ইউনিট
৫

অসীম ধারা
Infinite Series

ভূমিকা

অনুক্রম ও অসীম ধারার মধ্যে একটি প্রত্যক্ষ সম্পর্ক রয়েছে অনুক্রমের পদগুলোর মধ্যে গাণিতিক চিহ্ন ব্যবহার করে অসীম ধারা পাওয়া যায়।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- অনুক্রম কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অনুক্রমের শ্রেণি বিন্যাস করতে পারবেন,
- অসীম ধারা চিহ্নিত করতে পারবেন,
- অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়ের শর্ত ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবেন,
- পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশকে অনন্ত গুণোত্তর ধারায় প্রকাশ করতে পারবেন।
- পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৫ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৫.১ অনুক্রম ও অসীম ধারা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অনুক্রম কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ধারা কী তা লিখতে পারবেন,
- অসীম ধারা কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অসীম ধারার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অনুক্রম, অসীম ধারা

মূলপাঠ

অনুক্রম (Sequence): নিচের সম্পর্কটি লক্ষ্য করুন –

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6.......................... & n.............. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12......................... & 2n............. \end{array}$$

এখানে প্রত্যেক $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য n এর দ্বিগুণ $2n$ এর সাথে সম্পর্কিত। যেহেতু স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6,..................\}$ ইত্যাদি থেকে একটি নিয়মের মাধ্যমে এর দ্বিগুণ সংখ্যার সেট $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$ পাওয়া যায়। এ দ্বিগুণ বা দ্বিতীয়বার প্রাপ্ত সংখ্যা গুলোর সেট একটি অনুক্রম। সুতরাং কতকগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সজ্জিত হয় যে, প্রত্যেকটি রাশি এর পূর্বপদ ও পরের পদের সাথে কিভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়- তাই অনুক্রম (sequence)।

আবার উপরের সম্পর্কটিকে ফাংশন বলে এবং $f(n) = 2n$ লেখা হয়। এই অনুক্রমের সাধারণ পদ "$2n$" এবং অনুক্রমটিকে সাধারণ পদের সাহায্যে লেখার পদ্ধতি হলো $\{2n\}$ যেখানে $n = 1, 2, 3,$ .... বা, $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$

আবার অনুক্রমটিতে '................' দ্বারা এরূপ অন্তহীনভাবে চলতে থাকবে নির্দেশ করে। তাহলে অনুক্রমের সাধারণ আকার হলো, $a_1, a_2, a_3,................. a_n$ এখানে a_1, a_2, a_3 কে যথাক্রমে অনুক্রমটির প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ (Term) বলে এবং a_n কে n তমপদ বা সাধারণ পদ বলে। a_n-কে a সাব n পড়া হয়।

অনুক্রমের রাশিগুলো ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেতে থাকলে তাকে উর্ধ্ব ক্রমিক এবং হ্রাস পেতে থাকলে তাকে নিম্ন ক্রমিক অনুক্রম বলে। পদ অনুসারে অনুক্রম দুই প্রকার। যথা: (১) সান্ত/অন্ত/সসীম অনুক্রম (২) অসান্ত/অনন্ত/অসীম অনুক্রম। যে অনুক্রমের পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ গণণা করে শেষ করা যায়, তাকে সসীম বা সান্ত অনুক্রম এবং যে অনুক্রমের পদ সংখ্যা গণণা করে শেষ করা যায় না, তাকে অনন্ত বা অসীম অনুক্রম বলে।

যেমন: 1, 3, 5, 7, ...,19 একটি সসীম অনুক্রম।
আবার, 2, 4, 6, 8, ... একটি অসীম অনুক্রম।

নিচের কতকগুলো অনুক্রম দেওয়া হলো।
প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4} ...., \frac{1}{2^n}, ...$$

$$5, 3, 1, -1, -3, -6.............., (7-2n), ...$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{26}$ ...., $\frac{1}{n^2+1}$,......................

শিক্ষার্থীর কাজ	1. নিচের অনুক্রমগুলোর সাধারণ পদ নির্ণয় করুন: (i) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$,........................... ii) 3, 5, 7, 9,........................... (iii) 4, $\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \frac{4}{81}$,................. 2. প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে নিচের অনুক্রমগুলো লিখুন: (i) $1-(-1)^n$ (ii) $\frac{1}{n(n+1)}$ (iii) $\frac{1-(-1)^n}{2}$ (iv) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

ধারা (Series): কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর "+" চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করা হলে, একটি ধারা বা শ্রেণি পাওয়া যায়। যেমন:

(*i*) 4 + 7 + 10 + 13 + ... (*ii*) 3 + 6 + 12 + 24 + ...

