ইউনিট
১৪

সম্ভাবনা
Probability

ভূমিকা

সম্ভাবনার অভিদানগত অর্থ হল ঘটনীয়। সম্ভাবনা সপ্তদশ শতাব্দী থেকে গাণিতিক তত্ত্বের ভিত্তি হিসাবে ব্যবহৃত হয়ে আসছে। তবে তাত্ত্বিক সম্ভাবনা প্রথম ব্যবহার করেন জিরোলামো কার্ডানো (১৫০১-১৫৭৬) নামক একজন ইতালিও গণিত শাস্ত্রবিদ। আপনারা দৈনন্দিন জীবনে সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন মন্তব্য ব্যবহার করেন, যেমন আজ বৃষ্টি হওয়ায় সম্ভাবনা বেশি বা কম, ব্রাজিল বিশ্বকাপ ২০১৪ তে জয়ের সম্ভাবনা খুব কম ইত্যাদি। অর্থাৎ কোন ঘটনা ঘটার ব্যাপারে অনিশ্চয়তা থাকলেই সম্ভাবনা কথাটি চলে আসে। আর অনিশ্চয়তার মাত্রার উপরই ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা কম বা বেশি নির্ভর করে। এ অধ্যায়ে সম্ভাবনা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন শব্দের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন,
- যুক্তি ভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারবেন,
- তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারবেন,
- সম্ভাবনাটির মাধ্যমে নমুনা ক্ষেত্র নির্ণয় করতে পারবেন,
- সম্ভাবনার বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১৪.১ সম্ভাবনার সাথে জড়িত সংজ্ঞাসমূহ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

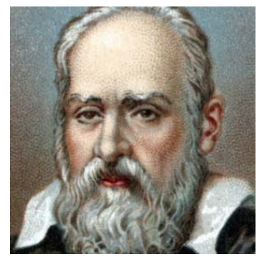
এই পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন শব্দের ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	পরীক্ষণ, চেষ্টা, ফল, ঘটনা, সম্ভাব্য ফল, মৌলিক ঘটনা

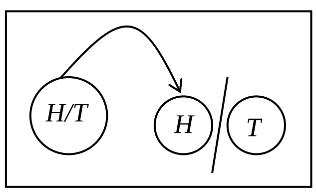
মূলপাঠ

ভূমিকা: ইটালিয়ান গণিতশাস্ত্রবিদ গ্যালিলিও (১৫৬৪-১৬৪২) সর্ব প্রথম সম্ভাবনার একটি সংখ্যাভিত্তিক পরিমাপের উদ্ভাবন করেন। কোন ঘটনা ঘটার ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তা থাকলেই কেবল সম্ভাবনা শব্দটি সামনে আসে তাছাড়া অনিশ্চয়তার উপর নির্ভর করে সম্ভাবনার কম বেশির পরিমাপ। এজন্য সম্ভাবনা বিশদ ভাবে জানতে সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন শব্দ বা সংজ্ঞা জানার প্রয়োজন। এ পাঠে সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন শব্দের সংজ্ঞা আলোচনা করা হলো।


গ্যালিলিও (১৫৬৪-১৬৪২)

সম্ভাবনা তত্ত্ব সম্পর্ক আলোচনায় যাওয়ায় আগে সম্ভাবনা তত্ত্বে ব্যবহৃত কিছু সংজ্ঞার ধারণা থাকার প্রয়োজন। এদিকে লক্ষ্য রেখে নিম্নলিখিত সংজ্ঞাসমূহ বিস্তারিত আলোচনা করা হল:

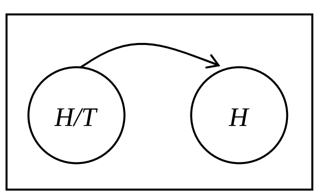
পরীক্ষণ (Experiment): কতকগুলো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোন একটি দৈব পরীক্ষা সম্পন্ন করার জন্য প্রয়োজনীয় কার্যক্রম একাধিক বার বা পুনরাবৃত্তি করা হলে ঐ কার্যক্রমকে পরীক্ষণ (Experiment) বলে। উদাহরণ স্বরূপ বলতে পারি, একটি মুদ্রা একাধিক নিক্ষেপ করা একটি পরীক্ষণ। চিত্রে মুদ্রা পরীক্ষণ দেওয়া হল:



চিত্র: মুদ্রা পরীক্ষণ

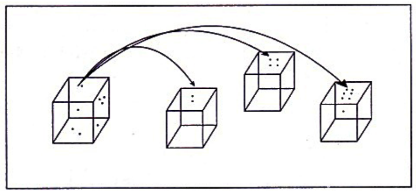
চেষ্টা (Trial): কতকগুলো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোন একটি দৈব পরীক্ষা সম্পন্ন করার জন্য প্রয়োজনীয় কার্যক্রম একবার সম্পন্ন করা হলে ঐ কার্যক্রমকে একটি চেষ্টা বলে। অর্থাৎ, পরীক্ষণ চেষ্টার সম্মিলিত ফল। যেমন, একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় ছক্কাটি যদি একবার নিক্ষেপ করা হয় তবে উহাকে একটি চেষ্টা বলা হয়।

ফল (Out come): পরীক্ষণের বিশেষ অবস্থাকে উক্ত পরীক্ষণের ফল বলে। অর্থাৎ মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণে এক পর্যায়ে দেখা গেল মুদ্রার উপর পিঠ হেড এসেছে তাহলে হেডকে ঐ পরীক্ষণের ফল বলা হয়।



