ঘন জ্যামিতি
Solid Geometry

ইউনিট
১২

ভূমিকা

বিন্দু, রেখা ও তলের ধারণা সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। সেখানে আপনারা লক্ষ্য করেছেন যে, বিন্দুর মাত্রা নেই কিন্তু অবস্থান আছে। বিন্দুর বিরামহীন সঞ্চারণের ফলে রেখার সৃষ্টি হয় এবং রেখার সৃষ্টি হয় এবং রেখার বিস্তৃতি উভয়দিকে সীমাহীন। আবার রেখার বিরামহীন সঞ্চারণে তলের সৃষ্টি হয় এবং তলের বিস্তৃতিও সীমাহীন। ঘন জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা ও তল মৌলিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করা হয়।

যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে তাকে ঘনবস্তু বলা হয়। দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটিকেই ঐ বস্তুর মাত্রা বলা হয়। সুতরাং ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক। গণিতের যে শাখায় এই তিনটি মাত্রা সাপেক্ষে বিন্দু, রেখা ও তলের ধর্ম সম্পর্কে আলোচনা করা হয় তাকে ঘন জ্যামিতি বলা হয়। বর্তমান ইউনিটে আমরা ঘন জ্যামিতি সম্পর্কে আলোচনা করবো।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- ঘনবস্তুর কতিপয় সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন,
- ঘনবস্তুর কতিপয় প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করবেন,
- বিভিন্ন ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ----- দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১২.১ ঘন জ্যামিতির মৌলিক ধারণা ও কতিপয় সংজ্ঞা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ঘন জ্যামিতির মৌলিক ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ঘনবস্তু সম্পর্কিত কতিপয় সংজ্ঞা সম্পর্কে বলতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমতল, বক্রতল, একতলীয়, নৈকতলীয়, সমান্তরাল, লম্ব, তীর্যক, অভিক্ষেপ

মূলপাঠ

মৌলিক ধারণা

আপনারা গণিত পাঠ্যপুস্তকে বিন্দু, রেখা ও তল ইত্যাদি মৌলিক ধারণা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করেছেন। ঘন জ্যামিতিতেও বিন্দু, রেখা ও তল ইত্যাদিকে মৌলিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করা হয়।১। বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটিকে ঐ বস্তুর মাত্রা (dimension) বলা হয়।

২। বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। এটি একটি ধারণা। বাস্তবে বোঝার জন্যে আমরা একটি ডট (.) ব্যবহার করে থাকি। একে অবস্থানের প্রতিরূপ বলা যেতে পারে। সুতরাং আমরা বলতে পারি বিন্দুর কোন মাত্রা নেই, অর্থাৎ বিন্দু শূন্য মাত্রিক।

৩। রেখার কেবলমাত্র দৈর্ঘ্য আছে কিন্তু প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। তাই রেখা একমাত্রিক।

৪। তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে কিন্তু উচ্চতা নেই। তাই তল দ্বিমাত্রিক।

৫। যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে, তাকে ঘনবস্তু বলা হয়। সুতরাং ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক।

ঘনবস্তুর কতিপয় সংজ্ঞা

ঘন জ্যামিতি (Solid geometry): গণিত শাস্ত্রের যে শাখার সাহায্যে ঘনবস্তু এবং বিন্দু, রেখা ও তলের ধর্ম জানা যায়, তাকে ঘন জ্যামিতি বলা হয়। কখনও কখনও একে ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিও (Three dimensional Geometry) বলা হয়।

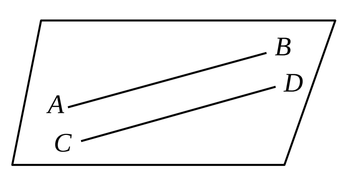
সমতল (Plane surface): কোন তলের উপরস্থ যে কোন দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ যদি সম্পূর্ণভাবে ঐ তলের উপরই অবস্থান করে তবে সেই তলকে সমতল বলে। ঘরের মেঝে, টেবিলের উপরিভাগ ইত্যাদি সমতলের বাস্তব উদাহরণ।

বক্রতল (Curved surface): কোন তলের উপরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি সম্পূর্ণভাবে ঐ তলের উপর অবস্থান না করে, তবে সেই তলকে বক্রতল বলে। ফুটবলের পৃষ্ঠতল বক্রতলের একটি বাস্তব উদাহরণ।

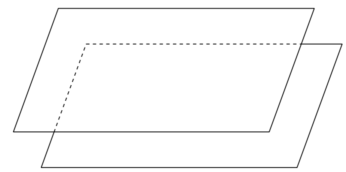
একতলীয় রেখা (Coplanar lines): যদি একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত হয় বা যদি একাধিক সরলরেখার মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন করা সম্ভব হয়, তবে ঐ সরলরেখাগুলোকে একতলীয় সরলরেখা বলে।

নৈকতলীয় সরলরেখা (Skew lines or non-coplanar line): দুই বা ততোধিক সরলখেরা একই সমতলে অবস্থিত না হলে অথবা তাদের মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন করা সম্ভব না হলে এগুলোকে তাদেরকে নৈকতলীয় রেখা বলে। যেমন, দুইটি পেন্সিলকে একটির উপর আর একটি দিয়ে যোগ বা গুণচিহ্ন আকৃতির একটি বস্তু তৈরি করলেই দুইটি নৈকতলীয় সরলরেখা উৎপন্ন হবে।

সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel lines): যদি দুইটি একতলীয় সরলরেখার কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে অর্থাৎ দুইটি একতলীয় সরলরেখা যদি পরস্পরকে ছেদ না করে এবং যদি তাদের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে তাদেরকে সমান্তরাল সরলরেখা বলে।



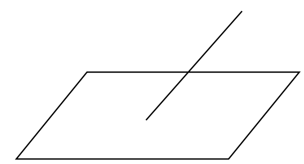
সমান্তরাল তল (Parallel plane): যদি দুইটি সমতল তাদের সীমাহীন বিস্তৃতিতে কোথাও মিলিত না হয় অর্থাৎ যদি তাদের কোনো সাধারণ রেখা না থাকে, তবে ঐ তলদ্বয়কে সমান্তরাল সমতল বলা হয়।



সমতলের সমান্তরাল রেখা: যদি একটি সরলরেখা ও একটি সমতল তাদের সীমাহীন বিস্তৃতিতে কোথাও মিলিত না হয় অর্থাৎ অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও যদি তারা পরস্পর ছেদ না করে, তবে ঐ সরলরেখাকে উক্ত সমতলের সমান্তরাল রেখা বলা হয়।

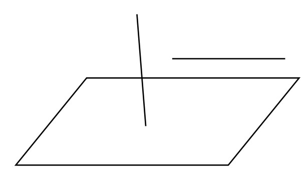
তলের লম্ব রেখা: কোন সমতলের উপরস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত যে কোন রেখার উপর লম্ব রেখাকে ঐ সমতলের উপর লম্ব বলা হয়।

তীর্যক রেখা (Oblique lines): কোন সরলরেখা একটি সমতলের সাথে সমান্তরাল বা লম্ব না হলে, ঐ রেখাকে সমতলের তীর্যক রেখা বলে।



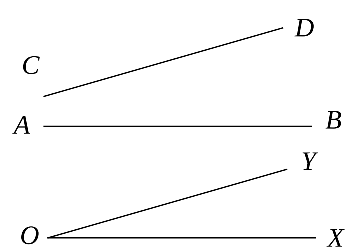
উলম্ব রেখা বা তল: স্থির অবস্থায় ঝুলন্ত ওজনের সুতার সাথে সমান্তরাল রেখা বা তলকে উলম্ব রেখা বা উলম্ব তল বলে।

অনুভূমিক তল (Horizontal plane): কোন সমতল একটি খাড়া সরলরেখার সাথে লম্ব হলে, তাকে শয়ান বা অনুভূমিক তল বলা হয়।
অনুভূমিক রেখা: কোন অনুভূমিক তলে অবস্থিত যে কোন সরলরেখাকে অনুভূমিক রেখা বলে।

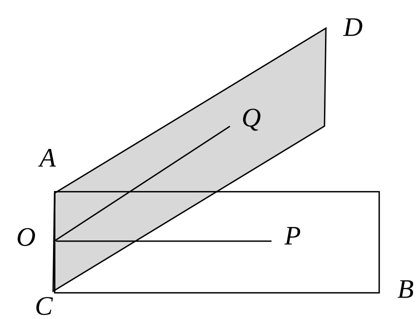


সমতল ও নৈকতলীয় চতুর্ভুজ: কেনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে এই তলে অবস্থিত হলে, তাকে সমতল চতুর্ভুজ বলা হয়। আবার কেনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে একই তলে অবস্থিত না হলে, ঐ চতুর্ভুজকে নৈকতলীয় চতুর্ভুজ বলা হয়। নৈকতলীয় চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু একতলে এবং অপর দুইটি অন্য তলে অবস্থিত। সুতরাং কেনো নৈকতলীয় চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় নৈকতলীয়।

নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ: দুইটি নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ তাদের যেকোনো একটি ও তার উপরস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত অপরটির সমান্তরাল রেখার অন্তর্গত কোণের সমান। আবার দুইটি নৈকতলীয় রেখার প্রত্যেকের সমান্তরাল দুইটি রেখা কোন বিন্দুতে অঙ্কন করলে ঐ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাণও নৈকতলীয় রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান।
মনে করুন, AB ও CD দুইটি নৈকতলীয় রেখা। যে কোনো O বিন্দুতে AB ও CD এর সমারাল যথাক্রমে OX এবং OY রেখাদ্বয় অঙ্কন করলে $\angle XOY$ ই AB ও CD এর অন্তর্গত কোণ নির্দেশ করবে।