এখানে (i) নং ধারাটির প্রতিটি পদ তার পূর্ববর্তী পদের সাথে "3" যোগ করে এবং (ii) নং ধারার প্রতিটি পদ তার পূর্ববর্তী পদকে 2 দ্বারা গুণ করে গঠিত হয়েছে। স্পষ্ঠতই ধারার গঠন গণনা থাকলে আমরা ধারাটির যে কোনো সংখ্যক পদ নির্ণয় করতে পারি। ধারার পদের সংখ্যা গণনাতীত হলে, তাকে অসীম ধারা এবং পদ সংখ্যা নির্দিষ্ট হলে, একে সসীম ধারা বলে।

অসীম বা অনন্ত ধারা (Infinite Series): U_1, U_2, U_3 ,....................., U_n ,.............বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম হলে, $U_1 + U_2 + U_3 +$ ....+ U_n+............কে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম বা অনন্ত ধারা (Infinite Series) এবং U_n কে এই ধারার n-তম পদ বলা হয়।

নিচের প্রত্যেকটি অসীম ধারা:

(ক) 1 + 2 + 3 + ... (খ) 1 – 1 + 1 – 1 + ...

(গ) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} +$ ....

প্রত্যেকটি অসীম ধারার আংশিক সমষ্টি (Partial Sum) নির্ণয় করা যায়।

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = U_1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = U_1 + U_2$

৩য় আংশিস সামষ্টি $S_3 = U_1 + U_2 + U_3 +$ ....

$\therefore$ n তম আংশিক সমষ্টি $Sn = U_1 + U_2 + U_3 +$ .... + U_n.

অর্থাৎ কোনো অসীম ধারার n তম আংশিক সমষ্টি হচ্ছে ধারাটির প্রথম n সংখ্যক ($n \in \mathbb{N}$) পদের সমষ্টি।

উদাহরন 1: প্রদত্ত অসীম ধারা দুইটির আংশিক সমষ্টি নির্ণয় করুন।

(ক) 1 + 2 + 3 + 4 + ... (খ) 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – ....

সমাধান: (ক) 1 + 2 + 3 + 4 + ...

ধারাটির ১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1 + 2 = 3$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1 + 2 + 3 +$ ....$n = \frac{n(n+1)}{2}$

(খ) 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – ....

ধারাটির ১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1 - 1 = 0$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$
৪র্থ আংশিক সমষ্টি $S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

এভাবে অগ্রসর হলে দেখা যায় যে, n বিজোড় হলে n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1$ এবং n জোড় হলে, n-তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 0$। “খ” নং ধারাটিতে এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা পাওয়া যায় না যাকে ধারাটির সমষ্টি বলা হয়।

পাঠ ৫.২ গুণোত্তর ধারার সমষ্টি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- গুণোত্তর ধারার সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সাধারণ অনুপাত, গুণোত্তর ধারা

মূলপাঠ

গুণোত্তর ধারা (Definition of Geometrie Progression): কোনো ধারার অন্তর্গত পদসমূহের যেকোনো একটি পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বত্র একই বা সমান থাকলে উক্ত ধারাকে গুণোত্তর ধারা (Geometric progression) বা সংক্ষেপে G.P. বলে।

যেমন: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ একটি অসীমগুণোত্তর ধারা।

সাধারণ অনুপাত (Common Ratio)*:* গুণোত্তর ধারার যে কোনো পদ ও তৎপূর্ববর্তী পদের অনুপাতকে সাধারণ অনুপাত বা সংক্ষেপে C.R. বলা হয়। যেমন: $3 + 6 + 12 + 24 + \ldots\ldots\ldots$ একটি অসীম গুণোত্তর ধারা। এখানে $\frac{6}{3} = 2, \frac{12}{6} = 2$ এবং $\frac{24}{12} = 2$ সুতরাং $C.R = 2$

গুণোত্তর প্রগমন বা ধারার *n*-তম পদ (শেষপদ) নির্ণয়: মনে করুন, কোনো গুণোত্তর প্রগমন বা ধারার ১ম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r তাহলে, প্রগমনটি $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots\ldots$

প্রথম পদ $= a = ar^0 = ar^{1-1}$
দ্বিতীয় পদ $= ar = ar^{2-1}$
তৃতীয় পদ $= ar^2 = ar^{3-1}$
....

