ইউনিট
২

বীজগাণিতিক রাশি
Algebraic Expression

ভূমিকা

পাটিগণিতে নির্দিষ্ট মানের (ধ্রুবক) সংখ্যা দ্বারা যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ প্রভৃতি প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়। কিন্তু বীজগণিতে নির্দিষ্টমানের সংখ্যা অর্থাৎ 1, 2, 3, ...ছাড়াও $a, b, c, x, y, z, \alpha, \beta$ ইত্যাদি ইংরেজি ও গ্রিক বর্ণমালার অক্ষরসমূহ অনির্দিষ্ট সংখ্যামানের প্রতীকরূপে ব্যবহৃত হয়। পাটিগণিতে শুধু শূন্যসহ ধনাত্মক সংখ্যাই ব্যবহৃত হয়। কিন্তু বীজগণিতে শূন্যসহ ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সকল সংখ্যা ব্যবহৃত হয়। বীজগণিতকে পাটিগণিতের সর্বায়নকৃত রূপ বলা যায়। এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক অক্ষরকে প্রক্রিয়া চিহ্ন $(+, -, \times, \div)$ এর যেকোনো একটি অথবা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের সৃষ্টি হয়, তাকে বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic expression) বা সংক্ষেপে রাশি বলা হয়। যেমন, $5x, 2x+y, 3x+5y^2-a+\sqrt{Z}$ ইত্যাদি প্রতিটিই এক একটি বীজগাণিতিক রাশি। আবার, $3x + 5y^2 - a + \sqrt{Z}$ রাশিটিতে $3x, 5y^2, -a, \sqrt{Z}$ প্রত্যেকটি এক একটি পদ (Term)। এই ইউনিটে আপনারা বহুপদী, ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য, সমমাত্রিক, প্রতিসম ও চক্র-ক্রমিক রাশি এবং মূলদ ভগ্নাংশ ও আংশিক ভগ্নাংশ সম্পর্কে অবহিত হবেন।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- বহুপদীর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- উদাহরণের সাহায্যে এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বহুপদীর গুণ ও ভাগ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ভাগশেষ উপপাদ্য ও উৎপাদক উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং তা প্রয়োগ করে বহুপদীর উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- সমমাত্রিক রাশি, প্রতিসম রাশি এবং চক্র-ক্রমিক রাশি ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সমমাত্রিক রাশি, প্রতিসম রাশি এবং চক্র-ক্রমিক রাশির উৎপাদক নির্ণয় করতে পারবেন,
- মূলদ ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ২.১ বহুপদী

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বহুপদীর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- উদাহরণের সাহায্যে এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বহুপদীর মাত্রা বলতে পারবেন,
- উদাহরণের সাহায্যে দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- উদাহরণের সাহায্যে তিন চলকবিশিষ্ট বহুপদী ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বহুপদী, এক চলক, দুই চলক

মূলপাঠ

বহুপদী: সংখ্যা নির্দেশক একটি অক্ষর প্রতীক চলক (Variable) অথবা ধ্রুবক (Constant) হতে পারে। যদি এরূপ একটি প্রতীক একাধিক সদস্যবিশিষ্ট কোনো সংখ্যা সেটের যেকোনো অনির্ধারিত সদস্য নির্দেশ করে, তবে প্রতীকটিকে চলক বলা হয় এবং সেটটিকে তার ডোমেন বলা হয়।

যেমন, $A = \{x \in R: 1 < x < 20\}$ এখানে, x একটি চলক এবং x এর মান 1 থেকে বড় কিন্তু 20 থেকে ছোট যেকোনো বাস্তব সংখ্যা।

আবার যদি প্রতীকটি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা নির্দেশ করে, তবে তাকে ধ্রুবক বলা হয়। একটি চলক তার ডোমেন বা সেট থেকে যেকোনো মান গ্রহণ করতে পারে। কিন্তু একটি ধ্রুবকের মান নির্দিষ্ট থাকে।

বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকতে পারে। সব পদকেই একত্রে বহুপদী বলে। পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল হয়।

এক চলকের বহুপদী

মনে করুন, x একটি চলক। তাহলে $3x+5$, x^2+4x+2, x^3+3x^2+2x+8 ইত্যাদি আকারের রাশিকে x চলকের একমাত্রিক, দ্বিমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক বহুপদী বলা হয়। সাধারণত বহুপদীতে চলকের সর্বোচ্চ মাত্রা বা ঘাত যত থাকে, তাকে তত মাত্রিক বহুপদী বলে। বহুপদীতে চলকের মাত্রা যত থাকে তার চেয়ে পদসংখ্যা এক বেশি হয়। n মাত্রার বহুপদীতে পদসংখ্যা হয় $n+1$.

সাধারণভাবে, x চলকের বহুপদীর পদসমূহ Cx^p আকারে হয়, যেখানে C একটি (x - বর্জিত) নির্দিষ্ট সংখ্যা (যা শূন্যও হতে পারে) এবং p একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। p শূন্য হলে পদটি শুধু C হয় (কারণ, $x^o = 1$) এবং C শূন্য হলে পদটি বহুপদীতে অনুল্লেখ থাকে। Cx^p পদে C কে x^p এর সহগ (coefficient) এবং p কে এই পদের মাত্রা বা ঘাত (degree) বলা হয়।

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ একটি চারমাত্রিক বহুপদী, যার পদসংখ্যা পাঁচ। চলকে সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট পদকে মুখ্য পদ ও মুখ্যপদের সহগকে মুখ্যসহগ এবং শূন্যমাত্রিক বা চলকবিহীন পদকে ধ্রুবক বা ধ্রুব পদ বলা হয়। যেমন, $3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 8x + 9$, x চলকের একটি বহুপদী, যার মাত্রা 4, মুখ্যপদ $3x^4$, মুখ্যসহগ 3 এবং ধ্রুবক বা ধ্রুবপদ 9। $x^3 + 1$ একটি ত্রিমাত্রিক বহুপদী, পদসংখ্যা আপাতদৃষ্টিতে দুই হলেও তার প্রকৃত পদ সংখ্যা হবে চার। এখানে x^2 ও x এর সহগ শূন্য ধরা হয়। x চলকের বহুপদীতে সাধারণত x এর ঘাতের অধঃক্রমে (অর্থাৎ মুখ্যপদ থেকে শুরু করে ক্রমে ক্রমে ধ্রুবপদ পর্যন্ত) বর্ণনা করা হয়, অর্থাৎ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ । এরূপ বর্ণনাকে বহুপদীটির আদর্শ রূপ (Standard form) বলা হয়। ব্যবহারের সুবিধার্থে, x চলকের বহুপদীকে $P(x)$, $Q(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $f(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $P(x) = 5x^6+4x^4-8x+7$.

$P(x)$ বহুপদীতে x চলকের পরিবর্তে কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা a বসালে বহুপদীটির যে মান পাওয়া যায়, একে $P(a)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। অর্থাৎ, $P(a) = 5a^6+4a^4-8a+7$.

উদাহরণ 1: যদি $P(x) = 32x^4-16x^2+8x+7$ হয়, তবে $P(0), P(1), P(-1)$ এবং $P\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বহুপদীতে x এর পরিবর্তে পর্যায়ক্রমে $0, 1, -1, \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$P(0) = 32(0)^4-16(0)^2+8(0)+7 = 7$$
$$P(1) = 32(1)^4-16(1)^2+8(1)+7 = 31$$
$$P(-1) = 32(-1)^4-16(-1)^2+8(-1)+7 = 15$$
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 32\left(\frac{1}{2}\right)^4-16\left(\frac{1}{2}\right)^2+8\left(\frac{1}{2}\right)+7 = 32\times\frac{1}{16}-16\times\frac{1}{4}+\frac{8}{2}+7 = 2-4+4+7 = 9$$

দুই চলকের বহুপদী

কোনো কোনো বহুপদীতে একাধিক চলকও থাকতে পারে। যেমন, $ax+by+c$, $ax^2+bxy+cy^2$, $8x^3+y^3+12x^2y+6xy^2-6x+2$ এগুলো x ও y চলকের বহুপদী। সাধারণভাবে, এরূপ বহুপদীর পদগুলো Cx^py^q আকারের হয়, যেখানে C একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা (ধ্রুবক) এবং p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা, Cx^py^q পদে C হচ্ছে x^py^q এর সহগ এবং $p+q$ হচ্ছে এই পদের মাত্রা। অর্থাৎ বহুপদীতে যতটি চলক থাকে, প্রতি পদে বিদ্যমান চলকগুলোর মাত্রার সমষ্টিই ঐ পদের মাত্রা।

সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট পদের মাত্রাই বহুপদীর মাত্রা। দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদীকে $P(x, y)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $P(x, y) = ax^2+bxy+cy^2$

