ইউনিট
১৩

ত্রিকোণমিতি
Trigonometry

ভূমিকা

ত্রিকোণমিতি শব্দটি এসেছে দুইটি গ্রীক শব্দ Trigonon এবং metron থেকে। Trigonon শব্দের অর্থ তিনটি কোণ যা ত্রিভুজ এবং metron শব্দের অর্থ পরিমাপ। অর্থাৎ ত্রিকোণমিতি অর্থ ত্রিভুজের পরিমাপ। গণিতের যে শাখায় তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ এবং তদসম্পর্কীয় বিষয় আলোচিত হয় তাকে ত্রিকোণমিতি বলা হয়। অতি প্রাচীন কালে ত্রিকোণমিতির পরিধি শুধুমাত্র ত্রিভুজের কোণ, বাহু ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ ছিল। বর্তমানে গণিতের যে কোন শাখায় শিক্ষালাভের জন্য ত্রিকোণমিতির জ্ঞান একান্ত অপরিহার্য। ত্রিকোণমিতি দুইটি শাখায় বিভক্ত। সমতল ত্রিকোণমিতি (Plane Trigonometry) এবং গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (Spherical Trigonometry)। আমাদের আলোচনা শুধুমাত্র সমতল ত্রিকোণমিতিতে সীমাবদ্ধ থাকবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে বলতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক কোণের বিভিন্ন পরিমাপ করতে পারবেন,
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১৩.১ জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

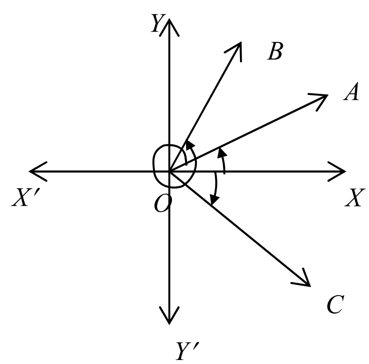
- জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ বর্ণনা করতে পারবেন,
- ধনাত্মক কোণ ও ঋণাত্মক কোণের সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- চৌকণ বা চতুর্ভাগ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে থাকবে তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	জ্যামিতিক কোণ, ত্রিকোণমিতিক কোণ, ধনাত্মক, ঋণাত্মক, চৌকণ বা চতুর্ভাগ

মূলপাঠ

জ্যামিতিক কোণ: জ্যামিতিতে সাধারণত দুইটি রশ্মির মিলনে কোণ উৎপন্ন হয় এবং কোণের পরিমাণ 0^o হতে 360^o এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে এবং তা সবসময়ই ধনাত্মক হয়, কখনও ঋণাত্মক হয় না।

ত্রিকোণমিতিক কোণ: ত্রিকোণমিতিতে একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ আবর্তিত হয়, তাই ঐ রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাপ।

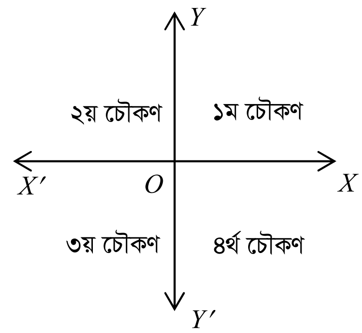


মনে করুন XOX' এবং YOY' দুইটি স্থির রশ্মি লম্বভাবে অবস্থিত। এখন যদি একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণন শুরু করে OA অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে ত্রিকোণমিতিক কোণের সজ্ঞানুসারে ঘূর্ণায়মান রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাণ $\angle XOA$। এখন যদি এই রশ্মিটি একই দিকে ঘুরতে ঘুরতে আদি অবস্থান OX পার হয়ে OB অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে সৃষ্ট কোণের পরিমাণ হবে $\angle XOB$ এবং তা চার সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। আবার যদি ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে আদি অবস্থান হতে সেদিকে ঘুরে OC অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে সৃষ্ট কোণের পরিমাণ হবে $\angle XOC$। নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণ চিহ্নিত করার পর ঘূর্ণায়মান রেখাটি যে প্রান্তে অবস্থান করে সেই প্রান্ত অবস্থানকে প্রান্তিক রেখা বা ব্যাসার্ধ ভেক্টর (Radius Vector) বলা হয়। ত্রিকোণমিতিক কোণগুলোকে সাধারণত A, B, C, α (আলফা), β (বিটা), γ (গামা), θ (থিটা) ইত্যাদি অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ:

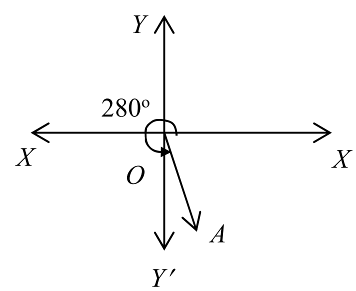
উপরোক্ত আলোচনায় আমরা OA রশ্মি এবং OB রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘূরে তার বিপরীত দিকে ঘূরতে দেখেছি এবং OC রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘূরে সেদিকে ঘূরতে দেখেছি। সুতরাং কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (Anticlockwise) ঘূরালে উৎপন্ন কোণকে ধনাত্মক (Positive) কোণ বলা হয় এবং কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে (Clockwise) ঘূরালে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক (Negative) কোণ বলা হয়। সুতরাং ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাণ 0^0 হতে শুরু করে যে কোন মানের হতে পারে এবং তা ধনাত্মক ও ঋণাত্মক যেকোন মানের হতে পারে। তবে জ্যামিতিক কোণের পরিমাপ শুধু ধনাত্মক, কখনও ঋণাত্মক হয় না। ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ জানতে হলে চৌকণ বা চতুর্ভাগ সম্পর্কে জানতে হবে।

চৌকণ বা চতুর্ভাগ (Quadrant): চিত্র লক্ষ করলে দেখা যাবে, XOX' এবং YOY' সরলরেখা দুইটি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে সমতল ক্ষেত্রটিকে চারটি অংশে বিভক্ত করেছে। এই চারটি অংশের প্রত্যেকটিকে চৌকণ বা চতুর্ভাগ (Quadrant) বলে। চিত্রে XOY, YOX', $X'OY'$ ও $Y'OX$ অংশকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চৌকণ বলা হয়। ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাণ যাই হোক না কেন তা যেকোন একটি চৌকণের মধ্যে অবস্থান করবে। প্রতি চৌকণে কোণের পরিমাণ 90^0 ।

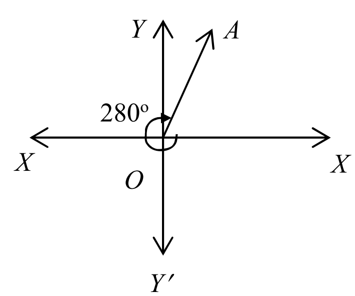


তাই, উপরের আলোচনা থেকে বলা যায় একটি ধনাত্মক কোণের পরিমাপ 90° অপেক্ষা কম হলে ১ম চতুর্ভাগে থাকবে। আবার 360° ও 450° মধ্যে থাকলেও কোণটি ১ম চতুর্ভাগেই থাকবে। একইভাবে কোনো ধনাত্মক কোণের মান 90° থেকে 180° এর মধ্যে থাকলে ২য় চতুর্ভাগে, 180° ও 270° মধ্যে থাকলে কোণটি ৩য় চতুর্ভাগে, এবং 270° ও 360° এর মধ্যে থাকলে ৪র্থ চতুর্ভাগে থাকবে। অনুরূপভাবে একটি ঋণাত্মক কোণের পরিমাপ -90° থেকে 0 মধ্যে থাকলে ৪র্থ চতুর্ভাগে, -180° থেকে -90° এর মধ্যে ৩য় চতুর্ভাগে, -270° থেকে -180° এর মধ্যে ২য় চতুর্ভাগে ও -360° থেকে -270° এর মধ্যে থাকলে ১ম চতুর্ভাগে থাকবে। 0° ও 360° বা এর যেকোনো পূর্ণসাংখ্যিক গুণিতক XOX' রেখার এবং 90° ও 270° এদের যেকোনো পূর্ণসাংখ্যিক গুণিতক YOY' রেখার উপর অবস্থান করবে।
এখন আসুন আমরা উদাহরণের মাধ্যমে বুঝতে চেষ্টা করি ত্রিকোণমিতিক কোণ কিভাবে কোন্ চৌকণে অবস্থান করে।

উদাহরণ 1: 280° কোণ কোন্ চৌকণে অবস্থান করে?
সমাধান: 280° কোণটি চতুর্থ চৌকণে অবস্থান করবে।
যেহেতু $280^\circ = 3\times90+10^\circ$
ব্যাখ্যা: যেহেতু 280° কোণটি ধনাত্মক। অতএব কোণটি উৎপন্ন হবে কোণ সৃষ্টিকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনের ফলে। এখানে ঘূর্ণায়মান রেখাটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরতে ঘুরতে তিনটি চৌকণে 270° অতিক্রম করে এবং অবশিষ্ট 10 ঘুরে ৪র্থ চৌকণে OA অবস্থানে থাকবে। সুতরাং 280° কোণটি ৪র্থ চৌকণে অবস্থান করবে।



উদাহরণ 2: -280° কোণটি কোন্ চৌকণে অবস্থান করবে।
সমাধান: যেহেতু $-280^\circ = -(3\times90^\circ+10^\circ)$
$\therefore$ -280° কোণটি ১ম চৌকণে অবস্থান করবে।
ব্যাখ্যা: যেহেতু -280° কোনটি ঋণাত্মক। অতএব কোনটি উৎপন্ন হবে কোণ সৃষ্টিকারী ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘূর্ণনের ফলে। এখানে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে সেদিকে ঘুরতে ঘুরতে তিনটি চৌকণে 270° অতিক্রম করার পর অবশিষ্ট 10° অতিক্রম করে ১ম চৌকণে OA অবস্থানে থাকবে। সুতরাং -280° কোণটি ১ম চৌকণে অবস্থান করবে।



সারসংক্ষেপ

- জ্যামিতিতে সাধারণত দুইটি রশ্মির মিলনে কোণ উৎপন্ন হয় এবং কোণের পরিমাণ 0^o হতে 360^o এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে এবং তা সবসময়ই ধনাত্মক হয়, কখনও ঋণাত্মক হয় না।
- ত্রিকোণমিতিতে একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমাণ আবর্তিত হয়, তাই ঐ রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাপ।

> ✪ কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূরালে উৎপন্ন কোণকে ধনাত্মক কোণ বলা হয় এবং কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘূরালে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক কোণ বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.১

1. নিম্নে উল্লিখিত কোণগুলো কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে নির্ণয় করুন।
   (i) 440^{o} (ii) 530^{o} (iii) -515^{o} (iv) 740^{o}

পাঠ ১৩.২ কোণ পরিমাপের একক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি–

- কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতিগুলো বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ষাটমূলক, শতমূলক, বৃত্তীয়, ডিগ্রি, গ্রেড, রেডিয়ান

মূলপাঠ

ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ

সংজ্ঞানুসারে সমকোণের পরিমাণ হল স্থির বা ধ্রুব (Constant)। সমকোণকে মূল একক ধরে ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের জন্য তিন প্রকার পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতিগুলো হল–

(i) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal System)
(ii) শতমূলক পদ্ধতি (Centesimal System)
(iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

(i) ষাটমূলক পদ্ধতি: ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে বা 90° কোণকে সমান 90 ভাগে ভাগ করে প্রতিটি ভাগকে এক ডিগ্রী বলা হয়।

এক ডিগ্রিকে সমান 60 ভাগ করে প্রতিভাগকে এক মিনিট ($1'$=One Minute) এবং এক মিনিটকে সমান 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক সেকেন্ড ($1''$= One Second) ধরা হয়।

প্রতিটি ডিগ্রিকে 60 মিনিটে এবং প্রতিটি মিনিটকে 60 সেকেন্ডে ভাগ করা হয়। অর্থাৎ

1 সমকোণ = 90° (নব্বই ডিগ্রী)
1° = $60'$ (ষাট মিনিট)
$1'$ = $60''$ (ষাট সেকেন্ড)

ক্ষুদ্রতম ভাগগুলো 60 বলে এর নামকরণ হয়েছে ষাটমূলক। কোণ পরিমাপের এই পদ্ধতিকে সাধারণ (Common) বা বৃটিশ (British) পদ্ধতিও বলা হয়।

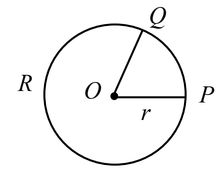
(ii) শতমূলক পদ্ধতি: এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 100 ভাগে ভাগ করে প্রতিটি ভাগকে গ্রেড বলা হয়। প্রতিটি গ্রেডকে এক শতমূলক মিনিট এবং প্রতিটি এক শতমূলক মিনিটকে একশতমূলক সেকেন্ড ভাগ করা হয়। অর্থাৎ

1 সমকোণ = 100^{g} (একশত গ্রেড)
1 = 100 (একশত শতমূলক মিনিট)
1 = 100 (একশত শতমূলক সেকেন্ড)

ক্ষুদ্রতম ভাগগুলো 100 বলে এর নামকরণ হয়েছে শতমূলক। এই পদ্ধতিকে ফরাসি পদ্ধতিও বলে।

(iii) বৃত্তীয় পদ্ধতি: এই পদ্ধতিতে মূল একক হল রেডিয়ান (Radian)। একে 1^c চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় এক রেডিয়ান কোণ। রেডিয়ান একটি স্থির (Constant) কোণ।

চিত্রে PQR বৃত্তের কেন্দ্র O, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OP = r$ এবং ব্যাসার্ধের সমান চাপ PQ। PQ চাপ কেন্দ্র O তে $\angle POQ$ উৎপন্ন করেছে। উক্ত কোণের পরিমাণই এক রেডিয়ান। অর্থাৎ $\angle POQ$ এক রেডিয়ান।



