

সমীকরণ Equations



ভূমিকা

সমীকরণ মূলত একটি সমতা। আর সমতা প্রকাশ করতে চলরাশি বা অজ্ঞাত রাশি হিসেবে x, y, z ইত্যাদি প্রতীক ব্যবহার করা হয়। যেমন $x - 3$ এবং $2x - 5$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি এবং $4 < 5$ ও $7 > 5$ দুইটি গাণিতিক বাক্য। গাণিতিক বাক্য গুলোকে বলা হয় গাণিতিক উক্তি এবং এতে কোনো অজ্ঞাত রাশি নেই। প্রথম রাশি দুইটির মাঝে “=” চিহ্ন বসিয়ে পাই, $x - 3 = 2x - 5$ ইহা একটি সমীকরণ। কারণ এতে অজ্ঞাত রাশি x বিদ্যমান। সুতরাং অজ্ঞাত রাশি সংবলিত গাণিতিক খোলা বাক্য বলা হয়। আর সমান “=” চিহ্ন সংবলিত খোলা বাক্যকে সমীকরণ বলা হয়। ইহার সাহায্যে বাস্তব জীবনে অনেক সমস্যার সমাধান করা যায়।



ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত সমীকরণ ($ax^2 + bx + c = 0$) সমাধান করতে পারবেন,
- মূলচিহ্ন সংবলিত সমীকরণ চিহ্নিত করতে পারবেন,
- বর্গমূল বিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করতে পারবেন,
- সূচকীয় সমীকরণ সমাধান করতে পারবেন,
- দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণের জোট সমাধান করতে পারবেন,
- দুই চলক বিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোট ব্যাখ্যা ও সমাধান করতে পারবেন,
- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ ($ax^2 + bx + c = 0$) এর সমাধান করতে পারবে।



ইউনিট সমাপ্তির সময়

ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

- পাঠ ৩.১: একচলক সমন্বিত দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার সমাধান।
পাঠ ৩.২: মূল চিহ্ন সম্বলিত সমীকরণ।
পাঠ ৩.৩: সূচক সমীকরণ।
পাঠ ৩.৪: দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট।
পাঠ ৩.৫: দ্বিঘাত সহ-সমীকরণের ব্যবহার।
পাঠ ৩.৬: দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট।
পাঠ ৩.৭: লেখচিত্রের মাধ্যমে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান

পাঠ ৩.১ এক চলক সমন্বিত দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার সমাধান



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিঘাত সমীকরণ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন,
- মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	দ্বিঘাত সমীকরণ, অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ,
------------	--



মূলপাঠ

দ্বিঘাত সমীকরণ: যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ ঘাত “২” তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equation) বলে।
যেমন: $x^2 - 8x + 6 = 0$

অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ: যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটির কেবল দ্বিতীয় ঘাত থাকে, কোনো প্রথম শক্তি বা ঘাত থাকে না, তাকে অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ (Pure Quadratic Equation) বলে। যেমন: $x^2 - 16 = 0$

মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ: যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির দ্বিতীয় ঘাত এবং প্রথম ঘাত সংবলিত উভয় পদই থাকে, তাকে মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ (affected quadratic Equation) বলে। যেমন: $x^2 - 5x + 6 = 0$

অজ্ঞাত রাশির যে-সমস্ত মান দ্বারা দ্বিঘাত সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাদেরকে ঐ সমীকরণের বীজ (Root) বলে এবং ঐ বীজ নির্ণয় করাকে সমাধান কার বলা হয়। দ্বিঘাত সমীকরণের বীজগুলো মূলদ সংখ্যা হলে, এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সহজেই এর সমাধান করা যায়। কিন্তু সব রাশিমালাকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না। এজন্য দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের জন্য নিচের পদ্ধতিটি অনুসরণ করা হয়।

এক চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ: $ax^2 + bx + c = 0$ যেখানে $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$

বা, $a^2x^2 + bax + ca = 0$ [উভয় পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

$$\text{বা, } (ax)^2 + 2 \cdot ax \cdot \frac{b}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ca = 0$$

$$\text{বা, } \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac \quad \text{বা, } \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

$$\text{বা, } ax + \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}} \quad \text{বা, } ax = -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$\text{বা, } ax = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots \dots \dots (i)$$

এটি দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের বা বীজ নির্ণয়ের সূত্র। মনে করুন, বীজদ্বয় যথাক্রমে x_1 ও x_2

$$\text{তাহলে } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ [ধনাত্মক মান নিয়ে](ii)}$$

$$\text{এবং } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ [ঋণাত্মক মান নিয়ে] (iii)}$$

উপরের (i) নং সমীকরণে $b^2 - 4ac$ কে দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক বা বিভেদক (Discriminant) বলে।

নিশ্চায়কের অবস্থাভেদে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি: $b^2 - 4ac$ এর চার রকম মান হতে পারে বলে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ বা মূলের চার শ্রেণিতে ভাগ করা হয়।

(i) $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব অসমান ও মূলদ হবে।

(ii) $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ না হলে, সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

(iii) $b^2 - 4ac = 0$ হলে, সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান হবে। যেমন: $x = -\frac{b}{2a}, -\frac{b}{2a}$

(iv) $b^2 - 4ac < 0$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হলে মূলদ্বয় অবাস্তব হবে। এক্ষেত্রে মূলদ্বয় সবসময় দুইটি অনুবন্ধী জটিল বা কাল্পনিক সংখ্যা হবে। এ বিষয়ে উচ্চতর শ্রেণিতে জানতে পারবে।

উদাহরণ 1: $2x^2 + 9x + 9 = 0$ এর সমাধান করুন।

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে আমরা পাই $a = 2, b = 9$ এবং $c = 9$

$$\begin{aligned} \therefore \text{সমীকরণটির সমাধান, } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2} \text{ [মান বসিয়ে]} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-9 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

মনে করুন, সমীকরণটির মূলদ্বয় x_1 ও x_2

$$(+) \text{ চিহ্ন নিয়ে পাই, } x_1 = \frac{-9 + 3}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(-) \text{ চিহ্ন নিয়ে পাই, } x_2 = \frac{-9 - 3}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান: } x = -\frac{3}{2}, 3$$

উদাহরণ 2: $2(5x - 12) = x^2$ এর সমাধান করুন।

সমাধান: $2(5x - 12) = x^2$

$$\text{বা, } 10x - 24 = x^2$$

$$\text{বা, } -x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 10x + 24 = 0 \text{ [-1 দ্বারা গুণ করে]}$$

এখন, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই $a = 1, b = -10$ এবং $c = 24$

$$\begin{aligned} \therefore \text{আমরা জানি, } x &= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} \text{ [a, b, c এর মান বসিয়ে]} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \frac{2(5 \pm 1)}{2} = 5 \pm 1 \end{aligned}$$

মনে করুন, সমীকরণটির মূলদ্বয় যথাক্রমে x_1 ও x_2

$$(+) \text{ চিহ্ন নিয়ে পাই, } x_1 = 5 + 1 = 6$$

$$\text{এবং } (-) \text{ চিহ্ন বসিয়ে পাই, } x_2 = 5 - 1 = 4$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান: } x = 4, 6$$

উদাহরণ 3: সমাধান করুন: $x^2 - 2x - 2 = 0$

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে, $a = 1$, $b = -2$ এবং $c = -2$

$$\text{আমরা জানি, } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-2)}}{2.1}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2}$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}$$

মনে করুন, সমীকরণটির মূলদ্বয় যথাক্রমে, x_1 ও x_2

(+) চিহ্ন নিয়ে পাই, $x_1 = 1 + \sqrt{3}$

এবং (-) চিহ্ন নিয়ে পাই $x_2 = 1 - \sqrt{3}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$

উদাহরণ 4: সমাধান করুন: $7x - 2 - 3x^2 = 0$

সমাধান: $7x - 2 - 3x^2 = 0$

বা, $-3x^2 + 7x - 2 = 0$

বা, $3x^2 - 7x + 2 = 0$

এখন, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই, $a = 3$, $b = -7$ এবং $c = 2$

আমরা জানি,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.3.2}}{2.3} \quad [\text{মান বসিয়ে}]$$

$$= \frac{49 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-4 \pm 5}{6}$$

ধরুন, মূলদ্বয় যথাক্রমে x_1 ও x_2

(+) নিয়ে পাই, $x_1 = \frac{-4 + 5}{6} = \frac{1}{6}$

আবার, (-) নিয়ে পাই, $x_2 = \frac{-4 - 5}{6} = \frac{-9}{6} = -3$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = \left(\frac{1}{6}, -3 \right)$



