সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন
(Exponential and Logarithmic Function)

ইউনিট ৬

ভূমিকা

সূচক ও লগারিদমের সাহায্যে গাণিতিক হিসাব ও সমস্যা সমাধান অনেক ক্ষেত্রে সহজতর হয়। সূচকের সাহায্যে অনেক বড় সংখ্যা বা ছোট সংখ্যাকে শুধুমাত্র একটি প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যেমন: 100000 *কে লেখা যায়* 10^5 *। একই ভাবে লগারিদমীয় ফাংশনেরও অনেক প্রয়োগ রয়েছে। যেমন: জনসংখ্যা বৃদ্ধি, চক্র বৃদ্ধি মুনাফার হিসেব ইত্যাদি ক্ষেত্রে সূচকীয় এবং লগারিদমীয় ফাংশনের ব্যবহার করা হয়।*

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- মূলদ ও অমূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সূচক ও লগারিদমের সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- লগারিদমের বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- সূচক, লগারিদম ও পরমমান ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সূচক, লগারিদম ও পরমমান ফাংশন সংশ্লিষ্ট গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবেন,
- সূচক, লগারিদম ও পরমমান ফাংশন সমূহকে লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৬.১ মূলদ ও অমূলদ সূচক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা চিহ্নিত করতে পারবেন,
- মূলদীয় সংখ্যাকে সূচক আকারে প্রকাশ করতে পারবেন,
- অমূলদীয় সংখ্যাকে সূচক আকারে প্রকাশ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	মূলদ, অমূলদ, সূচক

মূলপাঠ

মূলদ ও অমূলদ সূচক

এই ইউনিটে কিছু পরিচিত সংকেত ব্যবহার করা হবে, তাই সে সব সংকেত এখানে উপস্থাপন করা হলো-
সকল বাস্তব সংখ্যার সেট '$\mathbb{R}$', সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট '$\mathbb{N}$', সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট '$\mathbb{Z}$' এবং সকল মূলদ সংখ্যার সেট '$\mathbb{Q}$'

মনে করুন, $a \in \mathbb{R}$ (অর্থাৎ a যে কোন বাস্তব সংখ্যা) $n \in \mathbb{N}$ (n যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা) তাহলে a কে n বার গুণ করলে গুণফলটিকে লেখা হয় $a^n = a.a.a.a.a.a.........a$ (n বার) এবং a^n কে বলা হয় a এর n ঘাত। এরূপ ক্ষেত্রে a কে বলা হয় ভিত্তি (base) এবং n কে বলা হয় এর সূচক (exponent) বা ঘাত। যেমন: 7^6 এর ক্ষেত্রে 7 কে ভিত্তি এবং 6 কে 7 এর সূচক বলা হয়। আবার $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ এর ক্ষেত্রে $\frac{3}{2}$ কে বলা হয় ভিত্তি এবং 4 কে বলা হয় $\frac{3}{2}$ এর সূচক।

ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক

সংজ্ঞা: সকল $a \in \mathbb{R}$ এর জন্য

(i) $a^1 = a$

(ii) $a^n = a.a.a.a.a.a.........a$ (n বার) যেখানে, $n \in \mathbb{N}$ এবং $n > 1$।

অমূলদ সূচক : মনে a করুন যেকোন বাস্তব সংখ্যা এবং x অমূলদ সংখ্যা। a^x এর মান এমন ভাবে নির্দিষ্ট করা হয় যে, x এর মূলদ আসন্ন মান p এর জন্য a^p এর মান a^x এর মানের আসন্ন হয়

যেমন: $5^{\sqrt{3}}$ সংখ্যাটি বিবেচনা করুন। এখানে $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{3} = 1.732050808\ldots\ldots$

$\sqrt{3}$ এর আসন্ন মান হিসেবে

$p_1 = 1.7;$ $p_2 = 1.73;$ $p_3 = 1.732;$ $p_4 = 1.7320;$ $p_5 = 1.73205;$
$p_6 = 1.732050;$ $p_7 = 1.7320508$ বিবেচনা করা হয়।

$5^{\sqrt{3}}$ এর আসন্ন মান হিসেবে

$q_1 = 15.42584656;$ $q_2 = 16.18892858;$ $q_3 = 16.2411226;$
$q_4 = 16.2411226;$ $q_5 = 16.24242971;$ $q_6 = 16.24242971$
$q_7 = 16.24245062$ পাওয়া যায়।

বাস্তবিক পক্ষে, শেষের মানটিই গ্রহণ যোগ্য অর্থাৎ, $5^{\sqrt{3}} = 16.24245062$

শিক্ষার্থীর কাজ	$5^{\sqrt{3}}, 5^{\sqrt{7}}$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- $a^n = a.a.a.a.a.a.a.........a$ (n বার) যেখানে, $n \in \mathbb{N}$ এবং $n > 1$
- a^n কে বলা হয় a এর n ঘাত।
- $a^1 = a$ এবং $a^0 = 1$

পাঠ ৬.২ মূলের ব্যাখ্যা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূলের ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সূচকের সূত্র লিখতে পারবেন,
- সূচকের সূত্র ব্যবহার করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	মূল, বর্গমূল, n তম মূল

মূলপাঠ

সংজ্ঞাঃ মূলঃ $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ এবং $a \in \mathbb{R}$ হলে, যদি এমন $x \in \mathbb{R}$ থাকে যেন $x^n = a$ তবে সেই x কে a এর একটি n তম মূল বলা হয়। 2 তম মূলকে বর্গমূল এবং 3 তম মূলকে ঘনমূল বলা হয়।

উদাহরণঃ (i) 3 এবং -3 উভয়েই 81 এর 4 তম মূল, কারণ $3^4 = 81$ এবং $(-3)^4 = 81$ ।

(ii) 0 এর n তম মূল 0, কারণ $0^n = 0$

(iii) -8 এর ঘন মূল -2 কারণ, $(-2)^3 = -8$

(iv) -16 এর কোন বর্গমূল নেই, কারণ যে কোন বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল অঋণাত্মক।

