ইউনিট
৮

জ্যামিতি
Geometry

ভূমিকা

গণিত শিক্ষায় পীথাগোরাস সংক্রান্ত বিষয়াবলী অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। ইতোপূর্বে আপনারা পীথাগোরাসের উপপাদ্য এবং এর বিপরীত উপপাদ্য সম্পর্কে বিস্তারিত জ্ঞান অর্জন করেছেন। জ্যামিতির ব্যবহারিক প্রয়োগের জন্য পীথাগোরাসের উপপাদ্য ও লম্ব অভিক্ষেপ সম্পর্কে জানা খুবই প্রয়োজন। এই ইউনিটে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের ব্যবহারিক প্রয়োগ ও তার যুক্তিমূলক আলোচনা তুলে ধরা হয়েছে। পরে ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করতে পারবেন,
- রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করতে পারবেন,
- এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের প্রমাণ করতে পারবেন,
- বাহুর অনুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা নির্ণয় করতে পারবেন,
- কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ব বিন্দু সমরেখ তা প্রমাণ করতে পারবেন ।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৫ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৮.১ পীথাগোরাসের উপপাদ্য ও লম্ব অভিক্ষেপ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

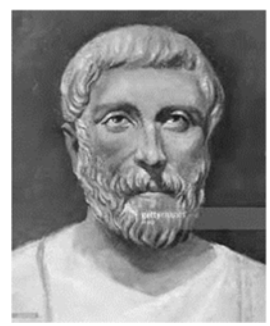
এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করতে পারবেন।
- রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করতে পারবেন।
- পীথাগোরাসের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে প্রদত্ত উপপাদ্যগুলোর প্রমাণ করতে পারবেন।
- এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের প্রমাণ করতে পারবেন।
- এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	পীথাগোরাস উপপাদ্য, বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ, রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

মূলপাঠ

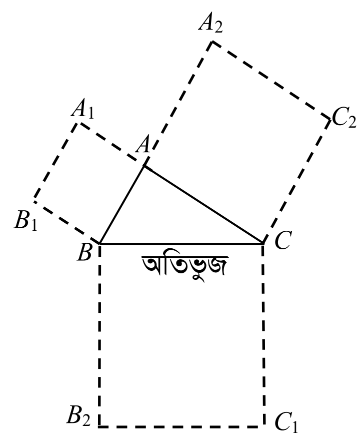
খ্রিষ্টের জন্মের আনুমানিক প্রায় ৬০০ বছর পূর্বে গ্রীক দেশে পীথাগোরাস জন্ম গ্রহণ করেন। বিখ্যাত গ্রীক পন্ডিত পীথাগোরাস সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (Theorem) বর্ণনা করেন। তাঁর নাম অনুসারে উপপাদ্যটির নাম পীথাগোরাস উপপাদ্য। জানা যায় তারও প্রায় ১০০০ বছর পূর্বে মিশরীয় ভূমি জরিপকারীগণের এই উপপাদ্যটি সম্বন্ধে ধারণা ছিল। পীথাগোরাসের উপপাদ্য বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা যায়। বাউবির 'এসএসসি প্রেগ্রামের' গণিত বইয়ে এর প্রমাণ বিস্তারিত দেওয়া আছে। আশাকরি শিক্ষার্থী বন্ধুরা আপনারা গণিত বই থেকে প্রমাণটি শিখে নিয়েছেন। এখানে পীথাগোরাস উপপাদ্যের শুধুমাত্র বর্ণনা ও কিছু আলোচনা করা হবে।



পীথাগোরাস

উপপাদ্য ৮.১

পীথাগোরাসের উপপাদ্য: একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



প্রমাণ: মনে করুন, চিত্রে ABC ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। $\angle BAC$ সমকোণ এবং BC বাহু অতিভুজ। অতিভুজ BC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় AB ও AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের যোগলের সমান হবে।

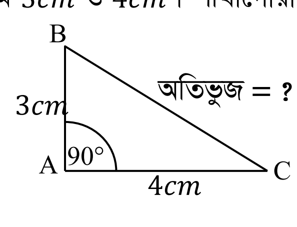
অর্থাৎ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

এখানে, $BC^2 = BB_2C_1C$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$AB^2 = AA_1B_1B$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$AC^2 = AA_2C_2C$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

উদাহারন 1: একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $3cm$ ও $4cm$। পীথাগোরাস উপপাদ্যের মাধ্যমে অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।