**শিক্ষার্থীর
কাজ**

$ax^2 + bx + c = 0$ হতে x_1 এবং x_2 নির্ণয় করুন যখন

(i) $b = 0$, (ii) $c = 0$, (iii) $b = c = 0$ (iv) $a = 1$ (v) $a = 1$, $b = c = 2p$



সারসংক্ষেপ

* এক চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ, $ax^2 + bx + c = 0$ যেখানে, $a, b, c \in \mathbb{R}$ এবং $a \neq 0$



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.১

সূত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলো সমাধান করুন:

1. $2x^2 - 5x - 1 = 0$

2. $x^2 - 5x + 6 = 0$

3. $4x - 1 - x^2 = 0$

4. $3 - 4x - 9x^2 = 0$

5. $2 - 3x^2 + 9x = 0$

6. $3x^2 + 7x + 1 = 0$

7. $3 - 4x - x^2 = 0$

8. $2x^2 + 7x - 1 = 0$

9. $x^2 + 11x + 24 = 0$

10. $6x^2 - 25x + 14 = 0$

পাঠ ৩.২ বর্গমূল চিহ্ন সম্বলিত সমীকরণ



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূল চিহ্ন সংবলিত সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন,
- সমীকরণের মূল কিনা যাচাই করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	মূল, বর্গমূল
------------	--------------



মূলপাঠ

মূল(Root): আমরা জানি, চলকের যে মান বা মানগুলো দ্বারা সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলো দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

বর্গমূল চিহ্ন সম্বলিত সমীকরণ: সমীকরণের চলকের বর্গমূল সংবলিত রাশি থাকলে একে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্ন মুক্ত সমীকরণ পাওয়া যায়। উক্ত সমীকরণ সমাধান করলে যে মূল পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো মূল প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। এ ধরনের মূলকে অবান্তর (Extraneous) মূল বলে।

সুতরাং মূল চিহ্ন সংবলিত সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়া প্রাপ্ত মূলগুলো প্রদত্ত সমীকরণের মূল কিনা তা অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা দরকার। পরীক্ষার পর যে সব মূল উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তাই হবে প্রদত্ত সমীকরণের মূল।

উদাহরণ 1: সমাধান করুন: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

সমাধান: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

$$\text{বা, } \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9} - \sqrt{x+4}$$

$$\text{বা, } (\sqrt{x+11})^2 = (\sqrt{8x+9} - \sqrt{x+4})^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } x+11 = (\sqrt{8x+9})^2 - 2(\sqrt{8x+9})(\sqrt{x+4}) + (\sqrt{x+4})^2$$

$$\text{বা, } x+11 = 8x+9 - 2\sqrt{8x^2+41x+36} + x+4$$

$$\text{বা, } x+11 = 9x+13 - 2\sqrt{8x^2+41x+36}$$

$$\text{বা, } x+11-9x-13 = -2\sqrt{8x^2+41x+36}$$

$$\text{বা, } -8x-2 = -2\sqrt{8x^2+41x+36}$$

$$\text{বা, } 4x + 1 = \sqrt{8x^2 + 41x + 36} \text{ [-2 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } (4x + 1)^2 = (\sqrt{8x^2 + 41x + 36})^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } (4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1^2 = 8x^2 + 41x + 36$$

$$\text{বা, } 16x^2 + 8x + 1 - 8x^2 - 41x - 36 = 0$$

$$\text{বা, } 8x^2 - 33x - 35 = 0$$

$$\text{বা, } 8x^2 - 40x + 7x - 35 = 0$$

$$\text{বা, } 8x(x - 5) + 7(x - 5) = 0$$

$$\therefore (x - 5)(8x + 7) = 0$$

$$\text{হয়, } x - 5 = 0 \text{ অথবা, } 8x + 7 = 0$$

$$\therefore x = 5 \quad \text{বা, } 8x = -7$$

$$\therefore x = -\frac{7}{8}$$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 5$ হলে,

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{5+4} + \sqrt{5+11} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$$

$$\text{এবং ডান পক্ষ} = \sqrt{8x+9} = \sqrt{8 \times 5 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

যেহেতু, $x = 5$ এর জন্য সমীকরণের বামপক্ষ = ডানপক্ষ, অতএব $x = 5$ সমীকরণের একটি মূল।

$$\text{এখন } x = -\frac{7}{8} \text{ এর জন্য সমীকরণের বামপক্ষ} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}$$

$$= \sqrt{-\frac{7}{8}+4} + \sqrt{-\frac{7}{8}+11} = \sqrt{\frac{-7+32}{8}} + \sqrt{\frac{-7+44}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{8}} + \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{5 + \sqrt{74}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{এবং ডান পক্ষ} = \sqrt{8x+9}$$

$$= \sqrt{8\left(-\frac{7}{8}\right)+9} = \sqrt{-7+9} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{বামপক্ষ} \neq \text{ডানপক্ষ}$$

অর্থাৎ $x = -\frac{7}{8}$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়।

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান: } x = 5$$

$$\text{উদাহরণ 2: সমাধান করুন: } \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$$

$$\text{সমাধান: } \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$$

$$\text{বা, } \sqrt{x^2 - 6x + 6 + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$$

$$\text{বা, } \sqrt{a+3} - \sqrt{a} = 1 \text{ [} x^2 - 6x + 6 = a \text{ ধরে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{a+3} = 1 + \sqrt{a} \text{ [পক্ষান্তর করে]}$$

$$\text{বা, } (\sqrt{a+3})^2 = (1 + \sqrt{a})^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } a + 3 = 1 + 2\sqrt{a} \cdot 1 + (\sqrt{a})^2$$

$$\text{বা, } a + 3 - 1 - a = 2\sqrt{a} \text{ [মূলদ ও অমূলদ রাশি পৃথক করে]}$$

$$\text{বা, } 2 = 2\sqrt{a}$$

$$\text{বা, } 1 = \sqrt{a} \text{ [2 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } 1^2 = (\sqrt{a})^2 \text{ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 1 = a$$

$$\text{বা, } a = 1$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 6 = 1 \text{ [a এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 6 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x - x + 5 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 5) - 1(x - 5) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 5)(x - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } x - 5 = 0$$

$$\text{অথবা, } x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 5$$

$$\therefore x = 1$$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 5$ হলে,

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = \sqrt{5^2 - 6.5 + 9} - \sqrt{5^2 - 6.5 + 6} \\ &= \sqrt{25 - 30 + 9} - \sqrt{25 - 30 + 6} = \sqrt{34 - 30} - \sqrt{31 - 30} = \sqrt{4} - \sqrt{1} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

$\therefore x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ।

আবার, $x = 1$ হলে,

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = \sqrt{1^2 - 6.1 + 9} - \sqrt{1^2 - 6.1 + 6} \\ &= \sqrt{1 - 6 + 9} - \sqrt{1 - 6 + 6} = \sqrt{10 - 6} - \sqrt{1} = \sqrt{4} - 1 \\ &= 2 - 1 = 1 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore x = 1$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ।

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 1, 5$

উদাহরণ 3: সমাধান করুন: $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

সমাধান: $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

$$\text{বা, } \sqrt{x^2 - 6x + 13 + 2} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$$

$$\text{বা, } \sqrt{a + 2} - \sqrt{a} = \sqrt{10} - \sqrt{8} \text{ [} x^2 - 6x + 13 = a \text{ ধরে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{a + 2} + \sqrt{8} = \sqrt{a} + \sqrt{10}$$

$$\text{বা, } (\sqrt{a + 2} + \sqrt{8})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{10})^2 \text{ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } a + 2 + 8 + 2\sqrt{8a + 16} = a + 10 + 2\sqrt{10a}$$

$$\text{বা, } a + 10 + 2\sqrt{8a + 16} - a - 10 = 2\sqrt{10a}$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{8a + 16} = 2\sqrt{10a}$$

$$\text{বা, } \sqrt{8a + 16} = \sqrt{10a}$$

$$\text{বা, } (\sqrt{8a + 16})^2 = (\sqrt{10a})^2 \text{ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 8a + 16 = 10a$$

$$\text{বা, } 8a - 10a + 16 = 0$$

$$\text{বা, } -2a + 16 = 0$$

$$\text{বা, } -2(a - 8) = 0$$

$$\text{বা, } a - 8 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 13 - 8 = 0 \quad [a \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x - x + 5 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 5) - 1(x - 5) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 5)(x - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } x - 5 = 0$$

$$\text{অথবা, } x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 5$$

$$\therefore x = 1$$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 5$ হলে,