সূচক সম্পর্কিত সূত্র

সূত্র ১: $a \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}$ হলে, $a^1 = a, a^{n+1} = a^n.a$

সূত্র ২: $a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $a^m.a^n = a^{m+n}$

সূত্র ৩: $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}}, m < n \end{cases}$

সূত্র ৪: $a \in \mathbb{R}$এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

সূত্র ৫: $a \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}$ হলে,$(a.b)^n = a^n.b^n$

সূত্র ৬: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক

যদি $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$(i)\ a^0 = 1$
$(ii)\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$ ।

উপরোক্ত সূত্রের প্রমাণগুলো গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখানো হলো-

প্রমাণঃ সূত্র ১ঃ সঙ্গানুযায়ীঃ $a^1 = a$ এবং $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $a^{n+1} = a.a.a \ldots \ldots a.a = a^n.a$

প্রমাণঃ সূত্র ২ঃ $a^m.a^n = a^{m+n} \ldots \ldots \ldots \ldots$ (i), যেখানে $a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$

(i) নং এ $n = 1$ বসিয়ে, বামপক্ষ $= a^m.a^1 = a^m.a = a^{m+1} =$ ডান পক্ষ

$\therefore n = 1$ এর জন্য (i) সত্য। $a^m.a^k = a^{m+k} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$ (ii)

এখন মনে করুন, n=k এর জন্য (i) সত্য। অর্থাৎ,

তাহলে, $a^m.\ a^{k+1} = a^m(\ a^k.a)$

$= (a^m\ a^k).a$ [গুণের সহযোজন]

$= a^{m+k}.a$

$= a^{m+k+1}$ অর্থাৎ, $n = k + 1$, এর জন্য (i) সত্য

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য (i) সত্য

$\therefore$ যে কোনো $m, n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $a^m.a^n = a^{m+n}$

সূত্রটিকে সূচকের মৌলিক সূত্র বলা হয়।

শিক্ষার্থীর কাজ	**সূত্র ৪ঃ** $a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in N$ হলে, $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ **সূত্র ৫ঃ** $a \in \mathbb{R}$ এবং $n \in N$ হলে, $(a.b)^n = a^n.b^n$ সূত্র ৪ ও ৫ কে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

উদাহরণ 1:

(ক) $3^5 \times 3^6 = 3^{5+6} = 3^{11}$

(খ) $\frac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2$

(গ) $\frac{5^3}{5^5} = \frac{1}{5^{5-3}} = \frac{1}{5^2}$

(ঘ) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{5^2}{4^2}$

(ঙ) $(3^2)^7 = 3^{14}$

(চ) $(x^2y^3)^5 = (x^2)^5 \times (y^3)^5 = x^{10} \times y^{15}$

উদাহরণ 2:

(ক) $4^0 = 1$

(খ) $(-6)^0 = 1$

(গ) $8^{-1} = \frac{1}{8}$

(ঘ) $7^{-3} = \frac{1}{7^3}$

(ঙ) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

(চ) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

মূল সম্পর্কীয় সূত্র

সূত্র ৭ঃ $a \in \mathbb{R}$ এবং এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ হয় তবে a এর একটি অনন্য ধনাত্মক n তম মূল থাকে। এই ধনাত্মক মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং একে a এর n তম মূল বলা হয়।

মন্তব্য : $a > 0$ হলে $\sqrt{a}$ একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা। তাই $\sqrt{4} = 2, (\pm$ নয়), যদিও $x^2 = 4$ সমীকরণের সমাধান $x = \pm 2$

সূত্র ৮: $a < 0$ এবং n বিজোড় হলে $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

$|a| = \begin{cases} a \text{ যখন } a > 0 \\ -a \text{ যখন } a < 0 \end{cases}$, যেখানে $|a|$ হচ্ছে a এর পরম মান।

প্রমাণ: মনে করুন, $-\sqrt[n]{|a|} = p$

তাহলে, $p^n = |a|$ [মূলের সংজ্ঞা অনুসারে]

বা, $p^n = -a$, [$|a|$ বৈশিষ্ট অনুসারে]

বা, $-p^n = a$

বা, $(-p)^n = a$ [$\therefore n$ বিজোড়]

সুতরাং, $\sqrt[n]{a} = -p$

$\therefore \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$, কেননা a এর n তম মূল অনন্য।

n জোড় হলে, a এর কোন n তম মূল নেই।

উদাহরণ 3: $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$

সূত্র ৯: 0 এর n তম মূল $\sqrt[n]{0} = 0$

সূত্র ১০: $a > 0, m \in \mathbb{Z}$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ হলে , $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

প্রমাণ: মনে করুন, $p = \sqrt[n]{a}$ এবং $\sqrt[n]{a^m} = q$, তাহলে $p^n = a$ এবং $q^n = a^m$

এখন $q^n = a^m = (p^n)^m = (p^m)^n$

যেহেতু, $q > 0, p^m > 0$ সুতরাং মুখ্য n তম মূল বিবেচনা করে পাই, $q = p^m$

বা, $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

অর্থাৎ, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

সূত্র ১১: যদি $a > 0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয় , যেখানে এবং $n > 1, q > 1$ **তবে** $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

প্রমাণ: শর্ত অনুসারে, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ অর্থাৎ, $mq = pn$

মনে করুন, $\sqrt[n]{a^m} = x$ তাহলে, $x^n = a^m$

$\therefore (x^n)^q = (a^m)^q$

$\therefore x^{nq} = a^{mq} = a^{np}$

বা, $(x^q)^n = (a^p)^n$

$\therefore x^q = a^p$ [মুখ্য n তম মূল বিবেচনা করে]

সুতরাং, $x = \sqrt[q]{a^p}$

$\therefore \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

অনুসিদ্ধান্ত: যদি $a > 0$ এবং $n, k \in \mathbb{N}, n > 1$ হয়, তবে $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ ।