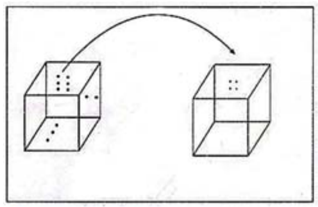
চিত্র: পরীক্ষণের ফল

ঘটনা (Event): কোন পরীক্ষণে প্রাপ্ত একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সম্মিলিত অবস্থাকে ঘটনা বলে। অর্থাৎ পরীক্ষণের একটি অনুকূল ফলাফল কে ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে প্রাপ্ত জোড় সংখ্যার ঘটনা = $\{2, 4, 6\}$



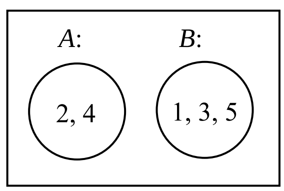
চিত্র: ঘটনা

সমসম্ভাব্য ফল (Equally likely out come): কোন পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলগুলির প্রত্যেকটির সম্ভাবনা যদি সমান হয় তবে পরীক্ষণের ফলগুলিকে সমসম্ভাব্য ফল বলা হবে। উদাহরণ স্বরূপ, যদি একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হয় তবে 1, 2, 3, 4, 5 অথবা 6 যুক্ত যে কোন একটি পিঠ আসার সম্ভাবনা সমসম্ভাবনা যুক্ত। কারণ, যে কোন একটি পিঠ আসার সম্ভাবনা সমান।



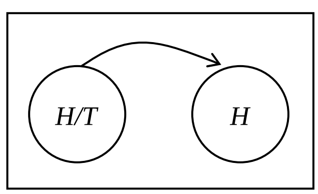
চিত্র: সমসম্ভাব্য ফল

পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা: কোন পরীক্ষণে ঘটনা গুলিকে তখনই পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলা হবে যখস সম্ভাব্য একটি ঘটনা ঘটলে অন্যগুলি ঘটবে না। আবার দুই বা ততোধিক ঘটনার যদি কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে তাহলে উহাদেরকে পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলে। যেমন: A: $\{2, 4\}$, B: $\{1, 3, 5\}$ দুইটি ঘটনা কিন্তু পরস্পর বর্জনশীল, চিত্রে দেখুন:



চিত্র: পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা

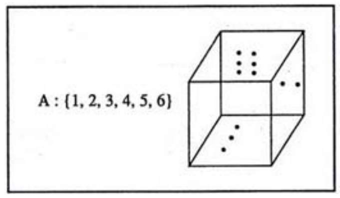
অন্যভাবে বলা যায় একটি মুদ্রা নিক্ষেপে হেড আসলে টেইল আসতে পারে না। তাই এ দুটি ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল। চিত্রে দেখুন:



চিত্র: পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা

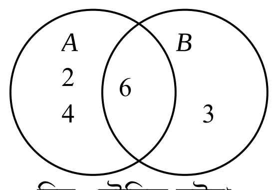
নমুনা ক্ষেত্রে (Sample Space): কোন ফলাফলের পূণরাবৃত্ত গণণায় না ধরে একটি পরীক্ষায় প্রাপ্ত সকল ফরাফলকে ঐ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে নমুনা ক্ষেত্র হবে S: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, এখানে S দ্বারা নমুনা ক্ষেত্রে প্রকাশ করা হয়েছে।

নমুনা বিন্দু (Sample Point): কোন নমুনার ক্ষেত্রে যতগুলো উপাদান বা ফলাফল থাকে তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি নমুনা বিন্দু বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি মুদ্রা 2 বার নিক্ষেপ পরীক্ষায় মোট নমুনা বিন্দু 4 টি। নমুনা ক্ষেত্রে, $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ এখানে, HH, HT, TH, TT এক একটি নমুনা বিন্দু।



চিত্র: নমুনা বিন্দু

মৌলিক ঘটনা (Elementary Event): কোন পরীক্ষণের নমুনা বিন্দুগুলি নিয়ে যে সব ঘটনা সাজানো যায় তাদের মধ্যে যে ঘটনাগুলোকে আরও ক্ষুদ্র ঘটনায় বিশ্লেষণ করা যায় না তাদেরকে মৌলিক ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় 1, 2, 3, 4, 5, 6 ছয়টি নমুনা বিন্দুকে নিয়ে যদি 6 টি ঘটনা দেখা হয় তবে তাদের প্রত্যেকটিকে মৌলিক ঘটনা বলে। চিত্রে দেখুন:

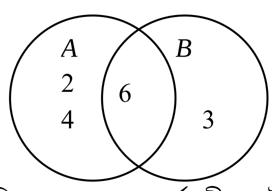


চিত্র: মৌলিক ঘটনা

দৈব পরীক্ষণ (Random Experiment): একটি পরীক্ষণকে তখনই দৈব পরীক্ষণ বলে যখন ইহার সম্ভাব্য সকল ফলাফলগুলি জানা যায়। কিন্তু কোন ফলটি ঘটবে তাহা পরীক্ষণের আগে নিশ্চিত ভাবে বলা যায় না। উদাহরণ: ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষাটি একটি দৈব পরীক্ষণ। কারণ, পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলগুলি 1, 2, 3, 4, 5, 6 বিন্দু কোনটির আগে কোনটি আসবে তা পূর্বে থেকে বলা যায় না।

অনুকুল ঘটনা (Favourable out come): কোন পরীক্ষণে একটি ঘটনার স্বপক্ষের ফলগুলিকে উক্ত ঘটনার অনুকূলে ফলাফল বা অনুকূল ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি মুদ্রা নিক্ষেপে যদি 1 টি হেড বিশিষ্ট পিঠ আসাকে ঘটনা ধরে নেওয়া হয় তবে উক্ত ঘটনার অনুকূল ঘটনা হবে $S : \{H\}$

পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা (Not Mutually Exclusive Enent): যদি দুই বা ততোধিক ঘটনার কোন সাধারণ বিন্দু থাকে তবে ঐ ঘটনাগুলোকে পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ যদি A: $\{2, 4, 6\}$ এবং B: $\{3, 6\}$ দুইটি ঘটনা হয় তবে তা পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা। চিত্রে দেখানো হল:



চিত্র: পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা

পরিপূরক ঘটনা (Complementary Event): কোন নমুনা ক্ষেত্রের একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল বাদ দিয়ে অবশিষ্ট ফলাফলকে ঐ মূল ঘটনার পরিপূরক ঘটনা বলে। যেমন ঘটনা A এর পরিপূরক ঘটনাকে A^C দ্বারা পকাশ করা হয়। এক্ষেত্রে $AU\,A^C = S$

নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event): একটি ঘটনাকে নিশ্চিত ঘটনা তখনই বলা হবে যখন উক্ত ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা 1। উদাহরণস্বরূপ একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষণে হেড অথবা টেইল আসার সম্ভাবনা 1 অথবা সূর্য পূর্ব দিকে উঠে উহার সম্ভাবনা 1 অর্থাৎ উভয় পক্ষে ঘটনা নিশ্চিত ঘটনা।

অনিশ্চিত ঘটনা (Impossible Event): কোন ঘটনা ঘটার আদৌ কোন সম্ভাবনা নেই অর্থাৎ কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা শূন্য হলে তাকে অনিশ্চিত ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করলে দুটি হেড আসার সম্ভাবনা শূন্য। তাই এরূপ ঘটনাকে অনিশ্চিত ঘটনা বলে।

অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা (Dependent Event): যদি দুইটি ঘটনা এরূপ হয় যে, উহাদের কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা অন্য ঘটনাটি ঘটার উপর নির্ভর করে তবে তাহাদের অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা বলে।

স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Event): যদি দুইটি ঘটনা এরূপ হয় যে, উহাদের কোন একটি ঘটনা সম্ভাবনা অন্য ঘটনাটি ঘটার উপর নির্ভর করে না তবে তাকে স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা বলে।

সারসংক্ষেপ

- সম্ভাবনা তত্ত্ব সঠিক ভাবে শিখতে হলে সম্ভাবনা সম্পর্কিত বিভিন্ন শব্দ বা শব্দ সম্ভার সম্পর্কে জ্ঞান লাভ প্রয়োজন। ঘটনা, নমুনাক্ষেত্র, নমুনা বিন্দু, নিশ্চিত ঘটনা, স্বাধীন ঘটনা ইত্যাদি সম্ভাবনা তত্ত্বের জন্য গুরুত্বপূর্ণ শব্দ সম্ভার।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.১

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

1. সর্বপ্রথম সম্ভাবনার একটি সংখ্যাভিত্তিক পরিমাপ উদ্ভাবন করেন–
   (ক) ফরমেট (খ) বর্ণালী (গ) গ্যালিলিও (ঘ) পৈসুঁ
2. একটি মুদ্রা একাধিক বার নিক্ষেপ করা একটি-
   (ক) পরীক্ষণ (খ) চেষ্টা (গ) শর্ত (ঘ) ফল
3. ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে প্রাপ্ত জোড় সংখ্যার ঘটনা নিচের কোনটি–
   (ক) 2, 3 (খ) 2, 4, 6 (গ) 2, 3, 4 (ঘ) 1, 3,5
4. মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষা প্রত্যেকটি ফলাফল আসার সম্ভাবনা-
   (ক) সমান (খ) অসমান (গ) কাল্পনিক (ঘ) অনিশ্চিত।

সত্য/মিথ্যার নির্ণয়

5. পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলাফলগুলি নিশ্চিতভাবে জানা থাকে।
6. পরীক্ষণ চেষ্টার সম্মিলিত ফল।
7. পরীক্ষণের বিশেষ অবস্থাকে উক্ত পরীক্ষণের ফল বলে।

শূন্যস্থান পূরণ

8. পরীক্ষণের একাধিক অনুকূল ফলকে ---------- ।
9. কোন পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলগুলির প্রত্যেকটির সম্ভাবনা যদি সমান থাকে তবে তাকে ---------- ।
10. দুই বা ততোধিক ঘটনার যদি কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে তবে তাকে ---------- ।

পাঠ ১৪.২ যুক্তি ভিত্তিক সম্ভাবনা তত্ত্ব (Theory of Classical Probability)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনার সংজ্ঞা লিখতে পারবেন,
- সম্ভাবনা তত্ত্বের বিভিন্ন পর্যায়ক্রমিক সূত্র ও ধর্ম বর্ণনা দিতে পারবেন,
- সম্ভাবনা বিষয়ক বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সম্ভাবনা, তত্ত্ব

মূলপাঠ

ভূমিকা: কোন ঘটনা ঘটার অনিশ্চিত অবস্থান অর্থাৎ কোন অনিশ্চিত ঘটনা ঘটার মাত্রার পরিমাপ করাই সম্ভাবনা তত্ত্বের মূল কাজ। সম্ভাবনা তত্ত্বের সাহায্যে অত্যন্ত সহজ ভাবে অনিশ্চিত ঘটনাগুলির সম্ভাবনা নির্ণয় করা সম্ভব। মূলত: কোন ঘটনার নিশ্চয়তার মাত্রার গাণিতিক পরিমাপই সম্ভাবনা। এ পাঠে সম্ভাবনা তত্ত্ব সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

সম্ভাবনা তত্ত্ব (Theory of Probability): কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তার পরিমাপকে ঐ ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা বলে। একটি ঘটনার অনুকূল ফলাফল সংখ্যাকে ঐ ঘটনার সম্ভাব্য ফলাফলের সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ ঘটনায় সম্ভাবনা বলে। কোন A ঘটনার অনুকূল সংখ্যা $n(H)$ এবং মোট ঘটনার ফলাফল সংখ্যা $n(S)$ হলে ঘটনাটির সম্ভাবনা হবে।

$$\text{সম্ভাবনা } (A) = \frac{A \text{ ঘটনার অনুকূল সংখ্যা}}{\text{ঘটনা ঘটার মোট ফলাফল সংখ্যা}} = \frac{n(H)}{n(S)}$$

$$\therefore P\,(A) = \frac{n(H)}{n(S)}$$

এখানে মোট ফলাফল সংখ্যা N ও অনুকূল ঘটনার সংখ্যা M হলে A ঘটনা ঘটার সংখ্যা $P\,(A) = \frac{M}{N}$