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} \\ &= \sqrt{5^2 - 6 \cdot 5 + 15} - \sqrt{5^2 - 6 \cdot 5 + 13} \\ &= \sqrt{10} - \sqrt{8} = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

$$\begin{aligned} \text{আবার, } x = 1 \text{ হলে বামপক্ষ} &= \sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} \\ &= \sqrt{1^2 - 6 \cdot 1 + 15} - \sqrt{1^2 - 6 \cdot 1 + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8} = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$\therefore x = 1$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 1, 5$

$$\text{উদাহরণ 4: সমাধান করুন: } 4(10x - 4)^{\frac{1}{2}} + (10x - 4)^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$\text{সমাধান: } 4(10x - 4)^{\frac{1}{2}} + (10x - 4)^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$\text{বা, } \frac{4}{\sqrt{10x - 4}} + \sqrt{10x - 4} = 5 \quad \text{বা, } \frac{4}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = 5 \quad [10x - 4 = a \text{ ধরে}]$$

$$\text{বা, } \frac{4 + a}{\sqrt{a}} = 5 \quad \text{বা, } 4 + a = 5\sqrt{a}$$

$$\text{বা, } (4 + a)^2 = (5\sqrt{a})^2 \quad \text{বা, } 16 + 8a + a^2 = 25a$$

$$\text{বা, } 16 + 8a + a^2 - 25a = 0 \quad \text{বা, } a^2 - 17a + 16 = 0$$

$$\text{বা, } a^2 - 16a - a + 16 = 0 \quad \text{বা, } a(a - 16) - 1(a - 16) = 0$$

$$\text{বা, } (a - 16)(a - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (10x - 4 - 16)(10x - 4 - 1) = 0 \quad [a \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } (10x - 20)(10x - 5) = 0$$

$$\text{হয়, } 10x - 20 = 0$$

$$\text{অথবা } 10x - 5 = 0$$

$$\text{বা, } 10x = 20$$

$$\text{বা, } 10x = 5$$

$$\text{বা, } x = \frac{20}{10}$$

$$\text{বা, } x = \frac{5}{10}$$

$$\therefore x = 2$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 2$ হলে,

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= 4(10x-4)^{-\frac{1}{2}} + (10x-4)^{\frac{1}{2}} = 4(10 \times 2 - 4)^{-\frac{1}{2}} + (10 \times 2 - 4)^{\frac{1}{2}} \\ &= 4 \frac{1}{\sqrt{16}} + \sqrt{16} = \frac{4}{4} + 4 = 1 + 4 = 5 = \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

আবার, $x = \frac{1}{2}$ হলে,

$$\begin{aligned}\text{বামপক্ষ} &= 4(10x-4)^{-\frac{1}{2}} + (10x-4)^{\frac{1}{2}} = 4\left(10 \times \frac{1}{2} - 4\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(10 \times \frac{1}{2} - 4\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 4(5-4)^{-\frac{1}{2}} + (5-4)^{\frac{1}{2}} = 4(1)^{-\frac{1}{2}} + (1)^{\frac{1}{2}} = 4 + 1 = 5 = \text{ডানপক্ষ}\end{aligned}$$

সুতরাং $x = 2$ এবং $x = \frac{1}{2}$ বসালে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং $x = 2$ এবং $x = \frac{1}{2}$ উভয়ই প্রদত্ত সমীকরণের বীজ।

নির্ণেয় সমাধান: $x = 2, \frac{1}{2}$



সারসংক্ষেপ

- ⊛ চলকের যে মান বা মানগুলো দ্বারা সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলো দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।
- ⊛ যে সব মূল কোনো সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তাই প্রদত্ত সমীকরণের মূল।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.২

1. $(\sqrt{2x}-3)(\sqrt{2x}+\sqrt{5})=0$
2. $\sqrt{2y+9}-\sqrt{y-4}=\sqrt{y+1}$
3. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=\sqrt{8x+9}$
4. $\sqrt{(x-1)(x-2)}-\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$
5. $(1+x)^{\frac{1}{3}}+(1-x)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}$
6. $\sqrt{\frac{y-1}{3y+2}}+2\sqrt{\frac{3y+2}{y-1}}=3$
7. $6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)}+5\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)}=13$

পাঠ ৩.৩ সূচক সমীকরণ



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সূচক সমীকরণ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সূচক সমীকরণ সমাধান করতে পারবেন সেট।

মুখ্য শব্দ	সূচক, চলক, সূচক সমীকরণ
------------	------------------------



মূলপাঠ

সূচক সমীকরণ (Indicial Equation)

যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, তাকে সূচক সমীকরণ বলে। যেমন: $3^x = 27$, $16^x = 4^{x+2}$, $5^x = 25$ ইত্যাদি সমীকরণগুলো সূচক সমীকরণ, যেখানে x অজ্ঞাত চলক। সূচক সমীকরণ সমাধান করতে সূচকের নিম্নলিখিত ধর্মটি সচরাচর ব্যবহৃত হয়। $a > 0$, $a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদিও কেবল যদি $x = m$ হয়। এজন্য প্রথমে সমীকরণের উভয় পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত বা শক্তিরূপে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1: সমাধান করুন: $2^{x+5} = 4^{x-1}$

সমাধান: $2^{x+5} = 4^{x-1}$

$$\text{বা, } 2^{x+5} = (2^2)^{x-1} \quad \text{বা, } 2^{x+5} = 2^{2x-2}$$

$$\text{বা, } x + 5 = 2x - 2 \quad \text{বা, } x - 2x = -2 - 5$$

$$\text{বা, } -x = -7$$

$$\therefore x = 7$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 7$

উদাহরণ 2: $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$ কে সমাধান করুন।

সমাধান: $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$

$$\text{বা, } 4^x \cdot 4^2 = 2^{2x} \cdot 2^1 + 14 \quad \text{বা, } (2^2)^x \cdot 16 = 2^{2x} \cdot 2 + 14$$

$$\text{বা, } 16 \cdot 2^{2x} = 2 \cdot 2^{2x} + 14, [2^{2x} = a \text{ ধরুন}]$$

$$\text{বা, } 16a - 2a = 14 \quad \text{বা, } 14a = 14$$

$$\text{বা, } a = 1 \quad \text{বা, } 2^{2x} = 1$$

$$\text{বা, } 2^{2x} = 2^0$$

$$\text{বা, } 2x = 0$$

$$\text{বা, } x = \frac{0}{2}$$

$$\therefore x = 0$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 0$

উদাহরণ 3: সমাধান করুন: $\sqrt[5]{(a)^{x+5}} = (\sqrt[3]{a})^{3x-9}$

সমাধান: $\sqrt[5]{(a)^{x+5}} = (\sqrt[3]{a})^{3x-9}$

$$\text{বা, } a^{\frac{x+5}{5}} = a^{\frac{3x-9}{3}}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5}{5} = \frac{3x-9}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{x+5}{5} = x-3$$

$$\text{বা, } 5x - 15 = 5x - 15$$

$$\text{বা, } 5x - x = 5 + 15$$

$$\text{বা, } 4x = 20$$

$$\text{বা, } x = \frac{20}{5}$$

$$\therefore x = 4$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 4$

উদাহরণ 4: সমাধান করুন: $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$ ($a > 0, a \neq 1$)

সমাধান: $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$

$$\text{বা, } (a^x)^2 - (a^2 + 1)a^x + a^2 = 0$$

$$\text{বা, } P^2 - (a^2 + 1)P + a^2 = 0, [a^x = P \text{ ধরে}]$$

$$\text{বা, } P^2 - a^2P - P + a^2 = 0$$

$$\text{বা, } P(P - a^2) - 1(P - a^2) = 0$$

$$\therefore (P - a^2)(P - 1) = 0$$

$$\text{হয় } P - a^2 = 0$$

$$\text{অথবা, } P - 1 = 0$$

$$\text{বা, } P = a^2$$

$$\text{বা, } P = 1$$

$$\text{বা, } a^x = a^2 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } a^x = 1 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$\therefore x = 2$$

$$\text{বা, } a^x = a^0$$

$$\therefore x = 0$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 0, 2$

উদাহরণ 5: সমাধান করুন: $5^x + 5^{2-x} = 26$

সমাধান: $5^x + 5^{2-x} = 26$

$$\text{বা, } 5^x + \frac{5^2}{5^x} = 26$$

$$\text{বা, } P + \frac{25}{P} = 26, [5^x = P \text{ ধরুন}]$$

$$\text{বা, } \frac{P^2 + 25}{P} = 26$$

$$\text{বা, } P^2 + 25 = 26P$$

$$\text{বা, } P^2 - 26P + 25 = 0$$

$$\text{বা, } P^2 - 25P - P + 25 = 0$$

$$\text{বা, } P(P - 25) - 1(P - 25) = 0$$

$$\therefore (P - 25)(P - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } P - 25 = 0$$

$$\text{অথবা, } P - 1 = 0$$

$$\text{বা, } P = 25$$

$$\text{বা, } P = 1$$

$$\text{বা, } 5^x = 25, [P \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } 5^x = 1, [P \text{ এর মান বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } 5^x = 5^2$$

$$\text{বা, } 5^x = 5^0$$

$$\therefore x = 2$$

$$\therefore x = 0$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $x = 0, 2$



