ইউনিট
১১

সমতলীয় ভেক্টর
Vectors in a Plane

ভূমিকা

প্রাত্যহিক জীবনে পরিমাপের গুরুত্ব অপরিসীম। প্রায় সব ক্ষেত্রেই বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। শুধু এককসহ পরিমাপযোগ্য সকল রাশিকে পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় না। সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য পরিমাণ ও দিক উভয়ই প্রয়োজন হয়। এ ধরনের রাশিকে ভেক্টর রাশি বলা হয়। যেমন : সরণ, বেগ, ত্বরণ, বৈদ্যুতিক প্রবাহ, ওজন, বল ইত্যাদি। আর শুধু এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়, তা হলো স্কেলার রাশি। যেমন : দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা, সময়, তাপমাত্রা, আয়তন, ক্ষেত্রফল, ভর ইত্যাদি। গণিত, পদার্থবিদ্যা ও প্রকৌশল বিদ্যায় ভেক্টরের ব্যবহার বহুল। এই ইউনিটে আপনারা ভেক্টর রাশি, স্কেলার রাশি, ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ, ভেক্টর সমতা, বিপরীত ভেক্টর, ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ বিধি, ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক, অবস্থান ভেক্টর ইত্যাদি সম্পর্কে অবহিত হবেন।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি বর্ণনা করতে পারবেন।
- স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি প্রতীকের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সমান ভেক্টর, বিপরীত ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ বিধি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি বর্ণনা করতে পারবেন।
- ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক ও একক ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক সংক্রান্ত বন্টন সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ভেক্টরের সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১১.১: স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি
পাঠ ১১.২: ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ বিধি
পাঠ ১১.৩: ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি, ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক
পাঠ ১১.৪: ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক সংক্রান্ত বন্টন সূত্র
পাঠ ১১.৫: অবস্থান ভেক্টর

পাঠ ১১.১ স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

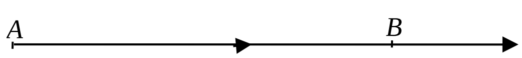
- স্কেলার রশি ও ভেক্টর রাশি বর্ণনা করতে পারবেন,
- স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি প্রতীকের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ বর্ণনা করতে পারবেন,
- দিক নির্দেশক রেখাংশ চিহ্নিত করতে পারবেন,
- ধারক রেখা কী তা চিত্রের সাহায্যে বর্ণনা করতে পারবেন,
- ভেক্টরের সমতা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বিপরীত ভেক্টর বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	স্কেলার রাশি, ভেক্টর রাশি, ধারক রেখা

মূলপাঠ

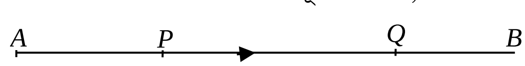
স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি: যে সকল রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু কোনো দিক নেই অর্থাৎ একটিমাত্র পাটিগণিতীয় সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করলেই চলে, তাদেরকে স্কেলার বা অদিক রাশি বলা হয়। যেমন : দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা, ভর, সময়, তাপমাত্রা, আয়তন, ক্ষেত্রফল, ঘনত্ব, দ্রুতি, কাজ, শক্তি ইত্যাদি প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি। আবার যেগুলো কেবল একটি সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা যায় না অর্থাৎ ঢাকা থেকে রাজশাহী যেতে হলে কেবল দূরত্ব জানলেই চলবে না, রাজশাহী কোন দিকে তাও জানার প্রয়োজন হবে। এ ধরণের পরিমাণকে ভেক্টর বলে।
যে সকল রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়। যেমনঃ সরণ, বেগ, ত্বরণ, মন্দন, ওজন, বল , বৈদ্যুতিক প্রবাহ ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ : দিক নির্দেশক রেখাংশ: সদিক রাশির মাধ্যমে ভেক্টর রাশি প্রকাশ করা হয়। কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে আদিবিন্দু বা প্রারম্ভ বিন্দু (initial point) এবং অপর প্রান্তকে অন্তবিন্দু বা শীর্ষবিন্দু (terminal point) হিসেবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ (directed line segment) বলা হয়।



কোনো দিক নির্দেশক রেখাংশের আদিবিন্দু বা প্রারম্ভ বিন্দু A এবং অন্তবিন্দু বা শীর্ষবিন্দু B হলে, ঐ দিক নির্দেশক রেখাংশকে $\overline{AB}$ বা $\overrightarrow{AB}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। সকল দিক নির্দেশক রেখাংশ একটি ভেক্টর রাশি, যার পরিমাণ ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্য $|\overline{AB}|$ বা $|\overrightarrow{AB}|$ একটি যোগাবোধক বাস্তব সংখ্যা এবং দিক A বিন্দু হতে AB বরাবর B বিন্দুর দিকে নির্দেশিত। এক্ষেত্রে, $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ কিন্তু, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ দিক নির্দেশক রেখাংশকে জ্যামিতিক ভেক্টর বলেও উল্লেখ করা হয়। ভেক্টরকে সব সময় সঠিক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সঠিক রেখাংশের মানকে ভেক্টরের মান এবং সঠিক রেখাংশের দিক ভেক্টরের দিক নির্দেশ করে।

