$ABC এবং $\triangle$DEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

৫। এবার ত্রিভুজদ্বয়ের দুই বাহু BC ও EF পরিমাপ করে এদের অনুপাত নির্ণয় করুন।

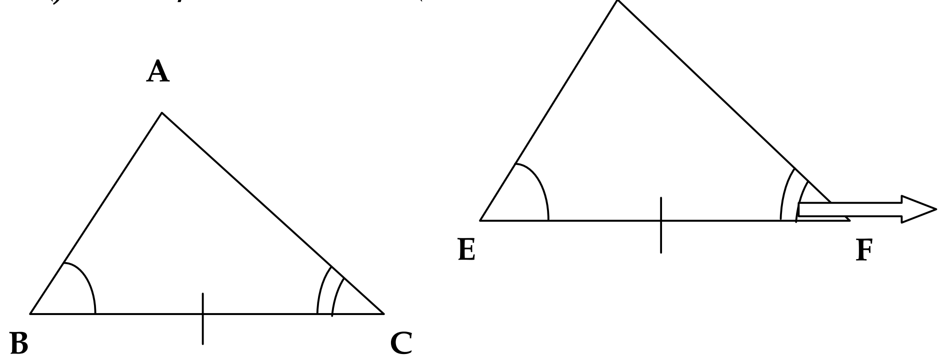
পর্ব- খঃ জ্যামিতিক অনুপাত ও সাদৃশ্য

পূর্বের পর্বে আমরা ত্রিভুজের মধ্যকার জ্যামিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে শিখেছি। ত্রিভুজের সর্বসমতা বলতে আমরা বুঝি যে, দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো এবং কোণগুলো যদি সমান হয় তবে তাকে সর্বসম ত্রিভুজ বলে। আবার দুইটি ত্রিভুজের অনুরূপ কোণগুলো যদি সমান হয় কিংবা অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত যদি সমান হয় তবে ত্রিভুজ দুইটিকে সদৃশ ত্রিভুজ বলা যায়। ত্রিভুজের এই অনুপাত এবং সাদৃশ্য নিয়ে বেশ কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণ করা যায়। শিক্ষার্থী বন্ধুরা, আসুন আমরা যে কোন একটি ত্রিভুজের অনুপাত ও সাদৃশ্য সম্পর্কিত নিম্নের যে কোন একটি উপপাদ্য প্রমাণ করি।

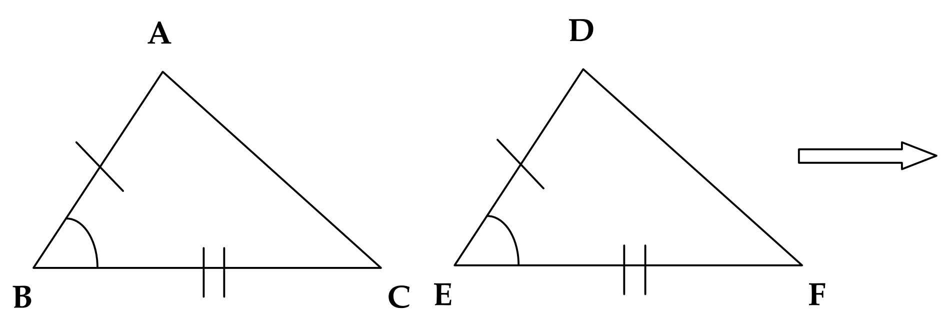
(১) বাবাবা/SSS শর্তে: চিত্র- ১



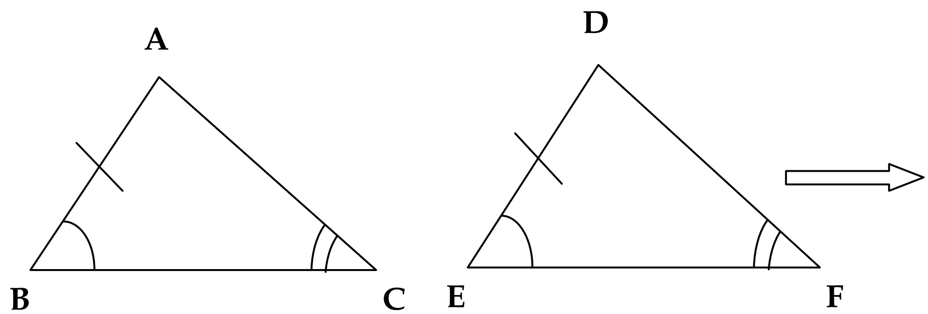
২) কোবাকো/ASA শর্তে: চিত্র- ২



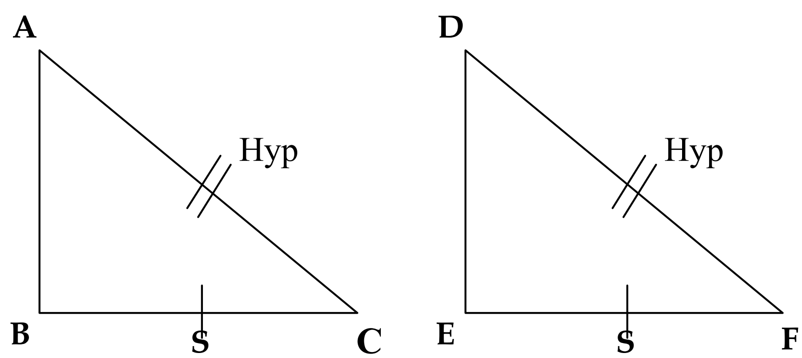
(৩) বাকোবা/SAS শর্তে: চিত্র- ৩

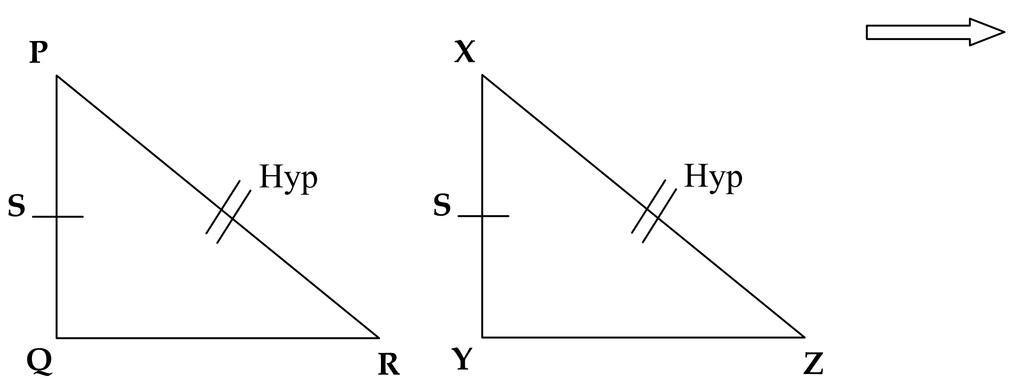


(৪) কোকোবা/AAS শর্তে: চিত্র- ৪

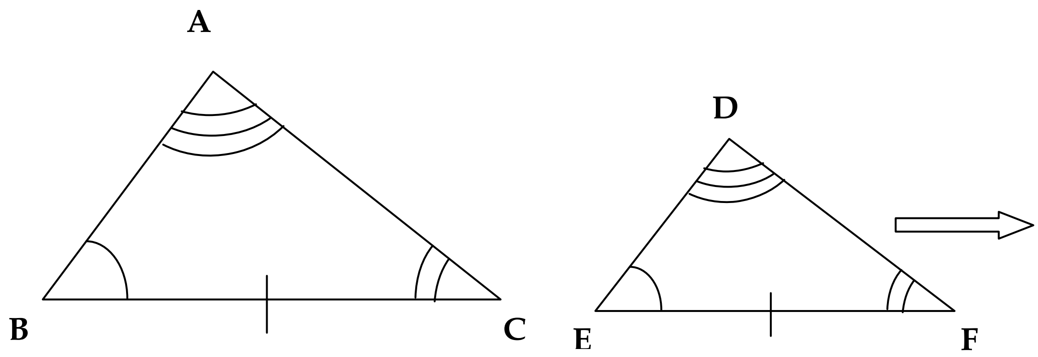


(৫) অতিবা/Hyp-S শর্তে: চিত্র- ৫





(৬) কোকোকো/AAA শর্তে: চিত্র-৬

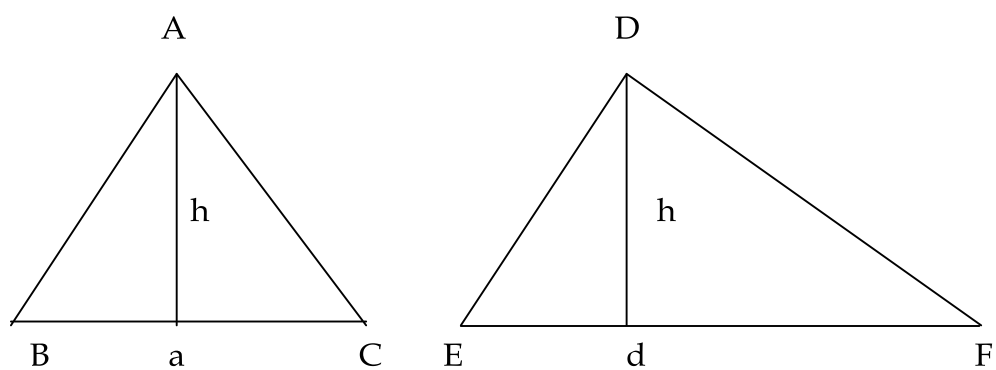

A
D
B
C
E
F

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৩৯**

মূল শিখনীয় বিষয়

সর্বসম ও সদৃশ ত্রিভুজ (২)

দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে তাদের ক্ষেত্রফলদ্বয় ও ভূমিদ্বয় সমানুপাতিক ।



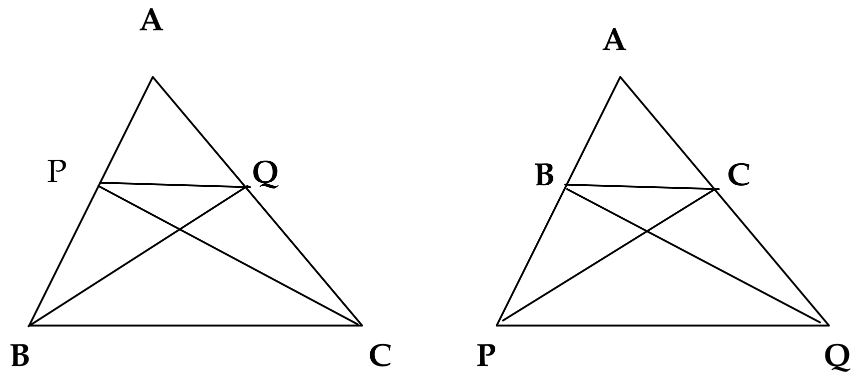
মনে করি, $\triangle$-ক্ষেত্র ABC ও $\triangle$-ক্ষেত্র DEF এর ভূমি যথাক্রমে BC = a একক ও EF = d একক এবং উভয় ক্ষেত্রের উচ্চতা h একক (সকল দৈর্ঘ্য একই এককে বর্ণিত)।

তাহলে, $\triangle$-ক্ষেত্র ABC = $\frac{1}{2}$ ah বর্গএকক

$\triangle$-ক্ষেত্র DEF = $\frac{1}{2}$ dh বর্গএকক

$\therefore$ $\triangle$-ক্ষেত্র ABC: $\triangle$-ক্ষেত্র DEF = $\frac{1}{2}ah / \frac{1}{2}dh = a/d$ = BC: EF

ত্রিভুজের কোন এক বাহুর সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা তার অপর দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।



মনে করুন, PQ রেখা $\triangle$ABC-এর BC বাহুর সমান্তরাল এবং উহা AB ও AC কে বা তাদের বর্ধিতাংশকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AP ঃ PB = AQ ঃ QC

অঙ্কনঃ B, Q ও C, P যোগ করুন।

প্রমাণঃ $\triangle$APQ ও $\triangle$BPQ একই শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট বলে এদের উচ্চতা সমান।

$$\therefore \frac{\Delta APQ}{\Delta BPQ} = \frac{AP}{BP}$$

তদ্রুপ $$\frac{\Delta APQ}{\Delta CPQ} = \frac{AQ}{CQ}$$

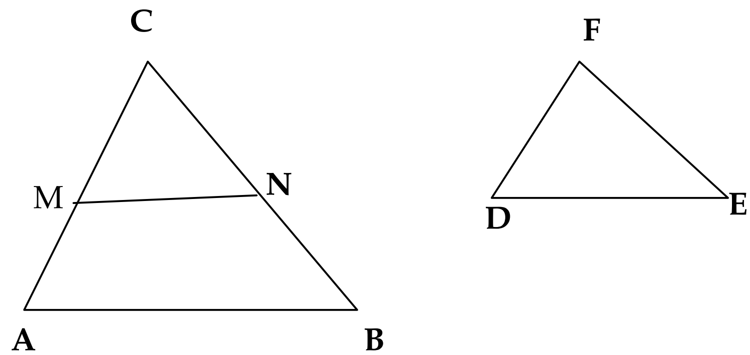
এখন$\triangle$BPQ ও $\triangle$CPQ একই ভূমি PQ-এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলে অবস্থিত।

$$\therefore \triangle BPQ = \triangle CPQ$$

সুতরাং $$\frac{\Delta APQ}{\Delta BPQ} = \frac{\Delta APQ}{\Delta CPQ}$$

$$\therefore \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{CQ}$$ **(প্রমাণিত)**

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো অনুপাত সমান হবে।



মনে করুন, $\triangle$ABC ও DEF-এ

$\angle$A=$\angle$D, $\angle$B=$\angle$E এবং $\angle$C=$\angle$F

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{CA}{FD}=\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}$

অঙ্কন: ধরুন, $\triangle$ABC> $\triangle$DEF, তাহলে CA হতে CM=FD এবং CB হতে CN=FE কাটুন এবং M, N যোগ করুন।

প্রমাণ: $\triangle$CMN ও$\triangle$FDE-এ

CM=FD, CN=FE এবং

অন্তর্ভুক্ত$\angle$MCN= অন্তর্ভুক্ত$\angle$DFE

$\therefore$ $\triangle$CMN$\cong$$\triangle$FDE

$\therefore$ $\angle$CMN=$\angle$FDE=$\angle$A

কিন্তু $\angle$CMN ও $\angle$A অনুরূপ কোণ।

$\therefore MN \,||\, AB$

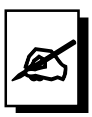
$$\frac{CA}{CM} = \frac{BC}{CN}$$

বা, $\frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF}$ [CM=FD, CN=EF]

এইরূপে AC ও AB হতে যথাক্রমে DF ও DE এর সমান অংশ কেটে নিয়ে দেখানো যায়-

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \text{ অর্থাৎ } \frac{CA}{FD} = \frac{AB}{DE}$$

$\therefore \frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$ **(প্রমাণিত)**



মূল্যায়নঃ

১। জ্যামিতিক অনুপাত বলতে কী বোঝায়?

২। জ্যামিতিক অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্যসমূহ কিভাবে প্রয়োগ করা যায়?

সম্ভাব্য উত্তর

মূল্যায়ন- ১ঃ

জ্যামিতিক আকৃতিসমূহের আকারের অনুপাতকে জ্যামিতিক অনুপাত বলে।

মূল্যায়ন- ২ঃ আসুন আমরা নিজেরা চেষ্টা করি।

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৪০**

বৃত্ত (১)

ভূমিকা

গণিতের তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অন্যতম একটি ধারণা হলো বৃত্ত সম্পর্কিত ধারণা। বৃত্তের সংজ্ঞা, বৃত্তের বিভিন্ন অংশ, অংশসমূহের মধ্যকার সম্পর্ক, বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি ইত্যাদি বিষয়ে ধারণা শিক্ষার্থীদের গাণিতিক ধারণাকে সমৃদ্ধ করে। এ সম্পর্কিত জ্ঞান অর্জনের জন্য বৈজ্ঞানিক উপস্থাপন পদ্ধতি শিক্ষার্থীদের জন্য অনেক বেশি সহায়ক। বৃত্ত সম্পর্কিত সার্বিক ধারণা শিক্ষার্থীদের গণিতের প্রায়োগিক ক্ষেত্রে অন্যতম চালিকা শক্তি হিসেবে কাজ করে। কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রেই দেখা যায়, উপযুক্ত উপস্থাপন পদ্ধতি, যথাযথ শিক্ষোপকরণ নির্বাচন ও তাদের সঠিক ব্যবহারের অভাব, শিক্ষার্থীদের বৃত্ত সম্পর্কিত জ্ঞান অর্জনে ব্যাঘাত সৃষ্টি করে। বর্তমান অধিবেশনে বৃত্ত ও বৃত্ত সম্পর্কিত বিষয়াদি সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

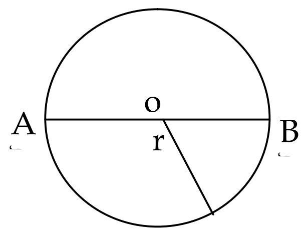
এই অধিবেশন শেষে আপনি-

- বৃত্ত ও সমবৃত্ত সংজ্ঞায়িত করতে পারবেন।
- বৃত্তের জ্যা ও ব্যাসের সংজ্ঞা দিতে ও চিহ্নিত করতে পারবেন।
- বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতা বিষয়টির সূত্র দুইটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কীয় উপপাদ্যসমূহের প্রমাণ করতে পারবেন।