সারসংক্ষেপ

- ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। সমকোণকে বা 90° কোণকে সমান 90 ভাগে ভাগ করে প্রতিটি ভাগকে এক ডিগ্রী বলা হয়।
- এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 100 ভাগে ভাগ করে প্রতিটি ভাগকে গ্রেড বলা হয়।
- এই পদ্ধতিতে মূল একক হল রেডিয়ান (Radian)। একে 1^c চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- যে কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান বৃত্তচাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় এক রেডিয়ান কোণ। রেডিয়ান একটি স্থির (Constant) কোণ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.২

1. কোণ পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতিগুলো বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করুন।

পাঠ ১৩.৩ কোণ পরিমাপের বিভিন্ন প্রতিজ্ঞাসমূহ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোণের ডিগ্রী পরিমাপ ও রেডিয়ান পরিমাপের সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত প্রতিজ্ঞাসমূহ বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

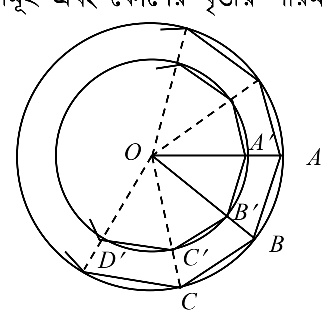
মুখ্য শব্দ	বৃত্ত, পরিধি, ব্যাস অনুপাত

মূলপাঠ

কোণের ডিগ্রী পরিমাপ ও রেডিয়ান পরিমাপের সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত প্রতিজ্ঞাসমূহ এবং কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ সম্পর্কে জানা প্রয়োজন।

প্রতিজ্ঞা ১: যে কোন দুইটি বৃত্তের স্ব-স্ব পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সমান।

প্রমাণ: মনে করুন O দুইটি বৃত্তের সাধারণ কেন্দ্র। বড় বৃত্তটিতে n সংখ্যক সমান বাহু বিশিষ্ট $ABCD$ ... বহুভুজ অংকন করুন। O, A; O, B; O, C; O, D; .... যোগ করুন। এই রেখাগুলি ছোট বৃত্তটিকে A', B', C', D', ...বিন্দুতে ছেদ করে। এখন



A',B'; B', C'; C', D'; ..... যোগ করুন। তাহলে $A'B'C'D'$ .... ক্ষেত্রটি ছোট বৃত্তে অন্তর্লিখিত n-সংখ্যক সমান বাহু বিশিষ্ট বহুভুজ হবে।

এখন $OA = OB$ (বড় বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ)

এবং $OA' = OB'$ (ছোট বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ)

সুতরাং $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'}$,

অতএব, $\angle AOB$, ΔOAB এবং $\Delta\ OA'B'$ এর সাধারণ কোণ

অতএব, ΔOAB এবং $\Delta OA'B'$ সদৃশকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{OA}{OA'}$

বা, $\dfrac{n.AB}{n.A'B'} = \dfrac{OA}{OA'}$

বা, $\dfrac{n.AB}{OA} = \dfrac{n.A'B'}{OA'}$

অর্থাৎ $\dfrac{\text{বড় বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \dfrac{\text{ছোট বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$ ....(i)

এখন বহুভুজের বাহু সংখ্যা n যত বেশী হবে $AB, A'B'$......... এবং অন্যান্য বাহুগুলির দৈর্ঘ্য তত ছোট হবে। যদি n এর মান অসীম হয় তাহলে উভয় বহুভুজে বাহুগুলি বৃত্তের পরিধির সাথে প্রায় মিশে থাকে।

সুতরাং (i) নং সমীকরণ নিম্নরূপ আকার ধারণ করবে,

$$\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$$

বা, $\dfrac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাস}} = \dfrac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাস}}$ .... (ii)

এভাবে যে কোন সংলগ্ন বৃত্ত অঙ্কন করে (ii) নং সমীকরণের সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

সুতরাং যে কোন দুইটি বৃত্তের স্ব-স্ব পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সমান।

মন্তব্য ১: যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সবসময় সমান ও একই ধ্রুব সংখ্যা।

$\dfrac{\text{যে কোনো বৃত্তের পরিধি}}{\text{সেই বৃত্তের ব্যাস}} = \text{ধ্রুব সংখ্যা}$ .... (iii)

এ ধ্রুব সংখ্যাটিকে গ্রিক বর্ণ π (পাই) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। π একটি অমূলদ সংখ্যা এবং দশমিকে প্রকাশ করলে এটি একটি অন্তহীন অপৌনঃপুনিক সংখ্যা ($\pi = 3{\cdot}1415926535897932$........) ।

মন্তব্য ২: সাধারণত চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান $\pi = 3{\cdot}1416$ ব্যবহার করা হয়। কম্পিউটারের সাহায্যে π এর মান সহস্র লক্ষাধিক দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণীত হয়েছে। যেহেতু π এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয় সেহেতু উত্তরও হবে আসন্ন। তাই উত্তরের পাশে 'প্রায়' লেখা অবশ্য কর্তব্য। পরবর্তী সমস্ত কাজে অন্য কোনোরূপ বলা না থাকলে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান $3{\cdot}1416$ ব্যবহার করা হবে।

অসুসিদ্ধান্তঃ বৃত্তের ব্যাসার্ধ 'r' হলে, পরিধি হবে $2\pi r$ ।

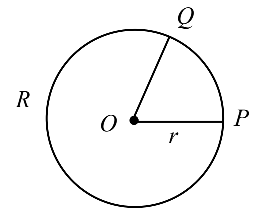
কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r এবং ব্যাসকে d ধরা হলে (iii) নং সূত্র অনুসারে, $\dfrac{\text{পরিধি}}{d} = \pi$

বা, পরিধি $= \pi d = \pi \times 2r = 2\pi r$

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

প্রতিজ্ঞা ২: বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

প্রমাণ: মনে করুন, PQR বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OP । Q বৃত্তের উপর অন্য একটি বিন্দু। ফলে QP বৃত্তের একটি চাপ এবং $\angle POQ$ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ।



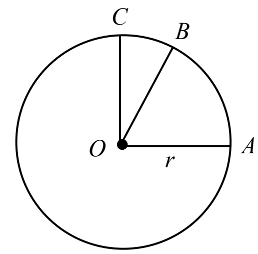
তাহলে, কেন্দ্রস্থ $\angle POQ$, চাপ QP এর সমানুপাতিক হবে।

অর্থাৎ, কেন্দ্রস্থ $\angle POQ \propto$ চাপ QP ।

প্রতিজ্ঞা ৩: রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ।

প্রমাণ: মনে করুন O কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ r। এখন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান করে বৃত্তের পরিধি হতে AB বৃত্তচাপ অঙ্কন করুন। OA, OB যোগ করুন। তাহলে সজ্ঞানুসারে $\angle AOB = 1^c$ । এখন OA সরলরেখার উপর OC লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে $\angle AOC =$ এক সমকোণ এবং বৃত্তচাপ $AC =$ বৃত্তের পরিধির এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$

অমরা জানি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।



অতএব $\dfrac{\angle AOB}{\text{বৃত্তচাপ } AB} = \dfrac{\angle AOC}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

বা, $\dfrac{\angle AOB}{\angle AOC} = \dfrac{\text{বৃত্তচাপ } AB}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

বা, $\dfrac{1^c}{\text{এক সমকোণ}} = \dfrac{r}{\frac{\pi r}{2}}$

বা, $1^c = \dfrac{2}{\pi} \times$ এক সমকোণ

যেহেতু π এবং সমকোণের মান ধ্রুব, অতএব রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।

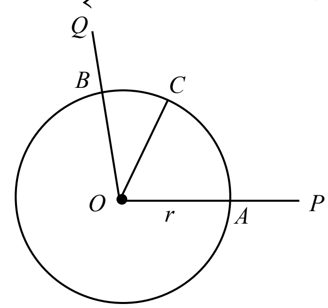
কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ

বৃত্তীয় একক অর্থাৎ রেডিয়ান এককে কোনো কোণের পরিমাপ তার বৃত্তীয় পরিমাপ (Circular Measure) বলা হয়।

প্রতিজ্ঞা ৪: বৃত্তের যে কোন চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান।

প্রমাণ: মনে করুন, $\angle POQ$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। O কে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অংকন করুন যা OP এবং OQ কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। এখন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি বৃত্তচাপ AC নিন। তাহলে, চাপ $AC =$ ব্যাসার্ধ OA এবং $\angle AOC =$ এক রেডিয়ান।

আমরা জানি, একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থ কোণ সেই বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।



সুতরাং $\dfrac{\angle AOB}{\text{চাপ } AB} = \dfrac{\angle AOC}{\text{চাপ } AC}$

বা, $\dfrac{\angle AOB}{\angle AOC} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AC}$

বা, $\dfrac{\angle AOB}{\text{এক রেডিয়ান}} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{r}$

বা, $\angle AOB = \dfrac{\text{চাপ } AB}{r} \times$ এক রেডিয়ান

বা, $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{s}{r}$ রেডিয়ান, যেখানে চাপ $AB = s$

সুতরাং বৃত্তের যে কোন চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান।

এখন $\angle AOB$ এর বৃত্তীয় পরিমাপ θ রেডিয়ান হলে তাকে $\angle AOB = \theta$ রেডিয়ান আকারে লিখা যায়।

তাহলে $\angle AOB = \frac{s}{r}$ রেডিয়ান

বা, θ রেডিয়ান $= \frac{s}{r}$ রেডিয়ান

বা, $\theta = \frac{s}{r}$

$\therefore s = r\theta$

সারসংক্ষেপ

- যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সবসময় সমান ও একই ধ্রুব সংখ্যা। এ ধ্রুব সংখ্যাটিকে গ্রিক বর্ণ π (পাই) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- সাধারণত চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান $\pi = 3{\cdot}1416$ ব্যবহার করা হয়।
- বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।
- রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ।
- বৃত্তের যে কোন চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান।
- বৃত্তের যে কোন চাপ s, তার ব্যাসার্ধ এবং r ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণ θ হলে $s = r\theta$ ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.৩

1. প্রমাণ করুন, রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।
2. প্রমাণ করুন $\theta = \frac{s}{r}$,যেখানে s = বৃত্তের চাপ এবং r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

পাঠ ১৩.৪ কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- সম্পর্কগুলোর সাহায্যে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মূলপাঠ

কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক:

(ক) ষাটমূলক ও শতমূলক এককের মধ্যে সম্পর্ক

ষাটমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ = 90° এবং শতমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ = 100^g

সুতরাং $90^\circ = 100^g \quad \Rightarrow 90^\circ = 100^g \quad \Rightarrow 9^\circ = 10^g$

$\therefore\ 1^\circ = \left(\frac{10}{9}\right)^g = 1.11^g$ (প্রায়)

আবার, $10^g = 9^\circ$

$$\therefore\ 1^g = \left(\frac{10}{9}\right)^o = 0.9^\circ \text{ (প্রায়)}$$

(খ) ষাটমূলক ও বৃত্তীয় এককের মধ্যে সম্পর্ক

প্রতিজ্ঞা ৩-এর রেডিয়ান কোণের বর্ণনায় আমরা পাই,

$$1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ}$$

সুতরাং $1^c = \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ $\Rightarrow 1^c = \dfrac{2}{\pi} \times 90^\circ \Rightarrow 1^c = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

$$\therefore\ 1^c = \frac{180^\circ}{3.1416} = 57^\circ 17' 44.8''$$

আবার, $1^\circ = \dfrac{\pi}{180^\circ}$ রেডিয়ান $\Rightarrow 1^\circ = \dfrac{3.1416}{180^\circ}$ রেডিয়ান $= 0.0174533$ রেডিয়ান

কিন্তু অপর দুইটি পদ্ধতি অনুসারে

2 সমকোণ $= 180^\circ = 200^g$

$\therefore 2$ সমকোণ $= 180^\circ = 200^g = \pi^c$

$\therefore 1$ সমকোণ $= 90^\circ = 100^g = \dfrac{\pi^c}{2}$

(গ) মনে করুন, একটি নির্দিষ্ট কোণের পরিমাণকে ষাটমূলক শতমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D ডিগ্রী, G গ্রেড এবং R রেডিয়ান নির্দেশ করা হল। তাহলে,

$180^\circ = \pi$ রেডিয়ান $\Rightarrow 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $\Rightarrow D^\circ = \dfrac{\pi}{180} \times D$ রেডিয়ান

আবার যেহেতু $200^g = \pi$ রেডিয়ান $\Rightarrow G^g = \dfrac{\pi}{200} \times G$ রেডিয়ান

সুতরাং $= \dfrac{\pi D}{180} = \dfrac{\pi G}{200} = \mathrm{R}$

$$\therefore\quad \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

উপরোক্ত আলোচনা থেকে বহুল ব্যবহৃত কোণসমূহের ডিগ্রি ও রেডিয়ানের সম্পর্ক দেওয়া হলো:

(i) $1^\circ = \dfrac{\pi^c}{180}$

(ii) $30^\circ = \dfrac{\pi^c}{180} \times 30 = \dfrac{\pi^c}{6}$

(iii) $45^\circ = \dfrac{\pi^c}{180} \times 45 = \dfrac{\pi^c}{4}$

(iv) $60^\circ = \dfrac{\pi^c}{180} \times 60 = \dfrac{\pi^c}{3}$

(v) $90^\circ = \dfrac{\pi^c}{180} \times 90 = \dfrac{\pi^c}{2}$

(vi) $180^\circ = \dfrac{\pi^c}{180} \times 180 = \pi^c$

(vii) $360^\circ = \dfrac{\pi^c}{180} \times 360 = 2\pi^c$

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে রেডিয়ান প্রতীক (c) সাধারণত লিখা হয় না। রেডিয়ান প্রতীক উহ্য রেখে সম্পর্কগুলিকে আমরা নিম্নলিখিতভাবে পড়বো।

$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$, $30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$, $45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$, $60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$, $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$, $180^\circ = \pi$, $360^\circ = 2\pi$ ইত্যাদি।

উদাহরণ 1: $20°15'30''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ $30'' = \frac{30}{60}' = \frac{1}{2}'$

$\therefore \quad 15'30'' = 15\frac{1}{2}' = \frac{31}{2}' = \frac{31}{2}' = \left(\frac{31}{2\times60}\right)^{\circ} = \left(\frac{31}{120}\right)^{\circ}$

অতএব $20°15'30'' = \left(20\frac{31}{120}\right)^{\circ} = \left(\frac{2431}{120}\right)^{\circ} = \frac{2431}{120\times90}$ সমকোণ $= \frac{2431}{10800} \times \frac{\pi^c}{2}$

$= \frac{2431}{21600} \times \pi^c = 0.116\,\pi^c$ (প্রায়)

উদাহরণ 2: $20^g25'20''$ কে ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ $20^g25'20'' = 20^g+0.25^g+0.0020^g = 20.252^g = 20.252 \div 100$ সমকোণ

$= 0.20252$ সমকোণ $= 90 \times 0.20252° = 18.2258° = 18° (60 \times 0.2268)'$

$= 18°13.608' = 18°13' (60\times0.608)'' = 18°13'\,36.48''$

উদাহরণ 3: কোন ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 3:4:5। কোণগুলিকে ডিগ্রী ও রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ ধরুন, একটি কোণের পরিমাণ $= 3x$

অতএব, শর্তমতে ত্রিভুজের অপর কোণ দুইটি $4x$ এবং $5x$.

ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $= 180°$

অর্থাৎ $3x+4x+5x = 180° \quad \Rightarrow 12x = 180° \quad \Rightarrow x = \frac{180°}{12} = 15°$

$\therefore$ প্রথম কোণটি $= 3x = 3\times15° = 45°$

দ্বিতীয় কোণটি $= 4x = 4\times15° = 60°$

তৃতীয় কোণটি $= 5x = 5\times15° = 75°$

আবার, $1° = \frac{\pi^c}{180}$

$\therefore 45° = \frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi^c}{4}$

$60° = \frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi^c}{3}$

এবং $75° = \frac{\pi}{180} \times 75 = \frac{5\pi^c}{12}$

$\therefore$ ত্রিভুজের কোণ তিনটি $45°, 60°, 75°$ অথবা $\frac{\pi^c}{4}, \frac{\pi^c}{3}$, এবং $\frac{5\pi^c}{12}$

উদাহরণ 4: একটি গাড়ীর চাকার ব্যাস 4 ফুট এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 8 বার ঘোরে। গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ চাকার ব্যাস $d = 4$ ফুট

$\therefore \quad$ চাকার ব্যাসার্ধ $r = \frac{d}{2} = \frac{4}{2}$ ফুট $= 2$ ফুট

$\therefore \quad$ চাকার পরিধি $= 2\pi r = 2 \times 3.1416\times2$ ফুট $= 12.5664$ ফুট

অর্থাৎ চাকাটি 1 বার ঘুরে 12.5664 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে।

যেহেতু চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 8 বার ঘোরে।

অতএব 1 সেকেন্ডে গাড়িটির অতিক্রম দূরত্ব $= 12.5664\times8$ ফুট

$\therefore$ 1 ঘন্টা বা 60×60 ,, ,, ,, ,, ,, $= 12.5664\times8\times60\times60$ ফুট $= \dfrac{12.5664\times8\times60\times60}{3}$ গজ

$= \dfrac{12.5664\times8\times60\times60}{3\times1760}$ মাইল $= 68.544$ মাইল $= 69$ মাইল (প্রায়)

$\therefore$ গাড়িটির গতিবেগ ঘন্টায় 69 মাইল (প্রায়)

উদাহরণ 5: একটি বৃত্তকার পথে ঘন্টায় 6 কি.মি. বেগে দৌড়ে এক ব্যক্তি 36 সেকেন্ডে এমন একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে যা কেন্দ্রে $56°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় করুন।

সমাধান: 1 ঘন্টায় বা 60×60 সেকেন্ডে অতিক্রম করে $= 6$ কি.মি. $= 6\times1000$ মি.

$\therefore$ 1 সেকেন্ডে " " " $= \dfrac{6\times1000}{60\times60}$ মি.

$\therefore$ 36 সেকেন্ডে " " " $= \dfrac{6\times1000\times36}{60\times60}$ মি. $= 60$ মি.

$\therefore$ বৃত্তের চাপ $= 60$ মি.

আমরা জানি $\theta = \dfrac{s}{r}$

$\therefore\ r = \dfrac{s}{\theta}$

যেহেতু $r =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $s =$ বৃত্তচাপ, $\theta =$ কোণের পরিমান

এখানে $s = 60$ মি., $\theta = 56° = 56° \times \dfrac{\pi^c}{180}$

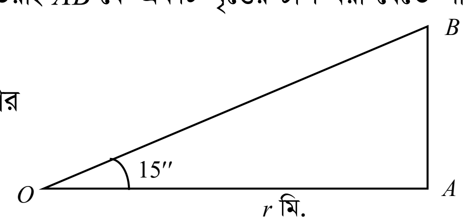
অতএব মান বসিয়ে পাই-

$r = \dfrac{60}{\frac{56\pi}{180}}$ মি. $= \dfrac{60\times180}{56\times3.1416}$ মি. $= 61.38$ মি.

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= 2r = 2\times61.38 = 122.74$ মি. $= 123$ মি. (প্রায়)

উদাহরণ 6: 10 মিটার উঁচু একটি খুঁটি কত দূরে $15''$ কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান: মনে করুন AB খুঁটিটি ভূমির উপর O বিন্দুতে $15''$ কোণ উৎপন্ন করে। ধরুন $OA = r$। যেহেতু $\angle AOB$ খুব ক্ষুদ্র। সুতরাং AB-এর দৈর্ঘ্য OA এর দৈর্ঘ্যের তুলনায় খুব ক্ষুদ্র হবে। সুতরাং AB কে একটি বৃত্তের চাপ ধরা যেতে পারে যার কেন্দ্র D এবং ব্যাসার্ধ $= r$.



এখন $15'' = \dfrac{15'}{60} = \dfrac{15^\circ}{60\times60} = \dfrac{15}{60\times60}\times\dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান এবং $s = 10$ মিটার

এখন $s = r\theta$ সম্পর্ক হতে পাই

$10 = r\cdot\dfrac{15\pi}{60\times60\times180}$

বা, $r = \dfrac{60\times60\times180\times10}{15\pi}$ মি. $= \dfrac{60\times60\times180\times10}{15\times3.1416}$ মি. $= \dfrac{60\times60\times180\times10}{15\times3.1416\times1000}$ কি.মি. $= 137.509$ কি.মি. (প্রায়)

$= 137.51$ কি.মি. (প্রায়)

অতএব খুঁটিটি 137.51 কি.মি দুরে $15''$ কোণ উৎপন্ন করে।

উদাহরণ 7: পৃথিবী থেকে সূর্যের গড় দূরত্ব 9,25,00,000 মাইল ধরা হল। যদি সূর্য দর্শকের চোখের অবস্থানের সাথে $32'$ কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে সূর্যের ব্যাস কত?

সমাধান: মনে করুন সূর্যের ব্যাস D মাইল। যেহেতু দর্শকের চোখের অবস্থানের সাথে সূর্যের অর্থাৎ সূর্যের ব্যাস দ্বারা উৎপন্ন কোণের পরিমান খুব ছোট, সুতরাং দর্শক অর্থাৎ পৃথিবী হতে সূর্যের দূরত্বের তুলনায় সূর্যের ব্যাসের পরিমাণ অতি ক্ষুদ্র হবে।

সুতরাং সূর্যের ব্যাসকে সেই বৃত্তের চাপ কল্পনা করা যেতে পারে যার ব্যাসার্ধ = 9,25,00,000 মাইল এবং কেন্দ্র হল দর্শকের অবস্থান।

এখন $32' = \frac{32^\circ}{60} = \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

এখন $s = r\theta$. যেখানে $s =$ বৃত্তের চাপ, $r =$ বৃত্তের ব্যাসার্থ এবং $\theta =$ নির্দিষ্ট কোণ, সম্পর্ক হতে পাই-

$$D = 9{,}25{,}00{,}000 \times \frac{32\pi}{60\times180} = \frac{92500000\times32\times3.1416}{60\times180} = 8{,}61{,}031 \text{ মাইল (প্রায়)}$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.৪

1. রেডিয়ানে প্রকাশ কর:
   (i) 20°5'6" (ii) 40°25'36" (iii) 45°12'23.2"
2. ষাট মূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন-
   (i) $23^g25'20"$ (ii) $5^g2'5"$ iii) $\frac{\pi}{15}$
3. একটি চাকার ব্যাসার্ধ 3 মি. হলে তার পরিধি কত?
4. একটি ত্রিভুজের কোণসমূহ যথাক্রমে x°, 25^g এবং $\frac{11\pi}{36}$ । x-এর মান নির্ণয় করুন।
5. একটি গাড়ির চাকা 200 বার আবর্তন করে 800 মিটার অতিক্রম করে। চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।
6. একটি রেলগাড়ীর চাকার ব্যাস 1.5 মিটার এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার ঘোরে। রেলগাড়ীর গতিবেগ ঘন্টায় কত?
7. দুইটি কোণের সমষ্টি ও অন্তর যথাক্রমে 1 রেডিয়ান ও 1° হলে ক্ষুদ্রতম কোণটির মান রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।
8. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 1:2:3। কোণ তিনটিকে ডিগ্রী ও রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।
9. একটি কোণের ডিগ্রীতে পরিমাপ D° ও রেডিয়ানে পরিমাপ R^c হলে দেখান যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.
10. ষাটমূলক ও শতমূলক পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে x ও y হলে দেখান যে, $250x = 81y$।
11. এক ব্যক্তি ঘন্টায় 10 মাইল বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে এমন একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে যা বৃত্তের কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় করুন।
12. যদি একটি বৃত্তচাপ 40 ফুট দীর্ঘ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে 60^g কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
13. নিম্নলিখিত সময়ে বৃত্তাকার ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপকে রেডিয়ানে, ডিগ্রী ও গ্রেডে প্রকাশ করুন।
    (i) 10 টা 15 মিনিট (ii) 3 টা (iii) 4 টা 40 মিনিট
14. পৃথিবী থেকে চাঁদের দূরত্ব 237600 মাইল। চাঁদের ব্যাস পৃথিবীর কোন বিন্দুতে 16° কোণ উৎপন্ন করে। চাঁদের ব্যাস নির্ণয় করুন।
15. পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব 14.9×10^7 কি.মি. এবং পৃথিবীর কেন্দ্রবিন্দুতে সূর্যের ব্যাস $32'$ কোণ উৎপন্ন করে। সূর্যের ব্যাস কত?
16. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি. হলে পৃথিবীর উপর যে দুটি স্থান কেন্দ্রে $32''$ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব নির্ণয় করুন।
17. চাঁদের ব্যাস দর্শকের চোখের সাথে $30'$ কোণ উৎপন্ন করে এবং সূর্যের $32'$। যদি সূর্য, চাঁদের থেকে 675 গুণ দূরে অবস্থিত হয়, তাহলে তাদের ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় করুন।
18. একটি গাছের উচ্চতা $50'$ এবং গাছটির দর্শকের চোখের অবস্থানে $9'$ কোণ উৎপন্ন করে। গাছের গোড়া হতে দর্শকের দূরত্ব কত?

পাঠ ১৩.৫ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

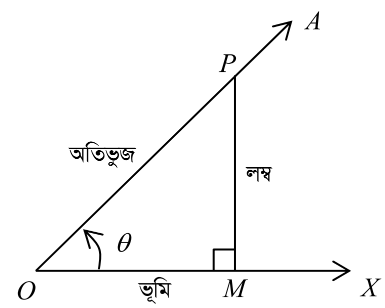
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করতে পারবেন,
- যে কোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন চতুর্ভাগের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ধারণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সূক্ষ্মকোণ, ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, স্থানাংক, ব্যাসার্ধ ভেক্টর, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন

মূলপাঠ

ত্রিকোণমিতির এই অংশে প্রথমে সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (sine, cosine, tangent, secant, cosecant, cotangent) সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। সূক্ষ্মকোণের অনুপাতসমূহের মাধ্যমে যেকোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করা হবে। অনুপাত সমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক এবং বিভিন্ন চতুর্ভাগে এদের চিহ্ন কি হবে সে সম্পর্কে ব্যাখ্যা করা হবে। ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত কতিপয় অভেদ সম্পর্কে ধারণা দেওয়া হবে। এছাড়াও আদর্শ কোণসমূহের (0°, 30°, 45°, 60°, 90°) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং অনুপাতসমূহের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্নমান অর্থাৎ মানের পরিধি সম্পর্কে আলোচনাও এই অংশে অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ



চিত্রে $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। ধরুন কোণটি θ। OA বাহুতে যে কোন একটি বিন্দু P নিন। P বিন্দু হতে OX এর উপর PM লম্ব টানুন। তাহলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM উৎপন্ন হল। $\angle POM$ এর সাপেক্ষে OP ত্রিভুজের অতিভুজ (Hypotenuse), OM ভুমি (adjecent side), PM লম্ব (opposite side) এবং $\angle POQ = \theta$ (সূক্ষ্মকোণ)। এখন ΔPOM এর তিনটি বাহু OP, OM ও PM নিয়ে ছয়টি অনুপাত গঠন করা যায়।

অনুপাতগুলো $\dfrac{PM}{OP}, \dfrac{OM}{OP}, \dfrac{PM}{OM}, \dfrac{OP}{OM}, \dfrac{OP}{PM}, \dfrac{OM}{PM}$