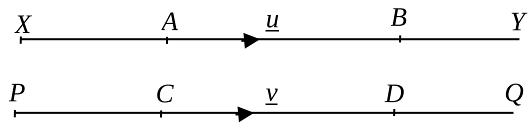
ধারক রেখা: অসীম দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট কোনো সরলরেখার অংশ দ্বারা কোনো দিক নির্দেশিত রেখাংশ সূচিত হলে, ঐ রেখাকে উক্ত রেখাংশের ধারক রেখা বা শুধু ধারক (support) বলা হয়। এ চিত্রে, PQ রেখাংশের ধারক AB রেখা



সাধারণত একটি ভেক্টর u কে $\vec{u}$, $\underline{u}$ কিংবা $\boldsymbol{u}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ, $\underline{u} = \overrightarrow{PQ}$ এর অর্থ $\underline{u}$ ভেক্টরের অদি বিন্দু P এবং Q অন্তবিন্দু এবং এর দিক P হতে Q এর দিকে এবং এর দৈর্ঘ্য $|\underline{u}| = |\overrightarrow{PQ}| = PQ$, PQ রেখাংশের দৈর্ঘ্য।

ভেক্টরের সমতা : দুইটি ভেক্টর রাশি পরস্পর সমান হবে, যদি তাদের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয়, ভেক্টরদ্বয়ের সংখ্যাগত মান বা দৈর্ঘ্য সমান হয় এবং ভেক্টরদ্বয়ের ক্রিয়া দিক একই হয়।

চিত্রে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয় সমান হবে, যদি তাদের ধারক রেখা XY ও PQ সমমুখী সমান্তরাল হয় এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর দিক একই হয়।



অর্থাৎ, একটি ভেক্টর $\underline{u}$ কে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান বলা হবে, যদি

i) $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ হয়, ($\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য সমান)

ii) $\underline{u}$ এর ধারক ও $\underline{v}$ এর ধারক একই বা সমান্তরাল হয়

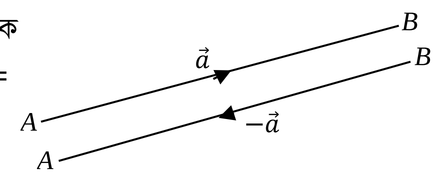
iii) $\underline{u}$ এর দিক ও $\underline{v}$ এর দিক একমুখী হয়।

$\underline{u}$ এর ধারক এবং $\underline{v}$ এর ধারক রেখাদ্বয় অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, সংক্ষেপে বলা যায়, $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর।

বিপরীত ভেক্টর:

বিপরীত দিকে ক্রিয়ারত দুইটি সমজাতীয় ভেক্টরের মান সমান হলে, তাদেরকে বিপরীত ভেক্টর বলা হয়। চিত্রে, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$, এখানে $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

এখানে, $\vec{a}$ এবং $-\vec{a}$ এর দৈর্ঘ্য সমান কিন্তু দিক পরস্পর বিপরীত।



শিক্ষার্থীর কাজ	$\vec{p}$ ও $\vec{q}$ দুইটি ভেক্টর হলে, চিত্রের সাহায্যে ভেক্টর দুইটির সমতা ও বিপরীত ভেক্টর প্রকাশ করে বর্ণনা করুন।

সারসংক্ষেপ

- যে সকল রাশির শুধু মান আছে, কিন্তু কোনো দিক নেই তাদেরকে স্কেলার বা অদিক রাশি বলা হয়। যেমন : দৈর্ঘ্য, প্রস্থ।
- যে সকল রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়। যেমন: সরণ, বেগ, ত্বরণ।

পাঠ ১১.২ ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ বিধি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

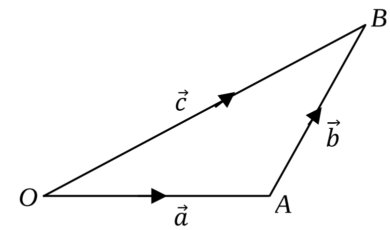
- ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি বর্ণনা করতে পারবেন।
- ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র চিত্রের সাহায্যে দেখাতে পারবেন।
- ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

- ভেক্টরের বিয়োগ বিধি বর্ণনা করতে পারবেন।
- শূন্য ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ভেক্টরের যোগ, ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্র, ভেক্টরের বিয়োগ

মূলপাঠ

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধিঃ মনে করুন, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, এবং $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ দুইটি ভেক্টর, যার $\vec{a}$ এর শীর্ষবিন্দু $\vec{b}$ এর আদিবিন্দু। $\vec{a}$ এর আদিবিন্দুকে $\vec{b}$ এর শীর্ষবিন্দুর সাথে যোগ করলে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমষ্টি বা লব্ধি $\overrightarrow{OB} = \vec{c}$ ভেক্টর পাওয়া যায় এবং $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।