দ্বিতল কোণ (Dihedral angle): দুইটি সমতল সরলরেখায় ছেদ করলে তাদের ছেদ রেখাস্থ যে কোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলদ্বয়ের প্রত্যেকের উপর ঐ ছেদ রেখার সাথে লম্ব এরূপ একটি করে রেখা অঙ্কন করলে উৎপন্ন কোণই ঐ সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ।
চিত্রে AB ও CD সমতলদ্বয় AC রেখায় পরস্পর ছেদ করেছে। AC রেখাস্থ O বিন্দুতে AB সমতলে OP এবং CD সমতলে OQ এরূপ দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করা হলো যেন তারা উভয়ই AC এর সঙ্গে O বিন্দুতে লম্ব হয়।

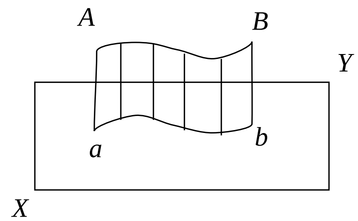


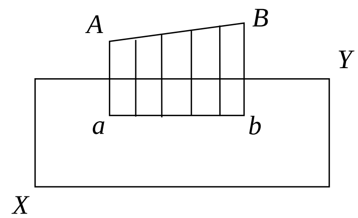
তাহলে $\angle POQ$-ই AB ও CD সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ সূচিত করে। দুইটি পরস্পচ্ছেদী সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণের পরিমাণ এক সমকোণ হলে, ঐ সমতলদ্বয় পরস্পর লম্ব।

অভিক্ষেপ (Projection): কোনো বিন্দু থেকে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর বা কোনো সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বরেখার পাদবিন্দুকে ঐ রেখা বা সমতলের উপর উক্ত বিন্দুর পাতন বা অভিক্ষেপ বলা হয়।

কোনো সরলরেখা বা বক্ররেখার সকল বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বগুলোর পাদবিন্দুসমূহের সেটকে ঐ সমতলের উপর উক্ত সরলরেখা বা বক্ররেখার অভিক্ষেপ বলা হয়। এই অভিক্ষেপকে লম্ব অভিক্ষেপও (Orthogonal Projection) বলা হয়।

চিত্রে XY সমতলের উপর একটি বক্ররেখা ও একটি সরলরেখার অভিক্ষেপ দেখানো হয়েছে।





স্বীকার্য

১। দুইটি সরলরেখার মধ্যে সম্পর্ক

ক) দুইটি সরলরেখা একতলীয় হলে, তারা অবশ্যই সমান্তরাল হবে অথবা কোন এক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করবে।

খ) দুইটি সরলরেখা নৈকতলীয় হলে, তারা পরস্পরচ্ছেদী হবে না বা পরস্পর সমান্তরাল হবে না।

২। ক) কোন সমতলের উপরিস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে সীমাহীন ভাবে বর্ধিত করলে তা সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত থাকবে। সুতরাং, একটি সরলরেখা ও একটি সমতলের মধ্যে দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকলে, ঐ সরলরেখা বরাবর তাদের মধ্যে অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

খ) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা একটি সরলরেখার মধ্য দিয়ে অসংখ্য সমতল অঙ্কন করা যায়।

৩। সরলরেখা ও সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

ক) একটি সরলরেখা ও একটি সমতল সমান্তরাল হলে তাদের কোন সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

খ) একটি সরলরেখা কোন সমতলকে ছেদ করলে তার মধ্যে মাত্র একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে।

গ) কোন সরলরেখা ও কোন সমতলের দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকলে সরলরেখাটি সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত হবে।

৪। দুইটি সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

ক) দুইটি সমতল পরস্পর সমান্তরাল হলে, তাদের কোন সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

খ) দুই সমতল পরস্পরচ্ছেদী হলে তারা পরস্পরকে সরলরেখায় ছেদ করবে এবং তাদের অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.১

1. ঘন জ্যামিতি কোন ধরনের জ্যামিতি?

(ক) একমাত্রিক (খ) দ্বিমাত্রিক (গ) ত্রি-মাত্রিক (ঘ) কোনটিই নয়

2. ফুটবলের পৃষ্ঠতল কিরূপ?

(ক) সমতলীয় (খ) বক্রতলীয় (গ) একতলীয় (ঘ) নৈকতলীয়

3. নৈকতলীয় চতুর্ভুজের-

(i) বাহুগুলো একই সমতলে অবস্থিত (ii) দুইটি সন্নিহিত বাহু একতলে অবস্থিত

(iii) বিপরীত বাহুদ্বয় নৈকতলীয়

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) i, iii (গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

5. ঘন জ্যামিতির মৌলিক ধারণা ব্যাখ্যা করুন।

6. ঘনবস্তু সম্পর্কিত সংজ্ঞাগুলো লিখুন।

7. ঘন জ্যামিতির স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করুন।

পাঠ ১২.২ ঘনবস্তু সম্পর্কিত কতিপয় প্রতিজ্ঞা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

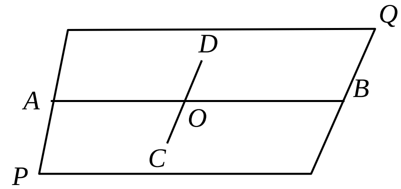
- ঘন জ্যামিতিরি কতিপয় প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	পরস্পরচ্ছেদী, সমতল, বক্রতল

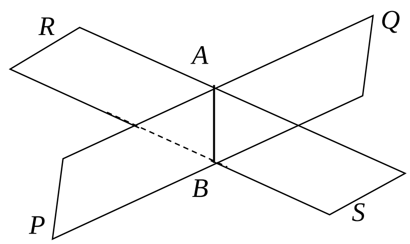
মূলপাঠ

ঘন জ্যামিতির বিষয়বস্তু আলোচনার পূর্বে কতগুলো প্রতিজ্ঞা সম্পর্কে আলোচনা করা প্রয়োজন। বর্তমান পাঠে ঘন জ্যামিতির কয়েকটি সহজ ও প্রয়োজনীয় উপপাদ্য প্রমাণ ছাড়া চিত্রসহ আলোচনা করা হল।

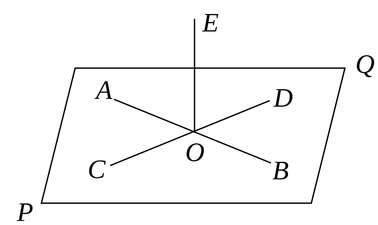
১। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার মধ্য দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল অঙ্কন করা যায়।
মনে করুন, AB ও CD দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। তাদের মধ্য দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল অঙ্কন করা যাবে।



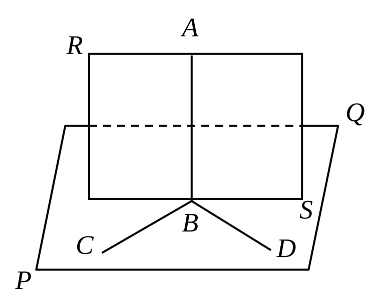
২। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সমতল একটি সরলরেখায় ছেদ করে এবং বাইরে কোন বিন্দুতে ছেদ করে না।
মনে করুন, PQ ও RS দুইটি সমতল সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করে। সমতল দুইটি রেখার বাইরে কোন বিন্দুতে ছেদ করে না।



৩। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার ছেদবিন্দুতে কোন সরলরেখা তাদের প্রত্যেকের উপর লম্ব হলে, তা রেখাদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সমতলের উপরও লম্ব।
মনে করুন, AB ও CD সরলরেখার ছেদবিন্দু O তে রেখা দুইটির প্রত্যেকটির উপর OE লম্ব। অতএব OE রেখা AB ও CD রেখা দ্বারা নির্দেশিত সমতল PQ এর উপর লম্ব।

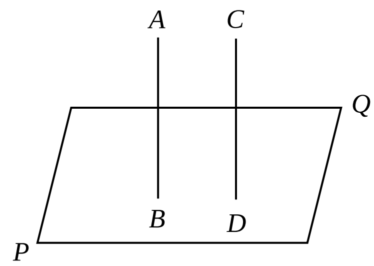


৪। একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে তার উপর যতগুলো লম্ব অঙ্কন করা যায়, তারা সকলেই একতলীয়।
মনে করুন, BC, BD ও BS সরলরেখাত্রয় প্রত্যেকেই AB সরলরেখার B বিন্দুতে AB এর উপর লম্ব। সুতরাং BC, BD ও BS একই সমতল PQ এ অবস্থিত।



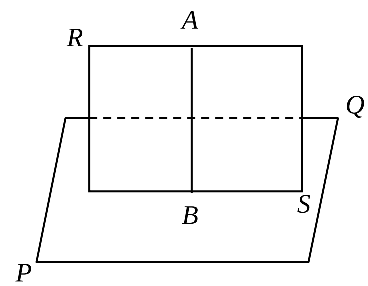
৫। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি কোন তলের উপর লম্ব হলে অপরটিও ঐ তলের উপর লম্ব হবে।

মনে করুন, $AB||CD$ এবং AB, PQ সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং CD-ও PQ সমতলের উপর লম্ব হবে।



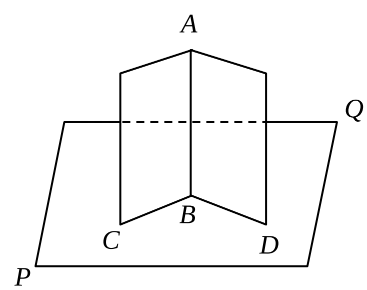
৬। কোন সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট সমতলের উপর লম্ব হলে ঐ লম্বের ভিতর দিয়ে অঙ্কিত যে কোন সমতল ঐ নির্দিষ্ট সমতলটির উপর লম্ব হবে।

মনে করুন, AB সরলরেখা PQ সমতলের উপর লম্ব। সুতরাং এর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত RS সমতল PQ সমতলের লম্ব হবে।



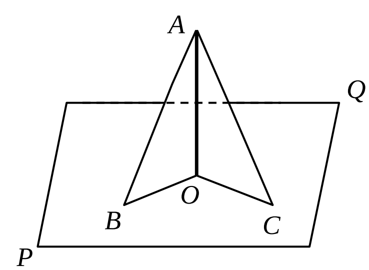
৭। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সমতল কোন তৃতীয় সমতলের উপর লম্ব হলে তাদের ছেদ রেখাও ঐ সমতলের উপর লম্ব হবে।