প্রমাণ: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

বা, $BC^2 = (3\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2$

বা, $BC^2 = 9cm^2 + 16cm^2$

বা, $BC^2 = 25cm^2$
বা, $BC^2 = (5\text{cm})^2$
বা, $BC = 5cm$
অতএব, অতিভুজের দৈর্ঘ্য $= 5cm.$

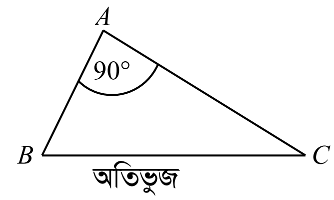
সিদ্ধান্ত: সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে যে কোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য সহজেই পীথাগোরাস উপপাদ্যের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়।

শিক্ষার্থীর কাজ	একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $6cm$ ও $8cm$ পীথাগোরাস উপপাদ্যের মাধ্যমে অতিভুজের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

উপপাদ্য ৮.২

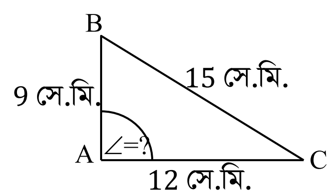
পীথাগোরাস উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য: কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষের বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে।

ΔABC এর BC বাহু অতিভুজ এবং অপর দুই বাহু যথাক্রমে AB ও AC। BC বাহুর অঙ্কিত কর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহু যথাক্রমে AB ও AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



অর্থাৎ $BC^2 = AB^2+AC^2$
সুতরাং $\angle BAC$ একটি সমকোণ।

উদাহরণ 2: ΔABC এর AB, BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি. 15 সে.মি. ও 12 সে.মি., হলে $\angle BAC$ কোণের মান নির্ণয় করুন।



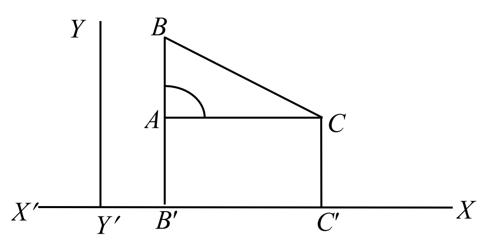
যেহেতু $AB^2 = 9^2$ বর্গ সে. মি. = 81 বর্গ সে.মি.
$BC^2 = 15^2$ বর্গ সে. মি. = 225 বর্গ সে.মি.
$AC^2 = 12^2$ বর্গ সে. মি. = 144 বর্গ সে.মি.
$\therefore\ BC^2 = 225 = 81+144 = AB^2+AC^2$
$\therefore\ \angle BAC = 90^\circ =$ সমকোণ।

লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection)

(ক) বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ

কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বুঝায়।

মনেকরুন, XX' একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং চিত্রে Y যে কোনো বিন্দু। Y বিন্দু থেকে XX' রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব YY' এবং লম্ব YY' এর পাদবিন্দু Y'। সুতরাং Y' বিন্দু XX' রেখার উপর Y বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ। অর্থাৎ কোনো নির্দিষ্ট রেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। আমরা এ ধারণা থেকে বলতে পারি কোনো সরলরেখার উপর লম্ব যেকোন সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। সে ক্ষেত্রে উক্ত লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য হবে শূন্য।



চিত্র: লম্ব অভিক্ষেপ

রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ

মনে করুন, উপরের চিত্র হতে BC রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় B ও C। এখন B ও C বিন্দু থেকে XX' রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে BB' ও CC'। BB' লম্বের পাদবিন্দু B' এবং CC' লম্বের পাদবিন্দু C'। এই $B'C'$ রেখাংশই হচ্ছে XX' রেখার উপর BC রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং দেখা যাচ্ছে লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়। তাই, $B'C'$ রেখাংশকে XX' রেখার উপর BC রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ বলা হয়। তবে, BC রেখাংশ XX' এর সমান্তরাল হলে $BC = B'C'$ হবে।

সিদ্ধান্ত:

- কোনো রেখার উপর কোন বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।
- কোনো রেখার উপর লম্ব রেখার লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। সুতরাং, লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য শূন্য।
- কোনো নির্দিষ্ট রেখার সমান্তরাল রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ ঐ রেখাংশের সমান।

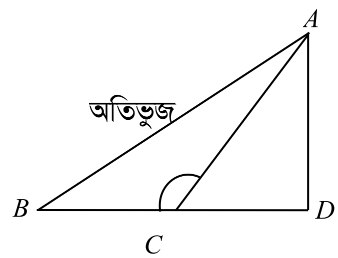
পীথাগোরাসের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে এবং লম্ব অভিক্ষেপের ধারণার সাহায্যে কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হবে।