উদাহরণ 2: যদি $P(x,y) = 8x^3+y^3+12x^2y+6xy^2-6x+2$ হয়, তবে $P(1, 0)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বহুপদীতে (x, y) এর পরিবর্তে $(1, 0)$ বসিয়ে পাই,

$$P(1, 0) = 8(1)^3+(0)^3+12(1)^2(0)+6(1)(0)^2-6(1)+2$$
$$= 8+0+0+0-6+2 = 10-6 = 4.$$

তিন চলকের বহুপদী

x, y ও z চলকের বহুপদীর পদগুলো $Cx^py^qz^r$ আকারের হয়, যেখানে C (ধ্রুবক) পদটির সহগ এবং p, q ও r অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। একাধিক চলকবিশিষ্ট বহুপদীর ঘাত বা মাত্রা হলো বিভিন্ন চলকের মাত্রাগুলোর যোগফলের সর্বোচ্চ মান। অর্থাৎ, $(p+q+r)$ কে $Cx^py^qz^r$ পদের মাত্রা এবং বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে বহুপদীটির মাত্রা বলা হয়। তিন চলকবিশিষ্ট বহুপদীকে $P(x, y, z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $P(x, y, z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ বহুপদীর মাত্রা 3 এবং $P(x, y, z) = 5x^3yz^2$ এর মাত্রা 6।

উদাহরণ 3: যদি $P(x, y, z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ হয়, তবে $P(1, -1, 2)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বহুপদীতে (x, y, z) এর পরিবর্তে $(1, -1, 2)$ বসিয়ে পাই,

$$P(1, -1, 2) = (1)^3+(-1)^3+(2)^3-3(1)(-1)(2) = 1-1+8+6 = 14.$$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. যদি $f(x) = x^3-x^2+5x+2$ হয়, তবে $f(1), f(-1), f(\frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় করুন। 2. যদি $P(x, y) = 7x^2y-x^2y^2$ হয়, তবে $P(-1, 1)$ ও $P(1, 2)$ এর মান নির্ণয় করুন। 3. যদি $f(x, y, z) = x+y-2z$ হয়, তবে $f(3, 2, \frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- বহুপদী বিশেষ ধরনের রাশি, এই রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে।

- সাধারণত বহুপদীতে চলকের সর্বোচ্চ মাত্রা বা ঘাত যত থাকে, তাকে তত মাত্রিক বহুপদী বলে।
- Cx^p বহুপদীতে C ধ্রুবক। C কে x^p এর সহগ বলে এবং p কে মাত্রা বা ঘাত বলে। p একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
- চলকে সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট পদকে মুখ্যপদ ও মুখ্যপদের সহগকে মুখ্যসহগ এবং শূন্যমাত্রিক বা চলকবিহীন পদকে ধ্রুবক বলা হয়।
- x চলকের বহুপদীতে সাধারণত x এর ঘাতের অধঃক্রমে অর্থাৎ $ax^4+bx^3+cx^2+dx+k$ বর্ণনাকে বহুপদীটির আদর্শ রূপ বলা হয়।
- x চলকের বহুপদীকে সাধারণত $P(x)$, $g(x)$, $f(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।
- Cx^py^q আকারের বহুপদীতে C একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা (ধ্রুবক) এবং p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। C হচ্ছে x^py^q এর সহগ এবং $p+q$ হচ্ছে এই পদের মাত্রা।
- দুই চলকবিশিষ্ট বহুপদীকে $P(x, y)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

x, y ও z চলকের বহুপদীর পদগুলো $Cx^py^qz^r$ আকারের হয়। এখানে C ধ্রুবক, পদটির সহগ এবং p , q, r অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

- $(p+q+r)$ কে $C\,x^py^qz^r$ পদের মাত্রা বলা হয় এবং $P\,(x, y, z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.১

1. যদি $f\,(x) = 2x^2+7x+5$ হয়, তবে $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত?

(ক) 4 (খ) 3 (গ) 2 (ঘ) 1

2. যদি $g\,(x, y) = 3x^2-y^2+x-3$ হয়, তবে $g(1, -1)$ এর মান কত?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) -3 (ঘ) 3

$3x^6-4x^5+8x^4-2x+7$ বহুপদীটি থেকে 3, 4 ও 5 নং প্রশ্নের উত্তর দিন।

3. বহুপদীটির মুখ্যপদ কোনটি?

(ক) x^6 (খ) $8\,x^4$ (গ) $3x^6$ (ঘ) 9

4. বহুপদীটির মাত্রা কত?

(ক) 3 (খ) 6 (গ) 8 (ঘ) 9

5. বহুপদীটির মুখ্য সহগ কত?

(ক) 9 (খ) 8 (গ) 6 (ঘ) 3

পাঠ ২.২ ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ভাগসূত্র বর্ণনা করতে পারবেন,
- সমতা সূত্র কী তা বলতে পারবেন,
- ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- উৎপাদক উপপাদ্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন,

- ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য প্রয়োগ করে বহুপদীর উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ভাগসূত্র, সমতা সূত্র, ভাগশেষ উপপাদ্য

মূলপাঠ

ভাগসূত্র: দুইটি বহুপদীর যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ বীজগণিতের প্রচলিত নিয়মে হয়ে থাকে। ভাগের ক্ষেত্রে ভাজক বহুপদীর মাত্রা ভাজ্য বহুপদীর মাত্রার চেয়ে ছোট বা সমান হতে পারে। ভাগ প্রক্রিয়া ততক্ষণ চালাতে হবে, যতক্ষণ না অবশিষ্ট বহুপদীর মাত্রা ভাজক বহুপদীর মাত্রার চেয়ে ছোট হয়। ভাগফল ও ভাগশেষ সংখ্যার মতো বহুপদীর ক্ষেত্রেও ভাজ্য ও ভাজক দ্বারা সম্পূর্ণরূপে নির্দিষ্ট হয়ে পড়ে। সাধারণভাবে বলা যায়, যদি $f(x)$ ও $g(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী হয় এবং ($g(x)$ এর মাত্রা) $\leq$ ($f(x)$ এর মাত্রা) হয়, তবে সাধারণ নিয়মে $g(x)$ দ্বারা $f(x)$ কে ভাগ করে ভাগফল $h(x)$ ও ভাগশেষ $r(x)$ পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \dfrac{r(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, যেখানে,

(i) $h(x)$ ও $r(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী

(ii) $h(x)$ এর মাত্রা $=$ $f(x)$ এর মাত্রা $-$ $g(x)$ এর মাত্রা

(iii) $r(x) = 0$ অথবা ($r(x)$ এর মাত্রা) $<$ ($g(x)$ এর মাত্রা)

(iv) সকল x এর জন্য $f(x) = g(x)\, h(x) + r(x)$

মন্তব্য : (iv) নং নিয়মকে ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ হিসেবে উল্লেখ করা হয়।

সমতা সূত্র

(১) যদি সকল x এর জন্য $ax + b = mx + n$ হয়, তবে $x = 0$ ও $x = 1$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $b = n$ এবং $a + b = m + n$ যা থেকে দেখা যায় যে, $a = m$ এবং $b = n$.

(২) যদি সকল x এর জন্য $ax^2 + bx + c = mx^2 + nx + p$ হয়, তবে $x = 0$, $x = 1$ ও $x = -1$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $c = p$, $a + b + c = m + n + p$ এবং $a - b + c = m - n + p$ যা থেকে দেখা যায় যে, $a = m$, $b = n$ এবং $c = p$.

(৩) সাধারণভাবে দেখা যায় যে, যদি সকল x এর জন্য $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1} x + a_n = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots\dots\dots + p_{n-1} x + p_n$ হয়, তবে $a_0 = p_0$, $a_1 = p_1$, $a_2 = p_2$, ..., $a_{n-1} = p_{n-1}$, $a_n = p_n$ । অর্থাৎ সমতা চিহ্নের উভয় পক্ষে x এর একই ঘাতের সহগদ্বয় সমান।

লক্ষণীয় যে, x চলকের n মাত্রার বহুপদীর বর্ণনায় সহগগুলোকে a_0 (a সাব জিরো), a_1 (a সাব ওয়ান), ... ইত্যাদি নেওয়া সুবিধাজনক।

সকল x এর জন্য দুইটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সমান হলে, তাদের সমতাকে অভেদ (identity) বলা হয় এবং এটি বোঝাতে অনেক সময় $P(x) \equiv Q(x)$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদী দুইটি অভিন্ন হয়। $\equiv$ চিহ্নকে অভেদ চিহ্ন বলা হয়। সাধারণভাবে, দুইটি বীজগাণিতিক রাশির সমতাকে অভেদ বলা হয়, যদি রাশি দুইটিতে কোনো একটি চলকের ডোমেন একই হয় এবং চলকসমূহের ডোমেনভুক্ত সকল মানের জন্য রাশি দুইটির মান সমান হয়। যেমন, $x(y + z) = xy + xz$ একটি অভেদ।