সারসংক্ষেপ

$a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে

- $a^m . a^n = a^{m+n}$

✪ $\frac{a^m}{a^n}=\begin{cases}a^{m-n}, m>n\\ \frac{1}{a^{n-m}}, m<n\end{cases}$
✪ $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
✪ $(a.b)^n = a^n.b^n$

পাঠ ৬.৩ মূলদ ভগ্নাংশের সূচক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূলদ ভগ্নাংশ সূচকের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন,
- সম হর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করতে পারবেন,
- মূলদ ভগ্নাংশ সূচক সম্বলিত সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	মূলদ ভগ্নাংশ, সম হর

মূলপাঠ

মূলদ ভগ্নাংশ সূচক

সংজ্ঞা: $a \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ হলে $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ যখন $a > 0$ অথবা $a < 0$ এবং n বিজোড় ।

আপনারা জানেন, সূত্র 8: $a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে,$(a^m)^n = a^{mn}$ যদি সকল ক্ষেত্রে সত্য হয় তাহলে,

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}.n} = a^1 = a$ হতে হবে, অর্থাৎ $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম মূল হতে হবে।

$a > 0$ এবং $r \in \mathbb{Q}$ অর্থাৎ r মূলদ সংখ্যা। অর্থাৎ $r = \frac{p}{q}$ যেখানে $q \in \mathbb{N},\ q > 1$ এর জন্য $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

কয়েকটি প্রয়োজনীয় তথ্য

(i) যদি $x^m = 1$ হয়, যেখানে $x > 0$ এবং $x \neq 1$ তাহলে $m = 0$

(ii) যদি $x^m = 1$ হয়, যেখানে $x > 0$ এবং $m \neq 0$ তাহলে $x = 1$

(iii) যদি $x^m = x^n$ হয়, যেখানে $x > 0$ এবং $x \neq 1$ তাহলে $m = n$

(iv) যদি $x^m = y^n$ হয়, যেখানে $\frac{x}{y} > 0$ এবং $m \neq 0$ তাহলে $x = y$

উদাহরণ 1: দেখান যে, $x^{\frac{m}{n}}.x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ যেখানে $x > 0;\ m, p \in \mathbb{Z}; n, q \in \mathbb{N}, n > 1, q > 1$

সমাধান: $\frac{m}{n}$ ও $\frac{p}{q}$ কে সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করে দেখা যায় যে,

$$x^{\frac{m}{n}}.x^{\frac{p}{q}} = x^{\frac{mq}{nq}}.x^{\frac{np}{nq}} = \left(x^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq}. \qquad \left(x^{\frac{1}{nq}}\right)^{np},\ \left[\because x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]$$

$$= \left(x^{\frac{1}{nq}}\right)^{mq+np} = x^{\frac{mq+np}{nq}} = x^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = x^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

উদাহরণ 2. প্রমাণ করুন যে, $(xy)^{\frac{m}{n}}. = x^{\frac{m}{n}}.y^{\frac{m}{n}}$

সমাধান: বামপক্ষ $= (xy)^{\frac{m}{n}}$
মনে করুন, $\frac{m}{n} = a$
সুতরাং, $(xy)^a = x^a . y^a = x^{\frac{m}{n}} . y^{\frac{m}{n}}$, [মান বসিয়ে] = ডানপক্ষ

উদাহরণ 3: সরল করুন: $\frac{x^{\frac{3}{2}}+xy}{xy-y^3} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}$

সমাধান: $\frac{x^{\frac{3}{2}}+xy}{xy-y^3} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y} = \frac{xx^{\frac{1}{2}}+xy}{xy-y^3} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y} = \frac{x\sqrt{x}+xy}{y(x-y^2)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y} = \frac{x(\sqrt{x}+y)}{y\{(\sqrt{x})^2-y^2\}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}$

$= \frac{x(\sqrt{x}+y)}{y\{(\sqrt{x}+y)(\sqrt{x}-y)\}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y} = \frac{x}{y(\sqrt{x}-y)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y} = \frac{x-y\sqrt{x}}{y(\sqrt{x}-y)} = \frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}-y\sqrt{x}}{y(\sqrt{x}-y)}$

$= \frac{\sqrt{x}.(\sqrt{x}-y)}{y(\sqrt{x}-y)} = \frac{\sqrt{x}}{y}$

উদাহরণ 4: সরল করুন: $[1-\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$

সমাধান: $[1-\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1} = \left[1-\left\{1-\frac{1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1} = \left[1-\left\{\frac{1-x^3-1}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$

$= \left[1-\left\{\frac{-x^3}{1-x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1} = \left[1-\frac{1}{\frac{-x^3}{1-x^3}}\right]^{-1} = \left[1-\frac{1-x^3}{-x^3}\right]^{-1} = \left[\frac{-x^3-1+x^3}{-x^3}\right]^{-1}$

$= \left[\frac{-1}{-x^3}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{x^3}\right]^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{x^3}} = 1\times\frac{x^3}{1} = x^3$

উদাহরণ 5: যদি $x^m = y,\ y^n = z,$ এবং $z^p = x$ হয় তবে দেখান যে, $mnp = 1$
সমাধান : দেওয়া আছে, $x^m = y$, $y^n = z$ এবং $z^p = x$

$\therefore y = x^m = (z^p)^m = z^{mp} = (y^n)^{mp} = y^{mnp}$

বা, $y = y^{mnp}$

$\therefore mnp = 1$

উদাহরণ 6: প্রমাণ করুন যে , $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} = 1$

সমাধান : বামপক্ষ $= \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} = (x^{b-c})^{b+c}\times(x^{c-a})^{c+a}\times(x^{a-b})^{a+b}$

$= x^{b^2-c^2}\times x^{c^2-a^2}\times x^{a^2-b^2} = x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2} = x^0 = 1$