অতএব, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

অর্থাৎ, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB} = \vec{c}$

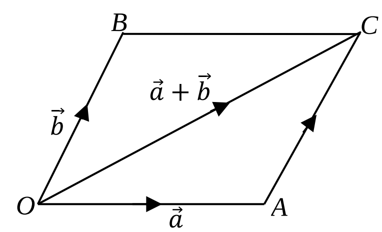
দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশি একত্রে ক্রিয়া করে যে একটি ভেক্টর উৎপন্ন করে, তাকে উক্ত ভেক্টরসমূহের লব্ধি বলে।

$\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ সমান্তরাল না হলে, $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{a} + \vec{b}$ ভেক্টরত্রয় একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। তাই ভেক্টর যোগের এ পদ্ধতিকে 'ত্রিভুজ বিধি' বা ত্রিভুজ সূত্র' বলা হয়।

ভেক্টরের ত্রিভুজ সূত্রঃ একটি ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বাহু দ্বারা একইক্রমে সূচিত দুইটি ভেক্টরের লব্ধি ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহু দ্বারা বিপরীতক্রমে সূচিত হবে।

ত্রিভুজ সূত্র থেকে জানা যায়, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা একক্রমে তিনটি ভেক্টরকে মান ও দিক সূচিত করলে তাদের লব্ধি শূন্য ভেক্টর হবে অর্থাৎ তারা স্থিতাবস্থায় থাকবে।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধিঃ ভেক্টরযোগের ত্রিভুজ বিধির অনুসিদ্ধান্ত হিসেবে ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি নিম্নরূপঃ কোনো সামান্তরিকের শীর্ষের সন্নিহিত বাহুদ্বয় দ্বারা যদি দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ কে মানে ও দিকে প্রকাশ করা যায়, তবে ঐ বিন্দুগামী কর্ণদ্বারা মান ও দিক ঐ ভেক্টর দ্বয়ের লব্ধি বা $\vec{a} + \vec{b}$ প্রকাশ পায়।



পাশের চিত্রে, $OACB$ সামান্তরিকের $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ এবং কর্ণ $\overrightarrow{OC}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, সেহেতু $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC} = \vec{b}$

ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

বা, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$

দ্রষ্টব্যঃ দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ সমান্তরাল হলে, সামান্তরিক এঁকে $\vec{a} + \vec{b}$ নির্ণয় করা সম্ভব হবে না। অর্থাৎ, এক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়। কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

শিক্ষার্থীর কাজ	যেকোনো দুইটি ত্রিভুজ আঁকুন এবং ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র অনুযায়ী ত্রিভুজ দুইটি চিহ্নিত করুন।

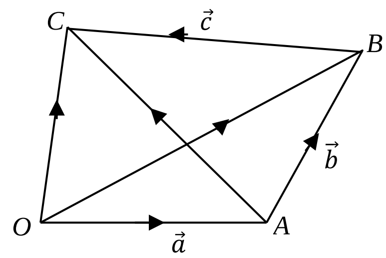
অনুসিদ্ধান্ত ১ঃ $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$

আবার, $\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ [$\because \overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{BC}$]

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

সুতরাং, ভেক্টর যোগ বিনিময় বিধি (Commutative Law) সিদ্ধ করে।

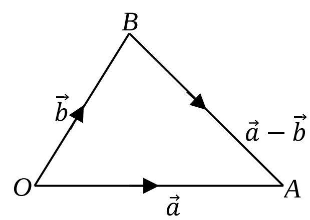
অনুসিদ্ধান্ত ২: পাশের চিত্রে, মনে করুন, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$
$\vec{a}$ এর অন্তবিন্দু থেকে $\vec{b}$ এবং $\vec{b}$ এর অন্তবিন্দু থেকে $\vec{c}$ অঙ্কন করা হয়েছে।
O, C এবং A, C যোগ করা হয়েছে।



তাহলে, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$]
$= \overrightarrow{OC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]
আবার, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$
$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$]
$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
সুতরাং, ভেক্টরযোগ সংযোগ বিধি (Associative Law) সিদ্ধ করে।

শিক্ষার্থীর কাজ	ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখান যে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AD}$

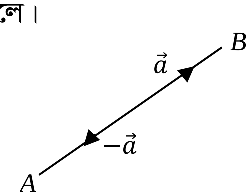
ভেক্টরের বিয়োগঃ
দুইটি ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর বিয়োগফল বলতে বোঝায় $\vec{a}$ ও $(-\vec{b})$ ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল।
$-\vec{b}$ হচ্ছে $\vec{b}$ এর বিপরীত ভেক্টর।
মনে করুন, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$
তাহলে, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$
বা, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
$\therefore \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$



সুতরাং $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা সূচিত ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল $\vec{a} - \vec{b}$ সর্বদা $\overrightarrow{BA}$ দ্বারা সূচিত হয়।
অর্থাৎ, $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর আদিবিন্দু একই হলে $\vec{b}$ এর অন্তবিন্দু হতে $\vec{a}$ এর অন্তবিন্দু পর্যন্ত রেখাংশ দ্বারা $\vec{a} - \vec{b}$ ভেক্টর সূচিত হয়। যদি $\vec{a} = \vec{b}$ হয়, তবে $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ অর্থাৎ $\vec{a} - \vec{b}$ শূন্য ভেক্টর।