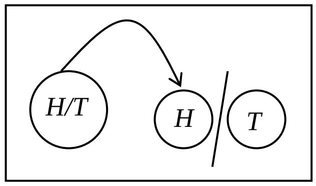
সম্ভাবনার মান সর্বদা ধনাত্মক অর্থাৎ, $P\,(A)$ এর এর মান, $0 \leq P\,(A) \leq +1$, যখন A একটি ঘটনা। একটি ঘটনা ঘটাকে A দ্বারা প্রকাশ করলে, ঘটনা না ঘটাকে $\bar{A}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায় অর্থাৎ $P\,(A) + P(\bar{A}) = 1$

অর্থাৎ কোন ঘটনার অনুকূল ফলাফল ও ঘটনা না ঘটার ফলাফলের যোগফল 1। কোন ঘটনার অনুকূল ফলাফল “0” হলে $P\,(A) = 0$ আবার অনুকূল ফলাফল “1” হলে, $P\,(A) = 1$

উদাহরণ 1: নিরপেক্ষ ভাবে একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হল। নিক্ষেপে হেড আসার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে মুদ্রা নিক্ষেপে হেড আসার সম্ভাব্য ফলাফল সংখ্যা 2 টি অর্থাৎ ফলাফল হেড (H) ও টেল (T)

চিত্রে দেখুন:



চিত্র: মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষা

যেহেতু মুদ্রাটি নিরপেক্ষ ভাবে নিক্ষেপ করা হয়েছে তাই যে কোন ফলাফল আসার সম্ভাবনা সমান। এখানে নমুনা ক্ষেত্র, S: (H, T) অনুকূল ঘটাতে হলে $n(H)$ আসার সম্ভাবনা এবং মোট ঘটনার ঘটার সংখ্যা 2 টি অর্থাৎ $n(S) = 2$ তাই হেড আসার গাণিতিক পরিমাপ-

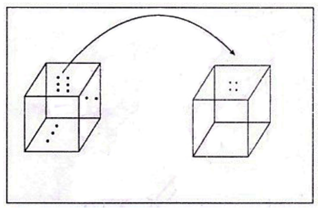
$$P(H) = \frac{\text{হেড আসার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনা ঘটার সংখ্যা}} = \frac{n(H)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ P(H) = \frac{1}{2}$$

হেড আসার সম্ভাবনা $P(H) = \frac{1}{2}$

উদাহরণ 2: নিরপেক্ষ ভাবে একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণে 4 আসার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, একটি ছক্কাকে নিরপেক্ষ ভাবে নিক্ষেপ করা হল:



চিত্র: ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষা

যেহেতু ছক্কাটি নিক্ষেপ করা হয়েছে, তাই ছক্কার 6 টি পিঠের যেকোন একটি পিঠ আসার সম্ভাবনা সমান অর্থাৎ যে কোন একটি ফলাফল আমার সম্ভাবনা 6 ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ, $\frac{1}{6}$ । এখানে নমুনা ক্ষেত্রটি হলো : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

এবং অনুকূল নমুনা বিন্দু আসার সম্ভাবনা- $P(4) = \frac{\text{4 আসার অনুকূল ঘটনা}}{\text{পরীক্ষণের মোট ঘটনার সংখ্যা}} = \frac{1}{6}$

এভাবে ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে চাইলে, তাহলে প্রথমে দেখতে হবে নমুনা ক্ষেত্রে জোড় সংখ্যা কয়টি আছে। এখানে জোড় সংখ্যার অনুকূল ঘটনা তিনটি অর্থাৎ $S = \{2, 4, 6\}$ এবং $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

অতএব জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা: Prob [জোড় সংখ্যা] = $\frac{\text{অনুকূল জোড় সংখ্যা}}{\text{ঘটনার মোট ঘটার সংখ্যা}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

এখানে উদাহরণ, 1 ও 2 এ সম্ভাবনার পরিমাপ পদ্ধতিকে বলা হয় যুক্তি ভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয় পদ্ধতি।

শিক্ষার্থীর কাজ	1. একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় নিম্নলিখিত সম্ভাবনাসমূহ নির্ণয় করুন: (i) একটি হেড (H) আসা (ii) একটি টেল (T) আসা (iii) একটি হেড (H) ও একটি টেল (T) আসা 2. একটি বাক্সে 4 টি লাল, 5 টি সাদা ও 6 টি কালো বল আছে। দৈবভাবে যদি একটি বল নেওয়া হয় তাহলে বলটি- (i) লাল বল হবে, (ii) কালো বল হবে, (iii) সাদা বল হবে তাদের সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। (খ) বল ২টি ভিন্ন রংয়ের হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তা পরিমাপকে ঐ ঘটনার সম্ভাবনা বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.২

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

1. কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তার পরিমাপকে কি বলা হয়?
   (ক) তত্ত্ব (খ) ঘটনা (গ) অনুকূল সংখ্যা (ঘ) নমুনা বিন্দু
2. সম্ভাবনা তত্ত্ব $P(A)$ সমান
   (ক) $\frac{\text{ঘটনার অনুকূল সংখ্যা}}{\text{ঘটনার মোট সংখ্যা}}$ (খ) $\frac{\text{ঘটনার অনুকূল সংখ্যা}+১}{\text{ঘটনার মোট সংখ্যা}}$ (গ) $\frac{\text{অনুকূল তথ্য}}{\text{মোট তথ্য}}$ (ঘ) $\frac{\text{গড়}}{\text{ভেদাঙ্ক}}$