উদাহরণ 7: প্রমাণ করুন যে, $\frac{\left(\frac{x+y}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(\frac{x-y}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}}}{\left(\frac{x+y}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}} \times \left(\frac{x-y}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}}} = \frac{x^2-y^2}{xy}$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{\left(\frac{x+y}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}} \times \left(\frac{x-y}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}}}{\left(\frac{x+y}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}} \times \left(\frac{x-y}{y}\right)^{\frac{y}{x-y}}} = \left(\frac{x+y}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x-y}} . \left(\frac{x-y}{y}\right)^{\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x-y}}$

$= \left(\frac{x+y}{y}\right)^{\frac{x-y}{x-y}} . \left(\frac{x-y}{y}\right)^{\frac{x-y}{x-y}} = \left(\frac{x+y}{y}\right)^1 . \left(\frac{x-y}{y}\right)^1$

$= \frac{x+y}{y} . \frac{x-y}{y} = \frac{x^2-y^2}{y}$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 8: সমাধান করুন $4^{x+1} = 32$

সমাধান: $4^{x+1} = 32 \Rightarrow (2^2)^{x+1} = 2^5 \Rightarrow 2^{2x+2} = 2^5 \Rightarrow 2x+2 = 5$

$\Rightarrow 2x = 5-2 \Rightarrow 2x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

উদাহরণ 9: সমাধান করুন $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320$

সমাধান: $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320 \Rightarrow 2^{x}.2^{3} + 2^{x}.2 = 320 \Rightarrow 8a + 2a = 320$, ($2^x = a$ ধরে)

$\Rightarrow 10a = 320 \Rightarrow a = 32 \Rightarrow 2^x = 32$ (a মান বসিয়ে) $\Rightarrow 2^x = 2^5$

$\therefore x = 5$

শিক্ষার্থীর কাজ	সরল করুন: $\sqrt[12]{(p^8)\sqrt{(p^6)\sqrt{p^4}}}$

সারসংক্ষেপ

- $a \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ হলে $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ যখন $a > 0$ অথবা $a < 0$ এবং n বিজোড়
- যদি $x^m = x^n$ হয়, যেখানে $x > 0$ এবং $x \neq 1$ তাহলে $m = n$
- যদি $x^m = y^n$ হয়, যেখানে $\frac{x}{y} > 0$ এবং $m \neq 0$ তাহলে $x = y$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৩

1. প্রমাণ করুন যে, $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^p = x^{\frac{mp}{n}}$ যেখানে $m, p \in \mathbb{Z}$ এবং $n \in \mathbb{N}$
2. সরল করুন: $\left\{\left(a^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{x^2-y^2}{x-y}}\right\}^{\frac{x}{x+y}}$
3. সরল করুন: $\frac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}}$
4. সরল করুন: $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$
5. যদি $\sqrt[m]{x} = \sqrt[n]{y} = \sqrt[p]{z}$,এবং $xyz = 1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $m + n + p = 0$
6. যদি $(25)^x = (125)^y$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$
7. সমাধান করুন: $4^{3y-2} - 16^{x+y} = 0$ এবং $3^{x+2y} - 9^{2x+1} = 0$

পাঠ ৬.৪ লগারিদম ও তার সূত্রাবলী

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোনো সূচকীয় ফাংশনকে লগারিদমের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারবেন,
- লগারিদমের সূত্রের সাহায্যে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	লগারিদম, প্রতিলগ

মূলপাঠ

লগারিদমঃ *Logos* এবং *Arithmas* নামক দুটি গ্রিক শব্দ হতে *Logarithm* শব্দটির উৎপত্তি হয়েছে। *Logos* অর্থ আলোচনা এবং *Arithmas* অর্থ সংখ্যা । অর্থাৎ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা।

সংজ্ঞাঃ যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ $x = log_a b$ ।

বিপরীতক্রমে, যদি $x = log_a b$ হলে $a^x = b$ হবে। এক্ষেত্রে b সংখ্যাটিকে a এর সাপেক্ষে x এর প্রতিলগ $(antilogarithm)$ বলে এবং লেখার পদ্ধতি $b = anti\log_a x$

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুনঃ (ক) $log_{10}100$, (খ) $log_3 \frac{1}{9}$ (গ) $log_{\sqrt{3}}81$

সমাধানঃ (ক) $log_{10}100 = log_{10}(10)^3 = 3log_{10}10 = 3.1 = 3[\because log_a a = 1]$

(খ) $log_3 \frac{1}{9} = log_3 3^{-2} = -2log_3 3 = -2$

(গ) $log_{\sqrt{3}}81 = log_{\sqrt{3}}(3)^4 = log_{\sqrt{3}}\{(\sqrt{3})^2\}^4 = log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^8 = 8log_{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 8$

উদাহরণ 2: $log_3 81 = 4$ যেহেতু $3^4 = 81$ এবং

$log_9 81 = 2$ যেহেতু $9^2 = 81$

সুতরাং একই সংখ্যার লগারিদম ভিন্ন ভিন্ন ভিত্তির প্রেক্ষিতে ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে।

দ্রষ্টব্যঃ ধনাত্মক কিন্তু এককের সমান নয় এমন ফাংশনের সাহায্যে বলা যায় $a > 0$ এবং $a \neq 1$ এমন যে কোন সংখ্যা কে log এর ভিত্তি হিসেবে ধরা যায় । কোন ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম এর বাস্তব মান নির্ণয় করা যায় না।
$a > 0, a \neq 1$ এবং $b \neq 0$ হলে এর অনন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে $log_a b$ দ্বারা সূচিত করা হয় । সুতরাং
(ক) $log_a b = x$ যদি এবং কেবল যদি $a^x = b$ হয় (ক) এর সাহায্যে দেখা যায় যে,
(খ) $log_a(a^x) = x$
(গ) $a^{log_a b} = b$

উদাহরণ 3: $antilog 2.82679 = 671.1042668$

$antilog(9.82672 - 10) = 0.671$

এবং$antilog(6.74429 - 10) = 0.000555$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে উপরোক্ত সমস্যাগুলো সমাধান করা হয়েছে।