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $(x - a)$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হলো ভাগশেষ উপপাদ্য।

প্রতিজ্ঞা ১: যদি $f(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং a কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা হয়, তবে $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $f(a)$ হবে।

প্রমাণঃ ভাজক বহুপদী $(x-a)$ এর মাত্র 1। ভাজক বহুপদী যদি ভাজ্য বহুপদীর উৎপাদক হয়, তবে ভাগশেষ থাকবে না অর্থাৎ ভাগশেষ হবে শূন্য। আর যদি উৎপাদক না হয়, তবে ভাগশেষ থাকবে এবং তা হবে শূন্যমাত্রিক বহুপদী অর্থাৎ অশূন্য কোনো সংখ্যা (ধ্রুবক)। অতএব, উভয়ক্ষেত্রেই ভাগফলকে $h(x)$ এবং ভাগশেষকে r দ্বারা সূচিত করে পাওয়া যায়,
$f(x) = (x-a).\ h(x) + r$ .... (1)
(1) নং সমীকরণে $x = a$ বসিয়ে পাওয়া যায়,
$f(a) = (a-a).\ h(a) + r = 0.\ h(a) + r = r.$
সুতরাং, $r = f(a)$
অতএব, $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$। এই সূত্র ভাগশেষ উপপাদ্য (*Remainder Theorem*) নামে পরিচিত।

উদাহরণ 1: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ বহুপদীকে $(x+2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধানঃ এখানে $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ এবং ভাজক $x + 2 = x-(-2)$
সুতরাং, ভাগশেষ $= f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 3(-2) + 4 = -8 + 12 + 6 + 4 = 14$

প্রতিজ্ঞা ২: যদি $f(x)$ এর মাত্রা ধনাত্মক হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $f(x)$ কে $(ax + b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\frac{b}{a}\right)$।

প্রমাণঃ ভাজক বহুপদী $ax+b$ $(a \neq 0)$ এর মাত্রা 1।

সুতরাং, ধরা যায় যে, $f(x) = (ax + b).\ h(x) + r = a\left(x+\frac{b}{a}\right).\ h(x) + r = \left(x+\frac{b}{a}\right).\ a.h(x) + r$

$\therefore\ f(x) = \left(x+\frac{b}{a}\right).\ a.h(x) + r$

দেখা যাচ্ছে যে, $f(x)$ কে $\left(x+\frac{b}{a}\right)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় $a.h(x)$ এবং ভাগশেষ হয় r.

এখানে ভাজক $= x - \left(-\frac{b}{a}\right)$

সুতরাং, ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, $r = f\left(-\frac{b}{a}\right)$

অতএব, $f(x)$ কে $(ax+b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\frac{b}{a}\right)$.

উদাহরণ 2: $f(x) = 16x^2 - 10x + 3$ বহুপদীকে $(2x-1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
সমাধানঃ এখানে ভাজ্য বহুপদী $f(x) = 16x^2 - 10x + 3$ এবং ভাজক বহুপদী $2x-1$
$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= f(\frac{1}{2}) = 16(\frac{1}{2})^2 - 10(\frac{1}{2}) + 3 = 16 \times \frac{1}{4} - 10 \times \frac{1}{2} + 3 = 4 - 5 + 3 = 2.$

উদাহরণ 3: যদি $f(x) = x^3 + kx^2 - 4x - 8$ কে $(x + 3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 4 হয়, তবে k এর মান কত?
সমাধানঃ $f(x) = x^3 + kx^2 - 4x - 8$ কে $x+3$ বা $x-(-3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,
$f(-3) = (-3)^3 + k(-3)^2 - 4(-3) - 8 = -27 + 9k + 12 - 8 = 9k - 23$
শর্তানুসারে, $9k - 23 = 4$
বা, $9k = 4 + 23 = 27$
$\therefore\ k = 3.$

উদাহরণ 4: যদি $f(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + 3$ হয় এবং $f(x)$ কে $x-a$ ও $x-b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে প্রমাণ করুন যে, $a^2+b^2+ab+8a+8b+5 = 0$.

সমাধান: $f(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(a) = a^3+ 8a^2+5a+3$ এবং

$f(x)$ কে $x-b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $f(b) = b^3+8b^2+5b+3$.

শর্তানুসারে, $a^3+ 8a^2+5a+3 = b^3+8b^2+5b+3$.

বা, $a^3- b^3+ 8(a^2- b^2) +5(a- b) = 0$.

বা, $(a- b) (a^2 +ab+b^2)+8(a+b) (a- b) +5 (a- b) = 0$.

বা, $(a- b) (a^2 + b^2 + ab +8a +8b +5) = 0$.

$\therefore\ a^2 + b^2 + ab +8a +8b +5 = 0$, যেহেতু $(a- b) \neq 0$ অর্থাৎ $a \neq b$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. $f(x) = x^3- 6x^2+5x +12$ বহুপদীকে $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? 2. $f(x) = 2x^3+x^2 - 18x +10$ কে $(2x+1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem)

প্রতিজ্ঞা ৩: যদি $f(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $f(a) = 0$ হয়, তবে $f(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x-a)$ হবে।

প্রমাণ: $f(x)$ বহুপদীকে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ

$= f(a)$ [ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী]

$= 0$ [প্রদত্ত শর্ত থেকে]

অর্থাৎ, $f(x)$ বহুপদী $(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore\ (x-a)$ হচ্ছে $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

উদাহরণ 5: দেখান যে, $f(x) = x^3 - 6x + 5$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 1)$।

সমাধান: এখানে $f(1) = (1)^3 - 6(1) + 5 = 1- 6 + 5 = 0$

সুতরাং, উৎপাদক উপপাদ্য থেকে দেখা যায় যে, $f(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x-1)$ ।

উদাহরণ 6: দেখান যে, $f(x) = 2x^4- 3x^3- 3x -2$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2x+1)$.

সমাধান: এখানে $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 -3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) -2 = 2 \times \frac{1}{16} + 3\times\frac{1}{8} + 3\times\frac{1}{2} -2$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{2} - 2 = \frac{1+3+12-16}{8} = \frac{16-16}{8} = 0$$

সুতরাং, $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ বা, $\frac{1}{2}(2x + 1)$ বা, $(2x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore\ (2x + 1)$ প্রদত্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক।

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য

প্রতিজ্ঞা 8: যদি $f(x)$ বহুপদীর $(x-a)$ একটি উৎপাদক হয়, তবে দেখান যে, $f(a) = 0$.

প্রমাণ: যেহেতু $f(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x-a)$.

সুতরাং আরেকটি উৎপাদক $h(x)$ পাওয়া যায় যেন

$f(x) = (x-a).\ h(x)$

উভয়পক্ষে $x = a$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$f(a) = (a-a).\ h(a) = 0.\ h(a) = 0.$

$\therefore\ f(a) = 0$

সুতরাং, কোনো বহুপদী $f(x)$, $(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a) = 0$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) নামে পরিচিত।

অনুসিদ্ধান্তঃ $ax+b$, $a \neq 0$ হলে, রাশিটি কোনো বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $f(-\frac{b}{a}) = 0$ হয়।

প্রমাণঃ $a \neq 0, ax+b = a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর উৎপাদক হবে, যদি এবং কেবল যদি $\left(x+\dfrac{b}{a}\right) = x - \left(-\dfrac{b}{a}\right)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়। অর্থাৎ, যদি এবং কেবল যদি $f\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ হয়। ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে উৎপাদক নির্ণয়ের এই পদ্ধতিকে শূন্যায়ন পদ্ধতিও (vanishing method) বলে।

উদাহরণ 7: দেখান যে, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x–1)$ হবে যদি এবং কেবল যদি $a+b+c+d= 0$ হয়।

সমাধানঃ মনে করুন, $a+b+c+d = 0$.

তাহলে $f(1) = a+b+c+d =0$ [শর্তানুসারে].