মনে করুন, AC ও AD পরস্পরচ্ছেদী সমতল দুইটি PQ সমতলের উপর লম্ব এবং AC ও AD তলদ্বয় AB রেখায় ছেদ করে। সুতরাং AB রেখা PQ সমতলের উপর লম্ব হবে।



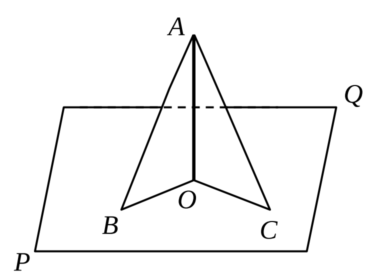
৮। কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত সকল সরলরেখার মধ্যে লম্বটির দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতম হবে।

মনে করুন, PQ সমতলের বহিঃস্থ কোন বিন্দু A থেকে ঐ তলের উপর অঙ্কিত লম্ব AO তলটিকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দু থেকে যে কোন তীর্যক রেখা AB ও AC তলটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে AO এর দৈর্ঘ্য AB ও AC এর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ছোট হবে।



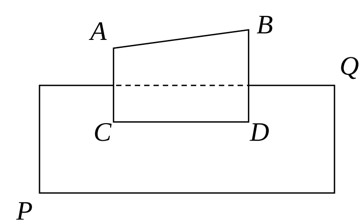
৯। কোন সমতলের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত তীর্যক রেখাগুলোর মধ্যে যেগুলো ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু থেকে সমান দূরত্বে ছেদ করে তারা পরস্পর সমান।

মনে করুন, PQ সমতলের বহিঃস্থ বিন্দু A থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু Q। A বিন্দু থেকে অঙ্কিত তীর্যক রেখাদ্বয় AB ও AC। যদি $OB = OC$ হয়, তাহলে $AB = AC$ হবে।



১০। কোন নির্দিষ্ট সমতলের উপর একটি রেখাংশের অভিক্ষেপও একটি রেখাংশ।

এখানে PQ তলে AB রেখাংশের অভিক্ষেপ CD-ও একটি রেখাংশ।



পাঠ ১২.৩ সুষম ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ঘনবস্তুর সংজ্ঞা তা বলতে পারবেন,
- সুষম ঘনবস্তুর পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন,
- সুষম ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সুষম, সামান্তরিক, আয়তাকার, ঘনক, ক্ষেত্রফল, আয়তন

মূলপাঠ

ঘনবস্তু (Solid)ঃ আমরা আমাদের চারিপাশে ইট, কাঠ, পাথর, বই, বাক্স, গোলাকার বল ইত্যাদি যা কিছু দেখতে পাই ইত্যাদি সবই ঘনবস্তু। এই সমস্ত বস্তুর প্রত্যেকেই কিছু না কিছু পরিমান জায়গা বা স্থান (Space) দখল করে থাকে। ঘনবস্তু সুষম বা বিষম উভইয় হতে পারে। যেমন ইট, বাক্স, বই ইত্যাদি সুষম ঘনবস্তু এবং একখন্ড পাথর, ইটের একটি খন্ড, কয়লার টুকরা ইত্যাদি বিষম ঘনবস্তুর উদাহরণ।

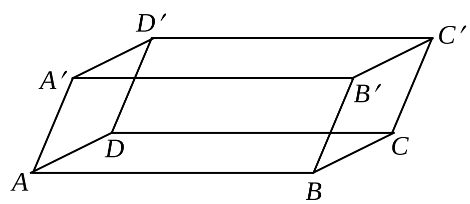
সমতল বা বক্রতল দ্বারা পরিবেষ্টিত কোন বস্তু যা কিছুটা স্থান দখল করে থাকে এরূপ বস্তুটিকে ঘনবস্তু (Solid) বলে। কোন ঘনবস্তুর সীমাবদ্ধ সমতল বা বক্রতলগুলোকে ঐ ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতল (Surface) বলা হয়। তিন বা ততোধিক তল একই বিন্দুতে মিলিত হলে ঘনকোণ (Solid angle) উৎপন্ন হয়। একাধিক পৃষ্ঠ যে রেখায় ছেদ করে তাকে ধার (Edge) বলে।

একটি বাক্সের বা একখানা ইটের বা একটি বইয়ের ছয়টি পৃষ্ঠতল ও বারটি ধার আছে। একটি ফুটবল একটি বক্রতল দ্বারা আবদ্ধ।

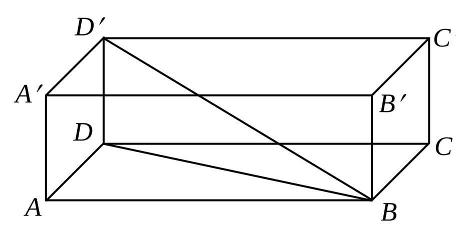
সুষম ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল

১। সামান্তরিক ঘনবস্তু (Parallelopiped)

তিনজোড়া সমতল পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে সামান্তরিক ঘনবস্তু বলা হয়। এর ছয়টি সমতলের প্রত্যেকটি এক একটি সামান্তরিক এবং বিপরীত পৃষ্ঠগুলো সর্বতোভাবে সমান।



২। আয়তনিক ঘন বা আয়তাকার ঘনবস্তু (Rectangular parallelopiped): যে সামান্তরিক ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলগুলো আয়তক্ষেত্র, তাকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলা হয়। চিত্রে আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠগুলোকে $ABCD$, $A'B'C'D'$, $ABB'A'$, $DCC'D'$, $ADD'A'$, $BCC'B'$ এবং ধারগুলো AB, BC, CD, DA, $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$, AA', DD', BB' ও CC' এবং একটি কর্ণ BD'।



মনে করুন, ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $AB = a$, $AD = b$ এবং $AA' = c$

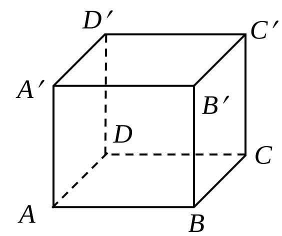
(ক) আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল

= ছয়টি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি = 2 ($ABCD$, $ABB'A'$ ও $ADD'A'$ পৃষ্ঠসমূহের ক্ষেত্রফলের সমান)

= $2(ab+ac+bc)$ বর্গ একক = $2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক

(খ) এর কর্ণের দৈর্ঘ্য, $BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2 + DD'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

গ) আয়তন $= AB \times AD \times AA'$ ঘন একক $= abc$ ঘন একক



৩। ঘনক (Cube)

যে আয়তনিক ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান তাকে ঘনক বলা হয়।

সুতরাং, ঘনকের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা

অর্থাৎ $a = b = c$

অতএব, ঘনকের

(ক) একটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ একক

(খ) সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\ (a^2+a^2+a^2) = 6\ a^2$ বর্গ একক

(গ) কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$ একক $= \sqrt{3a^2}$ একক $= a\sqrt{3}$ একক

(ঘ) আয়তন $= a^3$ ঘন একক

উদাহরণ 1: একটি আয়তিক ঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 15 মিটার, 12 মিটার ও 4 মিটার। এর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, আয়তন ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, দৈর্ঘ্য $a = 15$ মিটার, প্রস্থ $b = 12$ মিটার এবং উচ্চতা $c = 4$ মিটার

$\therefore$ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\ (ab+bc+ca)$ বর্গ একক $= 2\ (15\times12+12\times4+4\times15)$ বর্গ মিটার

$= 2\ (180+48+60)$ বর্গ মিটার $= 2 \times 288$ বর্গ মিটার $= 576$ বর্গ মিটার

আয়তন $= abc$ ঘন একক $= 15\times12\times4$ ঘন মিটার $= 720$ ঘন মিটার

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক $= \sqrt{15^2 + 12^2 + 4^2}$ মিটার $= \sqrt{225 + 144 + 16}$ মিটার

$= \sqrt{385}$ মিটার $= 19.62$ মিটার

উদাহরণ 2: একটি আয়তিক ঘনের কর্ণের দৈর্ঘ্য 12 সে.মি. এবং দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার সমষ্টি 17 সে.মি.। এর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, আয়তিক ঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে a, b ও c সে.মি.

$\therefore$ শর্ত অনুসারে, $a + b + c = 17$ এবং $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 12$ বা, $a^2 + b^2 + c^2 = 12^2 = 144$

এখন, $a + b + c = 17$

বা, $(a + b + c)^2 = 17^2$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 289$

বা, $144 + 2(ab + bc + ca) = 289$

বা, $2(ab + bc + ca) = 289 - 144$

বা, $2(ab + bc + ca) = 145$

$\therefore$ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 145$ বর্গ সে.মি.

উদাহরণ 3: একটি ঘনকের ঘনফল 125 ঘন সে.মি.। এর প্রত্যেক ধারের মাপ ও কর্ণের দৈর্ঘ্য কত নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, ঘনকের এক বাহুর পরিমাপ a সে.মি.

সুতরাং এর ঘনফল $= a^3$ ঘন সে.মি.

$\therefore\ a^3 = 125$

বা, $a = 5$ সে.মি.

সুতরাং, ঘনকটির প্রত্যেক ধারের মাপ 5 সে.মি.