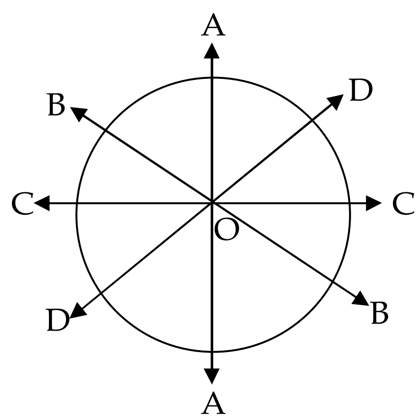
পর্বসমূহ

পর্ব- ক: বৃত্ত ও সমবৃত্ত

যদি O সমতলের কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হয় এবং r একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে সমতলস্থ যে সকল বিন্দু O থেকে r দূরত্বে অবস্থিত, তাদের সেটকে বৃত্ত বলা হয়, যার কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ r।



সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায় অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয় ।

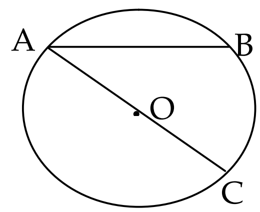


শিক্ষার্থী বন্ধুরা, বৃত্ত ও সমবৃত্তের সাদৃশ্য ও বৈসাদৃশ্য নিচের ছকে লেখার চেষ্টা করি।

সাদৃশ্য	বৈসাদৃশ্য

পর্ব- খঃ বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস

চিত্রে O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত রয়েছে। বৃত্তের AB, AC রেখাংশ রয়েছে। যা বৃত্তের পরিধির দুটি করে বিন্দুকে ছেদ করেছে। এই বৃত্তের কোনটি জ্যা এবং কোনটি ব্যাস তা চিহ্নিত করে সংজ্ঞায়িত করুন।

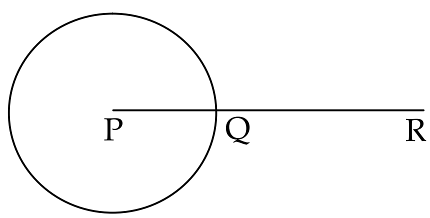


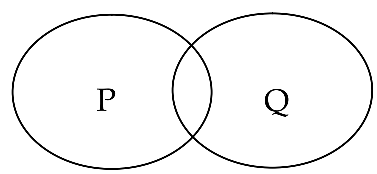
পর্ব- গঃ বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতা বিষয়ক দুইটি সূত্র

বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতাবাদ বিষয়ক সূত্র দুইটি জানতে হলে বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ বিন্দু এবং বহিঃস্থ কোন বিন্দুকে কি বলা হয় তা জানতে হবে। এবার একটি বৃত্ত অঙ্কন করে এর অভ্যন্তরস্থ বিন্দু ও বহিঃস্থ বিন্দু নির্ণয় করি। চিত্রে P বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু এবং Q বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। PQ রেখাংশ বৃত্তটিকে কেবল R বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তের দুইটি অবিচ্ছিন্নতাবাদ সূত্র নিম্নে দেওয়া হলোঃ

(ক) কোন বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু ও বহিঃস্থ একটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটিকে একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে।

(খ) যদি কোন বৃত্তের একটি বিন্দু অপর একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে থাকে এবং প্রথমোক্ত বৃত্তের অপর একটি বিন্দু শেষোক্ত বৃত্তের বর্হিভাগে থাকে, তবে বৃত্তদ্বয়ের দুইটি ও কেবল দুইটি ছেদ বিন্দু থাকে।





পর্ব- ঘঃ বৃত্ত সম্পর্কীয় উপপাদ্যের প্রমাণ

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এমন সব বৃত্তের কেন্দ্রগুলো এক সরলরেখায় অবস্থিত। এ সমস্যা অনুযায়ী আমরা অনেকগুলো বৃত্ত আঁকার চেষ্টা করি যা একই বিন্দু দিয়ে যায় এবং এই কেন্দ্রগুলো যে একই সরলরেখায় অবস্থান করে তা নিম্নের ছকে প্রমাণের চেষ্টা করি।

প্রমাণঃ

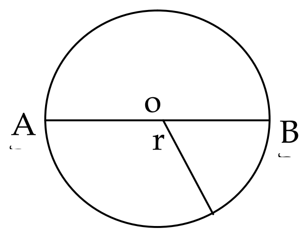
ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৪০**

মূল শিখনীয় বিষয়

বৃত্ত (১)

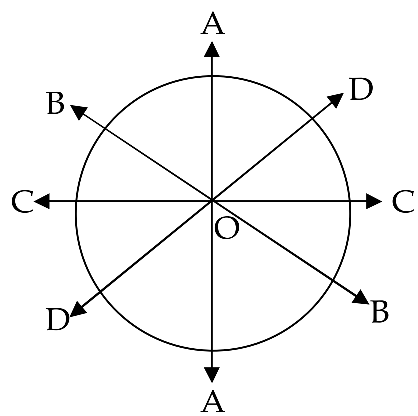
বৃত্ত

যদি O সমতলের কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হয় এবং r একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে সমতলস্থ যে সকল বিন্দু O থেকে r দূরত্বে অবস্থিত, তাদের সেটকে বৃত্ত বলা হয়, যার কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ r ।



সমবৃত্ত

সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায় অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয় ।

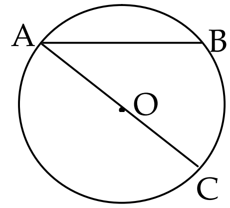


বৃত্তের জ্যা

পরিধিস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে জ্যা বলে।

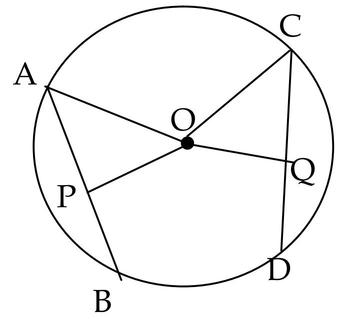
বৃত্তের ব্যাস

কেন্দ্র ভেদ করে পরিধিস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তের ব্যাস বলে।



বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী

মনে করুন, ABDC বৃত্তের O কেন্দ্র। AB ও CD তার দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে O থেকে AB ও CD জ্যা-দ্বয় সমদূরবর্তী।



অঙ্কন: O থেকে AB ও CD জ্যা-এর উপর যথাক্রমে OP ও OQ লম্ব রেখাংশ আঁকুন। O, A এবং O, C যোগ করুন।

প্রমাণ: যেহেতু OP, AB এর উপর লম্ব।

$$\therefore\ AP = \frac{1}{2}AB$$

একইভাবে, OQ, CD-এর উপর লম্ব।

$$\therefore\ CQ = \frac{1}{2}CD$$

এখন যেহেতু AB=CD অতএব, AP=CQ

সুতরাং ΔOAP এবং ΔOCQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ OA =অতিভুজ OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং AP=CQ

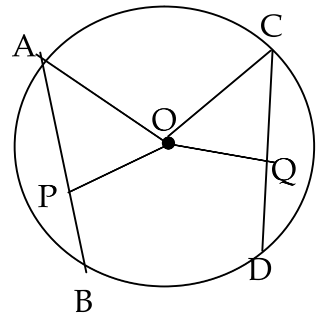
$$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OCQ$$

সুতরাং OP=OQ

কিন্তু OP ও OQ যথাক্রমে কেন্দ্র থেকে AB ও CD জ্যা-এর দূরত্ব। সুতরাং AB ও CD জ্যা-দ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। (প্রমাণিত)

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

মনে করুন, ABDC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD জ্যা-দ্বয় কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। প্রমাণ করতে হবে যে, AB=CD।



অঙ্কনঃ O বিন্দু থেকে AB ও CD জ্যাদ্বয়ের উপর যথাক্রমে OP ও OQ লম্ব অঙ্কন করুন। O, A এবং O, C যোগ করুন।

প্রমাণঃ যেহেতু AB ও CD জ্যা-দ্বয় কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী,

অতএব, OP= OQ

আবার যেহেতু, OP, AB এর উপর লম্ব

$\therefore\ AP = \frac{1}{2} AB$

অনুরূপভাবে, $CQ = \frac{1}{2} CD$

এখন ΔOAP এবং ΔOCQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের

অতিভুজ AO =অতিভুজ OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং OP=OQ

$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OCQ$

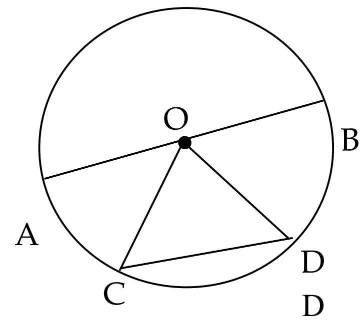
$\therefore$ AP= CQ

অর্থাৎ $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$ বা AB = CD

অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান। (প্রমাণিত)

বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা

মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB তার ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যে কোন একটি জ্যা। প্রমাণ করতে হবে, AB>CD।



অঙ্কনঃ O, C এবং O, D যোগ করুন।

প্রমাণঃ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে, OA=OB=OC=OD

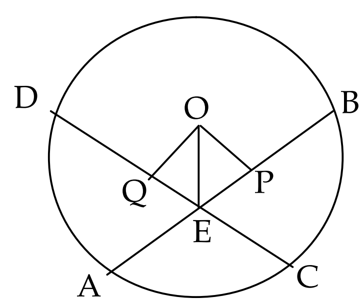
এখন ΔOCD এ

OC+OD>CD

বা, OA+OB>CD

বা, AB>CD (প্রমাণিত)