অনুসিদ্ধান্ত : কোনো ত্রিভুজের তিনিটি বাহুর একই ক্রম দ্বারা সূচিত ভেক্টরত্রয়ের যোগফল শূন্য ভেক্টর। উপরের চিত্রে , $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = (-\overrightarrow{BO})$ $\therefore \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$

শূন্য ভেক্টর : যে ভেক্টরের পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না, তাকে শূন্য ভেক্টর বলে।
মনে করুন, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, তাহলে $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$
অতএব, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ (ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী)
অর্থাৎ $\overrightarrow{AA}$ দ্বারা A বিন্দুকেই বোঝায়।
কিন্তু এটি একটি বিন্দু, যার আদিবিন্দু ও অন্তবিন্দু একই বিন্দু।



সুতরাং, দৈর্ঘ্য শূন্য। এরূপ ভেক্টরকে শূন্য ভেক্টর বলা হয় এবং $\vec{0}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। শূন্য ভেক্টরের নির্দিষ্ট দিক বা ধারক নাই।
শূন্য ভেক্টরের ধারণা থেকে লেখা যায়,
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
এবং $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

শিক্ষার্থীর কাজ	প্রমাণ করুন যে, $-(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$

পাঠ ১১.৩ ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি, ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

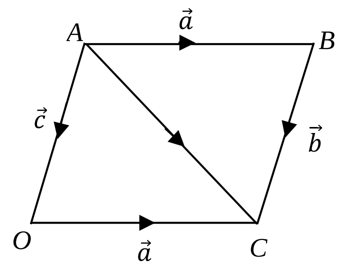
এই পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি বর্ণনা করতে পারবেন।
- ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- চিত্রের সাহায্যে সাংখ্য গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বর্জন বিধি, ভেক্টর গুণিতক, **স্কেলার গুণিতক**

মূলপাঠ

ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি (Cancellation Law)**:** যেকোনো ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ এর জন্য $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ হলে, $\vec{b} = \vec{c}$ হবে।



দেওয়া আছে, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ । উভয় পক্ষে $-\vec{a}$ যোগ করে পাওয়া যায়,

$$\vec{a} + \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{a} + \vec{c} + (-\vec{a})$$

বা, $\vec{a} - \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{a} + \vec{c}$

বা, $\vec{b} = \vec{c}$

সুতরাং ভেক্টর যোগ বর্জন বিধি সিদ্ধ করে।

ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক: $\vec{a}$ একটি অশূন্য ভেক্টর এবং k একটি অশূন্য স্কেলার রাশি হলে, $k\vec{a}$ একটি স্কেলার গুণিতক ভেক্টর এবং এর দিক হবে ভেক্টর $\vec{a}$ এর দিক ও এর দৈর্ঘ্য বা মান হবে $k|\vec{a}|$ এখানে $\vec{a}$ এবং $k\vec{a}$ ভেক্টর দুইটি সমরেখ। সাধারণত স্কেলার সংখ্যাটি বামপাশে লেখা হয় এবং গুণের কোনো চিহ্ন (বা $\times$) দেওয়া হয় না।

$k\vec{a}$ ভেক্টরের ভিন্ন ভিন্ন মান:

(i) $k = 0$ হলে, $k\vec{a} = \vec{0}$ (শূন্য ভেক্টর)

(ii) $\vec{a} = 0$ হলে, $k\vec{a} = \vec{0}$ (শূন্য ভেক্টর)

(iii) $k \neq 0$ হলে, $k\vec{a}$ এর ধারক $\vec{0}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন, $k\vec{a}$ এর দৈর্ঘ্য $\vec{a}$ এর দৈর্ঘ্যের k গুন অর্থাৎ $k|\vec{a}|$

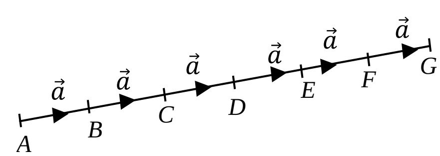
(iv) $k > 0$ হলে, $k\vec{a}$ এর দিক $\vec{a}$ এর দিকের সাথে অভিন্ন বা একমুখী।

(v) $k < 0$ হলে, $k\vec{a}$ এর দিক $\vec{a}$ এর দিকের বিপরীত,

(vi) $1\vec{a} = \vec{a}, (-1)\vec{a} = -\vec{a}$

উপরের সংজ্ঞা হতে দেখা যায় যে, $m(n\vec{a}) = n(m\vec{a}) = (mn)\vec{a}$

নিচে একটি উদাহরণ দেওয়া হলো: মনে করুন, $\overline{AB} = \overline{BC} = \vec{a}$, AC কে G পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যেন, $AB=BC=CD=DE=EF=FG$ হয়।



তাহলে, $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FG} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ $[\because \overline{AB} = \vec{a}] = 6\vec{a}$