এই অনুপাতগুলোকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয়।

তাহলে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে নিম্নোক্তভাবে অভিহিত করা হয়ঃ

$\dfrac{PM}{OP} = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \text{sine}\ \theta$ (θ কোণের সাইন) বা সংক্ষেপে $\sin\theta$

$\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \text{cosine}\ \theta$ (θ কোণের কোসাইন) বা সংক্ষেপে $\cos\theta$

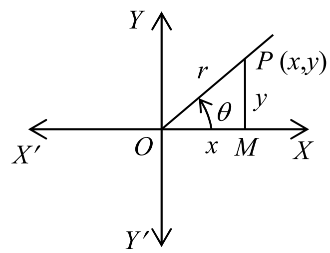
$\dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \text{tangent } \theta$ (θ কোণের ট্যানজেন্ট) বা সংক্ষেপে $\tan\theta$

$\dfrac{OM}{PM} = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \text{cotangent } \theta$ (θ কোণের কোট্যানজেন্ট) বা সংক্ষেপে $\cot\theta$

$\dfrac{OP}{OM} = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \text{secant } \theta$ (θ কোণের সেকেন্ট) বা সংক্ষেপে $\sec\theta$

$\dfrac{OP}{PM} = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \text{cosecant } \theta$ (θ কোণের কোসেকেন্ট) বা সংক্ষেপে $\text{cosec } \theta$

যে কোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



মনে করুন একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে ঘূর্ণন শুরু করে OP অবস্থানে এসে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখন P বিন্দু হতে XOX' রেখার উপর PM লম্ব অঙ্কন করুন। মূলবিন্দু O হতে P বিন্দুর দূরত্ব OP কে P বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে। মনে করুন, $OM = x$ এবং $PM = y$ । এখন P বিন্দুর স্থানাংক (x,y) এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টর $OP = r$ হলে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হয়:

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{P \text{ বিন্দুর } y\text{-স্থানাংক}}{P \text{ বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{P \text{ বিন্দুর } x\text{-স্থানাংক}}{P \text{ বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{P \text{ বিন্দুর } y\text{-স্থানাংক}}{P \text{ বিন্দুর } x\text{-স্থানাংক}} = \frac{y}{x} \quad (\text{যদি } x \neq 0 \text{ হয়})$$

$$\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{P \text{ বিন্দুর } x\text{-স্থানাংক}}{P \text{ বিন্দুর } y\text{-স্থানাংক}} = \frac{x}{y} \quad (\text{যদি } y \neq 0 \text{ হয়})$$

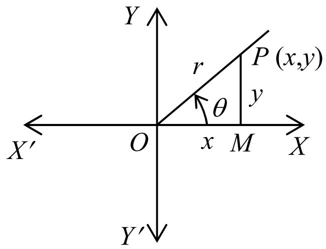
$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{P \text{ বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}}{P \text{ বিন্দুর } x\text{-স্থানাংক}} = \frac{r}{x} \quad (\text{যদি } x \neq 0 \text{ হয়})$$

$$\text{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{P \text{ বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}}{P \text{ বিন্দুর } y\text{-স্থানাংক}} = \frac{r}{y} \quad (\text{যদি } y \neq 0 \text{ হয়})$$

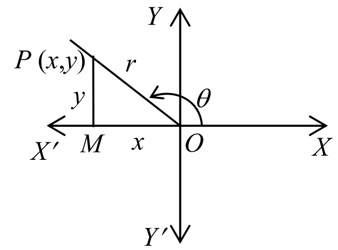
উপরের বর্ণনায় P বিন্দু এবং O বিন্দু ভিন্ন বিন্দু বলে $OP = r > 0$ । সেইজন্য $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ সবসময়ই অর্থবহ। যদি প্রান্তি বাহু OP, x অক্ষের উপর অবস্থিত হয় তাহলে $y=0$, কারণ x-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর y এর স্থানাংক শূন্য। এরূপ কোণের জন্য $\cot\theta, \text{cosec}\theta$ সংজ্ঞায়িত নয়। আবার যদি প্রান্তি বাহু OP, y-অক্ষের উপর অবস্থিত হয় তাহলে $x = 0$, কারণ y-অক্ষের উপর অবস্থিত যে কোনো বিন্দুর x-এর স্থানাংক শূন্য। এরূপ কোণের জন্য $\tan\theta, \sec\theta$ সংজ্ঞায়িত নয়।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন

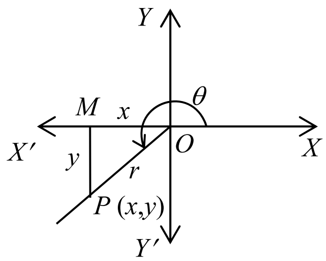
মনে করুন একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে ঘূর্ণন শুরু করে OP অবস্থানে এসে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখানে P বিন্দুর অবস্থান XOY, YOX', $X'OY'$ অথবা $Y'OX$ এই চারটি চতুর্ভাগের যে কোনো একটিতে হতে পারে। এখন P বিন্দু হতে XOX' রেখার উপর PM লম্ব অঙ্কন করুন। মূলবিন্দু O হতে P বিন্দুর দূরত্ব OP কে P বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলে। মনে করুন, $OM = x$ এবং $PM = y$ ।



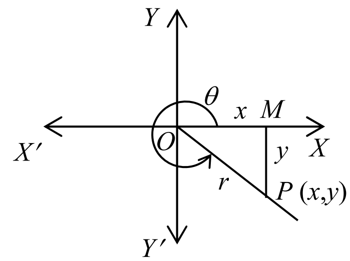
১ম চিত্র



২য় চিত্র



৩য় চিত্র

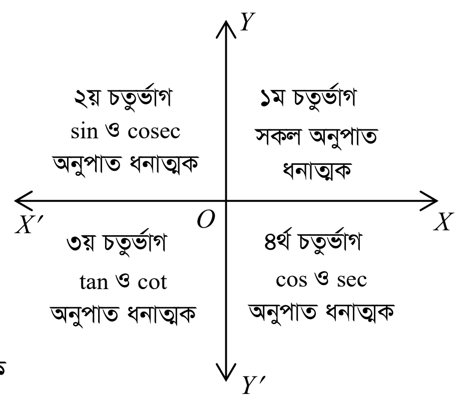


৪র্থ চিত্র

ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে ঘূর্ণন শুরু করে θ পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করার পর চারটি চতুর্ভাগের যে কোনো একটিতে অবস্থান করতে পারে। যেহেতু ব্যাসার্ধ ভেক্টর $OP\ (=r)$ সর্বদা ধনাত্মক অতএব θ কোণের বিভিন্ন অনুপাতের চিহ্ন x ও y এর চিহ্ন অর্থাৎ OM ও PM বাহুর পরিমাণের উপর নির্ভর করে (চিত্র)।

এখন যদি ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান অর্থাৎ ব্যাসার্ধ ভেক্টর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে (১ম চিত্র) তাহলে x, y, r প্রত্যেকেই ধনাত্মক হবে। সুতরাং তাদের সকল অনুপাত ধনাত্মক হবে। সুতরাং প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক হবে।

যদি ব্যাসার্ধ ভেক্টর দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে (২য় চিত্র) তবে x ঋণাত্মক এবং y ও r ধনাত্মক। সুতরাং দ্বিতীয় চতুর্ভাগে x বর্জিত অনুপাত অর্থাৎ sin ও cosec অনুপাত দুইটি ধনাত্মক এবং অন্যান্য অনুপাতসমূহ ঋণাত্মক।



যদি ব্যাসার্ধ ভেক্টর তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে (৩য় চিত্র) তবে x ও y উভয়ই ঋণাত্মক এবং r ধনাত্মক। সুতরাং তৃতীয় চতুর্ভাগে x ও y সম্বলিত অনুপাত অর্থাৎ tan ও cot অনুপাত দুইটি ধনাত্মক এবং অন্যান্য অনুপাতসমূহ ঋণাত্মক।

যদি ব্যাসার্ধ ভেক্টর চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে (৪র্থ চিত্র) তবে y ঋণাত্মক এবং x ও r ধনাত্মক। সুতরাং চতুর্থ চতুর্ভাগে y বর্জিত অনুপাত অর্থাৎ cos ও sec অনুপাত দুইটি ধনাত্মক এবং অন্যান্য অনুপাতসমূহ ঋণাত্মক।

নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করার পর ঘূর্ণায়মান রশ্মি কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে তা জানতে পারলে পাশের চিত্রের সাহায্যে আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় করতে পারি।

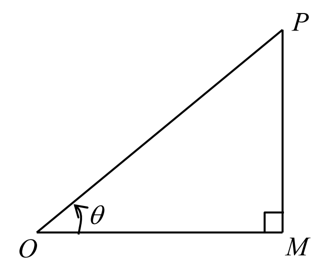
পাঠ ১৩.৬ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলপাঠ



পাশের চিত্রে $\angle POM = \theta$

অতএব সংজ্ঞানুযায়ী

$$\text{(i) } \sin\theta = \frac{PM}{OP}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{1}{\frac{OP}{PM}} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}, \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\text{(ii) } \cos\theta = \frac{OM}{OP}, \quad \sec\theta = \frac{OP}{OM}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\text{(iii) } \tan\theta = \frac{PM}{OM}, \quad \cot\theta = \frac{OM}{PM}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{1}{\frac{OM}{PM}} = \frac{1}{\cot\theta}, \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\text{(iv) } \tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

অনুরূপভাবে, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(v) চিত্র হতে পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী

$$PM^2 + OM^2 = OP^2$$

বা, $\dfrac{PM^2}{OP^2} + \dfrac{OM^2}{OP^2} = \dfrac{OP^2}{OP^2}$ [উভয় পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\dfrac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\dfrac{OM}{OP}\right)^2 = 1$

বা, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (1)

(vi) চিত্র হতে পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী

$PM^2 + OM^2 = OP^2$

বা, $\frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2} = \frac{OP^2}{OM^2}$ [উভয় পক্ষকে OM^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\frac{PM}{OM}\right)^2 + 1 = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$

বা, $(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ .... (2)

(vii) চিত্র হতে পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী

$PM^2 + OM^2 = OP^2$

বা, $\frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2} = \frac{OP^2}{PM^2}$ [উভয় পক্ষকে PM^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2 = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2$

বা, $1 + (\cot\theta)^2 = (\operatorname{cosec}\theta)^2$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ .... (3)

(1), (2) ও (3) নং সূত্রগুলোকে নিম্নলিখিত আকারেও লিখা যায়।

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$; $\quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$; $\quad \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$; $\quad \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$

পাঠ ১৩.৭ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা ও সীমাবদ্ধতা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমা নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমাবদ্ধতা নির্ণয় করতে পারবেন।

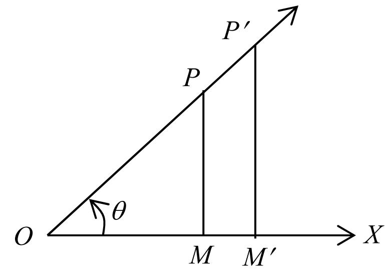
মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, ধ্রুবতা, সীমাবদ্ধতা

মূলপাঠ

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা

একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান সব সময়ই ধ্রুব।

মনে করুন $\angle XOP = \theta$। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান OA বাহুতে P বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না। OA বাহুতে অপর একটি বিন্দু P' নিন। এখন P ও P' বিন্দু হতে OX এর উপর যথাক্রমে PM ও $P'M'$ লম্ব অঙ্কন করুন। অতএব ΔPOM এবং $\Delta P'OM'$ দুইটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ।



যেহেতু ΔPOM এবং $\Delta P'OM'$ সদৃশ,

অতএব $\dfrac{PM}{P'M'} = \dfrac{OP}{OP'}$ অর্থাৎ $\dfrac{PM}{OP} = \dfrac{P'M'}{OP'}$ বা $\dfrac{OP}{PM} = \dfrac{OP'}{P'M'}$

অনুরূপভাবে, $\dfrac{OM}{OM'} = \dfrac{OP}{OP'}$ অর্থাৎ $\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OM'}{OP'}$ বা $\dfrac{OP}{OM} = \dfrac{OP'}{OM'}$

এবং $\dfrac{PM}{P'M'} = \dfrac{OM}{OM'}$ অর্থাৎ $\dfrac{PM}{OM} = \dfrac{P'M'}{OM'}$ বা $\dfrac{OM}{PM} = \dfrac{OM'}{P'M'}$

সুতরাং $\angle XOA = \theta$ হলে

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{P'M'}{OP'}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{OP'}{P'M'}$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{OM'}{OP'}, \quad \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'}$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{P'M'}{OM'}, \quad \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{OM'}{P'M'}$$

ঘূর্ণায়মান রশ্মির শেষ অবস্থান যে কোনো চতুর্ভাগে অবস্থান করুক না কেন, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হওয়া ছাড়াও অনুরূপ বাহুর চিত্র একই প্রকৃতির হয়। সুতরাং যে কোনো ত্রিভুজ হতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করলে তাদের মান ও চিহ্ন একই হবে।

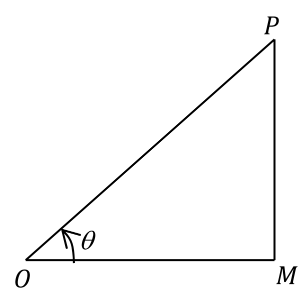
সুতরাং নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ধ্রুবক।

ত্রিকোণমিতিক সীমা

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের নির্দিষ্ট সীমা আছে। এই সীমার বাইরে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত অবস্থান করে না। এখন আমরা ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমা সম্পর্কে জানবো।

মনে করুন, $\angle POM = \theta$ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $PM \perp OM$

(i) θ কোণের প্রত্যেক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ΔPOM-এর দুইটি বাহুর অনুপাত। সুতরাং এরূপ প্রত্যেক অনুপাত একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।