সুতরাং, $(x-1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক [উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে]

আবার মনে করুন, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x–1)$. তাহলে, উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে দেখা যায় যে, $f(1) = 0$ অর্থাৎ $a+b+c+d= 0$

মন্তব্যঃ ধনাত্মক মাত্রার যেকোনো বহুপদীর $(x–1)$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি বহুপদীটির সহগসমূহের সমষ্টি 0 হয়।

উদাহরণ 8: $f(x) = x^3–21x –20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত বহুপদীর সহগসমূহ পূর্ণসংখ্যা এবং ধ্রুবপদ $= –20$, মুখ্য সহগ $= 1$

এখন r যদি পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $f(x)$ এর যদি $x–r$ আকারের কোনো উৎপাদক থাকে, তবে r অবশ্যই $–20$ এর উৎপাদক অর্থাৎ, $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20$ এর কোনোটি হবে। এখন r এর এরূপ বিভিন্ন মানের জন্য $f(x)$ পরীক্ষা করা যায়।

$f(1) =(1)^3 –21(1) –20 = 1–21–20 \neq 0 \quad \therefore x–1$, $f(x)$ এর উৎপাদক নয়।

$f(–1) =(–1)^3 –21(–1) –20 = –1+21–20 = 0 \quad \therefore x+1$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$f(2) =(2)^3 –21(2) –20 = 8–42–20 \neq 0 \quad \therefore x–2$, $f(x)$ এর উৎপাদক নয়।

$f(–2) =(–2)^3 –21(–2) –20 = –8+42 –20 \neq 0 \quad \therefore x+2$, $f(x)$ এর উৎপাদক নয়।

$f(4) =(4)^3 –21(4) –20 = 64–84–20 \neq 0 \quad \therefore x–4$, $f(x)$ এর উৎপাদক নয়।

$f(–4) =(–4)^3 –21(–4) –20 = –64+84 –20 = 0 \quad \therefore x+4$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$f(5) =(5)^3 –21(5) –20 = 125–105–20 = 0 \quad \therefore x–5$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক ।

যেহেতু $f(x)$ এর মাত্রা 3 এবং তিনটি 1 মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে, সুতরাং $f(x)$ এর অন্য কোনো উৎপাদক যদি থাকে তবে তা ধ্রুবক হবে।

$\therefore f(x) = k (x+1) (x+4) (x–5)$, যেখানে k ধ্রুবক।

উভয় পক্ষে x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ বিবেচনা করে দেখা যায় যে, $k = 1$

সুতরাং, $f(x) = (x+1) (x+4) (x–5)$

দ্রষ্টব্য : কোনো বহুপদী $f(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য প্রথমে $(x–r)$ আকারের একটি উৎপাদক নির্ণয় করে $f(x)$ কে সরাসরি $(x–r)$ দ্বারা ভাগ করে অথবা $f(x)$ এর পদসমূহকে পুনর্বিন্যাস করে $f(x)$ কে $f(x) = (x–r)\, h(x)$ আকারে লেখা যায়। যেখানে $h(x)$ বহুপদীর মাত্রা $f(x)$ এর মাত্রা থেকে 1 কম। অতঃপর $h(x)$ এর উৎপাদক নির্ণয় করে অগ্রসর হতে হয়।

উদাহরণ 9: উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুনঃ $2x^3– 3x^2 +3x – 1$

সমাধান: এখানে $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$f(x)$ এর ধ্রুবপদ -1, এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_1 = \{1, -1\}$.

$f(x)$ এর মুখ্য সহগ 2 এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_2 = \{1, -1, 2, -2\}$.

এখন $f(a)$ বিবেচনা করলে দেখা যায়, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1, s \in F_2$.

$a = 1$ হলে, $f(1) = 2 - 3 + 3 - 1 \neq 0$

$a = -1$ হলে, $f(-1) = -2 - 3 - 3 - 1 \neq 0$

$a = \frac{1}{2}$ হলে, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2.\frac{1}{8} - 3.\frac{1}{4} + 3.\frac{1}{2} - 1$

$$= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1 - 3 + 6 - 4}{4} = \frac{7 - 7}{4} = 0$$

অর্থাৎ, $x = \frac{1}{2}$ বসালে $f(x)$ এর মান শূন্য হয়।

সুতরাং, $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x - 1)$.

অর্থাৎ $(2x - 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 2x - 1$

$= x^2(2x - 1) - x(2x - 1) + 1(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$

$\therefore f(x) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$

বি:দ্র: যেহেতু $x^2 - x + 1$ কে আর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না, সেহেতু প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদকে বিশ্লেষণ সম্পন্ন হয়েছে।

বিকল্প পদ্ধতি : $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = x^3 + (x - 1)^3$

$= \{x + (x - 1)\}\{x^2 - x(x - 1) + (x - 1)^2\} = (x + x - 1)(x^2 - x^2 + x + x^2 - 2x + 1) = (2x - 1)(x^2 - x + 1)$

শিক্ষার্থীর কাজ	
	1. দেখান যে, $f(x) = 3x^3 + 2x + 5$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x+2)$।
	2. দেখান যে, $f(x) = 18x^3 + 15x^3 - x - 2$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(2x+1)$।
	3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

সারসংক্ষেপ

- যদি $f(x)$ ও $g(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী হয়, তবে সাধারণ নিয়মে $f(x)$ কে $g(x)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $h(x)$ ও ভাগশেষ $r(x)$ পাওয়া যায়। অর্থাৎ, $f(x) = g(x)\,h(x) + r(x)$. অর্থাৎ, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।
- যদি সকল x এর জন্য $ax + b = mx + n$ হয়, তবে দেখা যায় যে, $a = m$ এবং $b = n$
- যদি সকল x এর জন্য $ax^2 + bx + c = mx^2 + nx + p$ হয়, তবে দেখা যায় যে, $a = m$, $b = n$ এবং $c = p$.
  সকল x এর জন্য দুইটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সমান হলে, তাদের সমতাকে অভেদ বলা হয় এবং $P(x) \equiv Q(x)$ লেখা হয়। '$\equiv$' এ চিহ্নকে অভেদ চিহ্ন বলা হয়।
- দুইটি বীজগাণিতিক রাশির সমতাকে অভেদ বলা হয়, যদি রাশি দুইটিতে কোনো একটি চলকের ডোমেন একই হয় এবং চলকসমূহের ডোমেনভুক্ত মানের জন্য রাশি দুইটির মান সমান হয়। যেমন, $x(y + z) = xy + xz$ একটি অভেদ।
- ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $(x - a)$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হলো ভাগশেষ উপপাদ্য।
- $f(x)$ কে $(x - a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$। এই সূত্র ভাগশেষ উপপাদ্য নামে পরিচিত।

- $f(x)$ কে $(ax+b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(-\frac{b}{a})$।
- যদি $f(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $f(a)=0$ হয়, তবে $f(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x-a)$ হবে।
- কোনো বহুপদী $f(x)$, $(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল যদি $f(a)=0$ হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.২

1. $f(x) = 4x^3 -7x+10$ বহুপদীকে $(x-1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
   (ক) 13 (খ) 10 (গ) 7 (ঘ) 4
2. $f(x) = 2x^3 +x^2 -9x -5$ বহুপদীকে $(2x+1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?
   (ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $-\frac{1}{2}$ (গ) $\frac{1}{4}$ (ঘ) $-\frac{1}{4}$
3. যদি $f(x) = 7x^3- 8x^2+6x- 36$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x-2)$ হয়, তবে ভাগশেষ কত হবে?
   (ক) 2 (খ) -2 (গ) 1 (ঘ) 0
4. (i) সকল x এর জন্য $f(x) = g(x)\, h(x) - r(x)$.
   (ii) সকল x এর জন্য $f(x) = g(x)\, h(x) + r(x)$.
   (iii) ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$.

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) *i* ও *ii* (খ) *i* ও *iii* (গ) *ii* ও *iii* (ঘ) *i*, *ii* ও *iii*
5. x^3+4x^2+x-6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে নিচের কোনটি হবে?
   (ক) $(x+1)(x+2)(x+3)$ (খ) $(x-1)(x+2)(x+3)$
   (গ) $(x-1)(x-2)(x+3)$ (ঘ) $(x+1)(x+2)(x-3)$
6. নিচের কোনটি $f(x) = x^3- 4x^2+6x-4$ এর একটি উৎপাদক?
   (ক) $x+1$ (খ) $x-1$ (গ) $x+2$ (ঘ) $x-2$

পাঠ ২.৩ সমমাত্রিক, প্রতিসম ও চক্র-ক্রমিক রাশি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সমমাত্রিক রাশি ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- প্রতিসম রাশি ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- চক্র-ক্রমিক রাশি বলতে কী বোঝায় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- একটি বিশেষ বীজগাণিতিক সূত্র প্রমাণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ, সমমাত্রিক রাশি, প্রতিসম

মূলপাঠ

সমমাত্রিক রাশি

x^2+xy+y^2 রাশিটির x^2 এবং y^2 উভয় পদের মাত্রা 2। আবার xy পদটির মাত্রাও 2. কেননা, $xy = x^1.y^1$ এবং $1+1 = 2$। অতএব সবগুলো পদের মাত্রাই সমান। এরূপ রাশিকে সমমাত্রিক রাশি (homogeneous expression) বলা হয়। সাধারণভাবে বলা যায়ঃ

কোনো বহুপদী রাশির প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, তাকে সমমাত্রিক বহুপদী রাশি বলা হয়। x^2+xy+y^2 রাশিটি x,y চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী রাশি।