আবার, $\overline{AG} = \overline{AC} + \overline{CE} + \overline{EG} = 2\vec{a} + 2\vec{a} + 2\vec{a} = 3(2\vec{a})$

এবং $\overline{AG} = \overline{AD} + \overline{DG} = 3\vec{a} + 3\vec{a} = 2(3\vec{a})$

$\therefore 2(3\vec{a}) = 3(2\vec{a}) = 6\vec{a}$

মন্তব্য : যে কোনো দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, এদের একটিকে অন্যটির সাংখ্য গুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়। যদি $AB \parallel CD$ হয় তবে,

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ যেখানে $|k| = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{AB}{CD} \therefore k = \frac{AB}{CD}$

যখন $k>0$, তখন $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ একমুখী বা সমমুখী হয়,

যখন $k<0$, তখন $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী হয়।

শিক্ষার্থীর কাজ	চিত্রের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, $8\vec{u} = 4(2\vec{u}) = 2(4\vec{u})$, যেখানে $\vec{u}$ একটি অশূন্য ভেক্টর।

পাঠ ১১.৪ ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক সংক্রান্ত বন্টন সূত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টরের সাংখ্য গুনিতক সংক্রান্ত বন্টন বিধি বা সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- একক ভেক্টর কী তা বলতে পারবেন।
- চিত্রের সাহায্যে ভেক্টরের সাংখ্যগুণিতক সংক্রান্ত বন্টন বিধি প্রমাণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সাংখ্য গুণিতক, বন্টন সূত্র, একক ভেক্টর

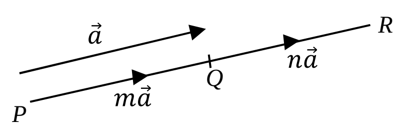
মূলপাঠ

ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক সংক্রান্ত বন্টন সূত্র (Distribution Law)**:** m,n দুইটি স্কেলার রাশি এবং $\vec{a}, \vec{b}$ দুইটি ভেক্টর রাশি হলে,

$(i)\ (m+n)\ \vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

$(ii)\ m\ (\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

প্রমাণ: (i) মনে করুন, $\overrightarrow{PQ} = m\vec{a}$



$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = m|\vec{a}|$

$\therefore\ PQ = m|\vec{a}|$

PQ কে R পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যেন, $\overrightarrow{QR} = n\vec{a}$ হয়।

অর্থাৎ, $|\overrightarrow{QR}| = n|\vec{a}|$ হয়।

$\therefore\ QR = n|\vec{a}|$

$\therefore\ PR = PQ + QR = m|\vec{a}| + n|\vec{a}| = (m+n)|\vec{a}|$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = (m+n)\ \vec{a}$

কিন্তু, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

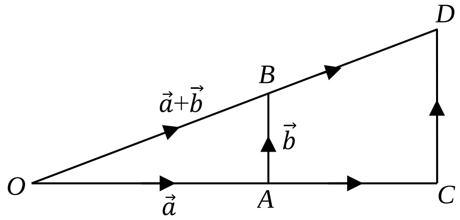
$\therefore \mathrm{m}\overrightarrow{PQ} + n\overrightarrow{PQ} = (m+n)\overrightarrow{PQ}$

মন্তব্য : তিনটি বিন্দু P, Q, R সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PQ}$ এর সাংখ্য গুণিতক হয়।

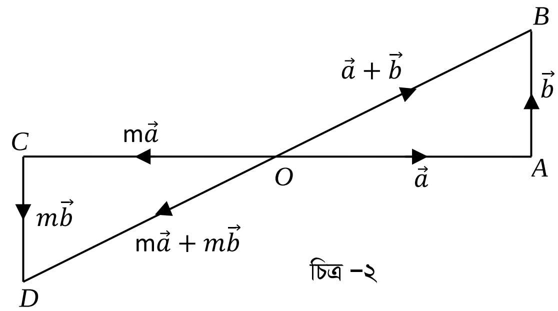
মন্তব্য : দুইটি ভেক্টরের দিক একই এবং তাদের ধারক রেখা অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হলে, তাদের পরস্পর সদৃশ (Similar) বা সদৃশ ভেক্টর বলা হয়।

প্রমাণঃ (ii) মনে করুন, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$

তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$



চিত্র –১



চিত্র –২

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো যে, $OC = mOA$ হয়।
C বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল CD রেখা অঙ্কন করা হলো যা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। কাজেই, OBD বিন্দুত্রয় একই রেখায় অবস্থিত। যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ,

সেহেতু, $\frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$

$\therefore \overrightarrow{CD} = m.\overrightarrow{AB} = m\vec{b}$

চিত্র-১ এ, m ধনাত্মক এবং চিত্র-২ এ, m ঋণাত্মক।

$\therefore \overrightarrow{OC} = m.\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CD} = m.\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{OD} = m.\overrightarrow{OB}$