(ii) ΔPOM-এ অতিভুজ OP বৃহত্তম বাহু।

সুতরাং $PM < OP$ এবং $OM < OP$

বা, $\dfrac{PM}{OP} < 1$ এবং $\dfrac{OM}{OP} < 1$ [OP দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

অর্থাৎ $\sin\theta < 1$ এবং $\cos\theta < 1$

আবার $\dfrac{OP}{PM} > 1$ এবং $\dfrac{OP}{OM} > 1$

অর্থাৎ $\operatorname{cosec}\theta > 1$ এবং $\sec\theta > 1$

(iii) ΔPOM-এ যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

সুতরাং $PM + OM > OP$

বা, $\dfrac{PM}{OP} + \dfrac{OM}{OP} > 1$ [OP দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

অর্থাৎ $\sin\theta + \cos\theta > 1$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সীমাবদ্ধতা

আপনারা জানেন $\sin^2\theta + \cos\theta^2 = 1$

যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা ধনাত্মক, সুতারাং $\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ প্রত্যেকটির মান ধনাত্মক হবে। আবার এদের যোগফল 1 বলে কোনটির মান + 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। অর্থাৎ $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ এর মান +1 অপেক্ষা বৃহত্তর বা –1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। অর্থাৎ $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$। যেহেতু $\text{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ সুতরাং $\text{cosec}\theta$ এবং $\sec\theta$ এর মান ≥ 1 অথবা ≤ -1। কিন্তু $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ এর মানের কোনো সীমা নির্ধারণ করা যায় না।

পাঠ ১৩.৮ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতঃ সমস্যা ও সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মূলপাঠ

পূর্ববর্তী পাঠসমূহে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা ও সীমাবদ্ধতা ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। বর্তমান পাঠে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ অর্থাৎ বিভিন্ন সমস্যা ও সমাধান নিয়ে আলোচনা করা হবে।

উদাহরণ 1: $\sin\theta$ অনুপাতকে $\cot\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $\sin\theta = \dfrac{1}{\cos ec\theta}$

আবার, $\text{cosec}\theta = 1 + \cot^2\theta \;\Rightarrow \text{cosec}\theta = \pm\sqrt{1+\cot^2\theta}$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}$$

উদাহরণ 2: যদি $\sin\theta = \dfrac{21}{29}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $\sec\theta + \tan\theta = 2\dfrac{1}{2}$, যখন θ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

সমাধান: $\sin\theta = \dfrac{21}{29}$

এখন $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{21}{29}\right)^2 = 1 - \frac{441}{841} = \frac{400}{841}$$

$$\therefore \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{400}{841}} = \pm\frac{20}{29}$$

যেহেতু θ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত, অতএব $\cos\theta$ এর মান ধনাত্মক হবে।

এখন $\sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{20}{29}} + \frac{\frac{1}{21}}{29} = \frac{29}{20} + \frac{21}{20} = \frac{50}{20} = 2\frac{1}{2}$

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন, $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = 2\sec\theta$

সমাধানঃ $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} + \sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}} + \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} + \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta$$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন, $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

সমাধানঃ $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}-1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta}+1} = \frac{\frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-1+\cos\theta}{\cos\theta}}$

$$= \frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\sin\theta-1+\cos\theta} = \frac{(\sin\theta+1-\cos\theta)(\sin\theta+1-\cos\theta)}{(\sin\theta-1+\cos\theta)(\sin\theta+1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta+1-\cos\theta)^2}{\{\sin\theta-(1-\cos\theta)\}\{\sin\theta+(1-\cos\theta)\}}$$

$$= \frac{\sin^2\theta+1+\cos^2\theta+2\sin\theta-2\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+1+2\sin\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{\sin^2\theta-(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)}$$

$$= \frac{1+1+2\sin\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{\sin^2\theta-1+2\cos\theta-\cos^2\theta} = \frac{2+2\sin\theta-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{-\cos^2\theta+2\cos\theta-\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2(1+\sin\theta)-2\cos\theta(1+\sin\theta)}{2\cos\theta-2\cos^2\theta} = \frac{(1+\sin\theta)(2-2\cos\theta)}{\cos\theta(2-2\cos\theta)} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

উদাহরণ 5: প্রমাণ করুন, $\sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}} = \cot A + \cos ecA$

সমাধানঃ $\sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}} = \frac{\left(\sqrt{\sec A+1}\right)\left(\sqrt{\sec A+1}\right)}{\left(\sqrt{\sec A-1}\right)\left(\sqrt{\sec A+1}\right)} = \frac{\left(\sqrt{\sec A+1}\right)^2}{\sqrt{\sec^2 A-1}} = \frac{\sec A+1}{\sqrt{\tan^2 A}}$

$$= \frac{\sec A+1}{\tan A} = \frac{\sec A}{\tan A} + \frac{1}{\tan A} = \frac{\frac{1}{\cos A}}{\frac{\sin A}{\cos A}} + \cot A = \frac{1}{\sin A} + \cot A$$

$$= \operatorname{cosec} A + \cot A$$

উদাহরণ 6: প্রমাণ করুন, $\left(\sqrt{1-\sin\theta}+\sqrt{1+\sin\theta}\right)^2 = 2(1+\cos\theta)$

সমাধান: $\left(\sqrt{1-\sin\theta}+\sqrt{1+\sin\theta}\right)^2 = \left(\sqrt{1-\sin\theta}\right)^2 + \left(\sqrt{1+\sin\theta}\right)^2 + 2\sqrt{1-\sin\theta}\sqrt{1+\sin\theta}$

$$= 1-\sin\theta+1+\sin\theta+2\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= 2+2\sqrt{\cos^2\theta} = 2+2\cos\theta = 2(1+\cos\theta)$$

উদাহরণ 7: প্রমাণ করুন, $(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha-\sec\alpha)^2 = \tan^2\alpha+\cot^2\alpha-1$

সমাধান: $(\sin\alpha-\operatorname{cosec}\alpha)^2+(\cos\alpha-\sec\alpha)^2$

$$= \sin^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha-2\sin\alpha\operatorname{cosec}\alpha+\cos^2\alpha+\sec^2\alpha-2\cos\alpha\sec\alpha$$

$$= \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha+\sec^2\alpha-2-2 \;= 1+\operatorname{cosec}^2\alpha+\sec^2\alpha-4$$

$$= \operatorname{cosec}^2\alpha+\sec^2\alpha-3 \;= \operatorname{cosec}^2\alpha-1+\sec^2\alpha-1-1$$

$$= \cot^2\alpha+\tan^2\alpha-1 \;= \tan^2\alpha+\cot^2\alpha-1$$

উদাহরণ 8: θ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta = \frac{a}{b}$ হলে প্রমাণ করুন, $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

সমাধান: $\tan\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{a^2}{b^2}$

$$\Rightarrow b^2\sin^2\theta = a^2\left(1-\sin^2\theta\right) \Rightarrow b^2\sin^2\theta = a^2-a^2\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow b^2\sin^2\theta+a^2\sin^2\theta = a^2 \Rightarrow \sin^2\theta\left(a^2+b^2\right) = a^2$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

আবার $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2-a^2}{a^2+b^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$

এখন $\sin^2\theta+\cos^2\theta = \frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$

উদাহরণ 9: যদি $\sin A+\cos A = a$ এবং $\sec A+\operatorname{cosec} A = b$ হয়, তবে প্রমাণ করুন, $b\left(a^2-1\right) = 2a$

সমাধান: $b\left(a^2-1\right) = (\sec A+\operatorname{cosec} A)\left\{(\sin A+\cos A)^2-1\right\}$

$$= (\sec A+\operatorname{cosec} A)\left(\sin^2 A+\cos^2 A+2\sin A\cos A-1\right)$$

$$= (\sec A+\operatorname{cosec} A)(1+2\sin A\cos A-1) = (\sec A+\operatorname{cosec} A).2\sin A\cos A$$

$$= 2(\sin A\cos A\sec A+\sin A\cos A\operatorname{cosec} A) = 2(\sin A+\cos A) = 2a$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.৮

নিম্নলিখিত অভেদগুলো প্রমাণ করুন (1-15)

1. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=2\mathrm{cosec}A$

2. $\sec^4 A-\sec^2 A=\tan^4 A+\tan^2 A$

3. (i) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\mathrm{cosec}\theta+\cot\theta$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$

4. $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=2\cot\theta$

5. $\dfrac{\cos\theta+\cos\phi}{\sin\theta-\sin\phi}=\dfrac{\sin\theta+\sin\phi}{\cos\phi-\cos\theta}$

6. $\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\sin A\cos^2 A-\cos A\sin^2 A}=\mathrm{cosec}A+\sec A$

7. $\dfrac{1}{\sec A+\tan A}-\dfrac{1}{\cos A}=\dfrac{1}{\cos A}-\dfrac{1}{\sec A-\tan A}$

8. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=0$

9. $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\mathrm{cosec}\theta$

10. $\dfrac{1+\tan^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\left(\dfrac{1-\tan\theta}{1-\cot\theta}\right)^2$

11. $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)=\sec\theta+\mathrm{cosec}\theta$

12. $\sec^4 A+\tan^4 A=1+2\sec^2 A\tan^2 A$

13. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

14. $\left(\dfrac{m\cos\theta}{n\cot\theta}\right)^2+\left(\dfrac{m\sin\theta}{n\tan\theta}\right)^2=\dfrac{m^2}{n^2}$

15. $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}-\sec\theta=\sec\theta-\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

16. যদি $\sin^4\theta+\sin^2\theta=1$ হয়, তবে দেখান যে $\tan^4\theta-\tan^2\theta=1$

17. (i) $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ হলে $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ অনুপাতের মান কত হবে?

(ii) $\cos\theta=\dfrac{9}{41}$ হলে $\tan\theta$ ও $\mathrm{cosec}\theta$ অনুপাতের মান কত হবে?

18. $x=a\cos\theta+b\sin\theta$ এবং $y=a\sin\theta-b\cos\theta$ হলে দেখান যে, $x^2+y^2=a^2+b^2$

19. $k\tan\theta = \tan k\theta$ হলে দেখান যে, $\dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{k^2}{1+(k^2-1)\sin^2\theta}$

20. $\tan\phi = \dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ হলে প্রমাণ করুন, $\sqrt{2}\cos\phi = \pm(\sin\theta + \cos\theta)$

পাঠ ১৩.৯ নির্ধারিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ধারিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানের অনুপাতসমূহের মান প্রয়োগে করতে পারবেন।

মূলপাঠ

বিভিন্ন কোণের যেমন $0^0, 30^0, 45^0, 60^0$ এবং 90^o কোণের জন্য অনুপাতগুলোর মান ভিন্ন হয়। এখন আসুন কোন্ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান কি হয় সে সম্পর্কে জানি।

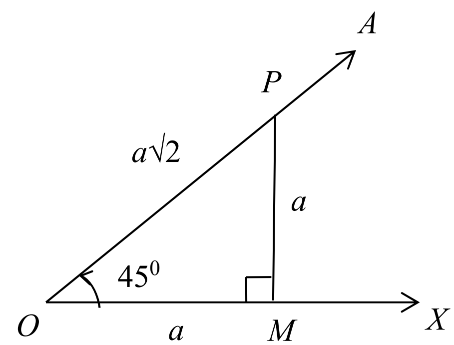
45^0 কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাশের চিত্রে $\angle XOA = 45^0$। OA বাহুতে P যে কোন বিন্দু এবং P হতে OX বাহুর উপর PM লম্ব।

এখন $\angle POM = 45^0, \angle PMO = 90^o$, অতএব $\angle OPM = 45^o$

সুতরাং $OM = PM$

ধরুন $OM = PM = a$



$\therefore OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

এখন, $\sin 45^o = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^o = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^o = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{a}{a} = 1$

$\cot 45^o = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{a}{a} = 1$

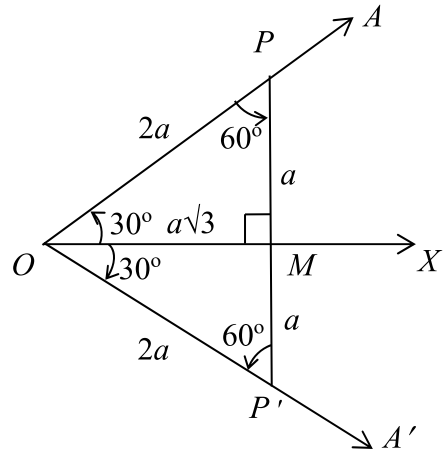
$\sec 45^o = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\text{cosec}45^o = \dfrac{OP}{PM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

30^o ও 60^o কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

30^o অথবা 60^o কোণের জন্য অনুপাতের মান ভিন্ন হবে। এখন আমরা দেখি এই দুইটি কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের কি মান পাওয়া যায়।

চিত্রে $\angle XOA = 30^o$। OA বাহুতে P যে কোন বিন্দু এবং P হতে OX বাহুতে PM লম্ব।



এখন $\angle POM = 30^o, \angle PMO = 90^o$

অতএব $\angle OPM = 60^o$

PM কে P' পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত কর যেন $P'M = PM$ হয়। $P'O$ যোগ করুন।

এখন $\Delta POM \cong \Delta P'OM$

অতএব $\angle POM = \angle P'OM = 30^o$

এবং $\angle OPM = \angle OP'M = 60^o$

অতএব $\Delta OPP'$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

ধরুন $PM = P'M = a$

অতএব $PP' = PM + P'M = PM + PM = 2PM = 2a$

$\therefore OP = OP' = 2a$

এখন $OM = \sqrt{OP^2 - PM^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$

$= \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

অতএব

$\sin 30^o = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ $\cos 30^o = \frac{OM}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^o = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot 30^o = \frac{OM}{PM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$

$\sec 30^o = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\text{cosec} 30^o = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2$

আবার,

$\sin 60^o = \frac{OM}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^o = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$\tan 60^o = \frac{OM}{PM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$ $\cot 60^o = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec 60^o = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2$ $\text{cosec} 60^o = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