▶ নিচের তথ্য থেকে 3-4 নম্বর প্রশ্নের উত্তর লিখুন
একটি বক্সে নীল বল 12 টি, সাদা বল 16 টি এবং কালো বল 20 টি রয়েছে। দৈব ভাবে একটি বল নেওয়া হল:

3. বলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা কত?
   (ক) $\frac{1}{16}$ (খ) $\frac{1}{12}$ (গ) $\frac{1}{8}$ (ঘ) $\frac{1}{4}$
4. বলটি সাদা না হওয়ায় সম্ভাবনা কত?
   (ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{2}{3}$ (গ) $\frac{1}{16}$ (ঘ) $\frac{1}{48}$

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়

5. সম্ভাবনাকে $P(A)$ দ্বারা প্রকাশ করলে $P(A) = \frac{m}{n}$
6. সম্ভাবনার মান ধনাত্মক।

শূন্যস্থান পূরণ

7. ঘটার সংখ্যাকে A ও না ঘটার সংখ্যাকে $\bar{A}$ দ্বারা প্রকাশ করলে, $P(A) + P(\bar{A}) =$ ————————।
8. ক্ল্যাসিকেল সম্ভাবনা কোন ঘটনার অনুকূল ও মোট ফলাফলের ——————— ।

বাক্য মিলানো:

9. একটি মুদ্রা ২ বার নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র	(ক) ফলাফল 36।
10. ২টি ছক্কা ১ বার নিক্ষেপে নমুনা ক্ষেত্রের মোট	(খ) সম্ভাবনা বলে।
11. কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তা পরিমাপকে ঐ ঘটনা ঘটার	(গ) $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

পাঠ ১৪.৩ তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা (Theoroy of Emparical Probability)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনার সংজ্ঞা লিখতে পারবেন,
- তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সম্ভাবনা , তথ্য ভিত্তিক

মূলপাঠ

ভূমিকা: সম্ভাবনা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সাধারণত ঘটনা ঘটার অনিশ্চয়তার পরিমাপ করা হয়। ফলে ঘটনা ঘটার পরীক্ষণগুলো সমসম্ভাবনা যুক্ত হয়; যা আপনারা পূর্ব পাঠে পড়েছেন। কিন্তু বাস্তবে অনেক ক্ষেত্রে সমসম্ভাবনা যুক্তি পরীক্ষণ ছাড়াও অনেক অসম সম্ভাবনা যুক্তি ফলাফল থাকে। সম্ভাবনার মান নির্ণয় করা হয়। এ পাঠে সমসম্ভাবনা যুক্ত পরীক্ষণ ছাড়া নয় কিন্তু তথ্য ভিত্তিক এক রকম ফলাফল দ্বারা সম্ভাবনা নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করা হবে।
তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়ের জন্য পূর্বের তথ্য যেমন, আবহাওয়ার পূর্বভাসে বলা হচ্ছে আজ বৃষ্টির পরিমান 20% এখানে সমসম্ভাবনা ফলাফল পাওয়া সম্ভব নয় তাই এবার পূর্বের বছর বা অন্যান্য অবস্থায় ফলাফলের উপর নির্ভর করে সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হয় তাই এটাকে তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা বলা হয়।

গাণিতিক শাস্ত্রবিদ ভন মাইকেলের সজ্ঞানুযায়ী কোন একটি চেষ্টা অনেক বার পুনরাবৃত্তি করলে উহার নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা খুব বেশি বা অসীম হলে অর্থাৎ $M \to \infty$ হলে নিম্নলিখিত ভাবে সম্ভাবনা সংজ্ঞায়িত করা যায়।

সম্ভাবনা $\mathrm{P(E)} = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\text{অনুকূল ফলাফল সংখ্যা}}{\text{মোট ফলাফল}} = \dfrac{M}{N}$

অনুকূল সংখ্যাকে M এবং মোট সংখ্যাকে N দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে, $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$ একটি স্থির রাশি যার সীমান্ত মানকে ঐ ঘটনায় তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা বলে। অর্থাৎ পরীক্ষাটির আপেক্ষিক মান এমন একটি সংখ্যার কাছাকাছি যাবে যাতে মুদ্রাটি একবার নিক্ষেপ করলে হেড আসার সম্ভাবনার সমান হবে, একেই তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা বলে।

উদাহরণ 1: মনে করুন, একটি মুদ্রা নিরপেক্ষ ভাবে অসংখ্য বার নিরীক্ষা পরিচালনা করা হয়েছে। মুদ্রাটি একবার নিক্ষেপে P [হেড] $= P$ [টেল] $= 0.50$ । এবার যদি মুদ্রাটিকে 100 নিক্ষেপ করে 40 বার হেড পাওয়া গেল তাহলে $P\,(H) = \frac{40}{100} = 40$, একই নিরীক্ষা 500 বার করলে যদি হেট 240 বার থাকে তাহলে $P\,(H) = \frac{240}{500} = 0.48$ অথবা যদি 2000 বার নিক্ষেপ করলে হেড যদি 990 বার আসে তাহলে $P(H) = \frac{990}{2000}$ অতএব, দেখা যাচ্ছে নিরীক্ষা বারার সাথে সাথে হেড পাওয়ার সম্ভাবনা 50 এর কাছাকাছি পাওয়া যাবে। অতএব তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনার সূত্র ব্যবহার করে ঘটনা ঘটার সম্ভাবনার মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 2: তথ্যভিত্তিক ও যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনার পার্থক্য:
তথ্যভিত্তিক ও যুক্তি ভিত্তিক সম্ভাবনার পার্থক্য গুলি নিম্নে দেওয়া হল:

তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা

১। সম্ভাবনা বলতে কোন ঘটনার অনুকূল ও মোট ফলাফলের অনুপাত এর সীমান্ত মানকে বুঝায়।

২। তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনার ক্ষেত্রে কোন শর্ত প্রয়োজন হয় না।
৩। গাণিতিক প্রক্রিয়া আরোপ উপযোগী নয়।
৪। ঘটনা সংখ্যা অসীম অর্থাৎ $N \to \infty$

যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা

১। যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা বলতে কোন ঘটনার অনুকূল ও মোট ফলাফলের অনুপাত কে বুঝায়।
২। যুক্তি ভিত্তিক সম্ভাবনার ক্ষেত্রে ফলাফল সম সম্ভাবনা যুক্ত হতে হবে।
৩। গাণিতিক প্রক্রিয়া আরোপের উপযোগী।
৪। ঘটনা সংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ N সমান।

উদাহরণ 3: চট্টগ্রাম আবহাওয়া অফিসের রিপোর্ট অনুসারে ২০১৬ সালের জুলাই মাসে ৭ দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে সোমবার- (i) বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কত। (ii) বৃষ্টি না হওয়ার সম্ভাবনা কত।

সমাধানঃ আমরা জানি জুলাই মাস 31 দিনে। যদি জুলাই মাসে ৭ দিন বৃষ্টি হয় তাহলে যে কোন একদিন বৃষ্টি হওয়া সম্ভাবনা,

(i) সম্ভাবনা (বৃষ্টি হওয়া) $=\frac{7}{31} = 0.2258$ অর্থাৎ জুলাই মাসের যেকোন দিন বৃষ্টি হওয়ায় সম্ভাবনা 0.2258,

(ii) সোমবার বৃষ্টি না হওয়ার সম্ভাবনা $(1-0.2258)$ বা 0.7742।

উদাহরণ 4: এস.এস. সি প্রোগ্রামে গণিত বইয়ের কোন একটি অংক সন্ধি অথবা সৌম্যর করতে পারার সম্ভাবনা যথাক্রমে 60% এবং 50%। দৈব ভাবে নির্বাচিত একটি অংক উভয়কে করতে দেওয়া হল অংকটি-

(i) সমাধান না করার সম্ভাবনা
(ii) সমাধান করার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, ঘটনা $A =$ অংকটি সন্ধি সমাধান করতে পারে।
$B =$ অংকটি সৌম্য সমাধান করতে পারে।

$\therefore\ P(A) = 60\% = 0.60$ সন্ধির অংকটি করতে পারার সম্ভাবনা
$P(B) = 50\% = 0.50$ সৌম্যর অংকটি করতে পারার সম্ভাবনা

সন্ধি অংকটি করতে না পারার সম্ভাবনা
$P(A) = 1 - 0.60 = 0.40$

সৌম্যর অংকটি করতে না পারার সম্ভাবনা
$P(B) = 1 - 0.50 = 0.50$

(i) এখানে A ও B ঘটনা দুইটি স্বাধীন তাই সন্ধি ও সৌম্যের উভয়ই অংকটি সমাধান না করতে পারার সম্ভাবনা-
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = 0.40 \times 0.50 = 0.20$

(ii) সন্ধি ও সৌম্যের অংকটি সমাধান করতে পারার সম্ভাবনা $= 1 - 0.2 = 0.80$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.৩

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

1. তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা সংজ্ঞায়নে মোট ঘটনার সংখ্যা-
(ক) N বার (খ) $N \to \infty$ বার (গ) $m < n$ (গ) 0 বার

2. ঢাকা আবহাওয়া অফিসের রিপোর্ট অনুযায়ী জুলাই মাসে ১ম সপ্তাহে বৃষ্টি হয়েছে ৫ দিন। বুধবার বৃষ্টি না হওয়ার সম্ভাবনা কত?
(ক) $\frac{1}{7}$ (খ) $\frac{2}{7}$ (গ) $\frac{5}{7}$ (ঘ) $\frac{1}{5}$

সত্য/মিথ্যা লিখুন

3. তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনার ক্ষেত্রে M/N একটি স্থায়ী রাশি।
4. তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনা একটি আধুনিক সম্ভাবনা নির্ণয় পদ্ধতি।

শূন্যস্থান পূরণ

5. তথ্য ভিত্তিক সম্ভাবনার ক্ষেত্রে-------------- হতে হয় না।
6. পূর্ব তথ্য থেকে পরিসংখ্যান নিয়ে সম্ভাবনা নির্ণয় করাকে বলা হয় -------------- সম্ভাবনা।

পাঠ ১৪.৪ নমুনা ক্ষেত্র এবং সম্ভাবনা ট্রি (Sample Space and Probability Tree)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনা ট্রি সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- সম্ভাবনা ট্রি কিভাবে নির্ণয় করতে হয় তা বলতে পারবেন।
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	

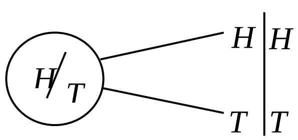
মূলপাঠ

ভূমিকা: আমরা পূর্ব পাঠে নমুনা ক্ষেত্র সম্পর্কে জেনেছি। কোন পরীক্ষায় সম্ভাব্য ফলাফল নিয়ে যে ক্ষেত্র তৈরি হয় তাই নমুনা ক্ষেত্র। যখন পরীক্ষায় নমুনা ক্ষেত্র অনেক বড় হয় সেক্ষেত্রে নমুনা ক্ষেত্র তৈরি করা কষ্ট সাধ্য অথবা ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে তাই সম্ভাবনা ট্রি এর মাধ্যমে এ সমস্যা অনেকটা দূর করা যায়। এ পাঠে আপনারা সম্ভাবনা ট্রির সাহায্যে কিভাবে নমুনাক্ষেত্র তৈরি করা যায় সে সম্পর্কে বিস্তারিত জানবেন।