উপপাদ্য ৮.৩

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের এবং ঐ দুই বাহুর যে কোন একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনেকরুন, ABC ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC। BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD। প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

প্রমাণ: BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হওয়ায় একটি ΔABD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।



সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে –

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$
$$= AD^2 + (BC+CD)^2$$
$$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$$
$$\therefore AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.CD \quad \text{.....................................} \quad (i)$$

আবার Δ ACD সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ

$$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad \text{..} (ii)$$

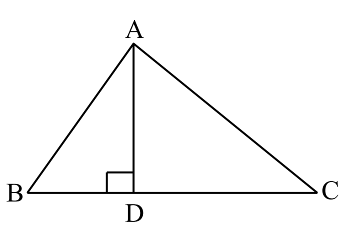
(ii) নং সমীকরণ হতে AC^2 এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ (প্রমাণিত)।

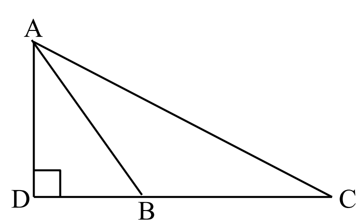
উপপাদ্য ৮.৪

যেকোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমান কম।

বিশেষ নির্বচন: ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ এবং সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর দুই বাহু যথাক্রমে AC ও BC। মনে করি, BC বাহুর উপর (১ম চিত্র) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর (২য় চিত্র) লম্ব AD। তাহলে উভয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রে BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD।



১ম চিত্র



২য় চিত্র

প্রমাণ: ΔABD এর $\angle ADB$ সমকোণ

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য] .... (i)

১ম চিত্রে, $BD = BC - DC$
২য় চিত্রে, $BD = DC - BC$
উভয় ক্ষেত্রে, $BD^2 = (BC - DC)^2 = (DC - BC)^2$
$= BC^2 + DC^2 - 2BC.DC = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$ $[CD = DC]$
$\therefore BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$ .... (ii)
এখন সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাওয়া যায়,
$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2BC.CD$
$\therefore AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC.CD$ .... (iii)
আবার, ΔADC সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle D$ সমকোণ
$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য] ....(iv)
সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ [প্রমাণিত]
আবার, C বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে একই ভাবে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়।
সিদ্ধান্ত : ΔABC এর ক্ষেত্রে.

- $\angle C$ স্থূলকোণ হলে, $AB^2 > AC^2 + BC^2$ (উপপাদ্য ৮.৩)
- $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে, $AB^2 < AC^2 + BC^2$ (উপপাদ্য ৮.৪)
- $\angle C$ সমকোণ হলে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (উপপাদ্য ৮.১)
- সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বিধায় তাদের প্রত্যেকটির লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য। সুতরাং $BC.CD = 0$ (উপপাদ্য ৮.৩)

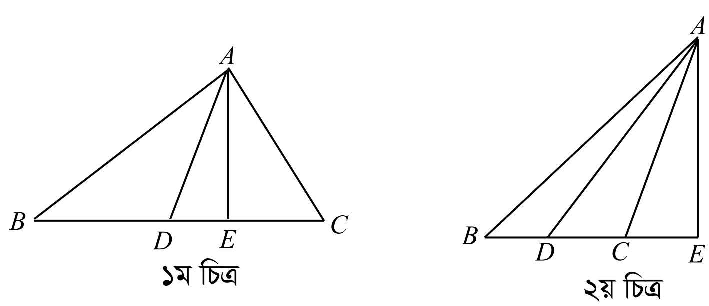
বিশেষ দ্রষ্টব্য: উপপাদ্য ৮.৩ ও উপপাদ্য ৮.৪, উপপাদ্য ৮.১ (অর্থাৎ, পীথাগোরাস উপপাদ্য) এর ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত। তাই উপপাদ্য ৮.৩ ও উপপাদ্য ৮.৪ কে পীথাগোরাস উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত বলা যায়।

উপপাদ্য ৮.৫

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য: ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখন্ডক মধ্যমার ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখন্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2+AC^2 = 2(AD^2+BD^2)$

অঙ্কন: BC বাহুর উপর (১ম চিত্র) এবং BC (২য় চিত্র) বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AE লম্ব অঙ্কন করুন।