এবং এর কর্ণের দৈর্ঘ্য $= a\sqrt{3}$ একক $= 5\sqrt{3}$ একক।

শিক্ষার্থীর কাজ	একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 2368 বর্গ সে.মি.। যদি ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 6 ঃ 5 ঃ 4 হয়, তবে তার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- সমতল বা বক্রতল দ্বারা পরিবেষ্টিত কোন বস্তু যা কিছুটা স্থান দখল করে থাকে এরূপ বস্তুটিকে ঘনবস্তু (Solid) বলে।
- কোন ঘনবস্তুর সীমাবদ্ধ সমতল বা বক্রতলগুলোকে ঐ ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতল (Surface) বলা হয়।
- তিন বা ততোধিক তল একই বিন্দুতে মিলিত হলে ঘনকোণ (Solid angle) উৎপন্ন হয়। একাধিক পৃষ্ঠ যে রেখায় ছেদ করে তাকে ধার (Edge) বলে।
- আয়তাকার ঘনবস্তুর সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক।
- আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক।
- আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন abc ঘন একক।
- ঘনকের একটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল a^2 বর্গ একক।
- ঘনকের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $6a^2$ বর্গ একক।
- ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $a\sqrt{3}$ একক।
- ঘনকের আয়তন a^3 ঘন একক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.৩

1. একটি ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি. হলে তার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?
   (ক) $\sqrt{3}$ সে.মি. (খ) $\sqrt{2}$ সে.মি. (গ) $3\sqrt{3}$ সে.মি. (ঘ) $3\sqrt{2}$ সে.মি.
2. নিচের কোনটি সঠিক
   (i) আয়তাকার ঘনবস্তুর ক্ষেত্রফল $= 2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক
   (ii) আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক
   (iii) ঘনকের আয়তন $= abc$ ঘন একক
   (ক) i (খ) ii (গ) iii (ঘ) i, ii, ও iii
3. একটি ঘনকের আয়তন 125 ঘন মিটার হলে-
   (i) এর কর্ণের দৈর্ঘ্য $5\sqrt{3}$ মিটার
   (ii) এর ধার 10 মিটার
   (iii) এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 150 বর্গ মিটার
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii, ও iii
4. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর মাত্রাগুলো যথাক্রমে 12 মিটার, 4 মিটার ও 3 মিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য, পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।
5. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য 10 মিটার ও প্রস্থ 8 মিটার। এতে 20 ঘন মিটার পানি ধরে। চৌবাচ্চার গভীরতা কত?
6. একটি ঘনকের আয়তন 216 ঘন সে.মি.। তার প্রত্যেক বাহু, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

7. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 4:3:2 এবং তার সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 468 বর্গ মিটার। ঘনবস্তুটির কর্ণ ও আয়তন নির্ণয় করুন।
8. একটি ঘনকের প্রতি তলের কর্ণ $8\sqrt{2}$ সে.মি.। ঘনকটির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় করুন।
9. ধাতু নির্মিত তিনটি ঘনকের ধারগুলো যথাক্রমে 4, 3 ও 5 সে.মি.। তাদেরকে গলিয়ে একটি ঘনকে পরিণত করা হলো। দেখান যে, নতুন ঘনকটির ধার 6 সে.মি.।
10. ঢাকনাসহ একটি বাক্সের বহি:পৃষ্ঠের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি., 9 সে.মি. ও 7 সে.মি. এবং ভিতরের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 262 বর্গ সে.মি.। বাক্সটির পাত কত পুরু তা নির্ণয় করুন।

পাঠ ১২.৪ প্রিজম ও পিরামিড

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

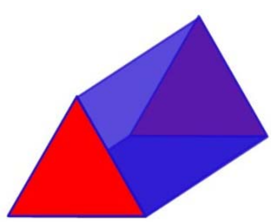
এই পাঠ শেষে আপনি-

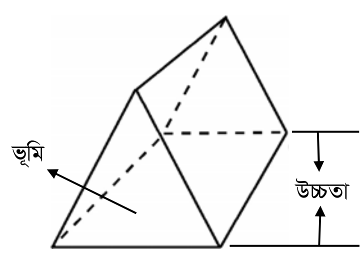
- প্রিজম ও পিরামিডের সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- প্রিজমের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করতে পারবেন,
- পিরামিডের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করতে পারবেন,
- সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	প্রিজম, পিরামিড, তল, ক্ষেত্রফল, আয়তন

মূলপাঠ

প্রিজম (Prism): যে ঘনবস্তুর দুই প্রান্ত সর্বসম ও সমান্তরাল বহুভুজ দ্বারা আবদ্ধ এবং অন্যান্য তলগুলো সামান্তরিক তাকে প্রিজম বলে। প্রিজমের দুই প্রান্তকে তার ভূমি এবং অন্যান্য তলগুলোকে পার্শ্বতল বলে। সবগুলো পার্শ্বতল আয়তাকার হলে প্রিজমটিকে খাড়া প্রিজম এবং অন্যক্ষেত্রে প্রিজমটিকে তীর্যক প্রিজম বলা হয়। বাস্তব ক্ষেত্রে খাড়া প্রিজমই অধিক ব্যবহৃত হয়। ভূমি তলের নামের উপর নির্ভর করে প্রিজমের নামকরণ করা হয়। যেমন, ত্রিভুজাকার প্রিজম, চতুর্ভুজাকার প্রিজম, পঞ্চভুজাকার প্রিজম ইত্যাদি।





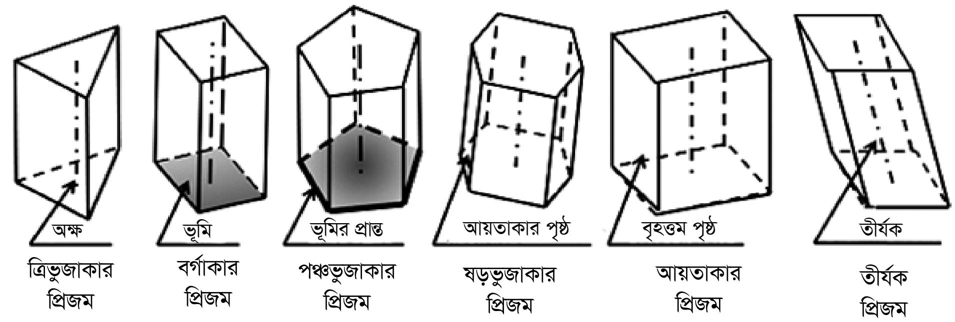
ভূমি সুষম বহুভুজ হলে প্রিজমকে সুষম প্রিজম (Regular prism) বলে। ভূমি সুষম না হলে ইহাকে বিষম প্রিজম (Irregular prism) বলা হয়। সংজ্ঞানুসারে আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক উভয়কেই প্রিজম বলা হয়। কাঁচের তৈরি খাড়া ত্রিভুজাকার প্রিজম আলোকরশ্মির বিচ্ছুরণের জন্য ব্যবহৃত হয়।

প্রিজমের ক্ষেত্রফল ও আয়তন

(ক) প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ২ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

= ২ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

খ) প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা



বিভিন্ন আকৃতির প্রিজম

উদাহরণ 1: 4 সে.মি. বাহু বিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজাকার একটি প্রিজমের উচ্চতা 5 সে.মি.। প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, সুষম ষড়ভুজাকার একটি প্রিজমের উচ্চতা 5 সে.মি. এবং প্রিজমটির বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.

প্রিজমটি সুষম ষড়ভুজাকার বলে তার ভূমির ক্ষেত্রফল ছয়টি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান, যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.।

আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভুজের ভূমির ক্ষেত্রফল = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (বাহুর দৈর্ঘ্য)^2 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2$ বর্গ সে.মি. = $4\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

অতএব প্রিজমটির ভূমির ক্ষেত্রফল = $6 \times 4\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি. = 41.569 বর্গ সে.মি. বর্গ সে.মি.

প্রিজমটির ভূমির পরিসীমা = 6×4 সে.মি. = 24 সে.মি.

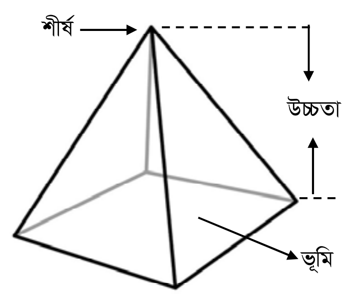
$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = 2(ভূমির ক্ষেত্রফল)+ভূমির পরিসীমা×উচ্চতা

= 2×41.569+24×5 বর্গ সে.মি. = 83.138+120 বর্গ সে.মি. = 203.138 বর্গ সে.মি. = 203.14 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল×উচ্চতা

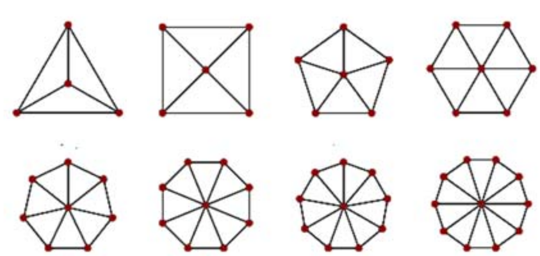
= 41.569×5 ঘন সে.মি. = 207.845 ঘন সে.মি. = 207.85 ঘন সে.মি. (প্রায়)

পিরামিড (Pyramid): আমরা পিরামিড বলতে সচরাচর বর্গাকার ভূমির উপর অবস্থিত চারটি সর্বসম ত্রিভুজ দ্বারা বেষ্টিত ঘনবস্তুকেই বুঝি। এই ধরনের পিরামিডের বহুল ব্যবহার আছে।

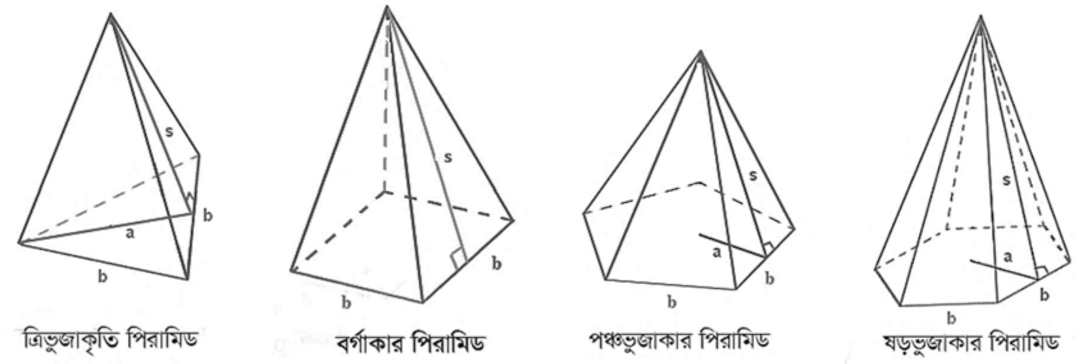


অতএব, বহুভুজের উপর অবস্থিত যে ঘনবস্তুর একটি শীর্ষবিন্দু থাকে এবং যার পার্শ্বতলগুলোর প্রত্যেকটি ত্রিভুজাকার তাকে পিরামিড বলে। পিরামিডের ভূমি যেকোনো আকারের বহুভুজ এবং তার পার্শ্বতলগুলোও যেকোনো ধরনের ত্রিভুজ হতে পারে। তবে ভূমি সুষম বহুভুজ এবং পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে তাকে সুষম পিরামিড বলা হয়। শীর্ষবিন্দু ও ভূমির যেকোনো কৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখাকে পিরামিডের ধার বলে। শীর্ষ হতে ভূমির উপর অংকিত লম্বদৈর্ঘ্যকে পিরামিডের উচ্চতা বলা হয়।