সারসংক্ষেপ

- ☉ যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, তাকে সূচক সমীকরণ বলে,
- ☉ সূচকের ধর্ম: $a > 0, a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদিও কেবল যদি $x = m$ হয়



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৩

1. $2^{x+3} = 4^{x-1}$
2. $3^{x-3} = 81$
3. $3^{x-3} + 3^{4-x} = 4$
4. $2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$
5. $4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$
6. $2^{x-4} = 4a^{x-6}$ ($a > 0, a \neq 2$)
7. $(\sqrt{5})^{x+5} = (\sqrt[3]{5})^{2x+5}$
8. $3^{2x-2} - 4 \cdot 3^x + 27 = 0$
9. $9^x - 4 \cdot 3^{x-1} + \frac{1}{3} = 0$
10. $2^{2x-1} - 3 \cdot 2^{x+1} + 16 = 0$

পাঠ ৩.৪ দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ দ্বিঘাত সমীকরণ, সমীকরণ জোট



মূলপাঠ

দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট

একটি একঘাত ও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত জোটের সমাধান নির্ণয়ের জন্য উভয় সমীকরণে চলক দুটিকে x ও y ধরা হয়। একঘাত সমীকরণ থেকে y কে x এর মাধ্যমে বা x কে y এর মাধ্যমে প্রকাশ করার পর দ্বিঘাত সমীকরণে বসালে x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ অথবা, y এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ পাওয়া যাবে। উক্ত দ্বিঘাত সমীকরণ (x এর মাধ্যমে) সমাধান করলে x এর দুটিমান পাওয়া যাবে এবং x এর মান দুইটি প্রদত্ত একঘাত সমীকরণে বসালে y এর দুটি মান পাওয়া যাবে।

উল্লেখ্য যে, চলক দুটি x ও y হলে $(x, y) = (a, b)$ এরূপ ক্রমজোড় আকারে জোটের একটি সমাধান। তাহলে সমীকরণ দুটিতে x স্থলে a এবং y স্থলে b বসালে উভয় পক্ষ সমান হয়।

উদাহরণ 1: সমাধান করুন: $x^2 + y^2 = 1$
 $3x + 4y = 15$

সমাধান: $x^2 + y^2 = 1$ (i)

$3x + 4y = 15$ (ii)

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই

$3x + 4y = 15$

বা, $4y = 15 - 3x$

$\therefore y = \frac{15-3x}{4}$ (iii)

(iii) নং সমীকরণ থেকে y এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই

$$x^2 + \left(\frac{5-3x}{4}\right)^2 = 1$$

$$\text{বা, } x^2 + \frac{25-30x+9x^2}{16} = 1$$

$$\text{বা, } 16x^2 + 25 - 30x + 9x^2 = 16$$

$$\text{বা, } 25x^2 - 30x + 25 - 16 = 0$$

$$\text{বা, } 25x^2 - 30x + 9 = 0$$

$$\text{বা, } (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3 + 3^2 = 0$$

$$\text{বা, } (5x-3)^2 = 0$$

$$\text{বা, } 5x-3 = 0$$

$$\text{বা, } 5x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{5}$$

এখানে (iii) নং সমীকরণে x এর মান বসিয়ে পাই-

$$y = \frac{5-3x}{4} = \frac{5-3 \cdot \frac{3}{5}}{4} = \frac{25-9}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান: } (x, y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

উদাহরণ 2: সমাধান করুন: $x + \frac{4}{y} = 1$; $y + \frac{4}{x} = 25$

$$\text{সমাধান: } x + \frac{4}{y} = 1 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এবং } y + \frac{4}{x} = 25 \dots\dots\dots (ii)$$

$$(i) \text{ নং হতে পাই, } xy + 4 = y \dots\dots\dots (iii)$$

$$(ii) \text{ নং হতে পাই, } xy + 4 = 25x \dots\dots\dots (iv)$$

$$(iii) \text{ ও } (iv) \text{ নং থেকে পাই, } y = 25x \dots\dots\dots (v)$$

$$(v) \text{ নং থেকে } y \text{ এর মান } (iii) \text{ নং এ বসিয়ে পাই,}$$

$$x \cdot 25x + 4 = 25x$$

$$\text{বা, } 25x^2 - 25x + 4 = 0$$

$$\text{বা, } 25x^2 - 20x - 5x + 4 = 0$$

$$\text{বা, } 5x(5x-4) - 1(5x-4) = 0$$

$$\therefore (5x-4)(5x-1) = 0$$

$$\text{হয়, } 5x = 4$$

$$\text{বা, } 5x = 4$$

$$\therefore x = \frac{4}{5}$$

$$\text{অথবা, } 5x - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 5x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{5}$$

(v) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই-

$$x = \frac{4}{5} \text{ হলে, } y = 25 \times \frac{4}{5} = 20$$

$$x = \frac{1}{5} \text{ হলে, } y = 25 \times \frac{1}{5} = 5$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান: } (x, y) = \left(\frac{4}{5}, 20\right), \left(\frac{1}{5}, 5\right)$$

$$\text{উদাহরণ 3: সমাধান করুন: } \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}; x + y = 5$$

$$\text{সমাধান: } \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \dots\dots\dots (i)$$

$$x + y = 5 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই-

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{x + y}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{5}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2} \text{ [(ii) নং হতে]}$$

$$\text{বা, } \frac{1}{\sqrt{xy}} = \frac{1}{2} \text{ [5 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{xy} = 2$$

$$\text{বা, } xy = 4 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\therefore y = \frac{4}{x} \dots\dots\dots (iii)$$

(ii) নং $y = \frac{4}{x}$ বসিয়ে পাই,

$$x + \frac{4}{x} = 5$$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + 4}{x} = 5$$

$$\text{বা, } x^2 + 4 = 5x$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 4x - x + 4 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 4) - 1(x - 4) = 0$$

$$\therefore (x - 4)(x - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } x - 4 = 0$$

$$\text{অথবা, } x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 4$$

$$\therefore x = 1$$

এখন (iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$$x = 4 \text{ হলে, } y = \frac{4}{4} = 1$$

$$x = 1 \text{ হলে, } y = \frac{4}{1} = 4$$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (4, 1), (1, 4)$

উদাহরণ 4: সমাধান করুন: $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}$ $x^2 = 3 + y^2$

সমাধান: $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}$ (i)

$$\text{এবং } x^2 = 3 + y^2$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 3 \text{ (ii)}$$

(i) নং থেকে পাই,

$$\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{10}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} = \frac{10}{3}$$

$$\text{বা, } 6(x^2 + y^2) = 10(x^2 - y^2)$$

$$\text{বা, } 6(x^2 + y^2) = 10 \times 3 \text{ [(ii) নং হতে]}$$

$$\text{বা, } x^2 + y^2 = \frac{30}{6}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 5 \text{ (iii)}$$

$$\text{(ii) + (iii) নিলে পাই, } 2x^2 = 8 \quad \text{বা, } x^2 = 4 \text{ বা, } x = \pm 2$$

$$\text{এবং (iii) - (ii) নিলে পাই, } 2y^2 = 2 \text{ বা, } y^2 = 1 \text{ বা, } y = \pm 1$$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$

উদাহরণ 5: সমাধান করুন: $x^2 + xy + y^2 = 3$, $x^2 - xy + y^2 = 7$

সমাধান: $x^2 + xy + y^2 = 3$ (i)

$$x^2 - xy + y^2 = 7 \text{ (ii)}$$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$$2(x^2 + y^2) = 10 \text{ বা, } x^2 + y^2 = 5 \text{ (iii)}$$