তাহলে, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

$\therefore m(\overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{OB})$

$\therefore m\vec{a} + m\vec{b} = m(\vec{a} + \vec{b})$

মন্তব্যঃ m এর সকল মানের জন্য সূত্রটি সত্য।

শিক্ষার্থীর কাজ	$PQRS$ একটি সামন্তরিক যার কর্ণদ্বয় PR ও QS, $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{QS}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

একক ভেক্টরঃ যে ভেক্টর রাশির মান বা দৈর্ঘ্য এক একক, তাকে একক ভেক্টর (*Unit vector*) বলে। যেকোনো অশূন্য ভেক্টরকে এর মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরের দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া যায়। যদি $\vec{a}$ একটি ভেক্টর রাশি হয় যায় মান $|\vec{a}|$, যেখানে, $|\vec{a}| \neq 0$, তাহলে $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, ভেক্টর $\vec{a}$ এর দিকে অথবা এর সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর হবে। অর্থাৎ, $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$,

একক ভেক্টরের ক্ষেত্রে '$\wedge$' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

কাজের সুবিধার্থে ভেক্টর সম্পর্কিত নিয়মগুলো নিচে লেখা হলো :

যদি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ভেক্টর এবং m ও n স্কেলার হয় তবে,

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ হলে, $\vec{b} = \vec{c}$
4. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
5. $m = 0$ হলে, $m\vec{a} = \vec{0}$
6. $\vec{a} = 0$ হলে, $m\vec{a} = \vec{0}$
7. $1\vec{a} = \vec{a}$
8. $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$
9. $m(n\vec{a}) = n(m\vec{a}) = (mn)\vec{a}$
10. $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
11. $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$
12. $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

পাঠ ১১.৫ অবস্থান ভেক্টর

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

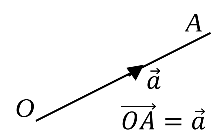
এই পাঠ শেষে আপনি-

- অবস্থান ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- অবস্থান ভেক্টর সংক্রান্ত প্রতিজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন।
- ভেক্টরের সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

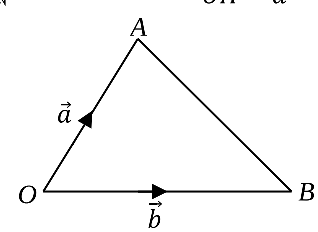
মুখ্য শব্দ	অবস্থান ভেক্টর

মূলপাঠ

অবস্থান ভেক্টর: কোনো বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়, তাকে অবস্থান ভেক্টর (Position Vector) বলা হয়। কোনো সমতলস্থ যে কোনো বিন্দু A এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$, যেখানে O একটি ভেক্টরের মূলবিন্দু যা একটি স্থির বিন্দু এবং $\overrightarrow{OA}$ কে সাধারণত $\vec{a}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



পাশের চিত্রে, মনে করুন, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O বিন্দুর প্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$ এবং মূলবিন্দু O এর অবস্থান শূন্য। অনুরূপভাবে, O মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে একই সমতলে B এর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$ । A, B যোগ করা হলো।



ধরুন, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

সুতরাং, দুইটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর জানা থাকলে তাদের সংযোজক রেখাংশ দ্বারা সূচিত ভেক্টর ঐ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর থেকে আদিবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বিয়োগ করে পাওয়া যাবে।

অনুসিদ্ধান্ত: অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}$ এর সংযোজক রেখার মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর হলো $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$।

অবস্থান ভেক্টর সংক্রান্ত প্রতিজ্ঞা

(১) দুইটি বিন্দু A,B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}$ হলে, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

(২) তিনটি বিন্দু A,B,C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ হলে, A,B,C সমরেখ হবে যদি $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ হয়, অর্থাৎ যদি $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সাংখ্য গুণিতক হয়।

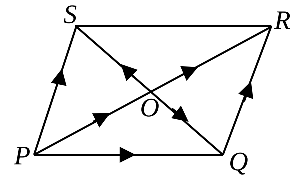
(৩) A,B দুইটি ভেক্টর হলে, $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$

শিক্ষার্থীর কাজ	দুইটি ভেক্টর, $\vec{u}, \vec{v}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$

উদাহরণ 1: $PQRS$ একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় PR ও QS, $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{PS}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{QS}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

সমাধান: আপনারা জানেন, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ধরা যাক, কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O.



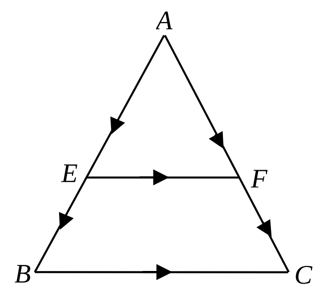
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{QS}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QS}\right)$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QS}\right)$

উদাহরণ 2: ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ এর তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক।

সমাধান: মনে করুন, E ও F যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। E,F যোগ করুন। প্রমাণ করতে হবে যে, $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}BC$



প্রমাণ: ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EF}$

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF}$ [যেহেতু F, AC এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}$ [যেহেতু E, AB এর মধ্যবিন্দু]