যদি বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে ছেদ করে এবং ছেদবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোগকারী রেখাংশের সাথে তারা সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে জ্যাদ্বয় পরস্পর সমান।



মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্তের AB এবং CD জ্যা দুইটি পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে এবং ∠OEB=∠OED। প্রমাণ করতে হবে যে, AB=CD।

অঙ্কনঃ O থেকে AB ও CD জ্যা-এর উপর যথাক্রমে OP ও OQ লম্ব অঙ্কন করুন।

প্রমাণঃ ΔOEP এবং ΔOEQ এর মধ্যে

$\angle OEP = \angle OEQ$

$\angle OPE = \angle OQE$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

এবং OE সাধারণ বাহু।

$\therefore \angle OEP \cong \angle OEQ$

$\therefore OP = OQ$

সুতরাং $AB = CD$ (প্রমাণিত)

মূল্যায়নঃ

১। বৃত্তের ব্যাস জ্যা হতে পারে, কিন্তু সকল জ্যা ব্যাস হতে পারে না- ব্যাখ্যা করুন।

২। "বৃত্তের দু'টি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান" উপপাদ্যটি উপস্থাপন পদ্ধতি বর্ণনা করুন।

ইউনিট- ৩ অধিবেশন- ৪১

বৃত্ত (২)

ভূমিকা

বৃত্ত হলো একটি বক্ররেখা যার প্রতিটি বিন্দু অন্য আরেকটি বিন্দু থেকে (যার নাম কেন্দ্র) সমান দূরত্বে (যাকে বলে ব্যাসার্ধ) অবস্থান করে।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি–

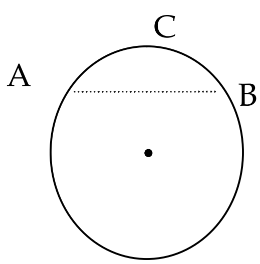
- বৃত্তচাপ, অর্ধবৃত্ত, উপচাপ ও অধিচাপ সনাক্ত করতে পারবেন।
- বৃত্তস্থ কোণ ও কেন্দ্রস্থ কোণের সংজ্ঞা বলতে ও লিখতে পারবেন।

পর্বসমূহ

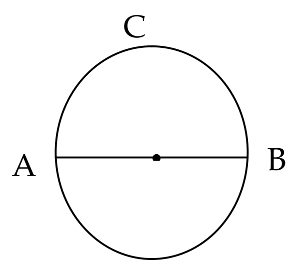
পর্ব- কঃ বৃত্তচাপ, অর্ধবৃত্ত, উপচাপ ও অধিচাপ সনাক্ত করণ

কোন বৃত্তের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের একপাশে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলে।

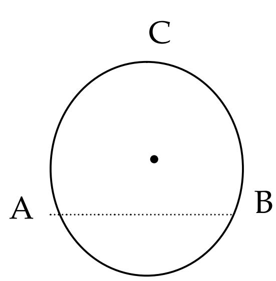
নিচের চিত্রগুলি থেকে উপচাপ, অধিচাপ এবং অর্ধবৃত্ত সনাক্ত করুন :



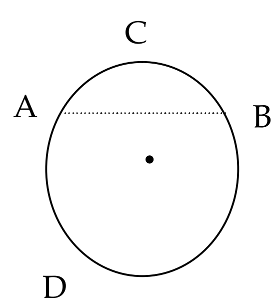
চিত্র- ক



চিত্র- খ



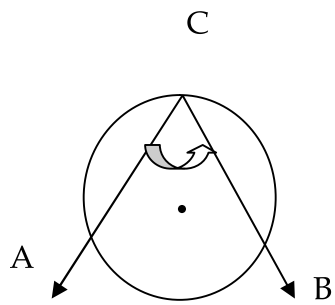
চিত্র- গ



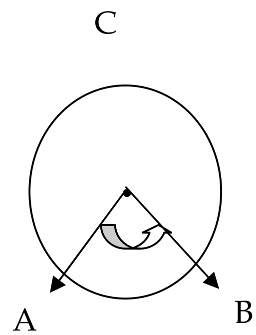
চিত্র- ঘ

পর্ব- খঃ বৃত্তস্থ ও কেন্দ্রস্থ কোণের সংজ্ঞা

নিচের চিত্র দুটির একটি বৃত্তস্থ কোণ এবং অপরটি কেন্দ্রস্থ কোণ। কোনটি কি তা সনাক্ত করে চিত্র দেখে তাদের সংজ্ঞা তৈরি করুন।



চিত্র- ক

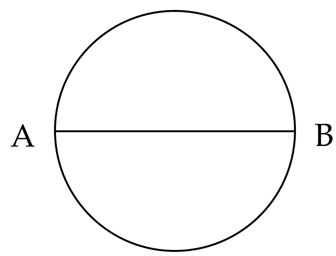


চিত্র- খ

মূল শিখনীয় বিষয়

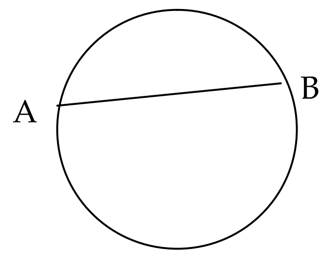
বৃত্ত (২)

অর্ধবৃত্ত



অর্ধবৃত্ত

উপচাপ



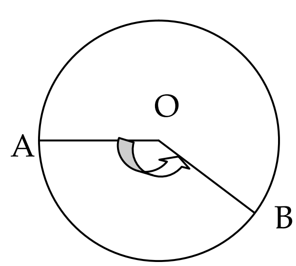
অধিচাপ

বৃত্তচাপ: কোন বৃত্তের A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু হলে $\overline{AB}$ এর খন্ডিত অংশকে **বৃত্তচাপ বলে।**

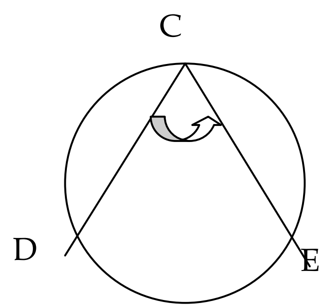
অর্ধবৃত্ত: কোন বৃত্তের A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু এবং যদি $\overline{AB}$ কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে এর খন্ডিতঅংশকে **অর্ধবৃত্ত বলে।**

উপচাপ: কোন বৃত্তের A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু এবং যদি $\overline{AB}$ কেন্দ্র দিয়ে না যায় তবে এর ছোট খন্ডিত অংশকে **উপচাপ বলে।**

অধিচাপ: কোন বৃত্তের A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু এবং যদি $\overline{AB}$ কেন্দ্র দিয়ে না যায় তবে এর বড় খন্ডিত অংশকে **অধিচাপ বলে।**



কেন্দ্রস্থ কোণ



বৃত্তস্থ কোণ

বৃত্তস্থ কোণ

একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোণটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে একটি বৃত্তস্থ কোণ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোণ বলা হয়। বৃত্তের দুইটি জ্যা বৃত্তের (পরিধিস্থ) কোন বিন্দুতে মিলিত হয়ে অভ্যন্তরে যে কোণ সৃষ্টি করে।

কেন্দ্রস্থ কোণ

একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোন বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয়। এবং কোণটি বৃত্তে যে চাপ খন্ডিত করে সেই চাপের উপর তা অবস্থিত বা দন্ডায়মান বলা হয়।

মূল্যায়নঃ

(১) প্রমাণ কর যে, বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।
(২) প্রমাণ কর যে, একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।
(৩) প্রমাণ কর যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।
(৪) প্রমাণ কর যে, সমান সমান বৃত্তে সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে।

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- ক

‘ক’ চিত্রে ACB **উপচাপ।**

‘খ’ চিত্রে ACB **অর্ধবৃত্ত।**

‘গ’ চিত্রে ACB **অধিচাপ।**

‘ঘ’ চিত্রে ACB **উপচাপ ও** ADB **অধিচাপ**

পর্ব- খ

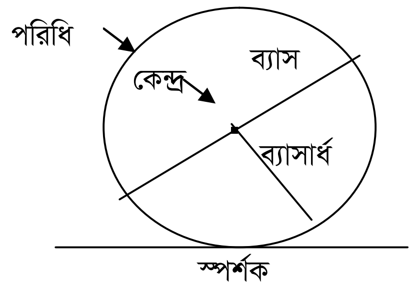
‘ক’ চিত্রে $\angle$ACB **একটি বৃত্তস্থ কোণ**

‘খ’ চিত্রে $\angle$AOB **একটি কেন্দ্রস্থ কোণ**

বৃত্ত (৩)

ভূমিকা

নিচের চিত্রে বৃত্তের কেন্দ্র (Center), ব্যাসার্ধ (Radius) ও অন্যান্য অংশ দেখানো হয়েছে।