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই, $2xy = -4$

$$\text{বা, } xy = -2$$

$$\therefore y = \frac{-2}{x} \text{ (iv)}$$

(iii) নং এ $y = \frac{-2}{x}$ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + \left(\frac{-2}{x}\right)^2 = 5$$

$$\text{বা, } x^2 + \frac{4}{x^2} = 5$$

$$\text{বা, } x^4 + 4 = 5x^2$$

$$\text{বা, } x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

$$\text{বা, } x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x^2 - 4) - 1(x^2 - 4) = 0$$

$$\therefore (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } x^2 - 4 = 0 \quad \text{অথবা, } x^2 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 = 4 \quad \text{বা, } x^2 = 1$$

$$\therefore x = \pm 2 \quad \therefore x = \pm 1$$

এখন x এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$$x = 2 \text{ হলে, } y = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x = -2 \text{ হলে } y = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x = 1 \text{ হলে } y = \frac{-2}{1} = -2$$

$$x = -1 \text{ হলে } y = \frac{-2}{-1} = 2$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, -1), (-2, 1), (1, -2), (-1, 2)$



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৪

সমাধান করুন:

$$1. (x - 2)(y - 1) = 3; (x + 2)(2y - 5) = 15$$

$$3. x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21; x^2 - xy + y^2 = 7$$

$$5. y + 3 = \frac{4}{x}; x - 4 = \frac{5}{3y}$$

$$7. x^2 = 7x + 6y; y^2 = 7y + 6x$$

$$2. x^2 + y^2 = 61; xy = -30$$

$$4. xy - x^2 = 1; y^2 - xy = 2$$

$$6. \frac{x + y}{x - y} + \frac{x - y}{x + y} = \frac{5}{2}; x^2 + y^2 = 90$$

$$8. 21x^2 + 17xy + 2y^2 = 120; \frac{3x + 2y}{7x + y} = \frac{8}{15}$$

পাঠ ৩.৫ দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অজ্ঞাত রাশির মান x ও y অথবা অন্য যেকোনো দুইটি পৃথক চলক ধরে সমীকরণ গঠন করতে পারবেন,
- বাস্তব সমস্যা সমাধানে দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ

দ্বিঘাত সহসমীকরণ, সমীকরণের ব্যবহার



মূলপাঠ

দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার

দৈনন্দিন জীবনে বহু সমস্যার সমাধান আপনারা সহসমীকরণের ধারণা থেকে সমাধান করে থাকেন। এ ক্ষেত্রে অজ্ঞাত রাশিটির মান x ও y অথবা অন্য যেকোনো দুইটি পৃথক চলক ধরে, সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে সমীকরণ গঠন পূর্বক সমীকরণ জোটের সমাধান করলেই x এবং y অজ্ঞাত রাশিগুলোর মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1: দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 890 বর্গমিটার। ঐ বর্গক্ষেত্র দ্বয়ের বাহু দুইটি দ্বারা উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 203 বর্গমিটার। বর্গক্ষেত্র দুইটি বাহুর পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, 1ম বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার।

এবং 2য় বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= y$ মিটার

1ম শর্তমতে, $x^2 + y^2 = 890$ (i)

2য় শর্তমতে, $xy = 203$ (ii)

আপনারা জানেন, $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$= 890 + 2 \times 203$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$= 890 + 406 = 1296$

$\therefore x + y = \pm 36$ [বর্গমূল করে]

সেহেতু $x + y$ হলো দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সমষ্টি, সুতরাং ইহা ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore x + y = 36$ (iii)

আবার, $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$= 890 - 2 \times 203$ [(i) ও (ii) নং হতে পাই]

$= 890 - 406 = 484$

বা, $x - y = \pm 22$

$\therefore x - y = 22$ ('+' চিহ্ন নিয়ে) (iv)

এবং $x - y = -22$ ('-' চিহ্ন নিয়ে) (v)

(iii) ও (iv) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $2x = 58$;

বা, $x = \frac{58}{2} = 29$

এবং (iii) নং থেকে (iv) নং বিয়োগ করে পাই, $2y = 14$ বা, $y = 7$

আবার (iii) ও (v) নং সমীকরণ যোগ করে পাই, $2x = 14$; বা, $x = 7$

এবং (iii) নং থেকে (v) নং বিয়োগ করে পাই, $2y = 58$ বা, $y = 29$

\therefore নির্ণেয় 1ম ও 2য় বর্গক্ষেত্র দুইটির বাহুর দৈর্ঘ্য 29 মি. এবং 7 মিটার

উদাহরণ 2: একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 14 বর্গমিটার। ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য 65 মিটার হলে অপর বাহু দুইটির পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি x মিটার এবং উচ্চতা y মিটার।

প্রশ্নমতে, $\frac{1}{2}xy = 14$ বা, $xy = 28$ (i)

এবং, $x^2 + y^2 = 65$ (ii)

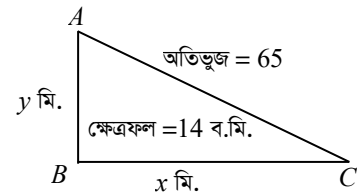
আপনারা জানেন $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$= 65 + 2 \times 28 = 65 + 56 = 121$

বা, $x + y = \pm 11$ [বর্গমূল করে]

বা, $x + y = 11$ [$\because x > 0, y > 0$]

$\therefore y = 11 - x$ (iii)



(i) নং এ y এর মান বসিয়ে পাই,

$$x(11 - x) = 28$$

$$\text{বা, } 11x - x^2 = 28$$

$$\text{বা, } -x^2 + 11x - 28 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 7x - 4x + 28 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 7) - 4(x - 7) = 0$$

$$\therefore (x - 7)(x - 4) = 0$$

$$\text{হয়, } x - 7 = 0 \quad \text{অথবা, } x - 4 = 0$$

$$\therefore x = 7 \quad \therefore x = 4$$

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই

$$x = 7 \text{ হলে, } y = 11 - 7 = 4 \text{ মি.}$$

$$x = 4 \text{ হলে } y = 11 - 4 = 7 \text{ মি.}$$

সুতরাং, ত্রিভুজটির ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে 7 মি. ও 4 মি.

অথবা, 4 মি. ও 7 মি. [উচ্চতাকে x ও ভূমিকে y ধরলে ভূমি হবে 4 মি. ও উচ্চতা হবে 7 মি.]।

উদাহরণ 3: দুই অঙ্ক বিশিষ্ট কোনো সংখ্যার সাথে 27 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। কিন্তু সংখ্যাটিকে অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, দশক স্থানীয় অঙ্ক = x

এবং একক স্থানীয় অঙ্ক = y

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10x + y$$

১ম শর্তমতে,

$$10x + y + 27 = 10y + x$$

$$\text{বা, } 10x + y - 10y - x + 27 = 0$$

$$\text{বা, } 9x - 9y + 27 = 0$$

$$\text{বা, } x - y + 3 = 0$$

$$\therefore x = y - 3 \dots\dots\dots (i)$$

$$২য় শর্তমতে, \frac{10x + y}{xy} = 2$$

$$\text{বা, } 10x + y = 2xy$$

$$\text{বা, } 10(y - 3) + y = 2(y - 3)y \text{ [(i) নং হতে]}$$

$$\text{বা, } 10y - 30 + y = 2y^2 - 6y$$

$$\text{বা, } 10y - 30 + y - 2y^2 + 6y = 0$$

$$\text{বা, } 2y^2 - 17y + 30 = 0 \text{ [-1 দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } 2y^2 - 12y - 5y + 30 = 0$$

$$\text{বা, } 2y(y - 6) - 5(y - 6) = 0$$

$$\therefore (y - 6)(2y - 5) = 0$$

$$\text{হয়, } y - 6 = 0 \quad \text{অথবা, } 2y - 5 = 0$$

$$\therefore y = 6 \quad \text{বা, } 2y = 5$$

$$\therefore y = \frac{5}{2}$$

যেহেতু সংখ্যার অঙ্ক ভগ্নাংশ হতে পারে না।

$$\therefore y = 6$$

এখন y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$x = 6 - 3 = 3$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10x + y = 10 \times 3 + 6 = 36$$