শূন্য (0) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

শূন্যকোণের আদিবাহু ও প্রান্তিক রেখা অভিন্ন। এক্ষেত্রে $P(x,y)$ বিন্দু XOX' অক্ষে মূলবিন্দুর ডানপার্শ্বে অবস্থিত।

অতএব $x = r, y = 0$

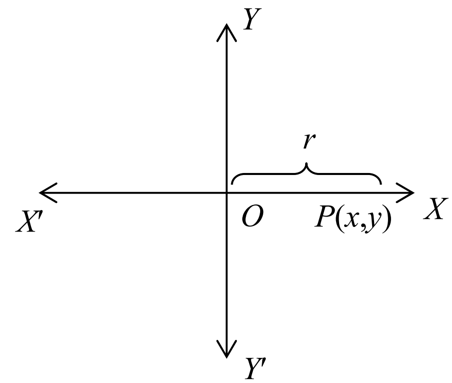
এখন

$$\sin 0^{\circ} = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 0^{\circ} = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\tan 0^{\circ} = \frac{y}{x} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\sec 0^{\circ} = \frac{r}{x} = \frac{r}{r} = 1$$



এখানে cot 0° ও cosec 0° সজ্ঞায়িত নয়, কারণ $y = 0$ ।

সমকোণের (90°) ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

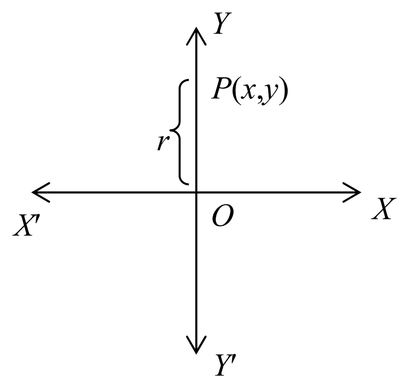
90° কোণের ক্ষেত্রে প্রান্তবাহু OY বরাবর এবং $P(x,y)$ বিন্দু YOY' অক্ষে মূলবিন্দুর উপরের দিকে অবস্থিত।
ফলে $x = 0$ এবং $y = r$
সুতরাং

$$\sin 90^{\circ} = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\cos 90^{\circ} = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cot 90^{\circ} = \frac{x}{y} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\text{cosec} 90^{\circ} = \frac{r}{y} = \frac{r}{r} = 1$$



এখানে tan 90° ও sec 90° সজ্ঞায়িত নয়, কারণ $x = 0$ ।

ব্যবহারের সুবিধার্থে বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানসমূহ ছক আকারে নিম্নে দেখানো হলো।

কোণ $\rightarrow$ অনুপাত $\downarrow$	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

লক্ষনীয়: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানসমূহকে মনে রাখার সহজ নিয়ম–

(ক) 0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\sin 0^o$, $\sin 30^o$, $\sin 45^o$, $\sin 60^o$ এবং $\sin 90^o$ এর মান পাওয়া যায়।

(খ) 4, 3, 2, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cos 0^o$, $\cos 30^o$, $\cos 45^o$, $\cos 60^o$ এবং $\cos 90^o$ এর মান পাওয়া যায়।

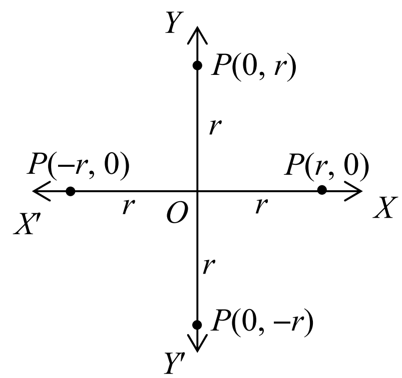
(গ) 0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\tan 0^o$, $\tan 30^o$, $\tan 45^o$ এবং $\tan 60^o$ এর মান পাওয়া যায়। (উলেখ্য যে, $\tan 90^o$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

(ঘ) 9, 3, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cot 30^o$, $\cot 45^o$, $\cot 60^o$, $\cot 90^o$ এর মান পাওয়া যায়। (উলেখ্য যে, $\cot 0^o$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

(ঙ) secant এর মান cosine এর মানের গুণাত্মক বিপরীত এবং cosecant এর মান sine এর মানের গুণাত্মক বিপরীত।

$n\times 90^\circ$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন n একটি পূর্ণ সংখ্যা। এখন XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে y-অক্ষ বিবেচনা করে n এর বিভিন্ন মানের জন্য $\theta = n\times 90^\circ$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নিম্নলিখিতভাবে পাওয়া যায়-



(i) যখন $n = 4k$, যেখানে k একটি পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ যখন $n = 0, 4, 8, 12, ..., -4, -8, -12, ...$ ইত্যাদি তখন প্রান্তিক বাহু OP ধনাত্মক x অক্ষ OX এর উপর পড়ে। সুতরাং P বিন্দুর স্থানাংক হবে $(r, 0)$, যেখানে $OP = r > 0.$

সুতরাং $\sin\theta = \frac{0}{r} = 0,\ \cos\theta = \frac{r}{r} = 1$

(ii) যখন $n = 4k+1$, যেখানে k একটি পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ যখন $n = -3, -7, -11, ..., 1, 5, 9, 13, ...$ ইত্যাদি তখন প্রান্তিক বাহু OP ধনাত্মক y অক্ষ OY এর উপর পড়ে। সুতরাং P বিন্দুর স্থানাংক হবে $(0, r)$, যেখানে $OP = r > 0.$

সুতরাং $\sin\theta = \frac{r}{r} = 1,\ \cos\theta = \frac{0}{r} = 0$

(iii) যখন $n = 4k+2$, যেখানে k একটি পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ যখন $n = -2, -6, -10, ..., 2, 6, 10, ...$ ইত্যাদি তখন প্রান্তিক বাহু OP ঋণাত্মক x অক্ষ OX' এর উপর পড়ে। সুতরাং P বিন্দুর স্থানাংক হবে $(-r, 0)$, যেখানে $OP = r > 0.$

সুতরাং $\sin\theta = \frac{0}{r} = 0,\ \cos\theta = \frac{-r}{r} = -1$

(iv) যখন $n = 4k+3$, যেখানে k একটি পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ যখন $n = -1, -5, -9, ..., 3, 7, 11, ...$ ইত্যাদি তখন প্রান্তিক বাহু OP ঋণাত্মক y অক্ষ OY' এর উপর পড়ে। সুতরাং P বিন্দুর স্থানাংক হবে $(0, -r)$, যেখানে $OP = r > 0.$

সুতরাং $\sin\theta = \frac{-r}{r} = -1,\ \cos\theta = \frac{0}{r} = 0$

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুন, $\sin 45^\circ \sin 60^\circ - \cos 45^\circ \cos 60^\circ$

সমাধানঃ $\sin 45^\circ \sin 60^\circ - \cos 45^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

উদাহরণ 2: মান নির্ণয় করুন, $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\cot^2 30^\circ + \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

সমাধান: $3\tan^2 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \frac{1}{2}\cot^2 30^\circ + \frac{1}{8}\sec^2 45^\circ$

$$= 3(1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$= 3 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{2}{8} = \frac{24-6-12+2}{8} = \frac{26-18}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

উদাহরণ 3: যদি $A = 30^\circ$ হয় তবে প্রমাণ করুন, $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

সমাধান: $\sin 2A = \sin 2.30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার $\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2\tan 30^\circ}{1+\left(\tan 30^\circ\right)^2} = \frac{2.\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

উদাহরণ 4: দেখান যে, $\frac{1+2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} + \frac{1-2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ} = 2\cos 30^\circ$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{1+2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ + \cos 60^\circ} + \frac{1-2\sin 60^\circ \cos 60^\circ}{\sin 60^\circ - \cos 60^\circ}$

$$= \frac{1+2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1-2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2} = \frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{3-1}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

ডানপক্ষ = $2\cos 30^\circ = 2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 5: সমাধান করুন, $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$, যখন θ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ

সমাধানঃ $2\sin^2\theta = 3\cos\theta \Rightarrow 2(1-\cos^2\theta) = 3\cos\theta$

$\Rightarrow 2 - 2\cos^2\theta = 3\cos\theta \Rightarrow 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0 \Rightarrow 2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$

হয় $2\cos\theta - 1 = 0$

$\therefore 2\cos\theta = 1$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{2} = \cos 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

অথবা $\cos\theta + 2 = 0$

$\therefore \cos\theta = -2$ যা সম্ভব নয়

উদাহরণ 6: সমাধান করুন, $\sqrt{3}(\tan\theta + \cot\theta) = 4$ যখন $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

সমাধানঃ $\sqrt{3}(\tan\theta + \cot\theta) = 4 \Rightarrow \sqrt{3}\left(\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}\right) = 4$

$\Rightarrow \sqrt{3}\left(\dfrac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta}\right) = 4 \Rightarrow \sqrt{3}(\tan^2\theta + 1) = 4\tan\theta$

$\Rightarrow \sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow (\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

হয় $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore \tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

$\therefore \sqrt{3}\tan\theta = 1$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ$

যেহেতু $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ, 60^\circ$

সারসংক্ষেপ

- 0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$ এবং $\sin 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়।
- 4, 3, 2, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cos 0^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 60^\circ$ এবং $\cos 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়।
- 0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\tan 0^\circ$, $\tan 30^\circ$, $\tan 45^\circ$ এবং $\tan 60^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উলেখ্য যে, $\tan 90^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।
- 9, 3, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cot 30^\circ$, $\cot 45^\circ$, $\cot 60^\circ$, $\cot 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উলেখ্য যে, $\cot 0^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

- secant এর মান cosine এর মানের গুণাত্মক বিপরীত।
- cosecant এর মান sine এর মানের গুণাত্মক বিপরীত।
- $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$; $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$; $\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$; $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$; $\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$; $\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.৯

মান নির্ণয় করুন (1-4)

1. $3\sin 30^\circ-4\sin^3 30^\circ$
2. $5\sin 90^\circ+3\cos 0^\circ-6\tan 45^\circ-\sec^2 45^\circ$
3. $\cot^2\frac{\pi}{6}-2\cos^2\frac{\pi}{3}-\frac{3}{4}\sec^2\frac{\pi}{4}-4\sin^2\frac{\pi}{6}$
4. $\tan^2\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{3}.\tan\frac{\pi}{6}.\tan^2\frac{\pi}{3}$

প্রমাণ করুন (5-9)

5. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 30^\circ}{1-\cos 30^\circ}}=\sec 60^\circ+\tan 60^\circ$
6. $\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$
7. $1-2\sin^2 30^\circ=2\cos^2 30^\circ-1=\cos 60^\circ$
8. $\dfrac{1-\tan^2 30^\circ}{1+\tan^2 30^\circ}=\dfrac{1}{2}$
9. $\sin^2\frac{\pi}{2}\left(\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{4}+\cot^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{6}\right)=\tan^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{2}\cot^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{4}$
10. $\tan^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}=x\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}$ হলে x-এর মান নির্ণয় করুন।
11. $3\tan^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}-x\cot^2\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}\sec^2\frac{\pi}{4}=1$ হলে x-এর মান নির্ণয় করুন।
12. $A=60^\circ, B=30^\circ$ হলে নিম্নলিখিত সূত্রগুলোর সত্যতা যাচাই করুন।

(i) $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$

(ii) $\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$

(iii) $\tan(A\pm B)=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$

(iv) $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(v) $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

(vi) $\sin 3B=3\sin B-4\sin^3 B$

সমাধান করুন (13-16)

13. $2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=1, \theta$ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ।

14. $\sec^2\theta = 2\tan\theta, \theta$ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ।
15. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = 2\sqrt{3}, \theta$ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ।
16. $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}, \theta$ ধনাত্মক সুক্ষ্মকোণ।

পাঠ ১৩.১০ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন।

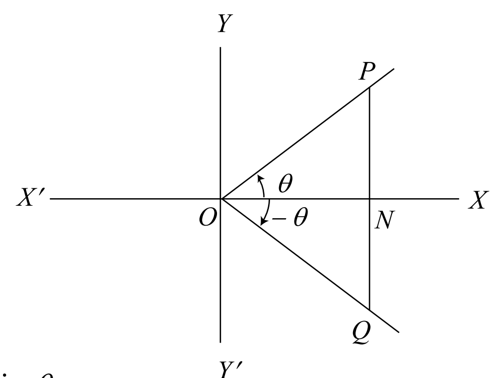
মুখ্য শব্দ	সংযুক্ত কোণ, ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মূলপাঠ

$-\theta, 90^\circ \pm \theta, 180^\circ \pm \theta$........ এরূপ কোণকে θ কোণের সংযুক্ত কোণ বলা হয়। সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের সময় দূরত্বের চিহ্নগুলো অবশ্যই বিবেচনা করতে হবে। তবে স্মরণ রাখতে হবে যে ব্যাসার্ধ ভেক্টর সব সময়ই ধনাত্মক। এরূপ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়।

$(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle XOQ = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। এখন P বিন্দু থেকে OX এর উপর PN লম্ব অংকন করুন। PN কে বর্ধিত করলে তা OQ রেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।



মনে করুন, P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (x, y) ও (x_1, y_1)

তাহলে $|ON| = x,\ |PN| = y$ এবং $|ON| = x_1,\ |QN| = y_1$

এখন OPN ও OQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় হতে পাই,

$\angle PON = \angle QON, \angle ONP = \angle ONQ$ এবং ON সাধারণ বাহু।

সুতরাং, ΔOPN ও ΔOQN সর্বসম

$\therefore\ |PN| = |QN|;\ |OP| = |OQ| = r$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)

স্থানাঙ্কের চিহ্ন বিবেচনা করে পাই, $x_1 = x, y_1 = -y$

সুতরাং, $\sin(-\theta) = \sin QON = \dfrac{y_1}{r} = \dfrac{-y}{r} = -\sin PON = -\sin\theta$

$$\cos(-\theta) = \cos QON = \frac{x_1}{r} = \frac{x}{r} = \cos PON = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \tan QON = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\tan PON = -\tan\theta$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