উদ্দেশ্য

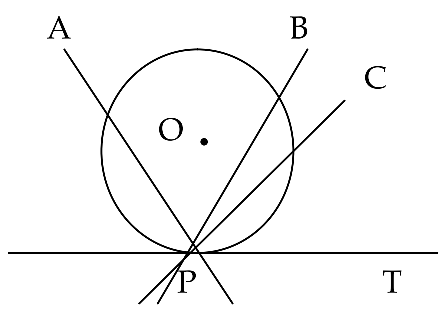
এই অধিবেশন শেষে আপনি–

- ছেদক, স্পর্শক ও সাধারণ স্পর্শক অংকন করতে পারবেন।
- বৃত্তের স্পর্শক সম্পর্কীয় উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে উপকরণ সহ শ্রেণীকক্ষে পাঠদান করতে পারবেন।

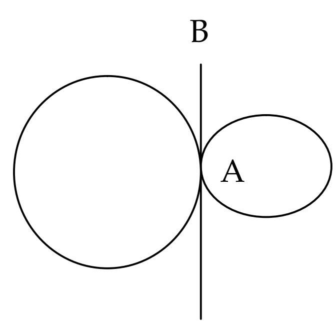
পর্বসমূহ

পর্ব- ক: ছেদক, স্পর্শক ও সাধরণ স্পর্শক চেনা

ছেদক শব্দের অর্থ যা ছেদ করে। স্পর্শক শব্দের অর্থ যা স্পর্শ করে। তাহলে সাধারণ স্পর্শক শব্দের অর্থ কি হতে পারে আপনিই চিন্তা করুন। নিচের চিত্রগুলি থেকে ছেদক, স্পর্শক, সাধারণ স্পর্শক ও স্পর্শ বিন্দু চিহ্নিত করুন।



চিত্র- ক

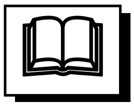


চিত্র- খ

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন-৪২**

মূল শিখনীয় বিষয়

বৃত্ত (৩)



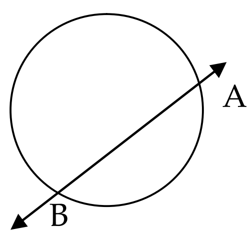
ছেদক, স্পর্শক ও সাধারণ স্পর্শক

ছেদক:

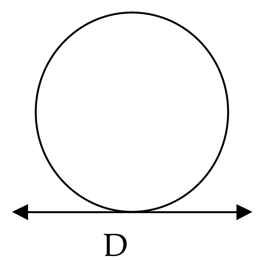
একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলে।

স্পর্শক:

একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি একটি ও কেবল একটি স্পর্শবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলে এবং বিন্দুটিকে স্পর্শ বিন্দু বলে।



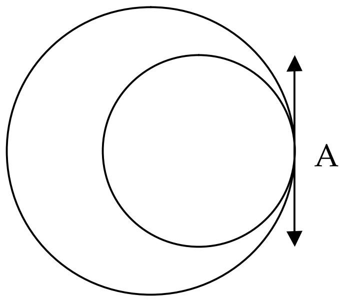
ছেদক

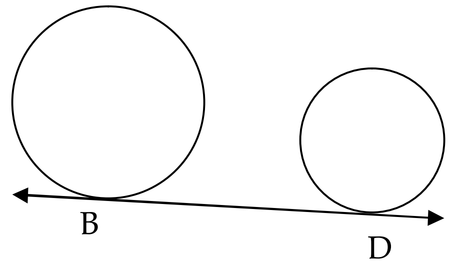


স্পর্শক

সাধারণ স্পর্শক:

একটি সরল রেখা যদি দুইটিবৃত্তে স্পর্শক হয়, তবে তাকে বৃত্ত দুইটির একটি সধারণ স্পর্শক বলা হয়। দুইয়ের অধিক বৃত্তেরও একটি সাধারণ স্পর্শক থাকতে পারে।





মূল্যায়নঃ

(১) প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের যে কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

(২) প্রমাণ করুন যে, বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান হবে।

(৩) প্রমাণ করুন যে, দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শ বিন্দু সমরেখ হবে।

(৪) বৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং ঐ বিন্দুগামী যে কোন জ্যা এর অন্তর্গত কোণ তার একান্তর বৃত্তাংশস্থ যে কোনো কোণের সমান।

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- কঃ

‘ক’ চিত্রে $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ বৃত্তটির ছেদক, $\overleftrightarrow{PT}$ বৃত্তটির একটি স্পর্শক এবং P বিন্দুটি এই স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু।

‘খ’ চিত্রে $\overleftrightarrow{AB}$ বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক।

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৪৩**

গাণিতিক উপপাদ্যের যৌক্তিক প্রমাণ (১)

ভূমিকা

গণিতের সকল প্রমাণাদির ভিত্তি হল যুক্তিতত্ত্ব। আজকাল উন্নত দেশসমূহে মাধ্যমিক স্তরে যুক্তিতত্ত্ব শুধু পড়ানোই হচ্ছে না, কম্পিউটার প্রোগ্রামিং-এর প্রতিটি ধাপে ধাপে যুক্তি প্রয়োগ করা হচ্ছে। যুক্তিতত্ত্ব শিক্ষাদানের অভাবে বেশীর ভাগ গণিত শিক্ষার্থীরা গাণিতিক প্রমাণের যথার্থ তাৎপর্য বুঝতে অক্ষম। গণিতে যতটুকু শিক্ষা তারা পাচ্ছে সেটা যুক্তিতত্ত্বের জ্ঞানের অভাবে পরিপূর্ণরূপে বিকশিত হচ্ছে না। গণিত পাঠে শিক্ষালব্ধ জ্ঞানের একটা অপর্যাপ্তি থেকে যাচ্ছে। ফলে গণিত তাদের কাছে একটি নিরস বিষয়বস্তুতে পরিণত হচ্ছে। এ কারণে যুক্তিতত্ত্বের জ্ঞানের মাধ্যমে গণিতকে শিক্ষার্থীদের কাছে সহজ বিষয়বস্তুতে পরিণত করার দায়িত্ব আপনার।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি–

- গাণিতিক উক্তি ও যৌগিক উক্তি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- উক্তির সত্য মিথ্যা নির্ণয়ের জন্য যুক্তি ছক তৈরী করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: গাণিতিক উক্তি ও যৌগিক উক্তি

নিচে কতকগুলো উক্তির উদাহরণ দেয়া হলো। কোনটি কি উক্তি তা কারণসহ উল্লেখ করুন।

১. অনিক, স্কুলে যাও।

২. তুমি কোথায় যাচ্ছ?

৩. ঢাকা বাংলাদেশে।

৪. ২ + ৪ = ৮

৫. এটি একটি ফল এবং এটি একটি আম।

৬. এটি একটি ফল অথবা এটি একটি আম।

৭. এটি একটি ফল যদি এটি একটি আম।

পর্ব- খ: উক্তির সংখ্যা ,উদাহরণ ও সত্য মিথ্যা ছক তৈরি

p: ৯ হল এক অংকের বৃহত্তম সংখ্যা।

q: ৫ + ৩ = ৯

$p \wedge q$: ৯ হল এক অংকের বৃহত্তম সংখ্যা এবং ৫ + ৩ = ৯

এখানে p উক্তিটি সত্য; কিন্তু q মিথ্যা।

সুতরাং যৌগিক উক্তি $p \wedge q$ মিথ্যা।

p এবং q নিয়ে একটি সত্য-মিথ্যা ছক তৈরি করুন।

পর্ব- গ: যৌক্তিকতা ও সিদ্ধান্ত

কতিপয় সত্য বা মিথ্যা উক্তির যৌক্তিকতা যাচাই করুন।

১. একটি দশভিত্তিক পূর্ণ সংখ্যার শেষে ৫ অথবা ০ থাকলে তা ৫ দ্বারা বিভাজ্য হবে। ৬৫ এর এককের ঘরে ৫ আছে সুতরাং ৬৫, ৫ দ্বারা বিভাজ্য।

২. একটি পূর্ণ সংখ্যার এককের ঘরে ৫ থাকলে সংখ্যাটি ৫ দ্বারা বিভাজ্য হবে। কোন সংখ্যা ২ দ্বারা নিঃশেষ বিভাজ্য হলে তা ৫ দ্বারা নিঃশেষ বিভাজ্য হবে না। সুতরাং কোন পূর্ণ সংখ্যার এককের ঘরে ৫ থাকলে তা ৫ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

৩. যদি একটি দশ ভিত্তিক পূর্ণ সংখ্যা ৩ দ্বারা নিঃশেষ বিভাজ্য হয় তবে ৪ দ্বারা নিঃশেষ বিভাজ্য হবে না। কোন সংখ্যা ৪ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হলে তা ৫ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে না। সুতরাং কোন সংখ্যা ৩ দ্বারা নিঃশেষ বিভাজ্য হলে তা ৫ দ্বারা নিঃশেষ বিভাজ্য হবে না।

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৪৩**

মূল শিখনীয় বিষয়

গাণিতিক উপপাদ্যের যৌক্তিক প্রমাণ (১)

গাণিতিক ও যৌগিক উক্তি

১. গাণিতিক উক্তি (Statement): গাণিতিক উক্তি হল একটি বাক্য যা সত্য অথবা মিথ্যা হবে; কিন্তু কখনও উভয় হবে না।

উদাহরণ:- ১. অনিক, স্কুলে যাও।

উদাহরণ:- ২. তুমি কোথায় যাচ্ছ?