উদাহরণ 4: রেললাইনের অসুবিধার জন্য মহানগর প্রভাতী ট্রেনের ড্রাইভার হিসাব করে দেখলেন যে, ঢাকা থেকে ফেনী পর্যন্ত 300 কিলোমিটার দূরত্ব অতিক্রমের জন্য গড় অতিবেগ 5 কি.মি./ঘন্টা কমালে ফেনী পর্যন্ত পৌঁছাতে 40 মিনিট সময় বেশি লাগবে। ট্রেনটির গড় গতিবেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, ট্রেনের গড় গতিবেগ x কি. মি./ঘন্টা

\therefore 5 কি.মি./ঘন্টা কমে গড় গতিবেগ $(x - 5)$ কি.মি./ঘন্টা

প্রশ্নমতে, $\frac{300}{x-5} - \frac{300}{x} = \frac{40}{60}$ [\because 1 ঘন্টা = 60 মিনিট]

$$\text{বা, } \frac{300x - 300x + 1500}{x(x-5)} = \frac{2}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{1500}{x^2 - 5x} = \frac{2}{3}$$

$$\text{বা, } 2(x^2 - 5x) = 4500$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x = 2250$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x - 2250 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 50x + 45x - 2250 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 50) + 45(x - 50) = 0$$

$$\therefore (x - 50)(x + 45) = 0$$

$$\therefore x - 50 = 0 \quad \text{অথবা, } x + 45 = 0$$

$$\therefore x = 50 \quad \therefore x = -45$$

কিন্তু ট্রেনের গতিবেগ ঋণাত্মক হতে পারে না। সুতরাং ট্রেনটির গড় গতিবেগ 50 কি. মি./ঘন্টা।

উদাহরণ 5: একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x মিটার ও y মিটার।

$$1\text{ম শর্তমতে, } 2y = x + 10$$

$$\therefore x = 2y - 10 \dots\dots\dots (i)$$

$$2\text{য় শর্তমতে, } xy = 300$$

$$\text{বা, } (2y - 10)y = 300 \text{ [(i) নং হতে]}$$

$$\text{বা, } 2y^2 - 10y = 300$$

$$\text{বা, } 2y^2 - 10y - 300 = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - 5y - 150 = 0 \text{ [2 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } y - 15y + 10y - 150 = 0$$

$$\text{বা, } y(y - 15) + 10(y - 15) = 0$$

$$\therefore (y - 15)(y + 10) = 0$$

$$\text{হয়, } y - 15 = 0 \quad \text{অথবা, } y + 10 = 0$$

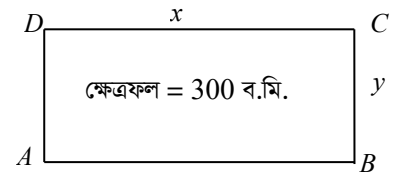
$$\therefore y = 15 \quad \therefore y = -10$$

যেহেতু আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না সেহেতু $y = -10$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$$\therefore \text{প্রস্থ } y = 15 \text{ মিটার।}$$

(i) নং এ y এর মান বসিয়ে পাই

$$x = 2 \times 15 - 10 \text{ মিটার}$$



$$= 30 - 10 \text{ মিটার}$$

$$= 20 \text{ মিটার}$$

∴ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 20 মিটার এবং প্রস্থ 15 মিটার।



সারসংক্ষেপ

অজ্ঞাত রাশিটির মান x ও y অথবা অন্য যেকোনো দুইটি পৃথক চলক ধরে, সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে সমীকরণ গঠন পূর্বক সমীকরণ জোড়ের সমাধান করতে হয়।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৫

নিচের প্রশ্নগুলোর সমীকরণ গঠন করে সমাধান করুন।

- দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 13 এবং গুণফল 6 হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করুন।
- দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 720 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা, গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 288 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় করুন?
- একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।
- একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 168 বর্গমিটার এবং অর্ধপরিসীমা একটি কর্ণ অপেক্ষা 6 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।
- একটি আয়তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল 480 বর্গমিটার। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 4 মিটার কমালে ও প্রস্থ 4 মিটার বাড়ালে ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।
- একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 56 মিটার এবং একটি কর্ণ 20 মিটার। উক্ত বাগানের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
- দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানের অঙ্ক দশক স্থানের অঙ্কের অর্ধেক। সংখ্যাটিকে অঙ্ক দুইটির গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $3\frac{1}{2}$ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।
- একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 60 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।
- দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে এর অঙ্কদ্বয়ের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 4 হয় এবং সংখ্যাটির সাথে 36 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি কত নির্ণয় করুন?
- জনাব আমজাদ সাহেবের জমির ক্ষেত্রফল 0.12 হেক্টর। জমিটির অর্ধপরিসীমা এর একটি কর্ণ অপেক্ষা 20 মিটার বেশি। তিনি তার জমি থেকে বিজন বাবুর নিকট এক তৃতীয়াংশ বিক্রি করেন। বিজনবাবুর জমির দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 9 মিটার বেশি।
 - উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন করুন।
 - আমজাদ সাহেবের জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।
 - বিজন বাবুর জমিটির পরিসীমা ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

পাঠ ৩.৬ দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোটের সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সূচক সমীকরণ, সমীকরণ জোট
------------	-------------------------



মূলপাঠ

দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট

পূর্বে দুই চলক বিশিষ্ট সহসমীকরণ সমাধান করার পদ্ধতি জেনেছেন। এই পাঠে দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোটের সমাধান নিয়ে আলোচনা করা হবে। মনে করুন, $a^x = a^m$ সমীকরণটি হতে x এর মান বের করতে হবে।

যেহেতু, $a^x = a^m$

$$\text{বা, } \frac{a^x}{a^m} = 1$$

$$\text{বা, } a^{x-m} = 1$$

$$\text{বা, } a^{x-m} = a^0 \text{ [কোনো সংখ্যার শক্তি বা সূচক শূন্য হলেই তার মান "এক" হয়]}$$

$$\text{বা, } x - m = 0$$

$$\therefore x = m$$

সুতরাং $a^x = a^m$ হলে, $x = m$

অর্থাৎ কোনো রাশি বা সংখ্যাকে দুইটি বিভিন্ন বাস্তব শক্তিতে উন্নতি করলে, যদি তার মান সমান হয় তবে ঐ দুইটি শক্তির সূচক দুইটির মান সমান হবে।

এই সূত্রের সাহায্যে সূচক সমীকরণের সমাধান করা হয়।

উদাহরণ 1: সমাধান করুন: $3^{3y-1} = 9^{x+y}$, $4^{x+3y} = 16^{2x+3}$

সমাধান: $3^{3y-1} = 9^{x+y}$ (i)

$$4^{x+3y} = 16^{2x+3}$$
 (ii)

(i) নং হতে পাই, $3^{3y-1} = 9^{x+y}$

$$\text{বা, } 3^{3y-1} = (3^2)^{x+y}$$

$$\text{বা, } 3^{3y-1} = 3^{2x+2y}$$

$$\text{বা, } 3y - 1 = 2x + 2y$$

$$\text{বা, } 3y - 2y = 2x + 1$$

$$\therefore y = 2x + 1$$
 (iii)

(ii) নং হতে পাই, $4^{x+3y} = 16^{2x+3}$

$$\text{বা, } 4^{x+3y} = (4^2)^{2x+3}$$

$$\text{বা, } 4^{x+3y} = 4^{4x+6}$$

$$\text{বা, } x+3y = 4x+6$$

$$\text{বা, } x + 3(2x+1) = 4x + 6 \text{ [(iii) নং হতে } y \text{ এর মান বসিয়ে]}$$

$$\text{বা, } x + 6x + 3 = 4x + 6$$

$$\text{বা, } 7x - 4x = 6 - 3$$

$$\text{বা, } 3x = 3$$

$$\therefore x = 1$$

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই

$$y = 2 \times 1 + 1 \\ = 3$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (1, 3)$