সম্ভাবনা ট্রি মুলত নমুনা ক্ষেত্র তৈরিতে একটি শাখা-প্রশাখা (Branchumy) পদ্ধতিমাত্র।

মনে করুন, একটি মুদ্রাকে একবার নিক্ষেপ করলে এক্ষেত্রে নমুনা ক্ষেত্র $S: \{H, T\}$

সম্ভাবনা ট্রি পদ্ধতিতে দেখানো যায়,

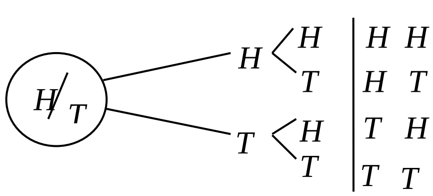


চিত্রঃ মুদ্রা নিক্ষেপ

এখানে মোট ঘটনা ২ টি এবং নমুনা ক্ষেত্র $S: \{H, T\}$

এখানে ১ টি মুদ্রাকে ১টি ধাপ বিবেচনা করা হয়েছে।

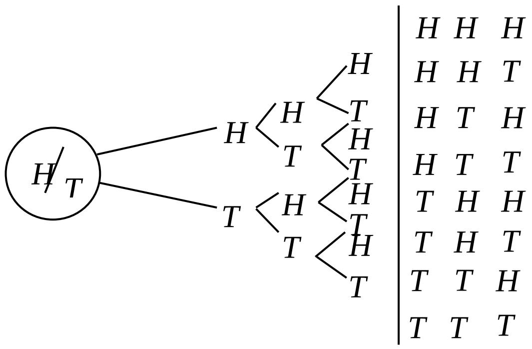
আবার, ২বার একটি মুদ্রা বা একবার ২ টি মুদ্রা নিক্ষেপের সম্ভাবনা ট্রির মাধ্যমে দেখানো হলো:



এখানে মোট ঘটনা ৪ টি এবং নমুনা ক্ষেত্র $S: \{HH, HT, TH, TT\}$

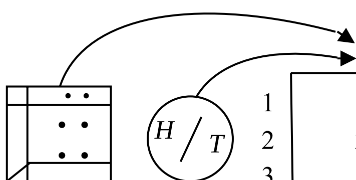
এখানে ২ টি মুদ্রা নিক্ষেপের ২টি ধাপ দেখানো হয়েছে, ১ম ধাপে H, T আসতে পারে আবার ২য় ধাপে H, T আসতে পারে।

অনুরূপভাবে, ৩ টি মুদ্রা একবার বা একটি মুদ্রা ৩ বার নিক্ষেপ করলে সম্ভাবনা ট্রি থেকে প্রাপ্ত মোট ঘটনা ৮ টি:



নমুনা ক্ষেত্র $S: \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$
পর্যায়ক্রমে নিক্ষেপ সংখ্যা বৃদ্ধি করলে নমুনাক্ষেত্র সম্ভাবনা ট্রি থেকে পেতে পারি।

উদাহরণ 1: একটি ছক্কা ও মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে সম্ভাবনা ট্রি পদ্ধতিতে নমুনা ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।
সমাধান: চিত্রানুযায়ী একটি ছক্কা ও একটি মুদ্রাকে একত্রে নিক্ষেপ করা হল। তাহলে সম্ভাবনা ট্রি পদ্ধতিতে –

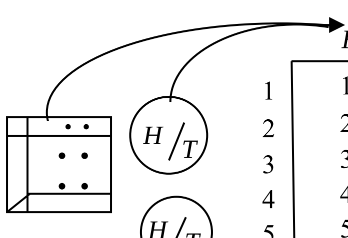


	H	T
1	$1H$	$1T$
2	$2H$	$2T$
3	$3H$	$3T$
4	$4H$	$4T$
5	$5H$	$5T$
6	$6H$	$6T$

নমুনা ক্ষেত্র $S: \{1H, 2H, 3H, 4H, 5H, 6H, 1T, 2T, 3T, 4T, 5T, 6T\}$

উদাহরণ 2: ১টি ছক্কা ও ২টি মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনা সম্ভাবনা ট্রি পদ্ধতিতে ক্ষেত্রটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: ১টি ছক্কা ও ২টি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপে করা হল। তাহলে সম্ভাবনা হবে –

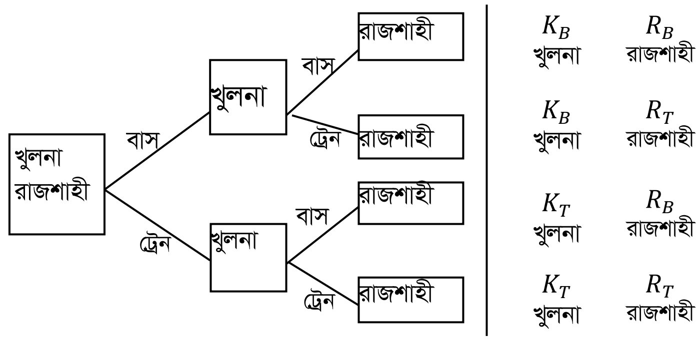


	H	HT	TH	TT
1	$1HH$	$1HT$	$1TH$	$1TT$
2	$2HH$	$2HT$	$2TH$	$2TT$
3	$3HH$	$3HT$	$3TH$	$3TT$
4	$4HH$	$4HT$	$4TH$	$4TT$
5	$5HH$	$5HT$	$5TH$	$5TT$
6	$6HH$	$6HT$	$6TH$	$6TT$

মোট নমুনা ক্ষেত্র 24 টি।

উদাহরণ 3: একজন লোকের ঢাকা থেকে বাসে বা ট্রেনে খুলনা ও রাজশাহীতে যাওয়ার পথ সম্ভাবনা ট্রি পদ্ধতিতে নমুনা ক্ষেত্রটি নির্ণয় করুন।