$\therefore n$ তম পদ ar^{n-1}

$\therefore t_n = ar^{n-1}$

গুণোত্তর ধারার *n* সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করুন, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a সাধারণ অনুপাত r এবং n সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n হলে।

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1}$ .... (i)

$(S_n)\, r = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots + a\, r^n$ ....(ii) [r দ্বারা গুণ করে]

(i) নং হতে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই-

$S_n - (S_n)r = a - ar^n$

বা, $S_n\,(1 - r) = a\,(1 - r^n)$ [যখন $r < 1$]

$\therefore\ S_n = \dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$ ……………………………………………….(iii)

আবার, (ii) নং হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই –

$(S_n)r - S_n = ar^n - a$

বা, $S_n\,(r - 1) = a\,(r^n - 1)$ [যখন $r > 1$]

$\therefore\ S_n = \dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$ .... ……………………(iv)

মনে রাখার বিষয়:

(i) $|r| < 1$ হলে, অর্থাৎ $-1 < r < 1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান হ্রাস পায় এবং n-কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মানকে যথেষ্ট ছোট করা যায় অর্থাৎ 0 এর যথেষ্ট কাছাকাছি আনা যায়। এ থেকে বলা যায় যে, $|r| < 1$ হলে r^n এর প্রান্তীয় মান 0 হয় এবং S_n এর প্রান্তীয় মান $S_n = \dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r} - \dfrac{ar^n}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

সুতরাং $a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ অনন্ত ধারার সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{a-r}$

(ii) $|\,r\,| > 1$ হলে, অর্থাৎ $r > 1$ অথবা $r < -1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান বদ্ধি পায় এবং n-কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মান যথেষ্ট বড় করা যায়। এ থেকে দেখা যায় যে, এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা S পাওয়া যায় না, যাকে S_n এর প্রান্তীয় মান ধরা যায়।

অর্থাৎ এক্ষেত্রে অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নেই।

(iii) $r = -1$ হলে, S_n এর কোনো প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না।

কেননা, n জোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = 1$ এবং n বিজোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = -1$ এক্ষেত্রে ধারাটি $a - a + a - a + a - a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ হবে।

সুতরাং এই অসীম ধারার কোনো সমষ্টি নেই।

মন্তব্য: অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি (যদি থাকে) কে S_∞ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং একে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি (Sum up to infinity) বলা হয়।

অর্থাৎ $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \dfrac{\mathrm{a}}{1-\mathrm{r}}$ যখন $|r|<1$

শিক্ষার্থীর কাজ	একটি গুণোত্তর ধারার **১**ম পদ a ও সাধারণ অনুপাত r দেওয়া আছে। ধারাটি লিখুন এবং যদি এর অসীমতক সমষ্টি থাকে তবে তা নির্ণয় করুন: (i) $a = 1,\ r = \dfrac{1}{2}$ (ii) $a = -\dfrac{1}{3},\ r = 3,$ (iii) $a = 5,\ r = \dfrac{1}{10^2}$ (iv) $a = 81,\ r = -\dfrac{1}{3}$

উদাহরণ 1: নিচের অসীম গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় করুন:

(1) $\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5^2} + \dfrac{4}{5^3} - \dfrac{8}{5^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (2) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(3) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{9} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (4) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

সমাধান: (1) এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = \dfrac{1}{5}$ এবং ধারাটির সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{-2}{5^2} \div \dfrac{1}{5} = \dfrac{-2}{25} \times \dfrac{5}{1} = \dfrac{-2}{5} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{-2}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{7}$

(2) এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{0.1}{1} = \frac{1}{10} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$

(3) এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

অর্থাৎ $S_\infty = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

(4) এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = \frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = -\frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

পাঠ ৫.৩ পৌনঃপুনিক দশমিকের সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- পৌনঃপুনিক দশমিক হতে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবেন,
- পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশকে অনন্ত গুণোত্তর ধারায় প্রকাশ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	পৌনঃপুনিক, সাধারণ ভগ্নাংশ

মূলপাঠ

পৌনঃপুনিক দশমিকের সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর

উদাহরণ 1: পৌনঃপুনিক দশমিক গুলো মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন: (ক) $0.\dot{3}$ (খ) $0.\dot{2}\dot{7}$ (গ) $2.\dot{3}\dot{7}$ (ঘ) $3.\dot{2}3\dot{5}$

সমাধান: (ক) $0.\dot{3} = 0.333$ ....