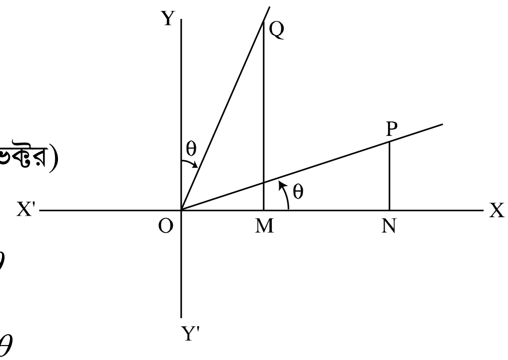
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

($90° - \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OX অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি একই আদি অবস্থান OX হতে একই দিকে ঘুরে $\angle XOY = 90°$ কোণ উৎপন্ন করার পর OY অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle YOQ = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 90° - \theta$

এখন $OP = OQ$ রেখা নিন এবং P ও Q হতে OX রেখার উপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব অংকন করুন।

মনে করুন, P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (x, y) ও (x_1, y_1)



তাহলে $|ON| = x,\ |PN| = y$ এবং $|OM| = x_1,\ |QM| = y_1$

এখন ΔOPN ও ΔOQM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\angle PON = \angle OQM$ এবং $OP = OQ$ সুতরাং, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব, $|QM| = |ON|;\ |OM| = |PN|;\ |OP| = |OQ| = r$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)

অর্থাৎ, $y_1 = x, x_1 = y$

সুতরাং, $\sin (90° - \theta) = \sin XOQ = \dfrac{y_1}{r} = \dfrac{x}{r} = \cos XOP = \cos \theta$

$\cos (90° - \theta) = \cos XOQ = \dfrac{x_1}{r} = \dfrac{y}{r} = \sin XOP = \sin \theta$

$\tan (90° - \theta) = \tan XOQ = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{x}{y} = \cot XOP = \cot \theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec} (90° - \theta) = \sec \theta$

$\sec (90° - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$

$\cot (90° - \theta) = \tan \theta$

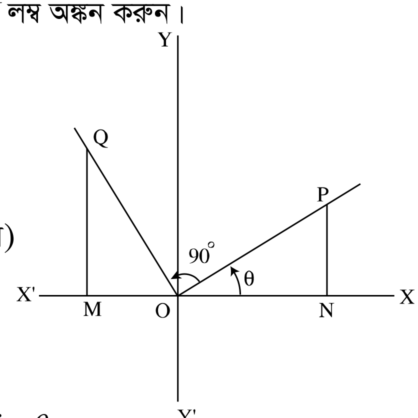
দ্রষ্টব্য: $90° - \theta$ এবং θ পরস্পরের পরিপূরক কোণ। দুইটি পরিপূরক কোণের জন্য একটির sine অপরটির cosine, একটির tangent অপরটির cotangent এবং একটির cosecant অপরটির secant এর সমান। যেমন, $30°$ ও $60°$ কোণ পরস্পরের পরিপূরক। অতএব $\sin 30° = \cos 60°$ বা $\sin 60° = \cos 30°$, $\tan 30° = \cot 60°$ বা $\tan 60° = \cot 30°$, $\operatorname{cosec} 30° = \sec 60°$ বা $\operatorname{cosec} 60° = \sec 30°$

($90° + \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। ঐ একই রেখা একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 90°$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\angle XOQ = 90° + \theta$

এখন $OP = OQ$ নিন এবং P ও Q হতে x অক্ষের উপর যথাক্রমে PN ও QM লম্ব অঙ্কন করুন।

মনে করুন, P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (x, y) ও (x_1, y_1)



তাহলে $|ON| = x,\ |PN| = y$ এবং $|OM| = x_1,\ |QM| = y_1$

এখন ΔOPN ও ΔOQM সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\angle PON = \angle QOY = \angle OQM$ এবং $OP = OQ,$ সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব, $|QM| = |ON|;\ |OM| = |PN|;\ |OP| = |OQ| = r$ (ব্যাসার্ধ ভেক্টর)

স্থানাংকের চিহ্ন পর্যালোচনা করে পাই, $y_1 = x, x_1 = -y$

সুতরাং, $\sin (90° + \theta) = \sin XOQ = \dfrac{y_1}{r} = \dfrac{x}{r} = \cos XOP = \cos \theta$

$\cos (90° + \theta) = \cos XOQ = \dfrac{x_1}{r} = \dfrac{-y}{r} = -\sin XOP = -\sin \theta$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \tan XOQ = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{-y} = -\cot XOP = -\cot\theta$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$

$\sec(90^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$

($180^\circ - \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পূর্বের নিয়ম অনুসরণ করে জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ($180^\circ - \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। কিন্তু নিম্নের পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা সহজে ($180^\circ - \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারি।

সুতরাং, $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\cos(180^\circ - \theta) = \cos\{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\sin(90^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180^\circ - \theta) = \tan\{90^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cot(90^\circ - \theta) = -\tan\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta$

$\cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta$

($180^\circ + \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে ($180^\circ + \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়। আবার নিম্নের পদ্ধতি অনুসরণ করে আমরা সহজেই ($180^\circ + \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করা যায়।

সুতরাং, $\sin(180^\circ + \theta) = \sin\{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = \cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$

$\cos(180^\circ + \theta) = \cos\{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\sin(90^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\{90^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\cot(90^\circ + \theta) = -(-\tan\theta) = \tan\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta$

$\cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta$

($270^\circ - \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$\sin(270^\circ - \theta) = \sin\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\sin(90^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ - \theta) = \cos\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta$

$\tan(270^\circ - \theta) = \tan\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$

$\sec(270^\circ - \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\cot(270^\circ - \theta) = \tan\theta$

($270^\circ + \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

$\sin(270^\circ + \theta) = \sin\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\sin(90^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ + \theta) = \cos\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = -\cos(90^\circ + \theta) = -(-\sin\theta) = \sin\theta)$

$\tan(270^\circ + \theta) = \tan\{180^\circ + (90^\circ + \theta)\} = \tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(270^\circ + \theta) = -\sec\theta$

$\sec(270^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\cot(270^\circ + \theta) = -\tan\theta$

($360° \pm \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

প্রমিত অবস্থানে ($360° - \theta$) এবং ($360° + \theta$) কোণ দুইটি যথাক্রমে ($-\theta$) ও θ কোণের সংগে মিলে যায়। সুতরাং, ($360° - \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ($-\theta$) কোণের সংশ্লিষ্ট অনুপাতের সমান এবং ($360° + \theta$) কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত θ কোণের সংশ্লিষ্ট অনুপাতের সমান।

অতএব, $\sin(360° - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(360° - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(360° - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\operatorname{cosec}(360° - \theta) = \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(360° - \theta) = \sec(-\theta) = \sec\theta$

$\cot(360° - \theta) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$

এবং, $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$

$\cos(360° + \theta) = \cos\theta$

$\tan(360° + \theta) = \tan\theta$

$\operatorname{cosec}(360° + \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\sec(360° + \theta) = \sec\theta$

$\cot(360° + \theta) = \cot\theta$

সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের নিয়ম

(i) যদি θ কোণটি $90°$-এর জোড় গুণিতকের সাথে যোগ অথবা বিয়োগ হয় ($180° \pm \theta$, $360° \pm \theta$), তবে সেই কোণের অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করলে মূল অনুপাতের কোনরূপ পরিবর্তন হয় না। অর্থাৎ sine, cosine, tangent ইত্যাদি sine, cosine, tangent-ই থাকে। কিন্তু তার চিহ্ন ধনাত্মক না ঋণাত্মক হবে তা নির্ণয় করার জন্য θ কোণকে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরে কোণটি কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করে তা নির্ণয় করে চিহ্নের চতুর্ভাগ নির্ণয় নিয়ম অনুযায়ী সহজেই নির্ণয় করা যায়।

(ii) যদি θ কোণটি $90°$-এর বিজোড় গুণিতকের সাথে যোগ অথবা বিয়োগ হয় ($90° \pm \theta$, $270° \pm \theta$,....... ইত্যাদি), তবে সেই কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতে প্রকাশ করলে sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant পরিবর্তিত হয়ে যথাক্রমে cosine, sine, cotangent, tangent, cosecant, secant হয়। কিন্তু তার চিহ্ন ধনাত্মক না ঋণাত্মক হবে তা নির্ণয় করার জন্য θ কোণকে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ ধরে মূল কোণটি কোন্ চতুর্ভাগে অবস্থান করে তা নির্ণয় করে চিহ্নের চতুর্ভাগ নিয়ম অনুযায়ী সহজেই নির্ণয় করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.১০

1. সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয় করুন।

পাঠ ১৩.১১ সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত: সমস্যা ও সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সমস্যা সমাধানে সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূলপাঠ

পূর্বের পাঠে আপনারা সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করেছেন। বর্তমান পাঠে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে অনুপাতসমূহ প্রয়োগ করতে পারবেন।

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুন, (i) $\sin 2370^\circ$ (ii) $\sec 510^\circ$ (iii) $\tan(-1590^\circ)$

সমাধান: (i) $\sin(2370^\circ) = \sin(26\times90^\circ+30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: এখানে ঘূর্ণমান রশ্মি যদি আদি অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণন শুরু করে 2370° কোণ উৎপন্ন করার পর তৃতীয় চৌকণে অবস্থান করবে। যেহেতু কোণটি $n\times90^\circ+\theta$ (যখন n জোড় সংখ্যা) আকারের sin অপরিবর্তিত থাকবে এবং যেহেতু তৃতীয় চৌকণে sin ঋণাত্মক ফলে চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

(ii) $\sec(510^\circ) = \sec(5\times90^\circ+60^\circ) = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) $\tan(-1590^\circ) = -\tan(1590^\circ)$ [যেহেতু $\tan(-\theta) = -\tan\theta$]

$$= -\tan(17\times90^\circ+60^\circ) = -(-\cot 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

উদাহরণ 2: মান নির্ণয় করুন, (i) $\cos 198^\circ + \sin 432^\circ + \tan 168^\circ + \tan 12^\circ$

(ii) $\sin 420^\circ \,.\, \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ) \,.\, \sin(-330^\circ)$

সমাধান: (i) $\cos 198^\circ + \sin 432^\circ + \tan 168^\circ + \tan 12^\circ$

$$= \cos(2\times90^\circ+18^\circ) + \sin(5\times90^\circ-18^\circ) + \tan(2\times90^\circ-12^\circ) + \tan 12^\circ$$

$$= -\cos 18^\circ + \cos 18^\circ - \tan 12^\circ + \tan 12^\circ = 0$$

(ii) $\sin 420^\circ.\cos 390^\circ + \cos(-300^\circ).\sin(-330^\circ)$

$$= \sin(5\times90^\circ-30^\circ)\,.\,\cos(4\times90^\circ+30^\circ) - \cos(3\times90^\circ+30^\circ).\sin(3\times90^\circ+60^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ\,.\,\cos 30^\circ - (\sin 30^\circ)\,.\,(-\cos 60^\circ) \quad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

উদাহরণ 3: মান নির্ণয় করুন, (i) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

(ii) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$

সমাধান: (i) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

$$= \{\sin(\pi - \frac{\pi}{18})\}^2 + \{\sin(\pi - \frac{3\pi}{8})\}^2 + \{\cos(2\pi + \frac{\pi}{18})\}^2 + \cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= \sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$$

$$= (\sin^2\frac{\pi}{18} + \cos^2\frac{\pi}{18}) + (\sin^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8}) = 1 + 1 = 2$$

(ii) $\sec^2\frac{14\pi}{17} - \sec^2\frac{39\pi}{17} + \cot^2\frac{41\pi}{34} - \cot^2\frac{23\pi}{34}$

$$= \{\sec(\pi - \frac{3\pi}{17})\}^2 + \{\sec(2\pi + \frac{5\pi}{17})\}^2 + \{\cot(\pi + \frac{7\pi}{34})\}^2 - \{\cot(\pi - \frac{11\pi}{34})\}^2$$

$$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \cot^2\frac{7\pi}{34} - \cot^2\frac{11\pi}{34}$$

$$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \{\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{17})\}^2 - \{\cot(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{17})\}^2$$

$$= \sec^2\frac{3\pi}{17} - \sec^2\frac{5\pi}{17} + \tan^2\frac{5\pi}{17} - \tan^2\frac{3\pi}{17}$$

$$= 1 + \tan^2\frac{3\pi}{17} - 1 - \tan^2\frac{5\pi}{17} + \tan^2\frac{5\pi}{17} - \tan^2\frac{3\pi}{17} = 0$$

উদাহরণ 4: দেখান যে, $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta)\cos(\pi - \theta) = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)\cot(\frac{\pi}{2} + \theta)$

সমাধান: বামপক্ষ $= \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta)\cos(\pi - \theta)$

$$= \sin(\frac{\pi}{2} + \theta)\cot(3 \times \frac{\pi}{2} + \theta)\cos(\pi - \theta) = \cos\theta\,(-\tan\theta)\,(-\cos\theta)$$

$$= \cos\theta.\tan\theta.\cos\theta = \cos\theta.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta = \sin\theta.\cos\theta$$

ডানপক্ষ $= \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta.(-\cos\theta).(-\tan\theta)$

$$= \cos\theta.(-\tan\theta).(-\cos\theta) = \cos\theta.\tan\theta.\cos\theta = \cos\theta.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta = \sin\theta.\cos\theta$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

উদাহরণ 5: যদি n-এর মান শুন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা হয় তবে, $\sin\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: যখন $n = 0$, তখন $\sin\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