উদাহরণ নং ১ ও উদাহরণ নং ২. গাণিতিক উক্তি নয় ; কারণ এ বাক্যগুলোর সত্য না মিথ্যা তা নিশ্চিত বলা যায় না।

উদাহরণ:- ৩. ঢাকা বাংলাদেশে।

উদাহরণ:- ৪. ২ + ৪ = ৮

উদাহরণ নং ৩ ও উদাহরণ নং ৪ উভয়ই উক্তি। প্রথমটি সত্য উক্তি এবং পরেরটি মিথ্যা উক্তি।

২. নাবোধক উক্তি:

'আজ রবিবার' এই উক্তিটি সত্য হলে 'আজ রবিবার নয়' উক্তিটি মিথ্যা হবে। A একটি উক্তি এবং এর না-বোধক উক্তির সারণী নিম্নরূপ:

না-বোধক ছক**(কথায়)**

যদি A হয়	তবে A-এর না-বোধক হয়
সত্য	মিথ্যা
মিথ্যা	সত্য

না-বোধক ছক(প্রতীকে)

A	~A
T	F
F	T

৩. যৌগিক উক্তি (Composite statement)ঃ

ক. এটি একটি ফল এবং এটি একটি আম।

খ. এটি একটি ফল অথবা এটি একটি আম।

গ. এটি একটি ফল যদি এটি একটি আম।

উপরোক্ত উক্তিগুলো যৌগিক উক্তির উদাহরণ।

বিভিন্ন প্রকারের যৌগিক উক্তিঃ

১. সংযোজন (Conjunction)ঃ

যদি কোন দুইটি উক্তিকে 'এবং' দ্বারা একত্রিত করা হয় তখন তাকে উক্তি দুইটির সংযোজন বলা হয়। একটি উক্তি p ও অপর উক্তি q দ্বারা চিহ্নিত করা হলে, তাদের সংযোজন মূলক যৌগিক উক্তি হবে 'p এবং qÕ যার প্রতীকীয় প্রকাশ হলঃ $p\wedge q$। এরূপ যৌগিক উক্তি সত্য হওয়ার শর্ত হলঃ তার প্রতিটি অংশ আলাদা আলাদা সত্য হতে হবে। কোন একটি অংশ যদি মিথ্যা হয়, তবে পুরা যৌগিক উক্তিটিই মিথ্যা হবে।

উদাহরণ ১ঃ p: ৯ হল এক অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা।

q: ৫+৪ = ৯

$p\wedge q$: ৯ হল এক অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা এবং ৫+৪ = ৯।

এখানে p ও q উভয় উক্তিই সত্য। সুতরাং যৌগিক উক্তি $p\wedge q$ অবশ্যই সত্য।

উদাহরণ ২ঃ p: ৯ হল এক অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা।

q: ৫+৩ = ৯

$p\wedge q$: ৯ হল এক অঙ্কের বৃহত্তম সংখ্যা এবং ৫+৩ = ৯।

এখানে p উক্তিটি সত্য; কিন্তু q মিথ্যা। সুতরাং যৌগিক উক্তি $p\wedge q$ মিথ্যা।

সংযোজনের সত্যতার ছক (কথায়):

যদি p	এবং q হয়	তবে $p \wedge q$ হবে
সত্য	সত্য	সত্য
সত্য	মিথ্যা	মিথ্যা
মিথ্যা	সত্য	মিথ্যা
মিথ্যা	মিথ্যা	মিথ্যা

সংযোজনের সত্যতার ছক (প্রতীকে)

P	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

যদি কোন দুইটি উক্তিকে 'অথবা' দ্বারা যুক্ত করা হয় তখন তাকে উক্তি দুইটির বিযোজন বলা হয়। একটি উক্তিকে p, অপর উক্তিকে q দ্বারা চিহ্নিত করা হলে, তাদের সংযোজন মূলক যৌগিক উক্তি হবে 'p অথবা qÕ যার প্রতীকীয় প্রকাশ হল: $p \vee q$। এরূপ যৌগিক উক্তি সত্য হওয়ার শর্ত হল: তার অন্তত: যে কোন একটি অংশ সত্য হতে হবে। অর্থাৎ উভয় অংশ সত্য হলে যৌগিক উক্তি তো সত্য হবেই, এমনকি যে কোন একটি অংশ সত্য হলেও বিযোজন মূলক পুরা যৌগিক উক্তিটি সত্য হবে।

উদাহরণ:

P: উত্তরা গণভবন নাটোরে।

q: ৩ + ২ = ৬

$p \vee q$: উত্তরা গণভবন নাটোরে অথবা **৩ + ২ = ৬**

এখানে **p** উক্তিটি সত্য, কিন্তু **q** উক্তিটি মিথ্যা। সুতরাং যৌগিক উক্তি **$p \vee q$** সত্য। কারণ 'অথবা' দ্বারা যুক্ত অংশগুলোর যে কোন একটি অংশ সত্য হলেই পুরা যৌগিক উক্তিটি সত্য।

Disjunction **এর সত্যতার ছক (কথায়) বিযোজনের সত্যতার ছক (প্রতীকে)**

যদি p	এবং q হয়	তবে $p \vee q$ হবে
সত্য	সত্য	সত্য
সত্য	মিথ্যা	সত্য
মিথ্যা	সত্য	সত্য
মিথ্যা	মিথ্যা	মিথ্যা

P	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

৩. স্বাধীন (Dependent) **ও নির্ভরশীল** (Independent) **উক্তি:**

আমরা জানি উক্তি হতে হলে তা সত্য অথবা মিথ্যা হবে। ধরি দুইটি ভিন্ন উক্তি

p: এটি একটি ফল

q: এটি একটি কলা

এই উক্তি দুইটি সত্য ও মিথ্যা হওয়ার চারটি সম্ভাবনা আছে:

১. দুইটি উক্তি সত্য

২. প্রথম উক্তি সত্য দ্বিতীয় উক্তি মিথ্যা

৩. প্রথম উক্তি মিথ্যা দ্বিতীয় উক্তি সত্য

৪. দুইটি উক্তি মিথ্যা।

উক্তি যাচাইয়ের সারণী

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

উক্তিদ্বয় নির্ভরশীল।

ধরি, একটি উক্তি p: আজ রবিবার; অপর উক্তি q: বাবর ভাল ছাত্র।

এই উক্তি দুইটি সত্য হওয়ার সম্ভাবনা চারটি। মিথ্যা হওয়ার সম্ভবনা নাই।

উক্তি যাচাইয়ের সারণী

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

এক্ষেত্রে উক্তি দুইটি স্বাধীন ।

৪. সঙ্গতিপূর্ণ,অসঙ্গতিপূর্ণ এবং বিরোধী উক্তি:

ক. সঙ্গতিপূর্ণ (Consistent) উক্তি:

যখন একই সঙ্গে দুইটি উক্তি সত্য হওয়া সম্ভব তখন উক্তি দুইটিকে সঙ্গতিপূর্ণ বলা হয়। যেমন:

p: এটি টক জাতীয় ফল।

q: এটি একটি লেবু।

খ. অসঙ্গতিপূর্ণ (Inconsistent) উক্তি:

দুইটি উক্তি সঙ্গতিপূর্ণ না হলে তাকে অসঙ্গতিপূর্ণ বলা হয়। যেমন:

p: এটি টক জাতীয় ফল

q: এটি একটি কলা।

গ. বিরোধী উক্তি (Contradiction):

যদি দুইটি উক্তি এক সঙ্গে সত্য অথবা মিথ্যা না হতে পারে তখন তাকে বিরোধী উক্তি বলে। যেমন:

p: এটি একটি আম।

q: এটি একটি আম নয়।

বিরোধী উক্তির ক্ষেত্রে TF এবং FT সত্য হয়।

৫. সত্য মিথ্যা যৌক্তিকতা এবং সিদ্ধান্ত:

একটি উক্তিকে মিথ্যা বলার অর্থ হল উক্তিটি সত্য নয়। তেমন একটি উক্তিকে সত্য বলার অর্থ হল উক্তিটি মিথ্যা নয়। যদি কোন একটি উক্তি **q** কে সত্য উক্তি মনে করি তবে য় উক্তি টি সত্য নয় এর জন্য ~**q** প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

মনে করি মানুষ মরনশীল। রহিম একজন মানুষ। অতএব রহিম মরনশীল। এখানে সিদ্ধান্ত যৌক্তিক। রহিম বাংলাদেশের লোক। সুতরাং রহিম ও করিম নাটোর জেলার লোক। এখানে সিদ্ধান্ত অযৌক্তিক।