উদাহরণ 2: সমাধান করুন: $3^x - 2^y = 1$; $3^{x+1} - 2^{y-1} = 31$

সমাধান: $3^x - 2^y = 1$(i)

$$\text{এবং } 3^{x+1} - 2^{y-1} = 31 \text{.....(ii)}$$

(i) নং হতে পাই

$$3^x - 2^y = 1$$

বা, $a - b = 1$ [$3^x = a$ এবং $2^y = b$ ধরে]

$$\therefore a = 1 + b \text{..... (iii)}$$

(ii) নং হতে পাই

$$3^{x+1} + 2^{y-1} = 31$$

$$\text{বা, } 3^x \cdot 3 + \frac{2^y}{2} = 31$$

$$\text{বা, } 3a + \frac{b}{2} = 31$$

$$\text{বা, } 6a + b = 62$$

$$\text{বা, } 6(1 + b) + b = 62 \text{ [(iii) নং হতে]}$$

$$\text{বা, } 6 + 6b + b = 62$$

$$\text{বা, } 7b = 62 - 6$$

$$\text{বা, } b = \frac{56}{7}$$

$$\text{বা, } b = 8$$

$$\text{বা, } 2^y = 2^3 \text{ [} b \text{ এর মান বসিয়ে]}$$

$$\therefore y = 3$$

(iii) নং হতে পাই

$$a = 1 + b$$

$$\text{বা, } 3^x = 1 + 2^y \text{ [} a \text{ ও } b \text{ এর মান বসিয়ে পাই]}$$

$$\text{বা, } 3^x = 1 + 2^3 \text{ [} y = 3 \text{ বসিয়ে পাই]}$$

$$\text{বা, } 3^x = 9$$

$$\text{বা, } 3^x = 3^2$$

$$\therefore x = 2$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 3)$

উদাহরণ 3: সমাধান করুন: $3^x \cdot 9^y = 81$ এবং $2x - y = 8$

সমাধান: $3^x \cdot 9^y = 81$ (i)

$$\text{এবং } 2x - y = 8 \text{ (ii)}$$

(i) নং হতে পাই, $3^x \cdot 9^y = 81$

$$\text{বা, } 3^x \cdot (3^2)^y = 81$$

$$\text{বা, } 3^x \cdot 3^{2y} = 81$$

$$\text{বা, } 3^{x+2y} = 3^4$$

$$\therefore x + 2y = 4 \dots\dots\dots (iii)$$

$$(ii) \text{ নং সমীকরণকে } 2 \text{ দ্বারা গুণ করে পাই, } 4x - 2y = 16 \dots\dots\dots (iv)$$

সমীকরণ (iii) ও (iv) যোগ করে পাই $5x = 20$

$$\therefore x = 4$$

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$$4 + 2y = 4$$

$$\text{বা, } 2y = 4 - 4$$

$$\text{বা, } 2y = 0$$

$$\therefore y = 0 [\because 2 \neq 0]$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (4, 0)$

উদাহরণ 4: সমাধান করুন: $3 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^y = 0$; $2^{x+1} - 3^{y+1} + 1 = 0$

সমাধান: $3 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^y = 0 \dots\dots\dots (i)$

$$2^{x+1} - 3^{y+1} + 1 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

(i) নং হতে পাই, $3 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^y = 0$

$$\therefore 3a - 4b = 0 \dots\dots\dots (iii) [2^x = a \text{ এবং } 3^y = b \text{ ধরে}]$$

(ii) নং হতে পাই

$$2^{x+1} - 3^{y+1} + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2^x \cdot 2 - 3^y \cdot 3 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2a - 3b + 1 = 0 \dots\dots\dots (iv)$$

(iii) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে পাই, $6a - 8b = 0$

(iv) নং কে 3 দ্বারা গুণ করে পাই, $6a - 9b + 3 = 0$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline \end{array}$$

বিয়োগ করে, $b - 3 = 0$

$$\text{বা, } b = 3$$

$$\text{বা, } 3^y = 3 [b = 3^y \text{ বসিয়ে}]$$

$$\therefore y = 1$$

(iii) নং হতে পাই,

$$3a - 4b = 0$$

$$\text{বা, } 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^y = 0 [a = 2^x \text{ এবং } b = 3^y \text{ বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^1 = 0$$

$$\text{বা, } 3 \cdot 2^x - 12 = 0$$

$$\text{বা, } 3 \cdot 2^x = 12$$

$$\text{বা, } 2^x = \frac{12}{3}$$

$$\text{বা, } 2^x = 4$$

$$\text{বা, } 2^x = 2^2$$

$$\therefore x = 2$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (2, 1)$

উদাহরণ 5: সমাধান করুন $18y^x - y^{2x} = 81$ এবং $3^x = y^2$

সমাধান: $18y^x - y^{2x} = 81 \dots\dots\dots (i)$ এবং $3^x = y^2 \dots\dots\dots (ii)$

(i) নং থেকে পাই, $y^{2x} - 18y^x + 81 = 0$

$$\text{বা, } (y^x - 9)^2 = 0$$

$$\text{বা, } y^x - 9 = 0$$

$$\text{বা, } y^x = 9$$

$$\text{বা, } y^x = 3^2 \dots\dots\dots (iii)$$

(ii) নং থেকে পাই,

$$3^x = y^2$$

$$\text{বা, } (3^x)^x = (y^2)^x \text{ [x তম ঘাতে উন্নীত করে]}$$

$$\text{বা, } 3^{x^2} = (y^2)^x$$

$$\text{বা, } 3^{x^2} = (3^2)^x \text{ [(iii) নং হতে]}$$

$$\text{বা, } 3^{x^2} = 3^4$$

$$\text{বা, } x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

$$x = 2 \text{ হলে (iii) নং হতে পাই, } y^2 = 3^2 \text{ বা, } y = \pm 3$$

$$x = -2 \text{ হলে (iii) নং হতে পাই, } y^{-2} = 9 \text{ বা, } y^2 = \frac{1}{9} \text{ বা, } y = \pm \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (2, 3), (2, -3), (-2, \frac{1}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$$



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৬

সমাধান করুন:

1. $4x = 2y$

$$(27)^y = 9^{y+1}$$

2. $2^x - 3^y = -7$

$$3^y + 2^x = 11$$

3. $4.5^y + 2 - 3.2^x = 8$

$$5^{y+1} + 2^{x+2} = 17$$

4. $x^y = y^x$

$$x = 2y$$

5. $y^x = 4$

$$y^2 = 9^x$$

6. $\left. \begin{array}{l} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{array} \right\}, y \neq 1$

7. $8.2^{xy} = 4^y$

$$9^x \cdot 3^{xy} = \frac{1}{27}$$

8. $2^x 3^y = 18$

$$2^{2x} \cdot 3^y = 36$$

পাঠ ৩.৭ লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ লেখচিত্র, দ্বিঘাত সমীকরণ



মূলপাঠ

লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান

আপনারা ৩.১ পাঠে এক চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের বীজগণিতীয় পদ্ধতিতে সমাধান করতে শিখেছেন। এখন লেখচিত্রের সাহায্যে ইহার সমাধান পদ্ধতি আলোচনা করা হবে।

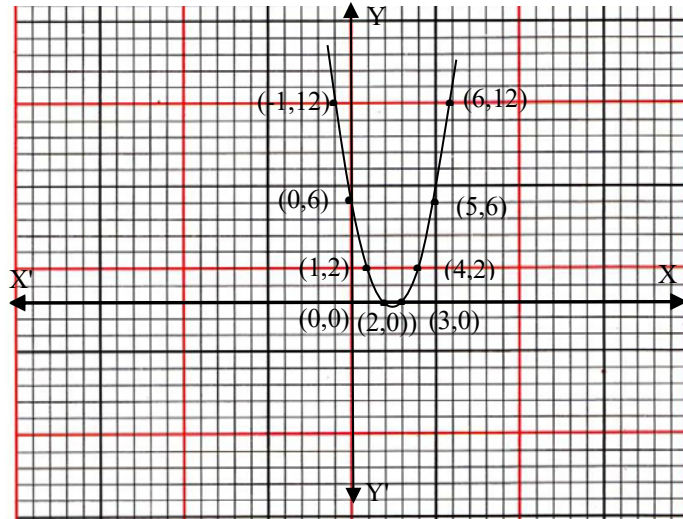
মনে করুন, $y = ax^2 + bx + c$, তাহলে x এর যে সকল মানের জন্য $y = 0$ হবে অর্থাৎ লেখচিত্রটি x -অক্ষকে ছেদ করবে এবং x এর ঐ সকল মানই $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির সমাধান।

উদাহরণ 1: লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 5x + 6 = 0$ এর সমাধান করুন।

সমাধান: মনের করুন, $y = x^2 - 5x + 6 = 0$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে এই সমীকরণের লেখের কয়েকটির বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করুন।

x	0	1	-1	2	3	4	5	6
y	6	2	12	0	0	2	6	12



মনে করুন, x -অক্ষ ও y -অক্ষ দুইটি অক্ষ এবং $(0, 0)$ মূলবিন্দু। উভয় অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে এক একক ধরে সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন। দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x -অক্ষকে $(2, 0)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