প্রমাণ: ΔABD এর $\angle ADB$ স্থূলকোণ এবং BD রেখায় বর্ধিতাংশের উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE উভয় চিত্রে।
$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে (উপপাদ্য ৮.৩)
আমরা পাই, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DE$ .... (i)
আবার, ΔACD এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং DC রেখার এবং DC রেখার বর্ধিতাংশের উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE.
$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে (উপপাদ্য ৮.৪) পাই,

$AC^2 = AD^2+CD^2-2CD.DE$ .... (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2+AC^2 = 2AD^2+BD^2+CD^2+2BD.DE-2CD.DE$

$= 2AD^2+BD^2+BD^2+2BD.DE-2BD.DE$ [$\because BD=CD$]

$= 2AD^2+2BD^2 = 2\ (AD^2+BD^2)$

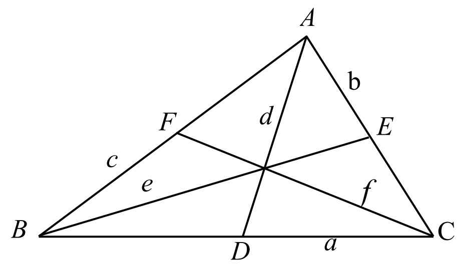
$\therefore AB^2+AC^2 = 2(AD^2+BD^2)$ (প্রমাণিত)

সিদ্ধান্তঃ

- এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয় করা যায়।

নিম্নে এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক দেখানো হলঃ

মনে করুন, ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c। BC, CA ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা AD, BE ও CF এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e, f।



তাহলে, এ্যাপোলেনিয়াসের উপপাদ্য হতে পাই,

$AB^2+AC^2 = 2\ (AD^2+BD^2)$

বা, $c^2+b^2 = 2\ [d^2+(\frac{1}{2}a)^2]$ $[\because BD = \frac{1}{2}a]$

বা, $b^2+c^2 = 2d^2+2.\frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2+c^2 = 2d^2+\frac{1}{2}a^2$

বা, $2d^2 = (b^2+c^2) - \frac{1}{2}a^2$

বা, $d^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \frac{1}{4}a^2 = \left\{\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}\right\}$

অনুরূপভাবে পাওয়া যায়, $e^2 = \dfrac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$ এবং $f^2 = \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

$\therefore$ কোনো ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে মধ্যমা সমূহের দৈর্ঘ্য জানা যায়।

আবার,

$$b^2+c^2+f^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} + \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

$$= \frac{2b^2+2c^2+2c^2+2a^2+2a^2+2b^2-a^2-b^2-c^2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

$\therefore 3\ (a^2+b^2+c^2) = 4\ (d^2+c^2+f^2)$

সুতরাং বলা যায় কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির তিনগুণ উক্ত ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রেসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির চার গুণের সমান।

ত্রিভুজটি সমকোণী অর্থাৎ $\angle C$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ হলে

$c^2 = a^2+b^2$

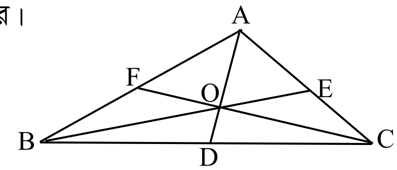
$\therefore a^2+b^2+c^2 = 2c^2$

বা, $\dfrac{4}{3}\ (d^2+c^2+f^2) = 2c^2$

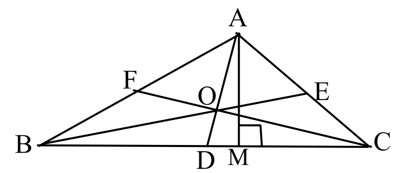
বা, $2\ (d^2+c^2+f^2) = 3c^2$

সুতরাং বলা যায় সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণের সমান।

উদাহরণ 3: ΔABC-এ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
(ক) O বিন্দুটিকে কী বলা হয়? O বিন্দু AD কে কি অনুপাতে বিভক্ত করে?
(খ) ΔABC-হতে $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত করুন।
(গ) দেখান যে, ΔABC এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।
সমাধান: (ক) O বিন্দুটির নাম ভরকেন্দ্র। O বিন্দু AD কে 3ঃ1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

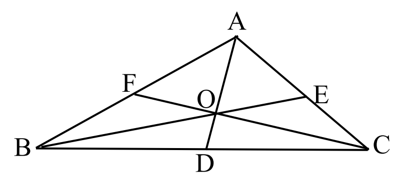


(খ) **বিশেষ নির্বচন:** ΔABC-এ AD, BF ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2$।
অঙ্কন: BC বাহুর উপর PM লম্ব অঙ্কন করুন।