একটি সিদ্ধান্ত সত্য হলে তা যৌক্তিক হবে এমন নাও হতে পারে আবার কোন সিদ্ধান্ত যৌক্তিক হলে যে সত্য হবে এমন নাও হতে পারে। কোন সিদ্ধান্ত নিশ্চিতভাবে সত্য হবে তখনই যখন তার প্রস্তাবনা সত্য হবে এবং সিদ্ধান্ত যৌক্তিক হবে। উক্তির যৌক্তিকতা এবং সিদ্ধান্তের মধ্যে যে সর্ম্পক বিদ্যমান তার একটি ধারণা পাওয়ার জন্য নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ্য করি:

১. যদি একটি দশভিত্তিক পূর্ণ সংখ্যার এককের অঙ্ক ৫ হয়, তবে তা ৫ দ্বারা বিভাজ্য হবে। ৬৫ এর এককের অঙ্ক ৫; সুতরাং ৬৫ সংখ্যাটি ৫ দ্বারা বিভাজ্য।

২. যদি একটি পূর্ণ সংখ্যার এককের অঙ্ক ৫ হয়, তবে সংখ্যাটি ২ দ্বারা বিভাজ্য হবে। কোন সংখ্যা ২ দ্বারা বিভাজ্য হলে তা ৫ দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং কোন পূর্ণ সংখ্যার এককের অঙ্ক ৫ হলে তা ৫ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

৩. যদি একটি পূর্ণ সংখ্যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে ৪ দ্বারাও বিভাজ্য হবে। কোন সংখ্যা ৪ দ্বারা বিভাজ্য হলে তা ৫ দ্বারা বিভাজ্য হবে। সুতরাং কোন সংখ্যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য হলে তা ৫ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

৪. যদি একটি সংখ্যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে তা ৬ দ্বারা বিভাজ্য হবে। যদি একটি সংখ্যা ৬ দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে তা ১২ দ্বারা বিভাজ্য হবে। সুতরাং কোন সংখ্যা ২ দ্বারা বিভাজ্য হলে তা ৪ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

৫. যদি কোন ত্রিভূজের দুই কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভূজটি সমদ্বিবাহু হবে। সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের দুই বাহু পরস্পর সমান হয়। অতএব সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের দুইটি কোণও পরস্পর সমান হয়।

৬. যদি বহুভুজটি ত্রিভুজ হয়, তবে ত্রিভুজের কোণ গুলোর সমষ্টি হবে দুই সমকোণ। যদি ত্রিভুজের কোণ গুলোর সমষ্টি দুই সমকোণ হয়, তবে চতুর্ভুজের কোণগুলোর সমষ্টি হবে চার সমকোণ। সুতরাং পঞ্চভুজের কোণ গুলোর সমষ্টি হবে পাঁচ সমকোণ।

এখানে উক্তিগুলো হল শর্ত সাপেক্ষ উক্তি। একটি উক্তি p ও একটি উক্তি q হলে, শর্ত সাপেক্ষ উক্তি হল: যদি p সত্য হয়, তবে q সত্য হবে। শর্ত সাপেক্ষ উক্তি কে প্রতীকীয় ভাবে লেখা হয়: $p\rightarrow q$; (সংক্ষেপে পড়া হয় যদি p তবে q)। তদ্রুপ তৃতীয় উক্তি r হলে, এবং r এর সত্যতা q এর উপর সির্ভরশীল হলে, লেখা হয় $q\rightarrow r$ (যদি q তবে r)। শর্ত সাপেক্ষ এরূপ উক্তির যৌগিক উক্তি হলঃ যদি p সত্য তবে য় সত্য এবং যদি q সত্য তবে r সত্য। অতএব যৌক্তিক সিদ্ধান্ত হলঃ যদি p সত্য তবে r সত্য। অর্থাৎ প্রতীকীয় ভাবে লেখা হয়: $(p\rightarrow q\wedge q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)$। এরূপ সিদ্ধান্তকে যৌক্তিক অতিক্রমন (Logical Transition) বলা হয়।

সাধারণ অসমতায় যৌক্তিক অতিক্রমনের উদাহরণ হলঃ যদি $p< q$ এবং $q< r$ হয়, তবে $p< r$.

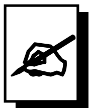
এবারে উপর্যুক্ত উদাহরণগুলোকে বিশ্লেষণ করে প্রস্তাবনার সত্য মিথ্যার সঙ্গে যৌক্তিক বা অযৌক্তিক সিদ্ধান্তের ছক নির্ধারণ করিঃ

ক্রমিক নং	প্রথম প্রস্তাব $p\to q$	দ্বিতীয় প্রস্তাব $q\to r$	অতিক্রমণ যৌক্তিকতা $(p\to q\wedge q\to r)\to(p\to r)$	সিদ্ধান্ত $p\to r$
১.	সত্য	সত্য	যৌক্তিক	সত্য
২.	মিথ্যা	মিথ্যা	যৌক্তিক	সত্য
৩.	মিথ্যা	মিথ্যা	যৌক্তিক	মিথ্যা
৪.	মিথ্যা	মিথ্যা	অযৌক্তিক	মিথ্যা
৫.	সত্য	সত্য	অযৌক্তিক	সত্য
৬.	সত্য	সত্য	অযৌক্তিক	মিথ্যা

ছক থেকে দেখা যাচ্ছে যে তিন জোড়া সত্য এবং তিন জোড়া মিথ্যা শর্ত সাপেক্ষ উক্তি থেকে যৌক্তিক ও অযৌক্তিক সিদ্ধান্তের মাধ্যমে যৌগিক বাক্য গঠন করা হয়েছে। এখানে সিদ্ধান্ত কলামে তিনটি সত্য রয়েছে, যার মধ্যে দুইটি মিথ্যা থেকে যৌক্তিক সত্য (নং ২) এবং দুইটি সত্য থেকে অযৌক্তিক সত্য (নং ৫) যথার্থ সত্য নয়। অযৌক্তিক সিদ্ধান্ত কোনটিই গ্রহণযোগ্য নয়।

বাক্যস্থিত উক্তিগুলো পৃথকভাবে সত্য ও যুক্তিযুক্ত হলে সিদ্ধান্ত সত্য হতে পারে। আবার যুক্তিযুক্ত বাক্য হলেও সিদ্ধান্ত সত্য নাও হতে পারে। যদি উক্তিগুলো সত্য এবং বাক্যটি যৌক্তিক হয়, কেবলমাত্র তখনই সিদ্ধান্ত নিশ্চিত ভাবে সত্য হয়।

অতএব একমাত্র দুইটি সত্য থেকে যৌক্তিক সিদ্ধান্তের মাধ্যমে গৃহীত সত্যই যথার্থ সত্য হিসেবে গ্রহণযোগ্য।



মূল্যায়নঃ

কতিপয় সত্য বা মিথ্যা উক্তির যৌক্তিকতা যাচাই করুনঃ

১. যদি একটি সংখ্যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে তা ৬ দ্বারা বিভাজ্য হবে। যদি একটি সংখ্যা ৬ দ্বারা বিভাজ্য হয় তবে তা ১২ দ্বারা বিভাজ্য হবে। সুতরাং কোন সংখ্যা ২ দ্বারা বিভাজ্য হলে তা ৪ দ্বারা বিভাজ্য হবে।

২. যদি কোন ত্রিভূজের দুই কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভূজটি সমদ্বিবাহু হবে। সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের দুই বাহু পরস্পর সমান হয়। অতএব সমদ্বিবাহু ত্রিভূজের দুইটি কোনও পরস্পর সমান হবে।

৩. উপর্যুক্ত উদাহরণগুলোকে বিশে-ষণ করে প্রস্তাবনার সাথে সত্য মিথ্যা যৌক্তিকতা ও সিদ্ধান্ত ছক তৈরি করুন।

৪. ছকের প্রাপ্ত তথ্যগুলো বিশ্লেষণ করুন।

সম্ভাব্য উত্তরঃ

পর্ব- ক, পর্ব- খ এবং পর্ব- গ

মূল শিখনীয় বিষয় থেকে জেনে নিন।

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৪৪**

গাণিতিক উপপাদ্যের যৌক্তিক প্রমাণ (২)

ভূমিকা

গণিতের বেশীর ভাগ বিদেশী পাঠ্যবইগুলিতে প্রথমেই সেট তত্ত্ব, যুক্তিতত্ত্ব ও সংখ্যার ধারণা দেয়া শুরু করে ক্রমান্বয়ে বিষয়বস্তুর গভীরে প্রবেশ করা হয়েছে। এটা করার পেছনে দর্শন হল আপনাকে মূল বিষয়বস্তু সম্পর্কে জানতে হলে মৌলিক কিছু পূর্বজ্ঞানের প্রয়োজন হবে। আসলে আপনি যদি গণিতে সত্যিকার অর্থে পারদর্শী হতে চান তবে যুক্তিতত্ত্বের মত গণিতের কিছু মৌলিক বিষয়বস্তু আপনাকে অবশ্যই অধ্যয়ন করতে হবে। এতে বিতর্কের কোন অবকাশ নেই। আসুন আমরা যুক্তি সম্পর্কে কিছু তত্ত্ব ও তথ্য সংগ্রহ করে নিজেদের জ্ঞান ভান্ডার সমৃদ্ধ করি।