চারটি সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা বেষ্টিত ঘনবস্তুকে সুষম চতুস্তলক (Regular tetrahedron) বলে যা একটি পিরামিড। এই পিরামিডের ৩ + ৩ = ৬ টি ধার ও ৪ টি কৌণিক বিন্দু আছে। ইহার শীর্ষ হতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমির ভরকেন্দ্রে পতিত হয়।



বিভিন্ন পিরামিডের ভূমির নকশা



বিভিন্ন ধরনের পিরামিড

পিরামিডের ক্ষেত্রফল ও আয়তন

(ক) পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

কিন্তু পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে,

পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল $+\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিধি $\times$ হেলানো উচ্চতা)

পিরামিডের উচ্চতা h, ভূমিক্ষেত্রের অর্ন্তবৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং হেলানো উচ্চতা l হলে, $l=\sqrt{h^2+r^2}$

(খ) আয়তন = $\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

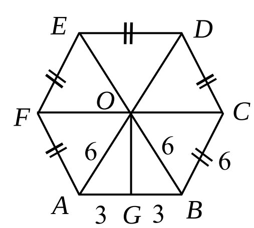
উদাহরণ 2: 6 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজের উপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 10 সে.মি.। পিরামিডটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, পিরামিডের ভূমি সুষম ষড়ভুজাকার যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. এবং পিরামিডের উচ্চতা h=10 সে.মি.

আমরা জানি, n বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল = $n\times\frac{a^2}{4}\cot\left(\frac{180^o}{n}\right)$ বর্গ একক [যেখানে, a = বাহুর দৈর্ঘ্য এবং n = বাহুর সংখ্যা]

$\therefore$ পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল = $6\times\frac{6^2}{4}\cot\left(\frac{180^o}{6}\right)$ বর্গ সে.মি. = $6\times 9\times\cot 30^o$ বর্গ সে.মি.

= $6\times 9\times\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি. = 93.531 বর্গ সে.মি.



পিরামিডের ভূমির পরিসীমা = 6×6 সে.মি. = 36 সে.মি. [$\because$ বাহুর দৈর্ঘ্য = 6 সে.মি.]

আমরা জানি, সুষম পিরামিডের কেন্দ্র হতে যেকোনো শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব = বাহুর দৈর্ঘ্য

$\therefore OA=6$ সে.মি. এবং $AG=\frac{6}{2}=3$ সে.মি.

এখন পিরামিডের ভূমির কেন্দ্রবিন্দু হতে যেকোনো বাহুর লম্ব দূরত্ব r হলে

$r^2=OG^2=OA^2-AG^2=6^2-3^2=27$

$\therefore$ পিরামিডের যেকোনো পার্শ্বতলের হেলানো উচ্চতা, $l=\sqrt{h^2+r^2}$ একক

$=\sqrt{10^2+27}=\sqrt{127}$ সে.মি. = 11.269 সে.মি. (প্রায়)

আমরা জানি, পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল $+\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা)

$= \left\{93.513 + \frac{1}{2}(36 \times 11.269)\right\}$ বর্গ সে.মি. $= \{93.513 + 202.842\}$ বর্গ সে.মি.

$= 296.373$ বর্গ সে.মি. $= 296.37$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

পিরামিডের আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{3} \times 93.513 \times 10$ ঘন সে.মি. $= 311.77$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

শিক্ষার্থীর কাজ	1. একটি ত্রিভুজাকার প্রিজমের ভূমির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 4 ও 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 8 সে.মি.। প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন। (উ: 108 বর্গ সে.মি., 48 ঘন সে.মি.) 2. 10 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার ভূমির উপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 12 সে.মি.। পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন। (উ: 360 বর্গ সে.মি., 400 ঘন সে.মি.)

সারসংক্ষেপ

- যে ঘনবস্তুর দুই প্রান্ত সর্বসম ও সমান্তরাল বহুভুজ দ্বারা আবদ্ধ এবং অন্যান্য তলগুলো সামান্তরিক তাকে প্রিজম বলে।
- প্রিজমের দুই প্রান্তকে তার ভূমি এবং অন্যান্য তলগুলোকে পার্শ্বতল বলে।
- প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ২ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল = 2 (ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা।
- প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা।
- বহুভুজের উপর অবস্থিত যে ঘনবস্তুর একটি শীর্ষবিন্দু থাকে এবং যার পার্শ্বতলগুলোর প্রত্যেকটি ত্রিভুজাকার তাকে পিরামিড বলে।
- পিরামিডের ভূমি যেকোনো আকারের বহুভুজ এবং তার পার্শ্বতলগুলোও যেকোনো ধরনের ত্রিভুজ হতে পারে।
- পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল।
- পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে, পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল $+ \frac{1}{2}$(ভূমির পরিধি $\times$ হেলানো উচ্চতা)।
- পিরামিডের আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.৪

1. একটি চতুর্ভুজাকার প্রিজমের ভূমির ক্ষেত্রফল 36 বর্গ সে.মি. হলে, প্রিজমটি কিরূপ ভূমির উপর অবস্থিত?
   (ক) ত্রিভুজাকার (খ) আয়তাকার (গ) বর্গাকার (ঘ) রম্বসাকার
2. আয়তাকার ঘনবস্তু কি ধরনের প্রিজম?
   (ক) সুষম (খ) বিষম (গ) তীর্যক (ঘ) খাড়া
3. পিরামিডের শীর্ষবিন্দু ও ভূমির যেকোনো কৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখাকে কী বলে?
   (ক) ধার (খ) ভূমি (গ) পার্শ্বতল (ঘ) উচ্চতা
4. সুষম চতুস্তলক-
   (i) এক ধরনের পিরামিড
   (ii) এর 6 টি ধার ও 4 টি কৌণিক বিন্দু আছে
   (iii) এর শীর্ষ হতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমির ভরকেন্দ্রে পতিত হয়
   নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii, ও iii

5. একটি পঞ্চভুজাকার প্রিজমের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে. মি. ও 8 সে. মি. এবং অপর তিনটি বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 12.5 সে. মি.। প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।
6. 4 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা 5 সে. মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।
7. 4 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজের উপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 5 সে. মি.।
   (ক) প্রদত্ত বাহু ও উচ্চতা দিয়ে সুষম ষড়ভুজাকার পিরামিডটি অঙ্কন করুন।
   (খ) পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্নয় করুন।
   (গ) পিরামিডের হেলানো উচ্চতা ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
8. একটি সুষম চতুস্তলকের যেকোনো ধারের দৈর্ঘ্য 8 সে. মি. হলে, ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

পাঠ ১২.৫ সমবৃত্তভূমিক কোণক, বেলন, গোলক ও যৌগিক ঘনবস্তু

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

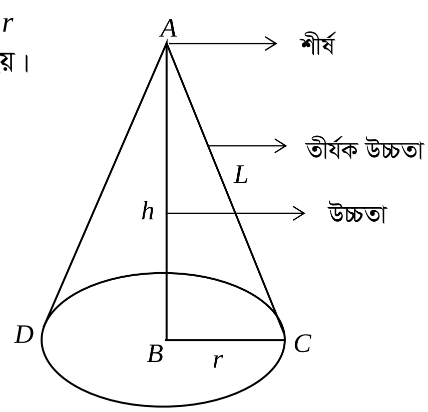
- কোণকের ক্ষেত্রফল, আয়তন নির্ণয় করতে পারবেন,
- বেলনের ক্ষেত্রফল, আয়তন নির্ণয় করতে পারবেন,
- গোলকের ক্ষেত্রফল, আয়তন নির্ণয় করতে পারবেন,
- যৌগিক ঘনবস্তু সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- কোণক, বেলন ও গোলক সম্পর্কিত সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমবৃত্তভূমিক, কোণক, বেলন, গোলক, যৌগিক ঘনবস্তু,

মূলপাঠ

সমবৃত্তভূমিক কোণক (Right Circular Cone): কোন সমকোণী ত্রিভুজ ক্ষেত্রের সমকোণ সংলগ্ন যে কোন একটি বাহুকে অক্ষ ধরে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ত্রিভুজটির একবার পূর্ণ আবর্তনের ফলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক কোণক বলা হয়। সাধারণত সমবৃত্তভূমিক কোণককেই কোণক বলা হয়।

চিত্রে ABC একটি কোণক যার উচ্চতা $AB = h$ এবং ভূমির ব্যাসার্ধ $BC = r$ BD বৃত্তটি কোণকটির ভূমি এবং AC বা AD কে এর তির্যক উচ্চতা বলা হয়। কোন কোণকের উচ্চতা h, ভূমির ব্যাসার্ধ r ও তির্যক উচ্চতা l হলে



(ক) তির্যক উচ্চতা, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ একক

(খ) বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিধি $\times$ তির্যক উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l$ বর্গ একক

$= \pi r l$ বর্গ একক

$= \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ বর্গ একক

(গ) সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল

$= (\pi rl + \pi r^2)$ বর্গ একক

$= \pi r\,(l + r)$ বর্গ একক

(ঘ) আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$ ঘন একক

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক

উদাহরণ 1: কোন কোণকের উচ্চতা 12 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 7 সে.মি.। এর তির্যক উচ্চতা, বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল, সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, উচ্চতা $h = 12$ সে.মি. এবং ব্যাসার্ধ $r = 7$ সে.মি.