লগারিদমের সূত্রাবলীঃ

সূত্র ১: $log_a a = 1$ এবং $log_a 1 = 0$

সূত্র ২: $log_a(M \times N) = log_a M + log_a N$

সূত্র ৩: $log_a\left(\frac{M}{N}\right) = log_a M - log_a N$

সূত্র ৪: $log_a(M)^N = Nlog_a M$

সূত্র ৫: $log_a M = log_b M \times log_a b$

উদাহরণ 4: (ক) $log_3 5 + log_3 7 + log_3 4 = log_3(5\times7\times4) = log_3 140$

(খ) $log_5 30 - log_5 15 = log_5\left(\frac{30}{15}\right) = log_5 2$

(গ) $log_2 125 = log_2 5^3 = 3log_2 5$

উদাহরণ 5: যদি $log_{\sqrt{27}}x = 3\frac{1}{3}$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $log_{\sqrt{27}}x = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

সুতরাং, $x = (\sqrt{27})^{\frac{10}{3}} = (\sqrt{3^3})^{\frac{10}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{10}{3}} = 3^{\frac{3}{2}\times\frac{10}{3}} = 3^5 = 125$

নির্ণেয় $x = 125.$

উদাহরণ 6: x এর মান নির্ণয় করুন: $(i)\ log_5x = 3$ $(ii)\ log_2\frac{1}{16} = 2$

সমাধান: (i) $log_5x = 3$

বা, $5^3 = x$

$\therefore x = 5\times5\times5 = 125$

(ii) $log_x\frac{1}{16} = 2$

বা, $x^2 = \frac{1}{16}$

$\therefore x = \frac{1}{4}$

উদাহরণ 7: যদি $log_{10}(97 + \sqrt{x^2 - 7x + 21}) = 2$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $log_{10}(97 + \sqrt{x^2 - 7x + 21}) = 2$

সুতরাং, $(97 + \sqrt{x^2 - 7x + 21}) = 10^2 = 100$

বা, $\sqrt{x^2 - 7x + 21} = 100 - 97$ বা, $\sqrt{x^2 - 7x + 21} = 3$

বা, $x^2 - 7x + 21 = 9$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 - 7x + 21 - 9 = 0$ বা, $x^2 - 7x + 12 = 0$

বা, $x^2 - 3x - 4x + 12 = 0$ বা, $x(x - 3) - 4(x - 3) = 0$

বা, $(x - 3)(x - 4) = 0$

$\therefore x = 3$ অথবা $x = 4$

নির্ণেয় $x = 3$ অথবা $x = 4$

উদাহরণ 8: প্রমাণ করুন যে, $x^{log_ay} = y^{log_ax}$

সমাধান: মনে করুন, $log_ay = p$ এবং $log_ax = q$

সুতরাং, $a^p = y$ এবং $a^q = x$

$\therefore (a^p)^q = y^q$, [উভয় পক্ষে q ঘাত নিয়ে]

বা, $a^{pq} = y^q$ ……………………………..(i)

আবার, $(a^q)^p = x^p$, [উভয় পক্ষে p ঘাত নিয়ে]

বা, $a^{pq} = x^p$ ……………………………..(ii)

(i) ও (ii) নং থেকে পাই, $x^p = y^q$

$\therefore x^{log_ay} = y^{log_ax}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 9: প্রমাণ করুন যে, $\frac{1}{log_p(pqr)} + \frac{1}{log_q(pqr)} + \frac{1}{log_r(pqr)} = 1$

সমাধান: মনে করুন, $log_p(pqr) = x$, $log_q(pqr) = y$ এবং $log_r(pqr) = z$

সুতরাং, $p^x = pqr$, $q^y = pqr$ এবং $r^z = pqr$

বা, $p = (pqr)^{\frac{1}{x}}$, $q = (pqr)^{\frac{1}{y}}$ এবং $r = (pqr)^{\frac{1}{z}}$

এখন, $pqr = (pqr)^{\frac{1}{x}}.(pqr)^{\frac{1}{y}}.(pqr)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(pqr)^1 = (pqr)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

বা, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

বা, $\frac{1}{log_p(pqr)}+\frac{1}{log_q(pqr)}+\frac{1}{log_r(pqr)}=1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 10: যদি $\frac{loga}{q-r}=\frac{logb}{r-p}=\frac{logc}{p-q}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, $a^p.b^q.c^r=1$

সমাধান: মনে করুন, $\frac{loga}{q-r}=\frac{logb}{r-p}=\frac{logc}{p-q}=k$

তাহলে, $loga=k(q-r)$, $logb=k(r-p)$, $logc=k(p-q)$

বা, $ploga=k(pq-rp)$, $q\,logb=k(qr-pq)$, $r\,logc=k(rp-qr)$

এখন, $ploga=kpq-krp$

$q\,logb=kqr-kpq$

$r\,logc=krp-kqr$

$p\,loga+q\,logb+r\,logc=0$ [যোগ করে]

বা, $log_a p+log_b q+log_c r=0$

বা, $log(a^p.b^q.c^r)=log1$

$\therefore a^p.b^q.c^r=1$

উদাহরণ 11: প্রমাণ করুন $log_{10}\frac{50}{147}=log_{10}2+2log_{10}5-log_{10}3-2log_{10}7$

সমাধান: বামপক্ষ $=log_{10}\frac{50}{147}=log_{10}\frac{5\times5\times2}{3\times7\times7}=log_{10}\frac{5^2\times2}{3\times7^2}$

$=log_{10}(5^2\times2)-log_{10}(3\times7^2)$

$=log_{10}5^2+log_{10}2-(log_{10}3+log_{10}7^2)$

$=2log_{10}5+log_{10}2-log_{10}3-2log_{10}7$

= ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

শিক্ষার্থীর কাজ	যদি $log_{10}(98+\sqrt{x^2-7x+21})=2$ হয়, তাহলে x এর মান নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- যদি $a^x=b$ হয়, যেখানে $a>0$ এবং $a\neq1$ তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ $x=log_a b$.
- বিপরীত ক্রমে, যদি $x=log_a b$ হলে $a^x=b$ হবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৪