উদ্দেশ্য

এই অধিবেশন শেষে আপনি–

- উক্তি, শর্তমুলক উক্তির সমতুল উক্তির ব্যাখ্যা ও প্রমাণ করতে পারবেন।
- যৌক্তিক সমতুল ও চির সত্য উক্তি সারণীর মাধ্যমে প্রমাণ করতে পারবেন।

পর্বসমূহ

পর্ব- ক: উক্তি,শর্তমুলক উক্তি,সমতুল উক্তির ব্যাখ্যা ও সারণীর মাধ্যমে প্রমাণ

(ক) মনে করি p: সে ধনী q: সে সুখী হলে নিম্নের প্রতীকগুলোকে কথায় প্রকাশ কর।

(1) $p \vee q$ (2) $p \wedge q$ (3) $p \vee \sim q$ (4) $q \rightarrow p$

(5) $q \leftrightarrow \sim p$ (6) $(\sim p \wedge q) \rightarrow p$ (7) $\sim(p \wedge q)$ (8) $\sim(\sim p \wedge q) \rightarrow p$

(খ) $p \rightarrow q$: যদি আকাশ মেঘাচ্ছন্ন হয় তবে বৃষ্টি হবে। এই শর্তমূলক উক্তির সত্যতার ছক তৈরি করুন।

(গ) A এবং B দুইটি উক্তি হলে $A \leftrightarrow B$ উক্তির সত্যতার ছক তৈরি করুন।

(ঘ) নিচের উক্তি গুলির সত্যতার ছক তৈরি করুন।

(1) $\sim p \wedge q$, (2) $\sim(p \rightarrow \sim q)$, (3) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ (4) $\sim p \rightarrow \sim q$

পর্ব-খঃ যৌক্তিক সমতুল ও চির সত্য উক্তির প্রয়োগ

নিম্নের সমস্যাগুলোর সত্যতার ছক তৈরি করুন:

(ক). (১) $p \vee \sim p$ (2). $\sim(p \wedge \sim p)$

(৩) $p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

(খ). (১) $\{(p \rightarrow q) \wedge p\} \rightarrow q$ (২) $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

(গ) (১) $\{(p \rightarrow q) \wedge \sim q\} \rightarrow \sim p$ (২) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(ঘ) (১) $\sim(p \rightarrow \sim q)$ (২) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(ঙ) (১) $\{(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\} \rightarrow (p \rightarrow r)$ (২) $\sim(p \wedge \sim p)$

ইউনিট- ৩ **অধিবেশন- ৪৪**

মূল শিখনীয় বিষয়

গাণিতিক উপপাদ্যের যৌক্তিক প্রমাণ (২)

শর্তমূলক (Conditional) উক্তি

যদি আকাশ মেঘাচ্ছন্ন হয় তবে আজ বৃষ্টি হবে। এইটি প্রতীকের সহায্যে লিখা যায় $p \rightarrow q$ এই রূপ উক্তিকে শর্তমূলক উক্তি বলে। এখানে $p \rightarrow q$ শর্তমূলক উক্তি। একটি শর্তমূলক উক্তি $p \rightarrow q$ কে বিভিন্ন ভাবে পড়া যায। যেমন- ১। যদি p হয় তবে q ২। q এর জন্য p পর্যাপ্ত ৩। p এর জন্য q প্রয়োজনীয়।

১. শর্তমূলক উক্তির ছক

উক্তি	উক্তি	শর্তমূলক উক্তি
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

২. সমতুল উক্তি (Biconditional Statement)

সমতল উক্তিকে $\leftrightarrow$ চিহ্নে প্রকাশ করা হয়। $\leftrightarrow$ অর্থ হল যদি এবং কেবল যদি সংক্ষেপে ‘‘যদি q”।

সমতুল উক্তি (Biconditional Statement)

উক্তি	উক্তি	শর্তমূলকউক্তি	শর্তমূলকউক্তি	সমতুলউক্তি
p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

শর্তমূলক উক্তির বিভিন্ন রূপ

১. যদি p হয় তবে $(p \rightarrow q)$ শর্তমূলক উক্তি।

২. যদি q হয় তবে p, $(q \rightarrow p)$ বিনিময় বিপরীত।

৩. যদি p না হয় তবে য় নয়, $(\sim p \rightarrow \sim q)$ না- বিপরীত

৪. যদি q না হয় তবে p নয়, $(\sim q \rightarrow \sim p)$ না বিনিময় বিপরীত।

৩. চিরসত্য (Tautology) উক্তিঃ

কোন কোন ক্ষেত্রে যৌগিক উক্তি সর্বদা সত্য হয়। এই ধরনের উক্তিকে চিরসত্য উক্তি বলা হয়। যেমন-

- $(p \vee \sim p)$: সে বাবু অথবা সে বাবু নয়।
- $(p \wedge \sim p)$: সে বাবু এবং বাবু নয়।
- $\sim(p \wedge \sim p)$: ‘সে বাবু এবং সে বাবু নয়’ সত্য নয়।

* চিরসত্য উক্তির সত্যতার ছক

(১) **$p \vee \sim p$** (২). **$(p \wedge \sim p)$**

p	~p	p ˅ ~p
T	F	T
F	T	T

(৩). **~(p ˄~p)**

p	~p	p ˄ ~ p
T	F	F
F	T	F

p	**~ p**	**p ˄ ~ p**	**~(p ˄ ~ p)**
T	F	F	T
F	T	F	T

(৪). মডাস পোনেন্স (MODUS PONENS) **বা প্রত্যক্ষ প্রমাণ**

{(p →q) ˄p } → q

p	**q**	**p → q**	**(p → q) ˄p**	**{(p → q) ˄ p} → q**
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

(৫).মডাস টলেন্স **(Modus tollens) অপ্রত্যক্ষ প্রমাণ**

{(p → q) ˄ ~q } → ~p

p	**q**	**p → q**	**~q**	**(p → q) ˄ ~q**	**~p**	**{(p → q) ˄ ~q} → ~p**
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

৪. **যৌক্তিক সমতুল** (Logical Equivalant)

দুইটি উক্তিকে যৌক্তিকভাবে সমতুলতা বলা হয যখন সত্যতার মান একই হয। p এবং q দুইটি উক্তিকে প্রতীকের সাহায্যে যৌক্তিক সমতুল লিখা হয় $p \equiv q$

(1). $p\rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$ **এর সত্যতার ছক**

p	**q**	**p→q**
T	**T**	**T**
T	**F**	**F**
F	**T**	**T**
F	**F**	**T**

p	**q**	**~ q**	**p ∧ ~q**	**~(p ∧ ~q)**
T	**T**	**F**	**F**	**T**
T	**F**	**T**	**T**	**F**
F	**T**	**F**	**F**	**T**
F	**F**	**T**	**F**	**T**

$p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$ প্রমাণিত

(২) $p\rightarrow q \equiv \sim q\rightarrow\sim p$ এর সত্যতার ছক

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	~ q	~ p	~q→~ p
T	T	F	F	T
T	F	T	F	F
F	T	F	T	T

$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ প্রমাণিত

(৩) (a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(৩) (a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ এর সত্যতার ছক

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ প্রমাণিত

মূল্যায়নঃ

প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করুন। A: সে ধনী B: সে সুখী

(ক) (১) সে ধনী অথবা সুখী। (২) সে ধনী এবং সুখী। (৩) সে ধনী অথবা অসুখী। (৪) যদি সে সুখী হয় তবে সে ধনী। (৫) সে সুখী যদি সে ধনী না হয়। (৬) যদি সে গরীব এবং সুখী হয় তবে সে ধনী। (৭) সে ধনী এবং সুখী নয়। (৮) যদি সে গরীব এবং সুখী না হয় তবে সে ধনী।

(খ) শর্তমূলক উক্তির সত্যতার ছক তৈরি করুন।

(১) যদি p হয় তবে q, $(p \rightarrow q)$ শর্তমূলক উক্তি।

(২) যদি q হয় তবে p, $(q \rightarrow p)$ বিনিময় বিপরীত।

(৩) যদি p না হয় তবে q নয়, $(\sim p \rightarrow \sim q)$ না- বিপরীত

(৪) যদিq না হয় তবে p নয়, $(\sim q \rightarrow \sim p)$ নাবিনিময় বিপরীত।

সম্ভব্য উত্তরঃ

পর্ব- ক

(১) সে ধনী অথবা সুখী। (২) সে ধনী এবং সুখী (৩) সে ধনী অথবা অসুখী (৪) যদি সে সুখী হয় তবে সে ধনী। (৫) সে সুখী যদি সে ধনী না হয়। (৬) যদি সে গরীব এবং সুখী হয় তবে সে ধনী। (৭) সে ধনী এবং সুখী নয়। (৮) যদি সে গরীব এবং সুখী না হয় তবে সে ধনী।

খ, গ এবং ঘ এর সমাধান শর্তমূলক এবং সমতুল উক্তির মধ্যে রয়েছে।

পর্ব- খ

মূল শিখনীয় বিষয় থেকে জেনে নিন।