$ax^2+hxy+by^2$ রাশিটি x, y চলকের একটি দুই মাত্রার সমমাত্রিক রাশি, যেখানে a, h, b নির্দিষ্ট সংখ্যা বা ধ্রুবক। যদি x, y, a, h, b প্রত্যেককে চলক বিবেচনা করা হয়, তবে রাশিটি এই চলকসমূহের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী হয়।

$2x^2y+3y^2z+9z^2x - 6xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 3)।

$x^4+4x^3y+3x^2y^2 + 4xy^3+y^4$ একটি সমমাত্রিক বহুপদী রাশি যার প্রত্যেক পদের মাত্রা 4।

প্রতিসম রাশি

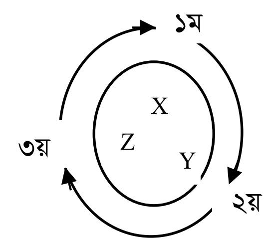
দুই বা ততোধিক চলক সম্বলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম রাশি (Symmetric expression) বলা হয়।

$x+y+z$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি। কারণ, x, y, z চলক তিনটি যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। একইভাবে, a^2+ab+b^2 রাশিটি a, b চলকের এবং $x^2+y^2+z^2 - xy - yz - zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি। কিন্তু $6x^2+5xy+2y^2$ রাশিটি x, y চলকের প্রতিসম নয়, কারণ রাশিটি x ও y এর পরস্পর স্থান বিনিময়ে $6y^2+5xy+2x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

চক্র-ক্রমিক রাশি

তিনটি চলক সম্বলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশিতে প্রথম চলকের স্থলে দ্বিতীয় চলক, দ্বিতীয় চলকের স্থলে তৃতীয় চলক এবং তৃতীয় চলকের স্থলে প্রথম চলক বসালে রাশিটি যদি পরিবর্তিত না হয়, তবে রাশিটিকে ঐ তিন চলকের উল্লিখিত ক্রমে একটি চক্র-ক্রমিক রাশি বা চক্র প্রতিসম রাশি (Cyclic বা Cyclically Symmetric expression) বলা হয়।

পাশের চিত্রের মতো চলকগুলোর স্থান চক্রাকারে পরিবর্তন করা হয় বলেই এরূপ রাশিকে চক্র-ক্রমিক রাশি বলা হয়ে থাকে।



$xy+yz+zx$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি একই থাকে। অনুরূপভাবে, $a^2b+b^2c+c^2a$ রাশিটি a, b ও c চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি এবং রাশিটি প্রতিসমও বটে। আবার, $x^2 -y^2+z^2$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি নয়, কারণ এখানে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি $y^2-z^2+ x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয়, যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

$a^2(b-c) + b^2 (c-a) + c^2 (a-b)$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কিন্তু প্রতিসম নয়। কারণ, রাশিটিতে a এবং b এর স্থান বিনিময় করলে রাশিটি দাঁড়ায়

$b^2(a-c) + a^2 (c-b) + c^2 (b-a) = - \{a^2(b-c) + b^2 (c-a) + c^2 (a-b)\}$

পাওয়া যায়, যা পূর্বের রাশিটি থেকে ভিন্ন।

অতএব, তিনটি চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র-ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়।

দ্রষ্টব্যঃ বর্ণনার সুবিধার্থে x, y চলকের রাশিকে $F(x, y)$ আকারের এবং x, y, z চলকের রাশিকে $F(x, y, z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

শিক্ষার্থীর কাজ	দেখান যে, $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ রাশিটি একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কিন্তু প্রতিসম নয়।

	ইঙ্গিত : $F(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ ধরুন।

চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

চক্র-ক্রমিক বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য তেমন কোনো ধরা-বাঁধা নিয়ম নেই। সাধারণত, রাশিটির পদগুলোকে পুনর্বিন্যাস করে উৎপাদক নির্ণয় করা হয়। অনেক ক্ষেত্রে রাশিটিকে কোনো একটি চলকের বহুপদী ধরে উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে এক বা একাধিক উৎপাদক নির্ণয় করা হয় এবং রাশিটির চক্র-ক্রমিক ও সমমাত্রিক বৈশিষ্ট্য বিবেচনা করে অন্যান্য উৎপাদক নির্ণয় করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, x, y, z চলকের

(i) কোনো চক্র-ক্রমিক বহুপদীর $(x-y)$ একটি উৎপাদক হলে, $(y-z)$ ও $(z-x)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।

(ii) এক মাত্রার ও দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(x+y+z)$ এবং $k(x^2+y^2+z^2) + m(xy+yz+zx)$, যেখানে k ও m ধ্রুবক।

(iii) দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে, চলকগুলোর সকল মানের জন্য তাদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদ দুইটির সহগ পরস্পর সমান হবে।

উদাহরণ 1: $a^2(b-c) + b^2 (c-a) + c^2 (a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রথম পদ্ধতি: $a^2(b-c) + b^2 (c-a) + c^2 (a-b)$

$= a^2(b-c) + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2 = a^2(b-c) - a(b^2-c^2) + bc(b-c)$

$= (b-c) \{a^2 - a(b + c) + bc\} = (b-c)(a^2 - ab - ac + bc)$

$= (b-c) \{ a(a-b) - c(a-b)\} = (b-c)(a-b)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

দ্বিতীয় পদ্ধতি:

প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ ধরে এতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে দেখা যায় যে,

$P(b) = b^2 (b-c) + b^2(c-b) + c^2(b-b) = 0.$

সুতরাং, উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি, সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং যদি অন্য উৎপাদক থাকে, তবে তা ধ্রুবক হবে। অর্থাৎ,

$a^2(b-c) + b^2 (c-a) + c^2 (a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a)$ ....(1)

যেখানে k একটি ধ্রুবক। a, b, c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য। (1) এ $a = 0, b = 1, c = 2$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $(2-0) + 4(0-1) = k(-1)(1-2)(2-0)$

বা, $2-4 = k(-1)(-1)(2)$

বা, $-2 = 2k$

$\Rightarrow k = -1$

$\therefore a^2(b-c) + b^2 (c-a) + c^2 (a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

উদাহরণ 2: $a^3(b-c) + b^3 (c-a) + c^3 (a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রথম পদ্ধতি: $a^3(b-c) + b^3 (c-a) + c^3 (a-b)$

$= a^3(b-c) + b^3c - ab^3 + ac^3 - bc^3 = a^3(b-c) - a(b^3-c^3) + bc(b^2-c^2)$

$= (b-c) \{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\} = (b-c)(a^3 - ab^2 - abc - ac^2 + b^2c + bc^2)$

$= (b-c) \{ -b^2(a-c) - bc(a-c) + a(a^2 - c^2)\}$

$= (b-c)(a-c)(-b^2 - bc + a^2 + ac) = (b-c)(a-c)\{c(a-b) + (a^2 - b^2)\}$

$= (b-c)(a-c)(a-b)(c+a+b) = -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

দ্বিতীয় পদ্ধতি:

প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ বিবেচনা করে এতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে দেখা যায় যে,

$P(b) = b^3 (b-c) + b^3(c-b) + c^3(b-b) = 0.$

সুতরাং, উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি, সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। আবার, প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং $(a-$

$b)\,(b-c)\,(c-a)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। সুতরাং, প্রদত্ত রাশির অপর উৎপাদকটি অবশ্যই চক্র-ক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে। অর্থাৎ, তা $k\,(a+b+c)$ হবে, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$\therefore\ a^3(b-c)+b^3\,(c-a)+c^3\,(a-b)=k\ (a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,(a+b+c)$ ....(1)

a, b, c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য। সুতরাং (1) এ $a=0, b=1, c=2$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$1\,(2-0)+2^3\,(0-1)=k\,(-1)\,(1-2)\,(2-0)\,(0+1+2)$

বা, $2-8=k\,(-1)\,(-1)\,(2)\,(3)$

বা, $-6=6k\quad\Rightarrow k=-1$

(1) এ $k=-1$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$a^3(b-c)+b^3\,(c-a)+c^3\,(a-b)=-\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\ (a+b+c)$

একটি বিশেষ বীজগাণিতিক সূত্র

x, y ও z এর সকল মানের জন্য $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

প্রথম প্রমাণ (সরাসরি বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে)**:**

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y)^3-3xy\,(x+y)+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3+z^3-3xy\,(x+y+z)=(x+y+z)\,\{(x+y)^2-(x+y)\,z+z^2\}-3xy\,(x+y+z)$

$=(x+y+z)\,(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)-3xy\,(x+y+z)$

$=\ (x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

দ্বিতীয় প্রমাণ (সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদীর ধারণা ব্যবহার করে)**:**