1. যদি $log_x y=6$ এবং $log_x 8y=3$ হয়, তবে x ও y এর মান নির্ণয় করুন।
2. যদি $\frac{loga}{y-z}=\frac{logb}{z-x}=\frac{logc}{x-y}$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, $a^x.b^y.c^z=1$
3. যদি $x=1+log_a bc$, $y=1+log_b ca$ এবং $z=1+log_c ab$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, $xyz=xy+yz+zx$।
4. যদি $\log\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{1}{2}(logx+logy)$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=9$।
5. প্রমাণ করুন যে, $log_a p\times log_p q\times log_q r\times log_r b=log_a b$

পাঠ ৬.৫ সূচকীয়, লগারিদমীয় এবং পরমমান ফাংশন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সূচকীয় ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন,
- লগারিদমীয় ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন,
- পরমমান ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সূচকীয় ফাংশন, লগারিদমীয় ফাংশন

মূলপাঠ

সূচকীয় ফাংশন

$f(x) = y = a^x$ জাতীয় সকল ফাংশন কে সূচকীয় ফাংশন বলা হয় । এখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$
যেমন: $y = 2^x, 10^x, e^x$ ইত্যাদি সূচকীয় ফাংশন ।

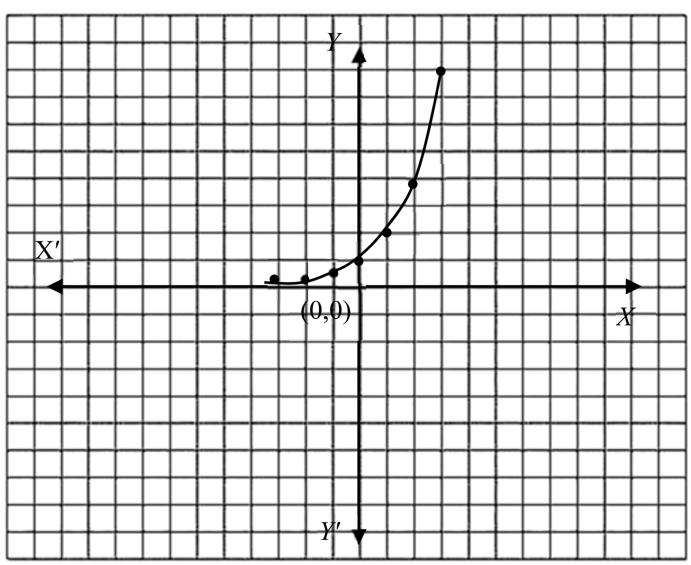
শিক্ষার্থীর কাজ	নিচের কোনগুলো সূচকীয় ফাংশন নির্দেশ করে তা নির্দিষ্ট করুন: $y = (-3)^x, y = 3x, y = -2x + 3, y = x^2 + 1, y = 3^x$

উদাহরণ 1: $y = 2^x$ এর লেখচিত্র অংকন করুন এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করুন:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়।



এখানে ডোমেন $= (-\infty, \infty)$
এবং রেঞ্জ $= (0, \infty)$

শিক্ষার্থীর কাজ	সূচকগুলির লেখচিত্র অঙ্কন করুন: (ক) $y = 2^{-2x}$ (খ) $y = 3^x$ (গ) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

লগারিদমীয় ফাংশন: লগারিদমিক ফাংশন $y = f(x) = log_a x$ যেখানে $a > 0$, এবং $a \neq 1$
$f(x) = log_3 x$, $f(x) = lnx$, $f(x) = log_{10} x$ ইত্যাদি লগারিদমিক ফাংশন।

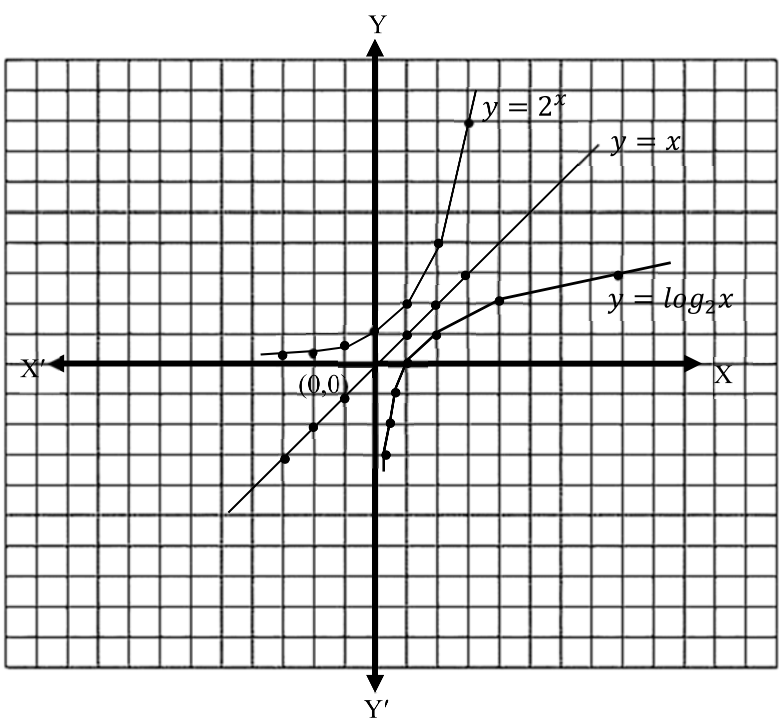
উদাহরণ 2: $y = log_2 x$, $y = 2^x$এবং $y = x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন ।
সমাধান: $y = log_2 x$, $y = 2^x$এবং $y = x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন **করা হলো:**

x	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y = log_2 x$	0	1	2	3	-1	-2	-3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