সমাধান:



মোট নমুনা ক্ষেত্র 4 টি

নমুনা ক্ষেত্র $S:\{K_BR_B,\ K_BR_T,\ K_TR_B,\ K_TR_T\}$

উদাহরণ 4: 7 খানা কার্ডের উপর 1-7 পর্যন্ত সংখ্যা লেখা হল। 2 খানা কার্ড দৈবায়িত ভাবে নির্বাচন করলে

(i) নমুনা ক্ষেত্রটি লিখুন

(ii) কার্ড দুখানার উপর প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের ব্যবধান 3 এর কম হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: 7 খানা কার্ডের উপর 1-7 পর্যন্ত সংখ্যা লিখে 2 খানা কার্ড দৈবায়িত ভাবে গ্রহণ করা হলে মোট নমুনা বিন্দু সংখ্যা হবে-(i) $n(S)={}^7C_2$

$$=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1)\times(5\times4\times3\times2\times1)}=\frac{7\times6}{2}=21$$

নমুনা ক্ষেত্র বের করতে সম্ভাবনাটি ববহার করা হল–

(1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (1, 7)
(2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6) (2, 7)
(3, 4) (3, 5) (3, 6) (3, 7)
(4, 5) (4, 6) (4, 7)
(5, 6) (5, 7)
(6, 7)

(ii) ধরা যাক, কার্ড দুই খানার উপর প্রাপ্ত সংখ্যাদ্বয়ের ব্যবধান 3 এর কম হওয়ার ঘটনা A হলে, অনুকূল ঘটনার বিন্দুর সংখ্যা $n(A)$: {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (5, 7), (6, 7)}

অর্থাৎ $n(A) = 11$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $P(A)=\dfrac{\text{অনুকূল ঘটনা বিন্দুর সংখ্যা}}{\text{মোট ঘটনা সংখ্যা}}=\dfrac{11}{21}$

সারসংক্ষেপ

- কোন পরীক্ষায় সম্ভাব্য ফলাফল নিয়ে যে ক্ষেত্র তৈরি হয় তাই নমুনা ক্ষেত্র।
- সম্ভাবনা ট্রি মুলত নমুনা ক্ষেত্র তৈরিতে একটি শাখা-প্রশাখা (Branchumy) পদ্ধতিমাত্র।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.৪

▶ নিচের তথ্যের আলোকে (1-4) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন:

একটি থলিতে লাল বল 15 টি, সাদা বল 12 টি এবং কালো বল 18 টি আছে। দৈবভাবে 1টি বল নেওয়া হল:

1. বলটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{6}$ (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{5}{6}$

2.বলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{2}{5}$ (খ) $\frac{1}{5}$ (গ) $\frac{3}{5}$ (ঘ) $\frac{5}{6}$

3.বলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{13}{15}$ (খ) $\frac{9}{17}$ (গ) $\frac{11}{15}$ (ঘ) $\frac{7}{15}$

4. বলটি লাল না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{3}{5}$ (খ) $\frac{1}{5}$ (গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{4}{9}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

রচনামূলক প্রশ্ন

1. সম্ভাবনার সংজ্ঞা লিখুন। নিশ্চিত ঘটনা ও অনিশ্চিত ঘটনার পার্থক্য সহ সংজ্ঞা লিখুন।
2. তথ্যভিত্তিক ও যুক্তি ভিত্তিক সম্ভাবনার পার্থক্য লিখুন।
3. সম্ভাবনা ট্রি ব্যাখা করুন। চারটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপে সম্ভাবনাটি থেকে নমুনা ক্ষেত্রে নির্ণয় করুন।
4. একটি মুদ্রা 4 বার বা 4টি মুদ্রা একবার নিক্ষেপে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় করুন:
   (ক) 4টি হেড আসার সম্ভাবনা কত?
   (খ) বড় জোর 2টি হেড এবং 2টি টেল আসার সম্ভাবনা কত?
   (গ) সবগুলো হেড না আসার সম্ভাবনা কত?
5. একটি বাক্সে 15 টি বল আছে, তন্মধ্যে 4 টি লাল, 5 টি কালো এবং 6 টি সাদা বল আছে। নির্বিচারে 3 টি বল বাক্স হতে তোলা হল:
   (ক) তিনটি লাল হবে;
   (খ) 2 টি সাদা হবে;
   (গ) সবগুলো একই রং এর বল হবে;
   (ঘ) কমপক্ষে 2 টি কালো হবে অথবা
   (ঙ) প্রত্যেকটি ভিন্ন ভিন্ন রং এর বল হবে তার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।
6. 52 খানা তাসের একটি প্যাকেট হাতে 2 টি তাস নির্বাচন করা হল। একটি তাসও টেক্কা না পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।
7. 2 টি মুদ্রা ও 1 টি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনাক্ষেত্রটি লিখুন। নিম্নের ক্ষেত্রে সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।
   (ক) দুইটি হেড ও জোড় সংখ্যা
   (খ) দুইটি টেল ও ছক্কার তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা
   (গ) একটি হেড, একটি টেল ও জোড় সংখ্যা

8. একজন লোকের ঢাকা থেকে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{9}$, বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$, প্লেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{9}$। লোকটির রাজশাহী হয়ে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$ । সম্ভাবনা ট্রি ব্যবহার করে কোনটি রাজশাহী ট্রেনে এবং খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.১

1. গ 2. ক 3. খ 4. ক 5. মি. 6. স
7. স 8. ঘটনা 9. সমসম্ভাব্য 10. পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.২

1. খ 2. ক 3. ঘ 4. খ 5. স 6. স 7. ভাগফল 8. 1

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.৩

1. ক 2. খ 3.স 4.স

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.৪

1. খ 2. ক 3. গ 4. গ