কোণকের তির্যক উচ্চতা, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ একক $= \sqrt{12^2 + 7^2}$ সে.মি. $= \sqrt{144 + 49}$ সে.মি.

$= \sqrt{193}$ সে.মি. $= 13.89$ সে.মি. (প্রায়)

কোণকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$ বর্গ একক $= 3.1416 \times 7 \times 13.89$ বর্গ সে.মি. $= 305.46$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

কোণকের সমগ্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল$= \pi r\,(l + r)$ বর্গ একক $= 3.1416 \times 7 \times (13.89 + 7)$ বর্গ সে.মি.

$= 3.1416 \times 7 \times 20.89$ বর্গ সে.মি. $= 459.4$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক $= \frac{1}{3} \times 3.1416 \times 7^2 \times 12$ ঘন সে.মি. $= 615.8$ ঘন সে.মি.

উদাহরণ 2: একটি কোণকের তির্যক উচ্চতা 21 সে.মি. এবং তার বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 396 সে.মি.। কোণটির ভূমির ব্যাস কত?

সমাধান: মনে করুন, কোণটির ভূমির ব্যাসার্ধ $= r$ একক

এখানে তির্যক উচ্চতা, $l = 21$ সে.মি.

কোণকটির বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi rl$

প্রশ্নমতে, $\pi rl = 396$

বা, $3.1416 \times r \times 21 = 396$

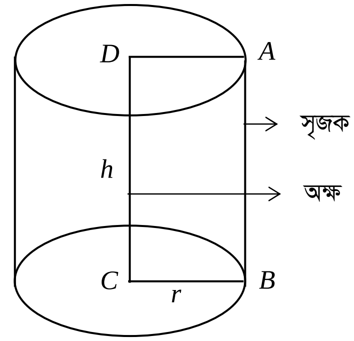
বা, $r = \frac{396}{3.1416 \times 21}$

বা, $r = 6$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ কোণকটির ভূমির ব্যাস $= 2 \times r = 2 \times 6$ সে.মি. $= 12$ সে.মি. (প্রায়)

বেলন বা সিলিন্ডার (Cylinder)

কোনো আয়তক্ষেত্রের যেকোনো বাহুকে অক্ষ ধরে আয়তক্ষেত্রটিকে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে সমবৃত্তিভূমিক বেলন বা সিলিন্ডার বলা হয়। সমবৃত্তিভূমিক বেলনের দুই প্রান্তকে বৃত্তাকার তল, বক্রতলকে বক্রপৃষ্ঠ বলা হয় এবং সমগ্র তলকে পৃষ্ঠতল বলা হয়। আয়তক্ষেত্রের অক্ষের সমান্তরাল ঘূর্ণায়মান বাহুটিকে বেলনের সৃজক বা উৎপাদক রেখা বলে।



মনে করুন, $ABCD$ একটি বেলন।

এখানে, ভূমির ব্যাসার্ধ $= BC = r$, উচ্চতা $= CD = h$

সুতরাং, ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

(ক) বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=$ ভূমির পরিধি $\times$ উচ্চতা

$= 2\pi r \times h$ বর্গ একক $= 2\pi rh$ বর্গ একক

(খ) সম্পূর্ণতলের ক্ষেত্রফল বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল বা পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$=$ বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $+$ বৃত্তাকার প্রান্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল

$$= \left(\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2\right) \text{ বর্গ একক } = \left(2\pi r^2 + 2\pi rh\right) \text{ বর্গ একক } = 2\pi r(r+h) \text{ বর্গ একক}$$

(গ) আয়তন#=#ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $= \pi r^2 \times h$ ঘন একক $= \pi r^2 h$ ঘন একক#

উদাহরণ 3: একটি সিলিন্ডারের উচ্চতা 12 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাস 7 সে.মি.। সিলিন্ডারটির আয়তন ও বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে সিলিন্ডারটির উচ্চতা, $h = 12$ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাস $= 7$ সে.মি.

$\therefore$ ভূমির ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1}{2} \times$ ব্যাস $= \frac{1}{2} \times 7$ সে.মি. $= \frac{7}{2}$ সে.মি.

$\therefore$ সিলিন্ডারটির আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক $= 3.1416 \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 12$ ঘন সে.মি.

$= 3.1416 \times \frac{49}{4} \times 12$ ঘন সে.মি. $= 461.8$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

এবং বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ একক $= 2 \times 3.1416 \times \frac{7}{2} \times 12$ বর্গ সে.মি. $= 263.9$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

উদাহরণ 4: একটি বেলনাকার স্তম্ভের উচ্চতা 8 মিটার এবং পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 2464 বর্গ মিটার। এর ভূমির ব্যাসার্ধ, সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, স্তম্ভটির উচ্চতা, $h = 8$ মিটার

মনে করুন স্তম্ভটির ভূমির ব্যাসার্ধ $= r$ মিটার

যেহেতু স্তম্ভটি বেলনাকার, অতএব এর পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$

প্রশ্নমতে, $2\pi rh = 2464 \Rightarrow 2 \times 3.1416 \times \mathrm{r} \times 8 = 2464 \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{2464}{2 \times 3.1416 \times 8} = 49$ মি. (প্রায়)

সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh + 2\pi r^2$ বর্গ একক $= 2464 + 2 \times 3.1416 \times (49)^2$ বর্গ মি.

$= 2464 + 15086$ বর্গ মি. $= 17550$ বর্গ মি.

স্তম্ভটির আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক $= 3.1416 \times (49)^2 \times 8$ ঘন মি. $= 60344$ ঘন মি. (প্রায়)

উদাহরণ 5: একটি ফাঁপা সিলিন্ডারের বাহির ও ভিতরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 11 সে.মি. ও 10 সে.মি. এবং উচ্চতা 14 সে.মি.। সিলিন্ডারের দুই বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও ধাতব অংশের আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে সিলিন্ডারের উচ্চতা, $h = 14$ সে.মি.

সিলিন্ডারের বাহিরের ব্যাসার্ধ, $r_1 = 10$ সে.মি.

এবং সিলিন্ডারের ভিতরের ব্যাসার্ধ, $r_2 = 11$ সে.মি.

অতএব সিলিন্ডারের বাহিরের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r_1 h$ বর্গ একক $= 2 \times 3.1416 \times 11 \times 14$ বর্গ সে.মি.

$= 968$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

অতএব সিলিন্ডারের ভিতরের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r_2 h$ বর্গ একক $= 2 \times 3.1416 \times 10 \times 14$ বর্গ সে.মি.

$= 880$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

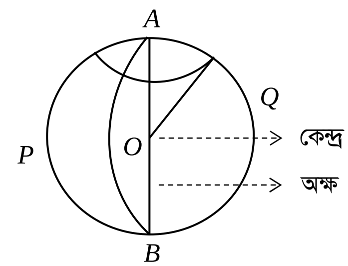
সিলিন্ডারটির ধাতব অংশের আয়তন = বাহিরের ব্যাসার্ধযুক্ত সিলিন্ডারের আয়তন − ভিতরের ব্যাসার্ধযুক্ত সিলিন্ডারের আয়তন

$= (\pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h)$ ঘন একক $= \pi h\,(r_1^2 - r_2^2)$ ঘন সে.মি.

$= 3.1416 \times 14\,(11^2 - 10^2)$ ঘন সে.মি. $= 43.98\,(121 - 100)$ ঘন সে.মি.

$= 43.98 \times 21$ ঘন সে.মি. $= 923.6$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

গোলক (Sphere): কোন অর্ধবৃত্তক্ষেত্রের ব্যাসকে অক্ষ ধরে ঐ ব্যাসের চতুর্দিকে অর্ধবৃত্তক্ষেত্রের একবার পূর্ণ আবর্তনের ফলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে গোলক বলে। এই ঘূর্ণনের ফলে অর্ধবৃত্ত যে তল উৎপন্ন করে তাকে গোলকের তল বলে। অর্ধবৃত্তটির কেন্দ্রই গোলকের কেন্দ্র।



মনে করুন, $APBQ$ একটি গোলক।
গোলকটির কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r
(ক) গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi \times$ (ব্যাস)^2
$= 4\pi r^2$ বর্গ একক
(খ) গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

উদাহরণ 6: একটি গোলকের ব্যাস 14 মিটার হলে এর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান: গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1}{2} \times$ গোলকের ব্যাস $= \frac{1}{2} \times 14$ মিটার $= 7$ মিটার

অতএব গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক $= 4 \times 3.1416 \times 7^2$ বর্গ মি. $= 616$ বর্গ মি. (প্রায়)

গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক $= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 7^3$ ঘন মি. $= 1437$ ঘন মি. (প্রায়)

উদাহরণ 7: 4 সে.মি. ব্যাসের একটি লৌহ গোলককে পিটিয়ে $\frac{2}{3}$ সে.মি. পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হল। ঐ পাতের ব্যসার্ধ কত?

সমাধান: গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{1}{2} \times$ গোলকের ব্যাস $= \frac{1}{2} \times 4$ সে.মি. $= 2$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক $= \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3$ ঘন সে.মি. $= \frac{32\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

মনে করুন, বৃত্তাকার লৌহপাতের ব্যাসার্ধ $= r_1$ সে.মি.

$\therefore$ বৃত্তাকার লৌহপাতের ক্ষেত্রফল $= \pi r_1^2$ বর্গ সে.মি.

যেহেতু, লৌহপাতটি $\frac{2}{3}$ সে.মি. পুরু

$\therefore$ বৃত্তাকার লৌহপাতের আয়তন $= \pi r_1^2 \times \frac{2}{3}$ ঘন সে.মি.

সুতরাং, শর্তমতে $\frac{2}{3} \times \pi r_1^2 = \frac{32\pi}{3}$ বা, $2r_1^2 = 32$ বা, $r_1^2 = \frac{32}{2}$ বা, $r_1^2 = 16$

বা, $r_1 = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $= 4$ সে.মি.