ΔABD- এ $\angle ADB$ স্থূলকোণ, এবং BD রেখার বর্ধিতাংশের উপর AM রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DM।
$\therefore AB^2 = BD^2 + AD^2 + 2BD.DM$(উপপাদ্য ৮.৩)...................(i)
আবার ΔADC- এ $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ, এবং DC রেখার উপর AM রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DM।
$\therefore AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC.DM$ (উপপাদ্য ৮.৪)..................(ii)
(i) ও (ii) যোগ করে পাই,
$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + DC^2 + 2BD.DM - 2DC.DM$
$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD.DM - 2BD.DM$ $[\because BD = DC]$
$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ (প্রমাণিত)

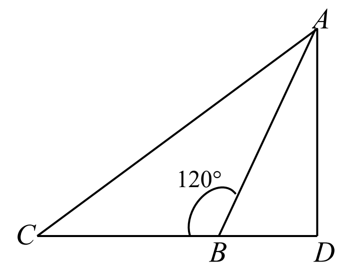
(গ) **বিশেষ নির্বচন:** ΔABC-এ AD, BF ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।
অর্থাৎ, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$
ΔABC-এ AD, BF ও CF তিনটি মধ্যমা।
এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,



$AB^2+AC^2= 2(AD^2+BD^2)$....................................(i)
$AB^2+BC^2= 2(BE^2+CE^2)$.....................................(ii)
$BC^2+AC^2= 2(FC^2+AF^2)$..................................(iii)
সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে –
$2(AB^2+BC^2 + AC^2) = 2(AD^2+BE^2 + CF^2) +2(BD^2 + AE^2 + AF^2)$
বা, $4(AB^2+BC^2 + AC^2) = 4(AD^2+BE^2 + CF^2) +4(BD^2 + AE^2 + AF^2)$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]
বা, $4(AB^2+BC^2 + AC^2) = 4(AD^2+BE^2 + CF^2) +4\left\{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2\right\}$
বা, $4(AB^2+BC^2 + AC^2) = 4(AD^2+BE^2 + CF^2) + (AB^2+BC^2 + AC^2)$
বা, $4(AB^2+BC^2 + AC^2) - (AB^2+BC^2 + AC^2) = 4(AD^2+BE^2 + CF^2)$
বা, $3(AB^2+BC^2 + AC^2) = 4(AD^2+BE^2 + CF^2)$ ....(iv)
আপনারা জানেন, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সম্পাত বিন্দুতে 2ঃ1 অনুপাতে বিভক্ত করে।
$\therefore \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$
বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$
বা, $\frac{OD+AO}{AO} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]
বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$
বা, $2AD = 3AO$
বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপভাবে, $4BE^2 = 9BO^2$
এবং $4CF^2 = 9CO^2$
সমীকরণ (iv) এ মানগুলো বসিয়ে পাই –
$3(AB^2+BC^2+AC^2) = 9(AO^2+BO^2+CO^2)$
$\therefore (AB^2+BC^2+AC^2) = 3(AO^2+BO^2+CO^2)$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4: ΔABC এর $\angle B = 120°$ হলে প্রমাণ করুন যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$
সমাধান: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle B = 120°$
BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AB বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ BD.
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$



প্রমাণ: ΔABC-এ CB বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AB বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ BD হওয়ায় $\angle ADC$ সমকোণ। ΔABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 120°$ পীথাগোরাসের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে,
$AC^2 = AB^2 + BC^2 + BC.BD$ ……………………… (i)
আবার, CD সরল রেখার উপর $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ দুইটি সন্নিহিত কোণ।
$\therefore \angle ABC + \angle ABD = 180°$
বা, $120° + \angle ABD = 180°$
বা, $\angle ABD = 180° - 120°$
$\therefore \angle ABD = 60°$
এখন, সমকোণী ত্রিভুজ ΔABD এর ভূমি এবং অতিভুজ
বা,
বা,
$AC^2 = (CB + BD)^2 + AD^2$
() নং সমীকরণের মান () সমীকরণে বসিয়ে পাই, (প্রমাণিত)

সারসংক্ষেপ

- পীথাগোরাস উপপাদ্য: একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
- কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বুঝায়।
- লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়।

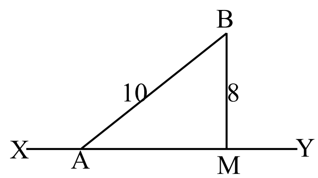
পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১

1. ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হলে ADঃ OD কত?
   (ক) 3 ঃ 2 (খ) 3 ঃ 1 (গ) 2 ঃ 1 (ঘ) 1 ঃ 2
2. ΔABC এর ক্ষেত্রে –
   (i) $\angle C$ স্থূলকোণ হলে, $AB^2 > AC^2 + BC^2$
   (ii) $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে, $AB^2 < AC^2 + BC^2$
   (iii) $\angle C$ সমকোণ হলে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$
   নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii)　(খ) (ii) ও (iii)　(গ) (i) ও (iii)　(ঘ) (i), (ii) ও (iii)

3. ΔABC ত্রিভুজের মধ্যমা $AD = 5$ সে.মি. এবং $BC = 6$ সে. মি. হলে $AB^2 + AC^2$ কত সে.মি.?
(ক) 34　(খ) 68　(গ) 78　(ঘ) 112

নিচের চিত্রের আলোকে (4-6) নং প্রশ্নের উত্তর দিন



4. XY সরলরেখার উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?
(ক) XY　(খ) AB　(গ) BM　(ঘ) AM

5. AM এর দৈর্ঘ্য কত?
(ক) 6　(খ) 8　(গ) 10　(ঘ) 12

6. ΔABM এর ক্ষেত্রফল কত?
(ক) 12　(খ) 24　(গ) 48　(ঘ) 32

7. ΔABC এ AD, BC বাহুর উপর লম্ব এবং BE, AC এর উপর লম্ব। দেখান যে $BC.CD = AC.AE$.

8. ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। দেখান যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

9. ΔABC এর $\angle B=60°$ হলে প্রমাণ করুন যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

10. ΔPQR এর মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ করুন যে, $PQ^2 + QR^2 + PR^2 = 3(OP^2 + OQ^2 + OR^2)$

পাঠ ৮.২ ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা নির্ণয় করতে পারবেন,
- বাহুর অুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ব বিন্দু সমরেখ, তা প্রমাণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিভুজ, বৃত্ত, সদৃশতা, কোণের সদৃশতা, বাহুর সদৃশতা

মূলপাঠ

ত্রিভুজ ও বৃত্ত-বিষয়ক উপপাদ্য

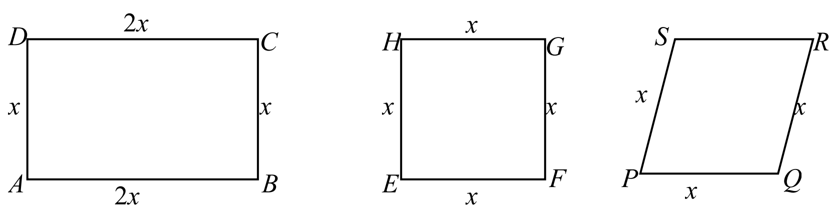
এই অংশে ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হবে। উপপাদ্যসমূহ প্রমাণের জন্য দুইটি ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে ভাল জ্ঞান থাকতে হবে। বাউবির এসএসসি প্রোগ্রামের জ্যামিতিতে ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে এ ইউনিটে ত্রিভুজের সাদৃশতা সম্পর্কে সংক্ষেপে আলোচনা করা হবে।

কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা: সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বহুভুজ বলা হয়।

বাহুর অনুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা: সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষ বিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির-

(i) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং

(ii) অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাত সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (*Similar*) বহুভুজ বলা হয়।



উপরের চিত্রে লক্ষ করলে দেখবেন যে,

(i) আয়ত $ABCD$ ও $EFGH$ বর্গ সদৃশ নয় যদিও তার সদৃশকোণী।

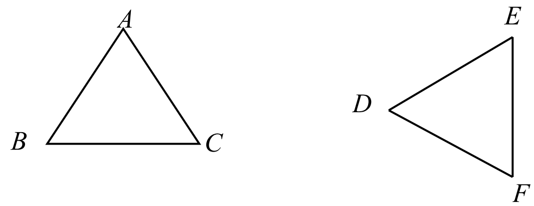
(ii) বর্গ $EFGH$ ও $PQRS$ রম্বস সদৃশ নয় যদিও তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর যেকোনো ধারাবাহিক মিলকরণের ফলে অনুরূপ বাহু দুইটির অনুপাতগুলো সমান হয়।

দুইটি ত্রিভুজের বেলায় শর্তগুলো ভিন্ন, এ ক্ষেত্রে-

(i) দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে সমান কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ এবং অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু ধরা হয়।

(ii) দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমানুপাতিক হলে, আনুপাতিক বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোন দুইটিকে অনুরূপ কোণ ধরা হয়।