$x^3+y^3+z^3-3xyz$ রাশিটিকে x চলকের বহুপদী $P(x)$ ধরে এতে $x=-\,(y+z)$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$P\,\{-(y+z)\}=-\,(y+z)^3+y^3+z^3+3(y+z)yz=-\,(y+z)^3+(y+z)^3=0.$

সুতরাং, $x+y+z$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। যেহেতু $x^3+y^3+z^3-3xyz$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী, সেহেতু রাশিটির অপর উৎপাদক $k\,(x^2+y^2+z^2)+m\,(xy+yz+zx)$ আকারের হবে, যেখানে k ও m ধ্রুবক।

অতএব, সকল x, y ও z এর জন্য $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\,\{k(x^2+y^2+z^2)+m\,(xy+yz+zx)\}$

এখানে প্রথমে $x=1, y=0, z=0$ এবং পরে $x=1, y=1, z=0$ বসিয়ে পাওয়া যায়, $k=1$ এবং $2=2\,(k\times 2+m)\Rightarrow k=1$ এবং $1=2+m\Rightarrow m=-1$

$\therefore\ k=1$ এবং $m=-1.$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

অনুসিদ্ধান্ত ১: $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}\,(x+y+z)\,\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

প্রমাণ: যেহেতু, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ =\frac{1}{2}\,(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$

$$=\ \frac{1}{2}\,\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\}=\frac{1}{2}\,\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

$$\therefore\ x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\,(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=\frac{1}{2}\,(x+y+z)\,\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$

অনুসিদ্ধান্ত ২: যদি $x+y+z=0$ হয়, তবে $x^3+y^3+z^3=3xyz$

অনুসিদ্ধান্ত ৩: যদি $x^3+y^3+z^3=3xyz$ হয়, তবে $x+y+z=0$ অথবা $x=y=z.$

শিক্ষার্থীর কাজ	উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন: 1. $bc\,(b-c)+ca\,(c-a)+ab\,(a-b)$ 2. $a\,(b^2-c^2)+b\,(c^2-a^2)+c\,(a^2-b^2)$ 3. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$ 4. $b^2c^2\,(b-c)+c^2a^2\,(c-a)+a^2b^2\,(a-b)$

সারসংক্ষেপ

- কোনো বহুপদী রাশির প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, তাকে সমমাত্রিক বহুপদী রাশি বলা হয়। যেমনঃ $2x^2y+y^2z+9z^2x-5xyz$ বহুপদীটি x, y, z চলকের তিন মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী রাশি।
- একাধিক চলক সংবলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলক স্থান বিনিময় করলে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম রাশি বলা হয়। $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি। কারণ x, y, z চলক তিনটির যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।
- $2x^2+5xy+6y^2$ রাশিটি x, y চলকের প্রতিসম নয়, কারণ রাশিটিতে x, y এর স্থান বিনিময়ে $2y^2+5xy+6x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয়, যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।
- তিনটি চলক সংবলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশিতে প্রথম চলকের স্থলে দ্বিতীয় চলক, দ্বিতীয় চলকের স্থলে তৃতীয় চলক এবং তৃতীয় চলকের স্থলে প্রথম চলক বসালে রাশিটি যদি পরিবর্তিত না হয়, তবে রাশিটিকে ঐ তিন চলকের চক্র-ক্রমিক রাশি বা চক্র প্রতিসম রাশি বলা হয়। যেমনঃ $x^2y+y^2z+z^2x$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।
- তিনটি চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র-ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়। যেমনঃ $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক, কিন্তু প্রতিসম নয়।
- চক্র-ক্রমিক রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার কোনো নির্দিষ্ট নিয়ম নেই। সাধারণত, রাশিটির পদগুলোকে পুনর্বিন্যাস করে উৎপাদক বের করা হয়।
- একটি বিশেষ বীজগাণিতিক সূত্রঃ x, y ও z এর সকল মানের জন্য
  $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৩

1. নিচের কোন রাশিটি সমমাত্রিক রাশি?
   (ক) $a+b^2+c$ (খ) $ab^2+bc^2+ca^2$ (গ) x^2+2y+y^2 (ঘ) $x^3+5xy+y^2$
2. নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম রাশি?
   (ক) $ab+bc+ca$ (খ) $a^2-b^2+c^2$ (গ) $3x^2+4xy+6y^2$ (ঘ) $2x^2-5xy-z^2$
3. নিচের কোনটি চক্র-ক্রমিক রাশি?
   (ক) $x^2-y^2+z^2$ (খ) $x^2+2xy-y^2$
   (গ) $x^2y+y^2z+z^2x$ (ঘ) $x^2+y^2+z^2-xy-yz+zx$
4. (i) $x^2+xy+2y$ রাশিটি একটি সমমাত্রিক রাশি
   (ii) যদি $x+y+z=0$ হয়, তবে $x^3+y^3+z^3=3xyz$
   (iii) $F(x, y, z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ রাশিটি একটি চক্র-ক্রমিক রাশি
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
5. (i) $a+b+c$ রাশিটি a, b, c চলকের প্রতিসম রাশি
   (ii) $a^2+b^2-c^2$ রাশিটি একটি চক্র-ক্রমিক রাশি
   (iii) যদি $a^3+b^3+c^3=3abc$ হয়, তবে $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

পাঠ ২.৪ মূলদ ভগ্নাংশ ও আংশিক ভগ্নাংশ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূলদ ভগ্নাংশ বলতে কী বোঝায় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- আংশিক ভগ্নাংশ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- মূলদ ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	মূলদ ভগ্নাংশ, আংশিক ভগ্নাংশ

মূলপাঠ

মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fraction)

কোনো ভগ্নাংশের হর একটি বহুপদী রাশি এবং লবও একটি বহুপদী রাশি হলে, সেই ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fraction) বলা হয়। যেমন, $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}$ এবং $\dfrac{x^2+x+1}{(x-a)(x-b)}$ মূলদ ভগ্নাংশ।

দ্রষ্টব্য: দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় ভগ্নাংশকে যোগ করলে অনেক সময় যোগফলের লব চক্র-ক্রমিক রাশি হয়। তখন লবকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে যোগফলকে লঘিষ্ট আকারে পরিণত করতে হয়। এ ধরনের ক্ষেত্রে নিচের উৎপাদকে বিশ্লেষণগুলোর যেকোনোটি বিনা প্রমাণে ব্যবহার করা যায়।

(i) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

(iii) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) = (a-b)(b-c)(c-a)$

(iv) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(v) $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$

(vi) $(ab+bc+ca)(a+b+c)-abc = (a+b)(b+c)(c+a)$

(vii) $(b+c)(c+a)(a+b)+abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$

(viii) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

উদাহরণ 1: সরল করুন: $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{bc}{-(a-b)(c-a)}+\dfrac{ca}{-(b-c)(a-b)}+\dfrac{ab}{-(c-a)(b-c)}$

$$=\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{bc(b-c)+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b^2-c^2)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-c)(bc+a^2-ab-ac)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{(b-c)(c-a)(b-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=1.$$

উদাহরণ 2: সরল করুন: $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^3+y^2+1}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^3+z^2+1}{(z-x)(z-y)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{x^3+x^2+1}{-(x-y)(z-x)}+\dfrac{y^3+y^2+1}{-(y-z)(x-y)}+\dfrac{z^3+z^2+1}{-(z-x)(y-z)}$

$$=\frac{(x^3+x^2+1)(y-z)+(y^3+y^2+1)(z-x)+(z^3+z^2+1)(x-y)}{-(x-y)(y-z)(z-x)}$$

এখানে, লব $= x^3(y-z)+x^2(y-z)+1(y-z)+y^3(z-x)+y^2(z-x)+$
$+1(z-x)+z^3(x-y)+z^2(x-y)+1(x-y)$
$=\{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)\}+\{x^2(y-z)+$
$+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}+(y-z+z-x+x-y)$
$=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)-(x-y)(y-z)(z-x)+0$
$=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z+1)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z+1)}{-(x-y)(y-z)(z-x)}=x+y+z+1$

উদাহরণ 3: সরল করুন, $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{2x}{x^2+a^2}+\dfrac{4x^3}{x^4+a^4}+\dfrac{8x^7}{a^8-x^8}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির তৃতীয় ও চতুর্থ পদের যোগফল

$$=\frac{4x^3}{x^4+a^4}+\frac{8x^7}{a^8-x^8}=\frac{4x^3}{x^4+a^4}+\frac{8x^7}{(x^4+a^4)(a^4-x^4)}$$

$$=\frac{4x^3}{x^4+a^4}(1+\frac{2x^4}{a^4-x^4})=\frac{4x^3}{x^4+a^4}\times\frac{a^4-x^4+2x^4}{a^4-x^4}$$

$$=\frac{4x^3}{x^4+a^4}\times\frac{x^4+a^4}{a^4-x^4}=\frac{4x^3}{a^4-x^4}$$

$\therefore$ দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পদের যোগফল

$$=\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{a^4-x^4}=\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{(x^2+a^2)(a^2-x^2)}$$

$$=\frac{2x}{x^2+a^2}(1+\frac{2x^2}{a^2-x^2})=\frac{2x}{x^2+a^2}\times\frac{a^2-x^2+2x^2}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{2x}{x^2+a^2}\times\frac{x^2+a^2}{a^2-x^2}=\frac{2x}{a^2-x^2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{2x}{a^2-x^2}=\dfrac{a-x+2x}{a^2-x^2}=\dfrac{a+x}{a^2-x^2}=\dfrac{1}{a-x}.$