উদাহরণ 8: একটি গোলকের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল যত বর্গ একক তার আয়তন তত ঘন একক। এর ব্যাসার্ধ কত?

সমাধান: মনে করুন, গোলকটির ব্যাসার্ধ $= r$

$\therefore$ এর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক এবং আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

প্রশ্নমতে, $\frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2 \Rightarrow \frac{1}{3} r = 1 \Rightarrow r = 3$ একক

$\therefore$ গোলকটির ব্যাসার্ধ $= 3$ একক

উদাহরণ 9: 10 মিটার পরিধি বিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। বাক্সটির খালি অংশের আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, গোলকের ব্যাস $=$ ঘনকের এক বাহুর দৈর্ঘ্য

মনে করুন, গোলকটির ব্যাসার্ধ $= r$

অতএব, গোলকটির পরিধি $= 2\pi r$

$\therefore$ শর্তমতে, $2\pi r = 10 \Rightarrow r = \dfrac{10}{2\pi} \Rightarrow r = \dfrac{10}{2 \times 3.1416}$ মি. $\Rightarrow r = 1.59$ মি.

অতএব, গোলকের ব্যাস $= 2 \times r = 2 \times 1.59 = 3.18$ মি.

$\therefore$ ঘনকের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= 3.18$ মি.

$\therefore$ ঘনকের আয়তন $=$ (বাহু)$^3 = (3.18)^3$ ঘন মি. $= 32.16$ ঘন মি.

আবার গোলকের আয়তন $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক $= \dfrac{4}{3} \times 3.1416 \times (1.59)^3$ ঘন মি.

$= \dfrac{4}{3} \times 3.1416 \times 4.02$ ঘন মি. $= 16.84$ ঘন মি.

$\therefore$ ঘনকের খালি অংশের আয়তন $=$ ঘনকের আয়তন $-$ গোলকের আয়তন

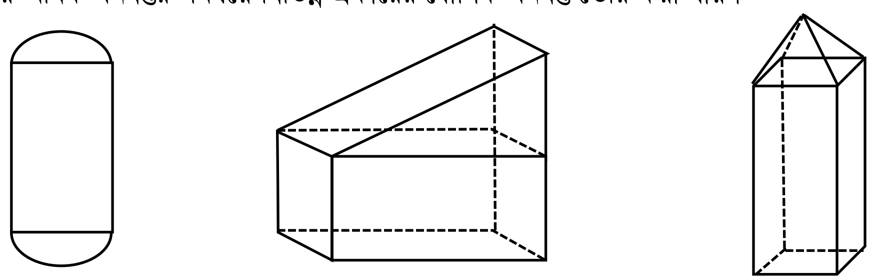
$= (32.16 - 16.84)$ ঘন মিটার $= 15.32$ ঘন মিটার

যৌগিক ঘনবস্তু (Compound solid): দুইটি ঘনবস্তুর সমন্বয়ে গঠিত ঘনবস্তুকে যৌগিক ঘনবস্তু বলে।

যৌগিক ঘনবস্তুর কয়েকটি উদাহরণ নিম্নে দেওয়া হলো:

- একটি গোলকের ব্যাসার্ধ ও একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ সমান হলে এবং কোণকটিকে গোলকের উপর বসালে একটি নতুন ঘনবস্তু সৃষ্টি হয়।
- দুইটি অর্ধগোলক ও একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের সমন্বয়ে গঠিত যৌগিক ঘনবস্তুকে ক্যাপসুল বলা যেতে পারে।
- একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর উপরের তল যদি একটি খাড়া প্রিজমের কোনও একটি তলের সমান হয় তবে ঘনবস্তুর উপর মিলিয়ে প্রিজটি বসালে একটি যৌগিক ঘনবস্তু হয়।
- একটি প্রিজমের ভূমি ও একটি চতুস্তলকের ভূমি সর্বসম হলে এবং চতুস্তলকটিকে প্রিজমের উপর বসালে একটি যৌগিক ঘনবস্তু তৈরি হয়।

এভাবে দুই বা দুইয়ের অধিক ঘনবস্তুর সমন্বয়ে বিভিন্ন প্রকারের যৌগিক ঘনবস্তু তৈরি করা যায়।



উপরের চিত্রে কিছু যৌগিক ঘনবস্তুর উদাহরণ দেওয়া হলো। প্রথম ঘনবস্তুটি একটি ক্যাপসুল, যা দুইটি অর্ধগোলক ও একটি সিলিন্ডার নিয়ে গঠিত। দ্বিতীয় ঘনবস্তুটি একটি আয়তাকার ঘনবস্তু (নিচের অংশ) ও একটি ত্রিভুজাকার প্রিজম (উপরের অংশ) দ্বারা গঠিত। তৃতীয় ঘনবস্তুটি একটি আয়তাকার ঘনবস্তু (নিচের অংশ) ও একটি পিরামিড (উপরের অংশ) দ্বারা গঠিত।

উদাহরণ 10: একটি স্থাপনার নিচের অংশ 3 মিটার দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি আয়তাকার ঘনবস্তু এবং উপরের অংশ একটি সুষম পিরামিড। পিরামিডের ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার ও উচ্চতা 3 মিটার হলে স্থাপনাটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য $a = 3$ মিটার

যেহেতু সুষম পিরামিডটি একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর উপর স্থাপিত, অতএব পিরামিডের ভূমি একটি বর্গ। যেহেতু পিরামিডের বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার, অতএব আয়তাকার ঘনবস্তুর প্রস্থ $b = 2$ মিটার, উচ্চতা $c = 2$ মিটার।

স্থাপনাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

এখন স্থাপনাটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $=$ আয়তাকার ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $+$ পিরামিডের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

আয়তাকার ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab + bc + ca)$ মিটার $= 2(3 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 3)$ মিটার $= 32$ মিটার

আবার পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল $+\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা)

এখন পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল = বর্গের ক্ষেত্রফল = 2^2 বর্গ মি. = 4 বর্গ মি. [বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 মিটার]
পিরামিডের ভূমির পরিসীমা = 4×2 মিটার = 8 মিটার

পিরামিডের ভূমির কেন্দ্র হতে যে কোনো বিন্দুর লম্ব দূরত্ব = $r=\frac{2}{2}$ মি. = 1 মি.

পিরামিডের হেলানো উচ্চতা, $l=\sqrt{h^2+r^2}$ একক = $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ মি. = 3.1623 মি. (প্রায়)

অতএব পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $\left\{4+\frac{1}{2}(8\times 3.1623)\right\}$ বর্গ মি. = $\{4+12.649\}$ বর্গ মি.

= 16.649 বর্গ মি. = 16.65 বর্গ মি. (প্রায়)

কিন্তু আয়তাকার ঘনবস্তুর উপরিতল ও পিরামিডের ভূমি পরস্পরের উপর স্থাপিত যার ক্ষেত্রফল = (4+4) বর্গমিটার = 8 বর্গমিটার

অতএব স্থাপনাটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল = (32+16.65 – 8) বর্গমিটার = 40.65 বর্গমিটার (প্রায়)

স্থাপনাটির আয়তন নির্ণয়

আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন = abc ঘন মিটার = $3\times 2\times 2$ ঘন মিটার = 12 ঘন মিটার

পিরামিডের আয়তন = $\frac{1}{3}$ $\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা = $\frac{1}{3}\times 4\times 3$ ঘন মিটার = 4 ঘন মিটার

অতএব, স্থাপনাটির আয়তন = (আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন + পিরামিডের আয়তন) ঘন একক

= (12+4) ঘন মিটার = 16 ঘন মিটার

উদাহরণ 11: একটি ক্যাপসুলের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি.।

(ক) ক্যাপসুলের ঘনবস্তুর সাথে তুলনা করে চিত্রটি আঁকুন।

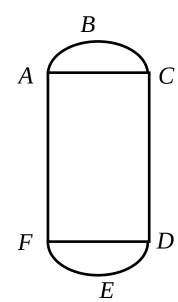
(খ) এর সিলিন্ডার আকৃতি অংশের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

(গ) ক্যাপসুল থেকে প্রাপ্ত সমবৃত্তভূমিক কোণক, অর্ধগোলক ও সিলিন্ডারের আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ (ক) $ABCDEF$ একটি ক্যাপসুল, যার $ACDF$ একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার এবং ABC ও DEF দুইট অর্ধগোলক।

(খ) দেওয়া আছে, ক্যাপসুলের সম্পূর্ণ অংশের দৈর্ঘ্য = 15 সে.মি. এবং সিলিন্ডার আকৃতি অংশের ব্যাসার্ধ $r=3$ সে.মি.

$\therefore$ সিলিন্ডার আকৃতি অংশের দৈর্ঘ্য $=15-(3+3)=9$ সে.মি.



অর্ধগোলাকৃতি অংশের পৃষ্ঠেতলের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\times 4\pi r^2=2\pi r^2$

এখন, ক্যাপসুলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = দুই প্রান্তের অর্ধগোলাকৃতি অংশের পৃষ্ঠেতলের ক্ষেত্রফল + সিলিন্ডার আকৃতি অংশের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$=2\times 2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r(2r+h)$ বর্গ একক $=2\times 3.1416\times 3(6+9)$ বর্গ সে.মি.

$=18.8496\times 15$ বর্গ সে.মি. $=282.74$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং ক্যাপসুলটির আয়তন = দুই প্রান্তের অর্ধগোলাকৃতি অংশের আয়তন + সিলিন্ডার আকৃতি অংশের আয়তন

$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2h$ ঘন একক $=\pi r^2\left(\frac{4}{3}r+h\right)$ ঘন সে.মি.

$=3.1416\times 3^2\left(\frac{4}{3}\times 3+9\right)$ ঘন সে.মি. $=3.1416\times 9\times 13=367.57$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

(গ) কোণকের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক $= \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 9 = 27\pi$ ঘন সে.মি.

অর্ধগোলকের আয়তন $= \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক $\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 18\pi$ ঘন সে.মি.