(iii) উভয়ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলোর শীর্ষবিন্দু মিল করে ত্রিভুজ দুইটি বর্ণনা করা হয়। যেমন: ΔABC ও ΔDEF এর অনুরূপ কোণগুলো হচ্ছে $\angle A$ ও $\angle D$, $\angle B$ ও $\angle E$, $\angle C$ ও $\angle F$ এবং অনুরূপ বাহুগুলো হচ্ছে AB ও DE, AC ও DF, BC ও EF।



দুইটি ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্যের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হলো।

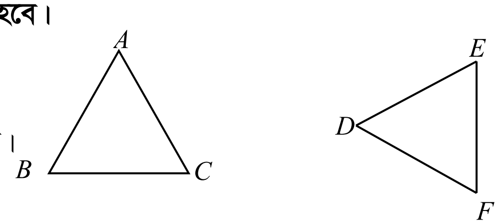
উপপাদ্য ৮.৬

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।

এখানে ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী ত্রিভুজ।

অর্থাৎ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ হওয়ায়

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ হবে। অর্থাৎ, অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।



অনুসিদ্ধান্ত: দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, তারা সদৃশ হয়।

যেকোনো ত্রিভুজের তিন কোনের সমষ্টি দুই সমকোণ হওয়ায় দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই কোণ অপরটির দুই কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং এর ফলে এগুলো সদৃশ হয়।

উপপাদ্য ৮.৭

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হয়।

পার্শ্বের চিত্রে ΔABC ও ΔDEF এর বাহুগুলো সমানুপাতিক অর্থাৎ, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ হওয়ায় ত্রিভুজের কোণগুলো পরস্পর সমান। অর্থাৎ, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F.$

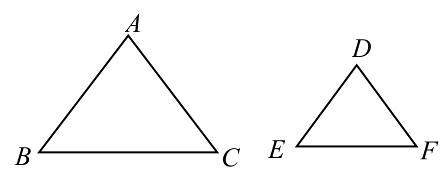
উপপাদ্য ৮.৮

দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ আপরটির এক কোণের সমান এবং সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

চিত্রে, ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$

এবং সমান কোন সংলগ্ন বাহুদ্বয় AB ও AC, DE ও DF এর সমানুপাতিক।

অর্থাৎ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ হওয়ায় ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

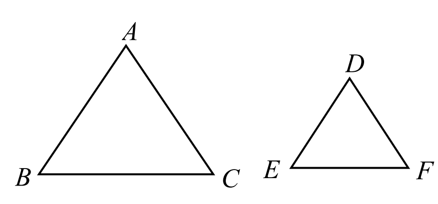


উপপাদ্য ৮.৯

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

চিত্রে ΔABC ও ΔDEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু BC ও EF। এ ক্ষেত্রে ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত BC ও EF বাহুদ্বয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

অর্থাৎ $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{BC^2}{EF^2}$



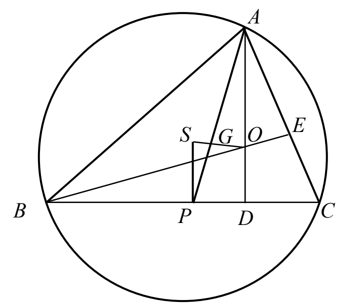
ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ব বিন্দু সম্পর্কীয় কিছু তথ্য

- কোনো ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ।
- ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র বলা হয়।
- ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে তাই লম্ববিন্দু।
- ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্ব- সমদ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

উপপাদ্য ৮.১০

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ব বিন্দু সমরেখ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করুন, ΔABC এর লম্ব বিন্দু O পরিকেন্দ্র S এবং AP একটি মধ্যমা, লম্ব বিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S এর সংযোগ রেখা AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। S,P যোগ করলে SP রেখা BC এর উপর লম্ব। তাহলে, G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র এই প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।



প্রমাণঃ আপনারা জানেন, কোনো ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দ্বিগুন। ΔABC এর লম্ব বিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত BC বাহু এর দূরত্ব SP।

$\therefore OA = 2SP$ ....(1)

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব সেহেতু

এখন $AD||SP$ এবং AP এদের ছেদক

$\angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ, $\angle OAG = \angle SPG$

এখন ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG =$ অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore \Delta AGO$ এবং ΔPGS সদৃশকোণী