শিক্ষার্থীর কাজ

সরল করুন:

1. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$
2. $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$
3. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fraction)

$\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}$ ভগ্নাংশটিকে লেখা যায়, $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}$

$$=\frac{2(x-2)+3(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$$

এখানে দেখা যায় যে, প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে দুইটি ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। অর্থাৎ, ভগ্নাংশটিকে দুইটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয়েছে।

যদি কোনো ভগ্নাংশকে দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ (Partial fraction) বলা হয়।

যদি $N(x)$ ও $D(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী হয়, তবে $\dfrac{\text{N(x)}}{\text{D(x)}}$ আকারের কতিপয় সহজ ভগ্নাংশকে কীভাবে আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয় তা নিচে আলোচনা করা হলোঃ

যদি লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট হয়, তবে $\dfrac{\text{N(x)}}{\text{D(x)}}$ আকারের মূলদ ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ (Proper fraction) বলা হয়। যদি লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রার সমান অথবা তা থেকে বড় হয়, তবে ভগ্নাংশটিকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper fraction) বলা হয়। যেমন, $\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-2)(x-3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং

$\dfrac{2x^3}{(x+1)(x+2)}$ ও $\dfrac{6x^2+1}{(x+1)(x+2)}$ উভয়ই অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

উল্লেখ্য যে, অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা সাধারণ নিয়মে ভাগ করে অথবা লবের পদগুলোকে সুবিধাজনকভাবে পুনর্বিন্যাস করে ভগ্নাংশটিকে একটি বহুপদী (ভাগফল) এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায়। যেমন, $\dfrac{x^2+5x+8}{x+2}=(x+3)+\dfrac{2}{x+2}$

বিভিন্ন ধরনের প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশকে কীভাবে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করা হয়, তা নিম্নের উদাহরণগুলোতে দেখানো হলো।

(ক) যখন হরে বাস্তব ও একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো উৎপাদকই পুনরাবৃত্তি হয় না।

উদাহরণ 4: $\dfrac{3x-8}{(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ ধরুন, $\dfrac{3x-8}{(x-2)(x-3)}\equiv\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$.................(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-2)\,(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x-8\equiv A\,(x-3)+B\,(x-2)$ .... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। এখন (2) এর উভয়পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই,

$3\times2-8=A\,(2-3)+B\,(2-2)$

বা, $6-8=A\,(-1)$

বা, $-2=-A$

$\therefore A=2.$

আবার, (2) এর উভয়পক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$3\times3-8=A\,(3-3)+B\,(3-2)$

বা, $9-8=B$ বা, $1=B$ $\therefore B=1$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{3x-8}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

অতএব, প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত হলো।

মন্তব্য: প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ যে যথাযথ হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে:

ডানপক্ষ $=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{2(x-3)+1(x-2)}{(x-2)(x-3)}=\frac{2x-6+x-2}{(x-2)(x-3)}=\frac{3x-8}{(x-2)(x-3)}=$ বামপক্ষ।

উদাহরণ 5: $\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান: ধরুন, $\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$..................(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x–1)\ (x–2)\ (x–3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x+5\equiv A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$ .... (2)

(2) এর উভয়পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য। (2) এর উভয়পক্ষে $x=1$ বসিয়ে পাই,

$1+5=A(1-2)(1-3)$

বা, $6=A(-1)(-2)$

বা, $6=2A\quad\therefore A=3.$

আবার, (2) এর উভয়পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই,

$2+5=B(2-1)(2-3)$

বা, $7=B(1)(-1)$

বা, $7=-B\quad\therefore B=-7.$

আবার, (2) এর উভয়পক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$3+5=C(3-1)(3-2)$

বা, $8=C(2)(1)$

বা, $8=2C\quad\therefore C=4.$

এখন A, B ও C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{4}{x-3}$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

মন্তব্য : আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ যে যথাযথ হয়েছে তা পরীক্ষা করে দেখা যেতে পারে:

ডানপক্ষ $=\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{4}{x-3}$

$$=\frac{3(x-2)(x-3)-7(x-1)(x-3)+4(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{3(x^2-5x+6)-7(x^2-4x+3)+4(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x^2(3-7+4)+x(-15+28-12)+(18-21+8)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$=\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}=$ বামপক্ষ।

(খ) যখন লবের ঘাত হরের ঘাত অপক্ষো বড় বা সমান হয়, তখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাত ছোট করতে হয়।

উদাহরণ 6: $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান: এখানে লবকে হর দ্বারা ভাগ করলে 1 হয়।

সুতরাং ধরুন, $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv 1+\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$..................(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x–1)\ (x–2)\ (x–3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (x–1)\ (x-2)\ (x–3) + A\ (x–2)\ (x–3) + B\ (x-1)\ (x-3) + C\ (x–1)\ (x–2)$ .... (2)

(2) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = 1, 2, 3$ বসিয়ে পাই,

$(1)^3 = A\ (1–2)\ (1–3)$ বা, $1 = A\ (–1)\ (–2)$ বা, $2A = 1 \quad \therefore A = \dfrac{1}{2}$

$(2)^3 = B\ (2–1)\ (2–3)$ বা, $8 = B\ (1)\ (–1)$ বা, $-B = 8 \quad \therefore B = –8$

$(3)^3 = C\ (3–1)\ (3–2)$ বা, $27 = C\ (2)\ (1)$ বা, $2C = 27 \quad \therefore C = \dfrac{27}{2}$

এখন A, B ও C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 1+\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{8}{x-2}+\dfrac{27}{2(x-3)}$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(গ) যখন হরে বাস্তব ও একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং এদের মধ্যে কয়েকটি পুনরাবৃত্তি হয়।

উদাহরণ 7: $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান: ধরুন, $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} \equiv \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}+\dfrac{D}{x-2}$.............................(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x–1)^3\ (x–2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 = A\ (x–1)^2\ (x-2) + B\ (x–1)\ (x–2) + C\ (x-2) + D\ (x–1)^3$ ....(2)

(2) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = 1, 2$ বসিয়ে পাই,

$(1)^2 = C\ (1–2)$ বা, $1 = -C \quad \therefore C = –1$

$(2)^2 = D\ (2–1)^3$ বা, $4 = D \quad \therefore D = 4$

আবার, (2) এ x^3 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + D$ বা, $A + 4 = 0 \quad \therefore A = -4$

আবার, (2) এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$1 = -4A + B - 3D$ বা, $1 = -4\times(-4) + B - 3 \times 4$

বা, $B = 1 - 16 + 12 = –3 \quad \therefore B = -3$

এখন A, B, C ও D এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} = \dfrac{-4}{x-1}-\dfrac{3}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x-1)^3}+\dfrac{4}{x-2}$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(ঘ) যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো পুনরাবৃত্তি হয় না।

উদাহরণ 8: $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান: ধরুন, $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$..(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x+1)\ (x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2x = A\ (x^2+1) + (Bx + C)\ (x+1)$ ....(2)

(2) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই, $2\times(-1) = A\ \{(-1)^2 + 1\}$

বা, $-2 = A\ (1+1)$ বা, $2A = -2$ $\therefore A = -1$

আবার, (2) এ x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B$ বা, $-1 + B = 0$ $\therefore B = 1$

$2 = B+C$ বা, $2 = 1 + C$ বা, $C = 2 - 1$ $\therefore C = 1$

এখন A, B ও C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1} = \frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}$$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

(ঙ) যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং এদের মধ্যে কয়েকটির পুনরাবৃত্তি ঘটে।

উদাহরণ 9: $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন।

সমাধান: ধরুন, $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ ....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $x(x^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 = A\ (x^2+1)^2 + (Bx + C)\ (x^2+1)\ x + (Dx + E)x$

বা, $1 = A\ (x^4+2\ x^2+1) + (Bx + C)\ (x^3+x) + (Dx + E)x$

বা, $1 = Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex$ ....(2)

(2) এ x^4, x^3, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0$ ....(3) $C = 0$ ....(4)

$2A+B+D = 0$ .... (5) $C+E = 0$ ....(6)

$A = 1$ ....(7)

(3) এ $A = 1$ বসিয়ে পাই, $1+B = 0$ $\therefore B = -1$

(5) এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$2\times1 - 1 + D = 0$ $\therefore D = -1$

(6) এ $C = 0$ বসিয়ে পাই, $0+E = 0$ $\therefore E = 0$

এখন (1) এ A, B, C, D ও E এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-x+0}{x^2+1} + \frac{-x+0}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

শিক্ষার্থীর কাজ	আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন: 1. $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ 2. $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$ 3. $\dfrac{x}{(x-1)^2(x-2)}$ 4. $\dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$

সারসংক্ষেপ

- একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন: $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}$ একটি মূলদ ভগ্নাংশ।
- যদি কোনো ভগ্নাংশকে দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর

প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়।

- যদি লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে $\frac{\mathrm{N(x)}}{\mathrm{D(x)}}$ আকারের মূলদ ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে।
- যদি লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রার সমান অথবা তা থেকে বড় হয়, তবে ভগ্নাংশটিকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে।
- বিভিন্ন ধরনের প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৪

1. $\dfrac{x}{(x-2)(x-1)^2}$ মূলদ ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের রূপ নিচের কোনটি?