যদি n জোড় সংখ্যা এবং m একটি অখন্ড সংখ্যা হয় তবে, $n = 2m$

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\} = \sin\{2m\pi + (-1)^{2m}\frac{\pi}{4}\} = \sin(2m\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

আবার, n বিজোড় সংখ্যা হলে তবে, $n = 2m + 1$ হবে

$$\therefore \sin\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}\} = \sin\{(2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\frac{\pi}{4}\}$$

$= \sin (2m\pi + \pi - \frac{\pi}{4}) = \sin (\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

সুতরাং n-এর মান শুন্য অথবা যে কোন অখন্ড সংখ্যা হলে আমরা পাই, $\sin \{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

উদাহরণ 6: সমাধান করুন $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{3} = 0$, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 2\pi$

সমাধানঃ $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \tan\theta.\cos\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta + \sqrt{3} - \tan\theta.\cos\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$

বা, $(\tan\theta + \sqrt{3}) - \cos\theta (\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta + \sqrt{3})(1 - \cos\theta) = 0$

হয়, $\tan\theta + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = -\tan\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$ অথবা, $\tan(2\pi - \frac{\pi}{3})$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan\frac{2\pi}{3}$ অথবা, $\tan\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

অথবা, $1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \cos 0^\circ$ অথবা, $\cos 2\pi$

$\therefore \theta = 0^\circ, 2\pi$

যেহেতু, $0^\circ \leq \theta \leq 2\pi$

$\therefore \theta = 0^\circ, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

উদাহরণ 7: সমাধান করুন $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$, যখন $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

সমাধানঃ $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - 2\cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$

বা, $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -1 = \cos 180^\circ$

$\therefore \theta = 180^\circ$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0 \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \cos 60^\circ = \cos(360^\circ - 300^\circ)$

$\therefore \theta = 60^\circ, 300^\circ$

যেহেতু, $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

$\therefore\ \theta = 60^\circ, 180^\circ, 360^\circ$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.১১

মান নির্ণয় করুন (1-4)

1. (i) $\sin 675^\circ$ (ii) $\cot 2190^\circ$ (iii) $\text{cosec } 765^\circ$ (iv) $\sec(-2580^\circ)$ (v) $\cot(-1560^\circ)$
2. (i) $\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right)$ (ii) $\text{cosec}\frac{16\pi}{3}$ (iii) $\tan\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{19\pi}{3}\right)$
3. (i) $\sin 105^\circ + \sin 255^\circ + \cos 450^\circ + \cos 540^\circ$ (ii) $\cos 420^\circ \sin(-300^\circ) - \sin 870^\circ \cos 570^\circ$

   (iii) $\tan 225^\circ \cot 405^\circ + \tan 765^\circ \cot 675^\circ$ (iv) $\dfrac{\sin 250^0 + \tan 290^0}{\cot 200^0 + \cos 340^0}$
4. (i) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$

   (ii) $\cos^2\frac{\pi}{24} + \cos^2\frac{19\pi}{24} + \cos^2\frac{31\pi}{24} + \cos^2\frac{37\pi}{24}$

   (iii) $\sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$
5. দেখান যে,

   (i) $\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\cos(3\pi-\theta)\cot\left(\frac{7\pi}{2}+\theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cot\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)$

   (ii) $\cos^2(3\pi+\theta)\,\text{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cot\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right) = \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec(4\pi-\theta)\tan(3\pi-\theta) = -\sin\theta$
6. n- একটি অখন্ড পূর্ণ সংখ্যা হলে মান নির্ণয় করুন,

   (i) $\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ (ii) $\sin\left\{n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$ (iii) $\text{cosec}\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{6}\right\}$
7. দেখান যে, $\tan\theta = \dfrac{\sin(\theta-\pi)\cot\left(\theta-\frac{7\pi}{2}\right)\sec(\theta-\pi)}{\cos\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\text{cosec}\left(\theta+\frac{5\pi}{2}\right)}$
8. নিম্নের সমীকরণগুলো হতে θ-এর মান নির্ণয় করুন,

   (i) $\sec\theta = -2$, যখন $90^\circ < \theta < 180^\circ$ (ii) $\tan\theta = -\sqrt{3}$, যখন $270^\circ < \theta < 360^\circ$

   (iii) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, যখন $360^\circ < \theta < 540^\circ$
9. সমাধান করুন: যখন $0^\circ < \theta < 360^\circ$

   (i) $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$ (ii) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

   (iii) $1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta = 0$ (iv) $\tan^2\theta + \sec\theta = -1$

   (v) $3\tan^2\theta - 4\sqrt{3}\sec\theta + 7 = 0$ (vi) $\cot\theta + \tan\theta = 2\sec\theta$

   (vii) $\cot\theta + \text{cosec}\,\theta = \sqrt{3}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

1. ষাটমূলক পদ্ধতিতে কোণ পরিমাপের একক নিচের কোনটি?
(ক) ডিগ্রি (খ) গ্রেড (গ) রেডিয়ান (ঘ) কোনটিই নয়

2. 1^o এর 60 ভাগের এক ভাগ সমান কত?
(ক) $1'$ (খ) $15'$ (গ) $30'$ (ঘ) $60'$

3. একটি চাকার ব্যাসার্ধ 10 সে.মি.। চাকাটি একবার ঘুরলে কত সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করবে?
(ক) 5π (খ) 10π (গ) 15π (ঘ) 20π

4. r ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত কত?
(ক) $1:r$ (খ) $r:1$ (গ) π (ঘ) π একক

5. ষাটমূলক পদ্ধতিতে-
(i) $1^o = 60'$
(ii) $1' = 60''$
(iii) 1 সমকোণ $= 5400'$
উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

6. $s = r\theta$ সূত্রে θ কে কোন্ এককে প্রকাশ করতে হয়?
(ক) ডিগ্রি (খ) রেডিয়ান (গ) গ্রেড (ঘ) সেকেন্ড

7. কোনো চাপ বৃত্তের পরিধির সাথে $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করলে -
(i) কেন্দ্রে π রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করবে।
(ii) উপচাপ ও অধিচাপ সমান হবে।
(iii) চাপটি হবে বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।
উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

▶ নিচের তথ্য থেকে 8-10 নং প্রশ্নের উত্তর দিন:
একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3:4:5$ ।

8. ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটির বৃত্তীয় মান কত?
(ক) $\frac{\pi}{6}$ (খ) $\frac{\pi}{4}$ (গ) $\frac{\pi}{3}$ (ঘ) $\frac{5\pi}{12}$

9. ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোণটির মান ষাটমূলক পদ্ধতিতে কত?
(ক) 30^o (খ) 45^o (গ) 60^o (ঘ) 75^o

10. ত্রিভুজটি কোন ধরনের ত্রিভুজ?
(ক) সূক্ষ্মকোণী (খ) সমকোণী (গ) স্থূলকোণী (ঘ) কোনটিই নয়

11. sine এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নিচের কোনটি?
(ক) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ (খ) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ (গ) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ (ঘ) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

12. cosine এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নিচের কোনটি?
(ক) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ (খ) $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ (গ) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ (ঘ) $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

13. $\cot\theta$ হলো-

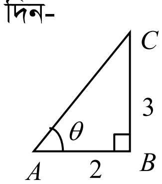
(i) $\dfrac{1}{\tan\theta}$ (ii) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (iii) $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোন্‌টি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

▶ নিচের তথ্যের আলোকে 14-17 নং প্রশ্নের উত্তর দিন-

পাশের চিত্রে ΔABC-এ θ সূক্ষকোণ



14. $AC =$ কত?

(ক) 4 (খ) 5 (গ) $\sqrt{13}$ (ঘ) $\sqrt{15}$

15. $\sin\theta$ এর মান কত?

(ক) $\dfrac{3}{2}$ (খ) $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (গ) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ (ঘ) $\dfrac{2}{3}$

16. $\cos\theta$ এর মান কত?

(ক) $\dfrac{3}{2}$ (খ) $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (গ) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ (ঘ) $\dfrac{2}{3}$

17. $\tan\theta$ এর মান কত?

(ক) $\dfrac{3}{2}$ (খ) $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ (গ) $\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ (ঘ) $\dfrac{2}{3}$

18. $\sin\theta + \cos\theta = 1$ হলে, θ এর মান-

(i) 0° (ii) 30° (iii) 90°

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোন্‌টি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

19. $A = 30^\circ,\ B = 60^\circ$ হলে $\cos(A+B)$ এর মান কত?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) -1 (ঘ) $\dfrac{1}{2}$

20. -305° কোণটি কোন চতুর্ভাগে থাকবে?

(ক) প্রথম (খ) দ্বিতীয় (গ) তৃতীয় (ঘ) চতুর্থ

21. $\cos(-330^\circ)$ এর মান কত?

(ক) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (খ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (গ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (ঘ) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

▶ নিচের তথ্যের আলোকে 22-23 নং প্রশ্নের উত্তর দিন-

$$A = \cos(\pi + x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

22. A এর মান কত?

(ক) $\sin x$ (খ) $-\sin x$ (গ) $\cos x$ (ঘ) $-\cos x$

23. x এর মান কত রেডিয়ান?

(ক) $\dfrac{\pi}{6}$ (খ) $\dfrac{\pi}{4}$ (গ) $\dfrac{\pi}{3}$ (ঘ) $\dfrac{\pi}{2}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

24. ক ও খ স্থান দুইটি পৃথিবীর কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R এবং স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব S।
   (ক) দেখান যে, পৃথিবীর পরিধি $2\pi R$ [পৃথিবীকে বৃত্ত মনে করে]।
   (খ) R এবং S এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করুন।
   (গ) যদি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি. হয় এবং ক ও খ স্থান দুইটি পৃথিবীর কেন্দ্রে $32^{o}35'7''$ কোণ উৎপন্ন করে তবে স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব কত নির্ণয় করুন।
25. একটি চাকা 0.88 কিলোমিটার পথ যেতে 20 বার ঘোরে।
   (ক) চাকাটি একবার ঘুরলে অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করুন।
   (খ) চাকাটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।
   (গ) চাকাটির ব্যাসার্ধের সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোনো বৃত্তের ১১ মিটার দীর্ঘ চাপের সম্মুখস্থ কোণের পরিমাণ নির্ণয় করুন।
26. যদি $\cot\theta + \text{cosec}\theta = a$ হয় তবে
   (ক) $\text{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় করুন।
   (খ) প্রমাণ করুন যে, $\cos\theta = \dfrac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$
   (গ) দেখান যে, $(a^2+1)\cos\theta + (a^2+1)\sin\theta = (a+1)^2 - 2$
27. $A = \dfrac{\pi}{3}$ ও $B = \dfrac{\pi}{6}$ হলে
   (ক) $\cos(A+B)$ ও $\cos(A-B)$ এর মান নির্ণয় করুন।
   (খ) প্রমাণ করুন যে, $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$
   (গ) প্রমাণ করুন যে, $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A\sin B$
28. যদি $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ হয় তবে
   (ক) $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$ রেডিয়ানের জন্য $\cos\theta - \sin\theta$ এর মান নির্ণয় করুন।
   (খ) প্রমাণ করুন যে, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$
   (গ) দেখান যে, $\cos ec\theta = 2\sqrt{2}\cos\theta$

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.১

1. (i) ১ম চতুর্ভাগে (ii) ৩য় চতুর্ভাগে (iii) ৩য় চতুর্ভাগে (iv) ৪র্থ চতুর্ভাগে

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.৪

1. (i) $0.111\pi^c$ (ii) $0.224\pi^c$ (iii) $0.251\pi^c$

2. (i) $20°50'11.5''$ (ii) $4°31'6.4''$ (iii) $12°$ 3. 19 মি. 4. 102.5 5. 0.636 মিটার

6. 85 কি.মি. (প্রায়) 7. $\frac{1}{2}(1-\frac{\pi}{180})$ 8. $30°, 60°, 90°, \frac{\pi^c}{6}, \frac{\pi^c}{3}, \frac{\pi^c}{2}$ 11. 1080 ফুট

12. 37.3 ফুট (প্রায়) 13. (i) $\frac{19\pi}{24}$, $142°30'$, 158.3^g (ii) $\frac{\pi}{2}$, $90°$, 100^g (iii) $\frac{5\pi}{9}$, $100°$, 111.1^g

14. 221.58 মাইল (প্রায়) 15. 13.87×10^7 কি.মি. (প্রায়) 16. 1 কি.মি. (প্রায়)

17. 1:720 18. 3.61 মাইল (প্রায়)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.৮

17. (i) $\pm\frac{5}{13}, \pm\frac{12}{5}$ (ii) $\pm\frac{40}{9}, \pm\frac{41}{40}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.৯

1. 1 2. 0 3. 0 4. $\frac{3}{2}$ 10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 11. $\frac{1}{2}$ 13. 30^o 14. 45^o

15. 30^o 16. 45^o

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৩.১১

1. (i) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\sqrt{3}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 2 (v) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. (i) -1 (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) 0 (iv) -1

4. (i) 2 (ii) 2 (iii) 3

6. (i) 1 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\pm2, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

8. (i) $120°$ (ii) $300°$ (iii) $420°$

9. (i) $60°, 120°$ (ii) $120°, 240°$ (iii) $30°, 135°, 150°$ ও $315°$
 (iv) $180°$ (v) $30°, 330°$ (vi) $30°, 150°$ (vii) $60°$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. ক 2. ক 3. ঘ 4. ঘ 5. ঘ 6. খ 7. ঘ 8. ঘ 9. খ 10. ক 11. খ 12. ঘ 13. খ
14. গ 15. খ 16. গ 17. ক 18. খ 19. ক 20. ক 21. খ 22. ঘ 23. ক
24. (খ) $S = R\theta$ (গ) 3662.43 কি.মি.
25. (ক) 44 মিটার (খ) 7.006 মিটার (গ) 1.57 রেডিয়ান
26. (ক) $\frac{1}{a}$ 27. (ক) $0, \frac{\sqrt{3}}{2}$ 28. (ক) $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$