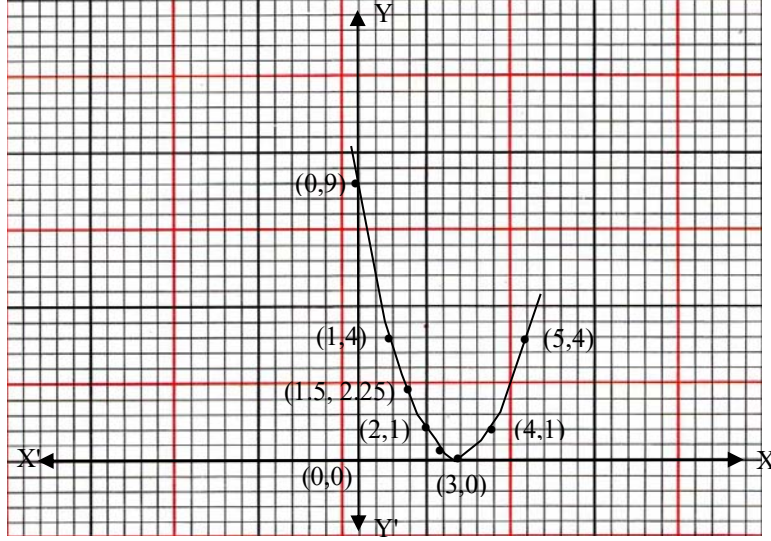
সুতরাং সমীকরণটির সমাধান, $x = 2$ বা, $x = 3$

উদাহরণ ২: লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 6x + 9 = 0$ এর সমাধান করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y = x^2 - 6x + 9$

এখন x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে লেখচিত্রের জন্য কয়েকটি বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করুন।

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4	5
y	9	4	2.25	1	0.25	0	1	4



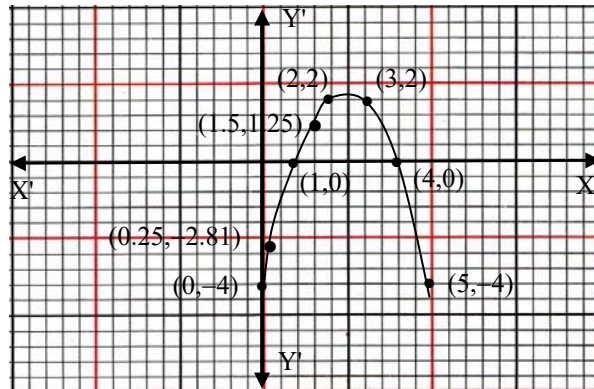
মনে করুন, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x -অক্ষ ও y -অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে (২ ঘর = ১ একক ধরে) স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন। দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(3, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে, সেহেতু সমীকরণটির সমাধান হবে, $x = 3, x = 3$

উদাহরণ ৩: লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন: $-x^2 + 5x - 4 = 0$

সমাধান: মনে করুন, $y = -x^2 + 5x - 4$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন:

x	0	0.25	1	1.5	2	3	4	5
y	-4	-2.8125	0	1.25	2	2	0	-4



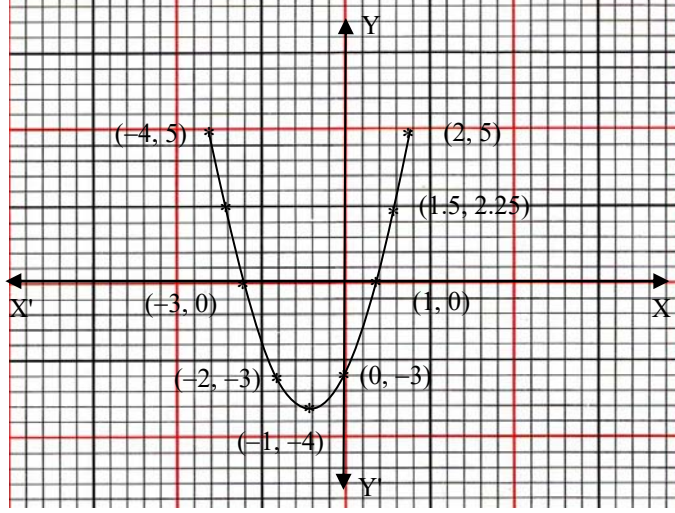
মনে করুন, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x -অক্ষ ও y -অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। উভয় অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন। দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(1, 0)$ ও $(4, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং, সমীকরণটির সমাধান, $x = 1$ বা, $x = 4$

উদাহরণ 4: $x^2 + 2x - 3 = 0$ এর মূলদ্বয় লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y = x^2 + 2x - 3$

এখন, x এর কয়কটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন:

x	0	1	2	-1	-2	-3	-4	-5	1.5
y	-3	0	5	-4	-3	0	5	12	2.25



মনে করুন, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x -অক্ষ ও y -অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। উভয় অক্ষের সাপেক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো প্রদত্ত ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন। লেখচিত্রটি X -অক্ষকে $(-3, 0)$ ও $(1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

∴ সমীকরণটির সমাধান: $x = -3$ বা, $x = 1$



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৭

লেখচিত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান করুন:

- $x^2 - 4x + 3 = 0$
- $x^2 - x - 6 = 0$
- $x^2 - x - 12 = 0$
- $x^2 - 4x + 3 = 0$
- $5 - 4x - x^2 = 0$
- $x^2 - 4x + 4 = 0$
- $2x^2 - 5x + 2 = 0$
- $x^2 = 8$
- $-x^2 + 3x - 2 = 0$
- একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ সংখ্যাটির 7 গুণ অপেক্ষা কম। কিন্তু ঐ সংখ্যাটির বর্গের সমান 12।
(ক) প্রদত্ত তথ্যগুলোর সাহায্যে সমীকরণ গঠন করুন।
(খ) সূত্র প্রয়োগ করে ১ম সমীকরণটি সমাধান করুন।
(গ) ২য় সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন।



উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.১

1. $\frac{1}{4}(5+\sqrt{33}), \frac{1}{4}(5-\sqrt{33})$
2. (2, 3),
3. $(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$
4. $\frac{1}{2}(-2+\sqrt{10}), \frac{1}{2}(-2-\sqrt{10})$.
5. $\frac{1}{6}(-\sqrt{105}), \frac{1}{6}(9+\sqrt{105})$
6. $\frac{1}{6}(-7-\sqrt{37}), \frac{1}{6}(-7+\sqrt{37})$,
7. $(-2+\sqrt{7}-2-\sqrt{7})$
8. $\frac{1}{4}(-7-\sqrt{57}), \frac{1}{4}(-7+\sqrt{57})$
9. (-3, -8)
10. $\frac{1}{2}(+\sqrt{289}), \frac{1}{2}(2-\sqrt{289})$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.২

1. $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
2. 8
3. 5
4. (2, 3)
5. ± 1 ,
6. $\left(-\frac{9}{11}, -\frac{3}{2}\right)$
7. $\left(\frac{25}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৩

1. $x = 5$
2. $x = 2, 3$
3. $x = 1; 2$
4. $x = \pm \frac{1}{2}$
5. $x = 3$
6. $x = 5$
7. $x = 2, 3$
8. $x = 2, 4$
9. $x = 0, -1$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৪

1. $(x, y) = \left(2, \frac{27}{7}\right), \left(-\frac{14}{3}, 1\right)$
2. $(x, y) = (6, -5), (-5, 6), (5, -6), (-6, -5)$
3. $(x, y) = \left(3, -\frac{5}{3}\right), \left(\frac{16}{9}, -\frac{3}{4}\right)$
6. $(x, y) = (9, 4), (9, -3), (-9, 3), (-9, -3)$
7. $(x, y) = (0, 0), (13, 13), (3, -2), (-2, -3),$
8. $(x, y) = (2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৫

1. (3, 2),
2. 24 মি. ও 12 মি.
3. 25 মি. ও 24 মি.
4. 24 মি. ও 7 মি.
5. 24 মি. ও 20 মি.
6. 4 মি. ও 9 মি.
7. 63
8. 24 মি. ও 7 মি.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৬

1. $(1, 2), \left(\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$
2. (1, 2)
3. (2, -1),
4. (4, 2)
5. $(2, \pm 2), \left(-2, \pm \frac{1}{2}\right)$
6. $(2, \pm 2), \left(-2, \pm \frac{1}{2}\right)$
7. (-1, 1), (3, -3)
8. (1, 2)