   (ক) $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-1)^2}$ (খ) $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$

   (গ) $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{(x-1)^2}$ (ঘ) $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Cx+D}{(x-1)^2}$

2. $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$ মূলদ ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশের রূপ নিচের কোনটি?

   (ক) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{(x^2+1)^2}$ (খ) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$

   (গ) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ (ঘ) $\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{(x^2+1)}+\dfrac{Dx-E}{(x^2+1)^2}$

3. (i) যদি লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রার সমান বা এর থেকে বড় হয়, তবে ভগ্নাংশটিকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে।

   (ii) একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলে।

   (iii) যদি হর $D(x)$ এর মাত্রা লব $N(x)$ এর মাত্রার সমান বা এর থেকে বড় হয়, তবে ভগ্নাংশটিকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলা হয়।

   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

4. (i) $\dfrac{x+8}{(x-2)(x-3)}$ ভগ্নাংশটি একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

   (ii) $\dfrac{x^3}{x^2-9}$ ভগ্নাংশটি একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

   (iii) $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$ ভগ্নাংশটি একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. নিচের বহুপদীগুলোর প্রত্যেকটিকে (ক) x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা করুন এবং x চলকের বহুপদী রূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় করুন। (খ) y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা করুন এবং y চলকের বহুপদী রূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় করুন:
   (i) $4x^2-y^2+x+2y-3$ (ii) $6x^2y-5x^4y^4+xy^2-4$
   (iii) $x+8x^2+3x^3+5$ (iv) y^2+7y^3+4y+2
   (v) $3x^3y+xy^2+2x^4y^3-x^2$
2. যদি $P(x)=2x^3-5x^2+7x-8$ হয়, তবে $P(x)$ কে $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করে দেখান যে, ভাগশেষ $P(2)$ এর সমান।
3. যদি $P(x)=36x^2-8x+5$ হয়, তবে $P(x)$ কে $(2x-1)$ দ্বারা ভাগ করে দেখান যে, ভাগশেষ $P\left(\frac{1}{2}\right)$ এর সমান।
4. যদি $F(x)=x^3+6x^2-ax+4$ কে $(x-3)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 10 হয়, তবে a এর মান নির্ণয় করুন।
5. $2x^3+x^2+kx-9$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x+3)$ হলে, k এর মান নির্ণয় করুন।
6. দেখান যে, $F(x)=7x^3-8x^2+6x-36$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x-2)$.
7. $x^4-5x^3+7x^2-a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x-2)$ হলে, দেখান যে, $a=4$.
8. দেখান যে, $4x^4-12x^3+7x^2+3x-2$ এর একটি উৎপাদক $(2x+1)$.
9. দেখান যে, $(x-1)$ রাশিটি $2x^4-5x^2+6x-3$ এবং $4x^3-5x^2+3x-2$ বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক।
10. যদি $P(y)=2y^3-y^2-y-4$ হয়, তবে $P(y)$ কে $(y+3)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে, একে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় করুন।
11. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন:
   (i) $x^3-x^2-10x-8$ (ii) $x^4+3x^3+5x^2+8x+5$
   (iii) $4a^4+12a^3+7a^2-3a-2$ (iv) $x^3-9x^2y+26xy^2-24y^3$
   (v) $a^4+7a^3+17a^2+17a+6$ (vi) x^3+2x^2+2x+1
   (vii) $x(y^2+z^2)+y(z^2+x^2)+z(x^2+y^2)+3xyz$ (viii) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$
   (ix) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ (x) $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$
   (xi) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3-1$ (xii) x^6+18x^3+125
12. যদি $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$ হয়, তবে দেখান যে, $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$
13. $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখান যে, $bc+ca+ab=0$ অথবা $a=b=c$.
14. যদি $\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}\neq 0$ হয়, তবে দেখান যে, $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$
15. যদি $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$ হয়, তবে দেখান যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$
16. সরল করুন,
   (i) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$
   (ii) $\frac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)}+\frac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)}+\frac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$
   (iii) $\frac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

(iv) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

(v) $\dfrac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\dfrac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\dfrac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

(vi) $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$

(vii) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8-1}$

17. আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করুন :

(i) $\dfrac{12x+11}{(x-2)(x+3)}$

(ii) $\dfrac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}$

(iii) $\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)}$

(iv) $\dfrac{x^3}{x^2-9}$

(v) $\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x-3}$

(vi) $\dfrac{8x+46}{(x-3)(x+2)(x+4)}$

(vii) $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+4)}$

(viii) $\dfrac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$

(ix) $\dfrac{x^2+4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$

(x) $\dfrac{x^2}{(x+3)^2(2x+1)}$

18. $F(x) = 8x+4x^2-1+10x^4-5x^3$ চলক x এর একটি বহুপদী।

(ক) বহুপদীটির আদর্শ রূপ লিখুন।

(খ) বহুপদীটির মুখ্যপদ, মাত্রা ও মুখ্যসহগ নির্ণয় করুন।

(গ) $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় করুন।

19. x চলকের একটি বহুপদী $P(x) = 6x^2-ax+5x^3+6$.

(ক) বহুপদীটির মুখ্যপদ, মাত্রা ও ধ্রুবপদ নির্ণয় করুন ।

(খ) যদি $P(x)$ কে $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয়, তবে a এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) $5x^3+6x^2-32x$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

20. x, y, z এর একটি বহুপদী $F(x, y, z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$

(ক) প্রমাণ করুন যে, $F(x, y, z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

(খ) $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন এবং যদি $F(x, y, z) = 0$, $(x+y+z) = 0$ হয়, তবে দেখান যে, $(x^2+y^2+z^2) = (xy+yz+zx)$

(গ) যদি $F(x, y, z) = 0$ হয়, তবে দেখান যে, $x+y+z=0$ অথবা $x=y=z$.

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.১

1.গ 2.ক 3.গ 4.খ 5.ঘ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.২

1.গ 2.খ 3.ঘ 4.গ 5.খ 6.ঘ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৩

1.খ 2.ক 3.গ 4.খ 5.গ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৪

1.খ 2.গ 3.ক 4.খ

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. নিজে করুন 4. 25 5. –18 10. –64

11. (i) $(x-4)(x+1)(x+2)$
    (ii) $(x+1)(x^3+2x^2+3x+5)$
    (iii) $(2a-1)(a+1)(a+2)(2a+1)$
    (iv) $(x-4y)(x-3y)(x-2y)$
    (v) $(a+1)^2(a+2)(a+3)$
    (vi) $(x+1)(x^2+x+1)$
    (vii) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$
    (viii) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
    (ix) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$
    (x) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$
    (xi) $(x-2y-1)(x^2+4y^2-4xy+x-2y+1)$
    (x) $(x^3-3x+5)(x^4+3x^3+4x^2+15x+25)$

16. (i) 1 (ii) $-a^2$ (iii) $a+b+c$ (iv) $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
    (v) 0 (vi) 0 (vii) $\dfrac{1}{x-1}$

17. (i) $\dfrac{7}{x-2}+\dfrac{5}{x+3}$ (ii) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{2}{3x-2}$
    (iii) $1+\dfrac{3}{2(x-2)}-\dfrac{3}{2(x-4)}$ (iv) $x+\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+3}\right)$
    (v) $x+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}$ (vi) $\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}$
    (vii) $\dfrac{1}{5(x-1)}-\dfrac{x-4}{5(x^2+4)}$ (viii) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{2}{x+3}$
    (ix) $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{7x-27}{x^2+4}-\dfrac{2}{x+1}\right)$ (x) $\dfrac{12}{25(x+3)}-\dfrac{9}{5(x+3)^2}+\dfrac{1}{25(2x+1)}$