$= 0.3 + 0.03 + 0.003 +$ ....

ইহা একটি অসীম গুণোত্তর ধারা, যার ১ম পদ, $a = 0.3$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{.03}{0.3} = 0.1$

$$\therefore\ 0.\dot{3} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.3}{1-0.1} = \frac{0.3}{0.9} = \frac{1}{3}$$

(খ) $0.\dot{2}\dot{7} = 0.272727$ ....

$= 0.27 + 0.0027 + 0.000027 +$ ....

ইহা একটি অসীম গুণোত্তার ধারা, যার ১ম পদ $a = 0.27$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.0027}{0.27} = 0.01$

$$\therefore\ 0.\dot{2}\dot{7} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.27}{1-0.01} = \frac{0.27}{0.99} = \frac{3}{11}$$

(গ) $2.\dot{3}\dot{7} = 2.373737$ ....

$= 2 + (0.37 + 0.0037 + 0.000037 +$ ....$)$

এখানে বন্ধনীর ভেতরের ধারাটির একটি অসীম গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ $a = 0.37$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{0.0037}{0.37} = 0.01$

$$\therefore\ 2.\dot{3}\dot{7} = 2 + \frac{a}{1-r} = 2 + \frac{0.37}{1-0.01} = 2 + \frac{0.37}{0.99} = 2 + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}$$

(ঘ) $3.\dot{2}3\dot{5} = 3 + (0.235 + 0.000235 + 0.000000235 +$ ....$)$

এখানে বন্ধনীর ভেতরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা যার ১ম পদ, $a = 0.235$ এবং সাধারণ অনুপাত,

$$r = \frac{0.000235}{0.235} = 0.001$$

$$\therefore\ 3.\dot{2}3\dot{5} = 3 + \frac{a}{1-r} = 3 + \frac{0.235}{1-0.001} = 3 + \frac{0.235}{0.999} = 3 + \frac{235}{999} = \frac{2997+235}{999} = \frac{3232}{999}$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৩

1. 1, 3, 5, 7 অনুক্রমটির 10 তম পদ কোনটি?

(ক) 12 (খ) 15 (গ) 17 (ঘ) 19

2. $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}$ .... অনুক্রমটির চতুর্থপদ কত?

(ক) $\frac{5}{27}$ (খ) $\frac{5}{9}$ (গ) $\frac{5}{18}$ (ঘ) $\frac{10}{27}$

3. $\sqrt{5}, -1 \frac{1}{\sqrt{5}}$ অনুক্রমটির n তম পদ কোনটি?

(ক) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt{5}} (-1)^{n-1} \frac{5}{\sqrt{5}}$ (গ) $(-1)^{n-1} \frac{5}{\sqrt{5^n}}$ (ঘ) $-\frac{1}{\sqrt{5}} (-1)^{n-1} \cdot \frac{5}{\sqrt{5^n}}$

4. $\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{1}{x^{n-3}} +$ .... একটি অসীম গুণোত্তর ধারা হলে, n তম পদ কত?

(ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) 4

5. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $\frac{1}{n(n+1)}$, যেখানে $n \in \mathbb{N}$ হলে তৃতীয় পদ কোনটি?

(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{1}{6}$ (গ) $\frac{1}{12}$ (ঘ) $\frac{1}{20}$

6. কোনো অনুক্রমের n তম পদ $\frac{1}{n(n+1)}$ সেখানে $n \in \mathbb{N}$ হলে 20 তম পদ কোনটি?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) – 1 (ঘ) – 2

পাশের ধারাটি লক্ষ করুন এবং (7-9) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিনঃ $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}$ ....

7 ধারাটির 10 তম পদ কোনটি?