সুতরাং $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP} = \frac{2}{1}$

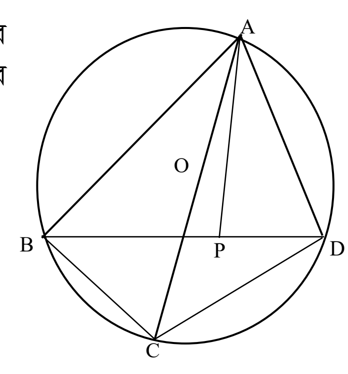
$AG : GP = 2:1$

অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore G$ বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৮.১১

টলেমির উপপাদ্যঃ বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD । AC এবং BD চতর্ভুজটির দুইটি কর্ণ । প্রমাণ করতে হবে যে, $AC.BD=AB.CD+BC.AD$ ।

অঙ্কনঃ $\angle DAC$ কোণ থেকে $\angle BAC$ এর সমান করে A বিন্দুতে $\angle DAP$ কোণ অঙ্কন করুন যাতে AP রেখা BD কর্ণকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণঃ $\angle BAC = \angle DAP$ [অঙ্কন অনুসারে]

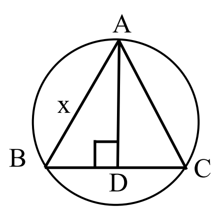
উভয়পক্ষে $\angle CAP$ যোগ করুন,

$\angle BAC + \angle CAP = \angle DAP + \angle CAP$

অর্থাৎ, $\angle BAP = \angle CAD$
এখন ΔABP এবং ΔACD এর মধ্যে
একই বৃত্তে অবস্থিত কোণ সমান; সুতরাং, $\angle ABD = \angle ACD$
এবং অবশিষ্ট $\angle BAP =$ অবশিষ্ট $\angle ADC$
$\therefore \Delta ABP$ এবং ΔACD সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$
অর্থাৎ, $AC.BP = AB.CD \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ (i)
আবার ΔABC এবং ΔAPD এর মধ্যে
অঙ্কন অনুসারে ; $\angle BAC = \angle PAD$
একই বৃত্তে অবস্থিত কোণ সমান বলে; $\angle ADP = \angle ACB$ এবং অবশিষ্ট $\angle ABC =$ অবশিষ্ট $\angle APD$
$\therefore \Delta ABC$ এবং ΔAPD সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$
অর্থাৎ, $BC.AD = PD.AC$..........................(ii)
এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,
বা, $AC(BP + PD) = AB.CD + BC.AD$
অর্থাৎ, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ [যেহেতু, $BP + PD = BD$] (প্রমাণিত)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.২

1. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো কী ধরণের?
   (ক) সমান (খ) অসমান (গ) সমানুপাতিক (ঘ)ব্যস্তানুপাতিক
2. দুইটি বহুভুজের কোণগুলো সমান হলে –
   (i) বহুভুজদ্বয় সদৃশকোণী
   (ii) বহুভুজদ্বয় সদৃশ বা অসদৃশ
   (iii) বহুভুজদ্বয় সর্বদা সর্বসম
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ)(i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (ii)
   নিচের তথ্যের আলোকে (3-5) নং প্রশ্নের উত্তর দিন:



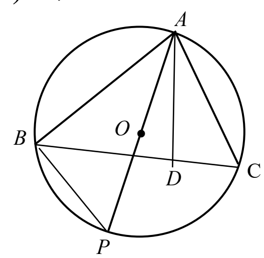
ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি.

3. AB কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে AD কোনটি হবে?
   (ক) $\frac{3}{4}x^2$ (খ)$\sqrt{3x^2}$ (গ) x^2 (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}x$
4. x এর মান কোনটি?
   (ক) $\frac{3}{2}$ (খ) $3\sqrt{3}$ (গ) $\sqrt{3}$ (ঘ) $3\sqrt{2}$

5. $AD =$ কত সে.মি.?

(ক) $\sqrt{3}$ (খ) $3\sqrt{2}$ (গ) $\sqrt{2}$ (ঘ) $\frac{9}{2}$

6.



ΔABC, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত হলে-

(i) $\angle ABP = 90°$, (ii) $AB.AC = AP.AD$

(iii) $\angle APB$ ও $\angle ACD$ একই চাপের উপর বৃত্তস্থ কোণ।

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

7. AB ব্যাসের উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$।

8. কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

9. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ করুন যে, PO রেখা AB এর উপর লম্ব। অর্থাৎ, $PO \perp AB$.

10. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখান যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১

1. খ 2. ঘ 3. খ 4. ঘ 5. ক 6. খ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.২

1. গ 2. ক 3. ঘ 4. খ 5. ঘ 6. ঘ 9. $3\sqrt{3}$