অতএব, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE})$

অর্থাৎ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$ এর তাৎপর্য হলো,

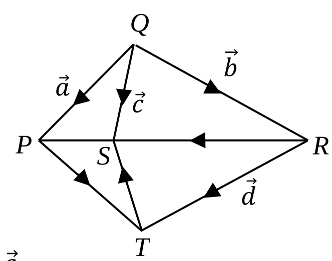
(i) $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{EF}|$ [মানের ভিত্তিতে]

(ii) $\overrightarrow{BC}$ ও $2\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল ধারকের উপর [দিকের ভিত্তিতে]।

এক্ষেত্রে ধারকদ্বয় বিভিন্ন অর্থাৎ ধারক এক নয়। অতএব, এরা সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}BC$

উদাহরণ 3: চিত্রে দেওয়া আছে, $\overrightarrow{QP} = \vec{a}, \overrightarrow{QR} = \vec{b}, \overrightarrow{QS} = \vec{c}$ এবং $\overrightarrow{RT} = \vec{d}$। নিচের ভেক্টরগুলোকে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ও $\vec{d}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন: (ক) $\overrightarrow{PS}$ (খ) $\overrightarrow{RP}$ (গ) $\overrightarrow{PT}$ (ঘ) $\overrightarrow{TS}$



সমাধান : ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

(ক) $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = -\vec{a} + \vec{c}$ [$\because \overrightarrow{QP} = \vec{a}$]

(খ) $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\vec{b} + \vec{a}$ [$\because \overrightarrow{QR} = \vec{b}$]

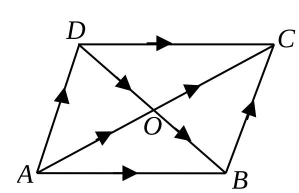
(গ) $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT} = -\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RT} = -(-\vec{b} + \vec{a}) + \vec{d} = \vec{b} - \vec{a} + \vec{d}$

(ঘ) $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TR} + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS}) = -\vec{d} + (-\vec{b} + \vec{c}) = -\vec{d} - \vec{b} + \vec{c}$

উদাহরণ 4: ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

সমাধান: $ABCD$ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $OA=OC$ এবং $OB=OD$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB \parallel DC$ এবং $AB=DC$

অর্থাৎ $ABCD$ সামান্তরিক।



প্রমাণ: ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী, $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [একই ধারক এবং O মধ্যবিন্দু বলে]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

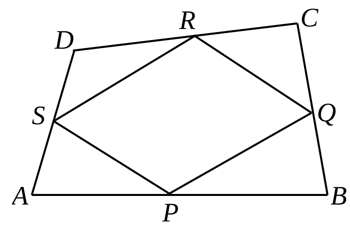
এর তাৎপর্য হলো, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$

এবং AB ও DC একই দিকে কিন্তু একই রেখার উপর নয়।

অর্থাৎ $AB \parallel DC$

অতএব, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

উদাহরণ 5: $ABCD$ চতুর্ভুজের AB, BC, CD ও DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

আবার, $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

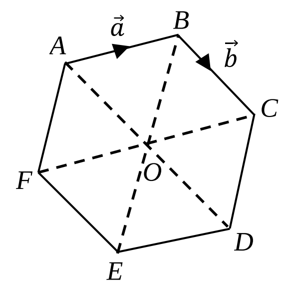
$\therefore\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \Rightarrow PQ = SR$ এবং $PQ \parallel SR$

অনুরূপভাবে দেখানো যায়,

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR} \Rightarrow PS = QR$ এবং $PS \parallel QR$

সুতরাং, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

উদাহরণ 6: O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABCDEF$ একটি সুষম ষড়ভুজ। যদি $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ হয়, তাহলে নিচের ভেক্টরগুলোকে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন



(ক) $\overrightarrow{AO}$ (খ) $\overrightarrow{AD}$ (গ) $\overrightarrow{BO}$ (ঘ) $\overrightarrow{CD}$

সমাধানঃ (ক) $\overrightarrow{AO} = \vec{b}$ যেহেতু BC=AO এবং $BC \parallel AO$]

(খ) $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$ কারণ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD}$

(গ) $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

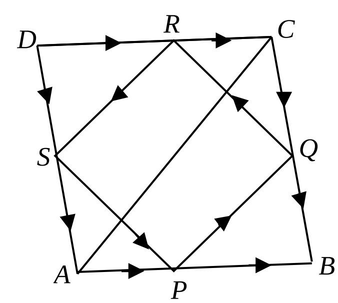
$= \vec{b} - \vec{a}$ [যেহেতু $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CO}$, কিন্তু বিপরীতমুখী]

(ঘ) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে] $= -\vec{a} + \vec{b}$

উদাহরণ 7: ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ পর্যায়ক্রমে সংযুক্ত করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

সমাধানঃ মনে করুন, $ABCD$ চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S এবং S ও P যোগ করুন। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণঃ মনে করুন, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \overrightarrow{CD} = \vec{c}, \overrightarrow{DA} = \vec{d}$



অতএব, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right)$

এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}\left(\vec{d} + \vec{a}\right)$