এখানে ডোমেন $(R) = (0, \infty) \cup (-\infty, \infty) \cup (-\infty, \infty) = (-\infty, \infty)$
এবং রেঞ্জ $= (-\infty, \infty) \cup (0, \infty) \cup (-\infty, \infty) = (-\infty, \infty)$

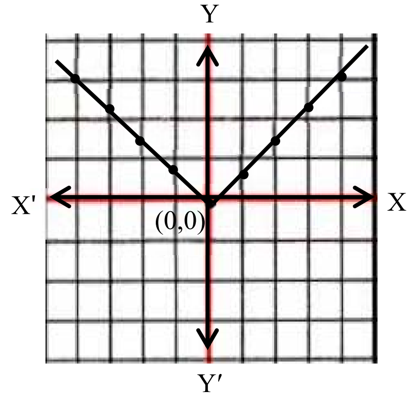


পরমমান ফাংশন (Absulate Value Function): যদি $x \in \mathbb{R}$ হয় তবে,

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, \ x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

কে পরমমান ফাংশন বলা হয়।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$



উদাহরণ 3: $y = f(x) = \frac{x}{|x|}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে $f(0) = \frac{0}{|0|} = \frac{0}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত। সুতরাং, $x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটির কোনো মান নেই।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

আবার, $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x}, \quad x > 0 \\ \frac{x}{-x}, x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1, \quad x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ $R_f = \{1, -1\}$

উদাহরণ 4: $y = f(x) = ln\frac{a+x}{a-x}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান: যেহেতু, লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \ \frac{a+x}{a-x} > 0$ যদি (i) $a + x > 0$ এবং $a - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $a + x < 0$ এবং $a - x < 0$ হয়

$(i) \Rightarrow x > -a$ এবং $a > x$

$\Rightarrow -a < x$ এবং $x < a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x: -a < x\} \cap \{x: x < a\}$

$= (-a, \infty) \cap (-\infty, a) = (-a, a)$

(ii) $a + x < 0$ এবং $a - x < 0$

$\Rightarrow x < -a$ এবং $x > a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x: x < -a\} \cap \{x: x > a\} = \emptyset$

$\therefore D_f = (i)$ ও (ii) থেকে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $(-a, a) \cup \emptyset = (-a, a)$

রেঞ্জ: $y = f(x) = ln\frac{a+x}{a-x}$

বা, $e^y = \frac{a+x}{a-x}$

বা, $a + x = e^y.a - e^y.x$

বা, $e^y.x + x = e^y.a - a$

বা, $x(e^y - 1) = a(e^y - 1)$

$$\therefore x = \frac{a(e^y - 1)}{(e^y + 1)}$$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ: $R_f = \mathbb{R}$

শিক্ষার্থীর কাজ	$y = \frac{2x+1}{x-1}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন এবং বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- $f(x) = y = a^x$ জাতীয় সকল ফাংশন কে সূচকীয় ফাংশন বলা হয় । এখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$
- লগারিদমিক ফাংশন $y = f(x) = log_a x$ যেখানে $a > 0$, এবং $a \neq 1$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৫

1. নিচের লেখচিত্র অঙ্কন করুন এবং এদের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করুন:
(ক) $y = 2x + 1$ (খ) $y = 2x^2 + 1$ (গ) $y = \frac{3x+1}{x-1}$ (ঘ) $y = 2^{-x}$ (ঙ) $y = \frac{3}{x}$
2. নিচের ফাংশনগুলোর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন:
(ক) $y = ln\frac{2+x}{2-x}$ (খ) $y = ln\frac{3+x}{3-x}$ (গ) $y = ln\frac{5+x}{5-x}$

পাঠ ৬.৬ ফাংশনের লেখচিত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সূচক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন,
- লগারিদম ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন,
- পরমমান ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সূচক, লগারিদম, পরমমান, লেখচিত্র

মূলপাঠ

উদাহরণ 1: $y = a^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান:

(i) $y = a^x$, $a > 1$ এবং x এর যেকোনো ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা তখন $y = f(x) = a^x$ সর্বদা ধনাত্মক।

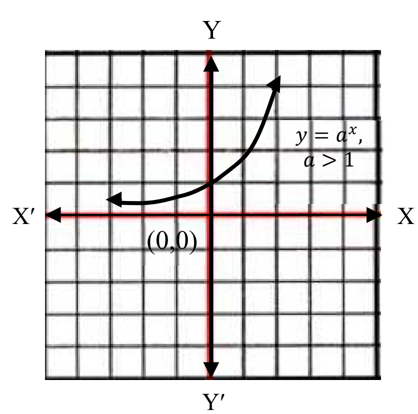
কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ:

1. x এর ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান বৃদ্ধি পায়।
2. যখন $x = 0$ তখন $y = a^0 = 1$

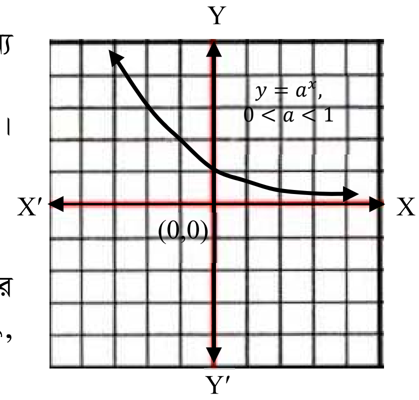
সুতরাং $(0,1)$ রেখার উপর একটি বিন্দু

3. x এর ঋণাত্মক মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান হ্রাস পেতে থাকে। অর্থাৎ $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$ হবে।

এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, \infty)$



(ii) $y = a^x$, $0 < a < 1$ এবং x এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক মানের জন্য $y = f(x) = a^x$ সর্বদা ধনাত্মক।



1. x এর ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ, $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ হবে।

2. যখন $x = 0$ তখন $y = a^0 = 1$

সুতরাং $(0,1)$ রেখার উপর একটি বিন্দু

3. যখন $a < 1$ এবং x এর ঋণাত্মক মানের জন্য এবং x এর মান মূল বিন্দুর বামদিকে ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ত্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে। অর্থাৎ, $y \to \infty$ হবে।

এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, \infty)$

উদাহরণ 2: $y = f(x) = log_a x$ লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান: (i) $y = log_a x$ যখন $a > 1$, তাহলে $x = a^y$

কার্যপদ্ধতির পর্যায়ক্রমিক ধাপ:

1. যখন $a > 1$, y এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান ধনাত্মক এবং y এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে x এর মান বৃদ্ধি পায়।

2. যখন $x = 1$ তখন $y = log_a 1 = 0$

সুতরাং $(1,0)$ রেখার উপর একটি বিন্দু।

3. y এর ঋণাত্মক মান বৃদ্ধির সাথে সাথে x এর মান হ্রাস পেতে থাকে এবং ক্রমাগত শূন্যের দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ $y \to -\infty$ হলে $x \to 0$ হবে।

এখানে $D_f = (0, \infty)$ এবং $R_f = (-\infty, \infty)$

(ii) $y = log_a x$, যখন $0 < a < 1$ তাহলে $x = a^y$ ।

1. যখন $0 < a < 1$ তখন y এর ধনাত্মক মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাবে তখন x এর মান শূন্যের দিকে অগ্রসর হতে থাকে । অর্থাৎ, $y \to \infty$ হলে $x \to 0$ হবে।

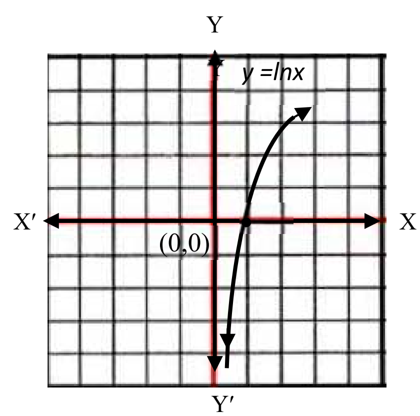
2. যখন $x = 1$ তখন $y = log_a 1 = 0$

সুতরাং $(1, 0)$ রেখার উপর একটি বিন্দু।

3. y এর ঋণাত্মক মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেলে সাথে সাথে x এর মান ত্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে। অর্থাৎ, $y \to -\infty$ হলে $x \to \infty$ হবে।

$\therefore$ $D_f = (0, \infty)$ এবং $R_f = (-\infty, \infty)$

উদাহরণ 3: $y = f(x) = lnx$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।



সমাধান: মনে করুন, $y = f(x) = lnx$

যেহেতু $e^0 = 1$ কাজেই $y = ln1 = 0$ সুতরাং, রেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী।

যখন $x \to 0$ তখন $y \to -\infty$

$\therefore$ $y = lnx$ রেখাটি ক্রমশ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৬

1. বাস্তব সংখ্যার সেটকে কী দিয়ে প্রকাশ করা হয়?
   (ক) $\mathbb{N}$ (খ) $\mathbb{R}$ (গ) $\mathbb{Q}$ (ঘ) $\mathbb{Z}$
2. স্বাভাবিক সংখ্যার সেট কোনটি?
   (ক) $\mathbb{N}$ (খ) $\mathbb{R}$ (গ) $\mathbb{Q}$ (ঘ) $\mathbb{Z}$
3. $a^{\frac{n}{m}}$ কত?
   (ক) $\sqrt[mn]{a}$ (খ) $\sqrt[n]{a}.m$ (গ) $\sqrt[m]{a^n}$ (ঘ) $\sqrt[n]{a^m}$
4. (i) $(ax)^m = (ax)^n$ হলে $m = n$
   (ii) $x^{2m} = x^{2\sqrt{m}}$ হলে $m = \sqrt{2}$
   (iii) $(ab)^m = (ax)^m$ হলে $x = b$
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii)ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

❖ $x = a^{q+r}$, $y = a^{r+p}$ এবং $z = a^{p+q}$ হলে –
উপরের বর্ণিত তথ্যের আলোকে (5-8):

5. $q + r = 0$ হলে $x =$ কত?
   (ক) 1 (খ) a (গ) 0 (ঘ) r
6. $x.y.z =$ এর মান কোনটি?
   (ক) $a^{2(p+q+r)}$ (খ) $a^{2(p+q)}$ (গ) 0 (ঘ) 1
7. $\frac{y}{x}$ এর মান কোনটি?
   (ক) $a^{p+q)}$ (খ) a^{p-q} (গ) a^{r-q} (ঘ) a^{p-r}
8. $\frac{x.y}{z} =$ এর মান কোনটি?
   (ক) a^{pqr} (খ) a^{pq} (গ) a^r (ঘ) a^{2r}
9. নিচের সূচক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।
   (i) $y = 2^x$ (ii) $y = e^x$ (iii) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (iv) $y = 3^{-x}$
10. নিচের ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করুন এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।
    (i) $y = x + |x|$ যখন $-2 \leq x \leq 2$
    (ii) $y = |x|$ যখন $-3 \leq x \leq 3$
    (iii) $y = f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ \frac{|x|}{x}, x \neq 0 \end{cases}$
11. $\frac{log_k a}{b-c} = \frac{log_k b}{c-a} = \frac{log_k c}{a-b}$ হলে –
    (ক) abc এর মান নির্ণয় করুন।
    (খ) প্রমাণ করুন যে, $a^a.b^b.c^c = 1$
    (গ) দেখান যে, $a^{(b+c)}.b^{(c+a)}.c^{(a+b)} = 1$
12. $y = log_{10}x$ একটি লগারিদমিক ফাংশন।
    (ক) লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y মান নির্ণয় করুন।
    (খ) ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন।
    (গ) ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করুন এবং তার ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৩

2. a 3. $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$ 4. $a-b$ 7. $x=1,\ y=1$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৪

1. $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{64}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৬

1. (খ) 2. (ক) 3. (গ) 4. (ক) 5. (ক) 6.(ক) 7.(খ) 8. (ঘ)