সিলিন্ডারের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক $= \pi \times 3^2 \times 9 = 81\pi$ ঘন সে.মি.

$\therefore$ কোণকের আয়তন ঃ অর্ধগোলকের আয়তন ঃ সিলিন্ডারের আয়তন $= 27\pi$ ঃ 18π ঃ $81\pi = 3$ ঃ 2 ঃ 9

সারসংক্ষেপ

- কোণকের তির্যক উচ্চতা, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ একক; বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ বর্গ একক; সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi r\,(l + r)$ বর্গ একক।
- বেলন বা সিলিন্ডারের ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$; বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ একক; সম্পূর্ণতলের ক্ষেত্রফল বা সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল বা পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r(r + h)$ বর্গ একক; আয়তন$= \pi r^2 h$ ঘন একক।
- গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক; গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।
- দুইটি ঘনবস্তুর সমন্বয়ে গঠিত ঘনবস্তুকে যৌগিক ঘনবস্তু বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.৫

1. নিচের কোনটি একটি কোণকের আয়তন নির্দেশক সূত্র?

   (ক) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (খ) $\frac{4}{3}\pi r^2 h$ (গ) $\pi r^2 h$ (ঘ) $\pi r(l + r)$

2. একটি গোলকের ব্যাসার্ধ r হলে গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল কোনটি?

   (ক) $3\pi r^2$ (খ) $4\pi r^2$ (গ) $\frac{4}{3}\pi r^2$ (ঘ) $\pi r^2 h$

3. 3 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের আয়তন কত?

   (ক) 12π (খ) 24π (গ) 36π (ঘ) 48π

4. সিলিন্ডারের ভূমির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র কোনটি

   (ক) πrh (খ) $2\pi rh$ (গ) $2\pi r^2$ (ঘ) πr^2

5. একটি সিলিন্ডারের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং আয়তন 150 ঘন সে.মি.। এর ভূমির ব্যাসার্ধ ও আয়তন নির্ণয় করুন।
6. সিলিন্ডার আকৃতির একটি চিমনীর উচ্চতা 30 মিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 14 মিটার। প্রতি বর্গমিটার 5 টাকা হিসেবে বক্রপৃষ্ঠটি রং করতে কত খরচ হবে, নির্ণয় করুন।
7. 11 ঘন সে.মি. একখন্ড লোহার পাতকে পিটিয়ে 56 সে.মি. লম্বা একটি তারে পরিণত করা হল। ঐ তারের প্রান্তীয় ব্যাস কত?
8. একটি ধাতব সিলিন্ডারের ভূমির বাইরের ও ভিতরের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 14 সে.মি. ও 7 সে.মি.। যদি সিলিন্ডারটির উচ্চতা 10 সে.মি. হয় তবে এর ধাতব অংশের ঘনফল ও দুই বক্রপৃষ্ঠের বাইরের ও ভিতরের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
9. একটি গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 9856 বর্গ সে.মি.। এর ব্যাস নির্ণয় করুন।
10. একটি সিলিন্ডারের উচ্চতা ও ভূমির ব্যাস প্রত্যেকেই 6 মিটার। যে গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সিলিন্ডারটির পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমান তার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।
11. একটি আয়তিক সীমাবদ্ধের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 11 মি., 10 মি., ও 5 মি.। একে গলিয়ে 50 সে.মি. ব্যাসের কতগুলো গোলক প্রস্তুত করা যাবে, নির্ণয় করুন।

12. একটি ফাঁপা গোলকের বাহির ও ভিতরের দিকের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 3 সে.মি.। এর আয়তন কত নির্ণয় করুন।
13. সমান উচ্চতা বিশিষ্ট একটি কোণক, একটি অর্ধ গোলক ও একটি সিলিন্ডার সমান ভূমির উপর অবস্থিত। দেখান যে, তাদের আয়তনের অনুপাত 1:2:3।
14. একটি কোণকের বক্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 330 বর্গ সে.মি. এবং ভূমির ব্যাস 14 সে.মি.। এর উচ্চতা এবং তির্যক উচ্চতা নির্ণয় করুন।
15. একটি সমকোণী ত্রিভূজের অতিভুজ ভিন্ন অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3.5 সে.মি. ও 4 সে.মি.। একে বৃহত্তম বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে কোণক উৎপন্ন হয় তার আয়তন নির্ণয় করুন।
16. একটি কোণকের আয়তন 154 ঘন সে.মি. এবং উচ্চতা 12 সে.মি। এর ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. একটি ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য $5\sqrt{3}$ একক হলে ঘনকটির আয়তন কত ঘন একক?

(ক) 125 (খ) 225 (গ) 425 (ঘ) 625

2. সমান উচ্চতা বিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক, একটি অর্ধগোলক ও একটি সিলিন্ডার সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত হলে, তাদের আয়তনের অনুপাত কত?

(ক) 1 : 1: 3 (খ) 2 : 1: 3 (গ) 1 : 2 : 3 (ঘ) 1 : 3 : 2

৩. একটি সুষম চতুর্ভুজাকার প্রিজমের-

(i) ভূমি আয়তাকার

(ii) ভূমি বর্গাকার

(iii) পার্শ্বতলগুলো সামান্তরিক বা আয়তাকার

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (ii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

► 44 সে.মি. পরিধি বিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। ($\pi = 3.1416$)
উপরের তথ্যের ভিত্তিতে 4-8 নং প্রশ্নের উত্তর দিন

4. গোলকটির ব্যাসার্ধ কত সে.মি.?

(ক) 7 (খ) 8 (গ) 9 (ঘ) 10

5. ঘনকটির এক বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

(ক) 7 (খ) 14 (গ) 21 (ঘ) 28

6. গোলকের আয়তন কত ঘন সে.মি.?

(ক) 1303 (খ) 1437 (গ) 1533 (ঘ) 1633

7. ঘনকের আয়তন কত ঘন সে.মি.?

(ক) 2574 (খ) 2634 (গ) 2702 (ঘ) 2744

8. গোলকটি বাক্সের মধ্যে বসালে বাক্সের খালি অংশের আয়তন কত ঘন সে.মি.?

(ক) 1205 (খ) 1245 (গ) 1307 (ঘ) 1345

৯. লোহার তৈরি একটি নিরেট ও সুষম চতুস্তলকের ধারের দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

(ক) চতুস্তলকের একটি তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

(খ) চতুস্তলকের আয়তন নির্ণয় করুন।

(গ) চতুস্তলকটি গলিয়ে 2 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সিলিন্ডার তৈরি করা হলে তার উচ্চতা কত হবে নির্ণয় করুন।

১০. একটি লোহার গোলকের ভিতরের ফাঁপা অংশের ব্যাসার্ধ 6.5 সে.মি. ও লোহার বেধ 2 সে.মি.।

(ক) গোলকের ভিতরের অংশের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করুন।

(খ) গোলকটিকে গলিয়ে একটি নিরেট গোলকে পরিণত করা হলে, তার ব্যাস কত হবে নির্ণয় করুন।

(গ) গোলকটি যদি সিলিন্ডার আকৃতির একটি বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়, তাহলে বাক্সটির খালি অংশের আয়তন কত হবে নির্ণয় করুন।

১১. একটি যৌগিক স্থাপনার নিচের অংশ একটি ষড়ভুজাকার প্রিজম এবং উপরের অংশ একটি সুষম পিরামিড। প্রিজমের কেন্দ্র হতে প্রতিটি কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব 6 মিটার এবং উচ্চতা 10 মিটার। পিরামিডের উচ্চতা 8 মিটার।

(ক) 8 মিটার ধার বিশিষ্ট একটি ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় করুন।

(খ) স্থাপনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

(গ) স্থাপনাটির আয়তন নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.১

১. ক ২. খ ৩. গ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.৩

1. গ 2. খ 3. খ 4. 13 মিটার, 192 বর্গ মিটার, 144 ঘন মিটার;
5. 25 সে.মি. 6. 6 সে.মি., $6\sqrt{3}$ সে.মি., 216 বর্গ সে.মি. 7. 16.48 মি. (প্রায়), 648 ঘন মিটার 8. 8 $\sqrt{3}$ সে.মি., 512 ঘন সে.মি. 10. 1 সে.মি

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.৪

1. গ 2. খ 3. ক 4. ঘ 5. 798 বর্গ সে.মি., 1550 ঘন সে.মি.
6. 203.14 বর্গ সে.মি., 207.85 ঘন সে.মি. 7. (খ) 41.568 বর্গ সে.মি., 69.28 ঘন সে.মি.; (গ) 5.3852 সে.মি., 106.19 ঘন সে.মি. (প্রায়) 8. 110.85 বর্গ সে.মি., 60.34 ঘন সে.মি.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.৫

1. ক 2. খ 3. গ 4. ঘ
5. 3 সে.মি, 5.3 সে.মি 6. 13200 টাকা 7. 0.25 সে.মি. (প্রায়)
8. 4620 ঘন সে.মি. (প্রায়), 880 বর্গ সে.মি. (প্রায়), 440 বর্গ সে.মি. (প্রায়) 9. 56 সে.মি. (প্রায়)
10. 3 মিটার 11. 8403 টি 12. 792 ঘন সে.মি. (প্রায়)
14. 13.27 সে.মি. (প্রায়), 15 সে.মি. (প্রায়) 15. 51.33 ঘন সে.মি. (প্রায়) 16. 3.5 সে.মি. (প্রায়);

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. ক 2. গ 3. গ 4. ক 5. খ 6. খ 7. ঘ 8. গ
9. (ক) 15.59 বর্গ সে.মি., (খ) 25.46 ঘন সে.মি., (গ) 2.026 সে.মি.
10. (ক) 530.93 বর্গ সে.মি. (প্রায়), 1150.35 ঘন সে.মি. (প্রায়) (খ) 13.95 সে.মি. (প্রায়)
(গ) 1286.22 ঘন সে.মি. (প্রায়)
11. (ক) $8\sqrt{3}$ মিটার, 512 ঘন মিটার (খ) 633.5 বর্গ মিটার (গ) $684\sqrt{3}$ ঘন মিটার