(ক) $\frac{4}{3^{10}}$ (খ) $\frac{4}{3^9}$ (গ) $\frac{4}{3^{11}}$ (ঘ) $\frac{4}{3^{12}}$

8. ধারাটির প্রথম 4 পদের সমষ্টি কত?

(ক) $\frac{484}{9}$ (খ) $\frac{160}{27}$ (গ) $\frac{130}{9}$ (ঘ) $\frac{20}{9}$

9. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি-

(ক) 0 (খ) 5 (গ) 6 (ঘ) 7

10. কোনো অনুক্রমের n তম পদ হলো $U_n = \frac{1}{n}$

(ক) $U_{10}, U_{100}, U_{1000}$ নির্ণয় করুন। (খ) $U_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে তা নির্ণয় করুন।

(গ) U_n এর প্রান্তীয় মান, যখন n যথেষ্ট বড় হয়, সম্পর্কে কী বলা যায়?

11. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখান যে, $r \neq 1$ হলো গুণোত্তার ধারা $a + ar^2 + ar^3 +$ .... এর n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

12. প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় করুন:

(ক) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} +$ .... (খ) $\frac{1}{7} - \frac{3}{7^2} + \frac{3^2}{7^3} - \frac{3^3}{7^4} +$ ....

(গ) 12 + 0.12 + 0.0012 + ... (ঘ) 1 + 2 + 4 + 8 + ...

(ঙ) $2 + 0.2 + 0.002 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

13. চলকের উপর কী শর্ত আরোপ করলে নিম্লোক্ত ধারা গুলোর (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় করুন:

(ক) $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{(a+1)^2}+\dfrac{1}{(a+1)^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (খ) $(x+1)^{-1}+(x+)^{-2}+(x+1)^{-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

14. নিচের পৌনঃপুনিক দশমিক গুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

(ক) $0.\dot{2}\dot{3}$ (খ) $0.\dot{2}0\dot{3}$ (গ) $3.\dot{2}0\dot{7}$ (ঘ) $5.\dot{1}0\dot{3}$ (ঙ) $6.\dot{4}0\dot{5}$ (চ) $1.\dot{2}3\dot{1}$ (ছ) $.\dot{1}\dot{2}$

15. নিচের ধারা গুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় করুন এবং এদের অসীমতক সমষ্টি থাকলে তা নির্ণয় করুন। না থাকলে ব্যাখ্যা প্রদান করুন।

(ক) $4 + 44 + 444 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (খ) $5 + 55 + 555 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(গ) $a + aa + aaa + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

16. নিচের ধারাটি লক্ষ করুন:

$$\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{(2y+1)^2}+\frac{1}{(2y+1)^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(ক) $y = 1$ হলে ধারাটি নির্ণয় করুন এবং প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত করুন।

(গ) ক নং এ প্রাপ্ত ধারাটির 10 তম পদ এবং ১ম ১০টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

(গ) প্রদত্ত ধারাটি y এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৩

(১) ঘ (২) ক (৩) গ (৪) ক (৫) গ (৬) ক (৭) খ (৮) খ (৯) গ

(১০) (ক) $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ (খ) $n < 10^5$ (গ) n যথেষ্ট বড় হলে $U_{n\to\infty}$ প্রান্তীয় মান শূন্য হয়-

(১২) (ক) $1\frac{1}{2}$; (খ) $\frac{1}{10}$ (গ) $\frac{400}{33}$,(ঘ) সমষ্টি নেই, (ঙ) $\frac{20}{9}$

১৩। (ক) শর্ত $a < -2$ অথবা $a > 0$; সমষ্টি = $\frac{1}{a}$ (খ) শর্ত $x < -2$ অথবা $x > 0$; সমষ্টি = $\frac{1}{x}$

১৪। (ক) $\frac{23}{99}$, (খ) $\frac{209}{999}$, (গ) $\frac{356}{111}$, (ঘ) $\frac{842}{165}$, (ঙ) $\frac{237}{37}$, (চ) $\frac{410}{333}$, (ছ) $\frac{4}{33}$

১৫। (ক) $\frac{40}{81}(10^n - 1) - \frac{4n}{9}$; অসীমতক সমষ্টি নেই। (খ) $\frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$; অসীমতক সমষ্টি নেই।

(গ) $\frac{10a}{81}(10^n - 1) - \frac{an}{9}$; অসীমতক সমষ্টি নেই।