কিন্তু $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

অর্থাৎ, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -\left(\vec{c} + \vec{d}\right)$

এখন, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = -\frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore\ PQ$ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

অতএব, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।

উদাহরণ 8: চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$। M বিন্দু AB কে $1 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে। M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী) $= -\vec{a} + \vec{b}$

আবার, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ ……………………………….. (i)

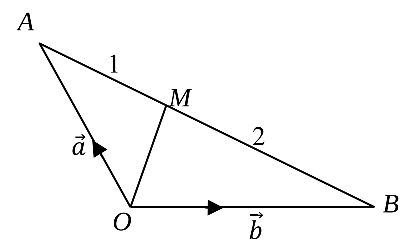
কিন্তু $AM : MB = 1 : 2$ অর্থাৎ $AM = \frac{1}{3}AB$

অতএব, $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ [সমীকরণ (i) হতে]

$= \vec{a} + \frac{1}{3}(-\vec{a} + \vec{b})$

$= \frac{3\vec{a} - \vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$



চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. দুইটি ভেক্টরকে সমান বলা হয়, যখন এদের
   (i) দৈর্ঘ্য সমান হয়
   (ii) দিক অভিন্ন হয়
   (iii) দিক পরস্পর বিপরীত হয়
   উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?
   ক) i   খ) i ও ii   গ) i ও iii   ঘ) i , ii ও iii
2. দেওয়া আছে,
   (i) একই দিকে ক্রিয়ারত দুইটি ভেক্টরের মান সমান হলে, তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।
   (ii) যে সকল ভৌত রাশির মান ও দিক নেই, তাদেরকে স্কেলার রাশি বলে।
   (iii) যে সকল রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে, তাদেরকে ভেক্টর রাশি বলে।
   উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?
   (ক) i ও ii   (খ) ii ও iii   (গ) i ও iii   (ঘ) i , ii ও iii
3. দেওয়া আছে,
   (i) এর মান
   (ii) শূন্য ভেক্টর রাশির আদিবিন্দু ও অন্তবিন্দু একই স্থানে অবস্থিত হয়।
   (iii) A ভেক্টরের একক ভেক্টর $\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$
   উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?
   (ক) i ও ii   (খ) ii ও iii   (গ) i ও iii   (ঘ) i , ii ও iii
4. OAB একটি ত্রিভুজ। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক ?
   (ক) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ (খ) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$
   (গ) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ (ঘ) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$
5. ABC ত্রিভুজে BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু তিনটি যথাক্রমে D, E, F হলে, নিচের কোনটি সঠিক ?
   (ক) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ (খ) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$
   (গ) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ (ঘ) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$
6. $AB = CD$ এবং $AB \parallel CD$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক ?
   (ক) $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$, যেখানে $m>1$ (খ) $\overrightarrow{AB} + m.\overrightarrow{CD} = \vec{0}$, যেখানে $m>1$
   (গ) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} < \vec{0}$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে 7 ও 8 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন :

AB রেখাংশের উপর P যেকোনো বিন্দু এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{r}$.

7. P বিন্দুটি AB রেখাংশকে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে নিচের কোনটি সঠিক ?

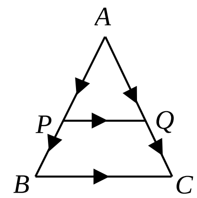
(ক) $\vec{r} = \frac{3\vec{a}+2\vec{b}}{5}$ (খ) $\vec{r} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

(গ) $\vec{r} = \frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ (ঘ) $\vec{r} = \frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$

8. ভেক্টর মূলবিন্দু O হলে, নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} - \vec{b}$ (খ) $\overrightarrow{OB} = \vec{b} - \vec{a}$

(গ) $\overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{b}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

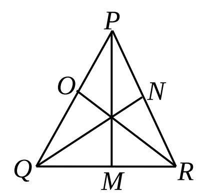


9. চিত্রে, ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q

(ক) ভেক্টর কী ? ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রটি উল্লেখ করুন।

(খ) $(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PO})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

(গ) $PBCQ$ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E হলে প্রমাণ করুন যে, $DE \parallel PQ \parallel BC$ এবং $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC})$



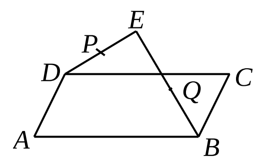
10. ΔPQR এর QR, RP ও PQ বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M, N ও O.

(ক) $\overrightarrow{OA}$ কে $\overrightarrow{QN}$ ও $\overrightarrow{RO}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{RO} = \overrightarrow{O}$

(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{QN}$, $\overrightarrow{RO}$ সমবিন্দু এবং তাদের ছেদবিন্দুতে প্রত্যেকে 2:1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়।

11. পাশের চিত্রে, $ABED$ একটি চতুর্ভুজ এবং $ABCD$ একটি সামান্তরিক। P এবং Q বিন্দু যথাক্রমে DE ও BE এর মধ্যবিন্দু। মাত্র একটি ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করুন:

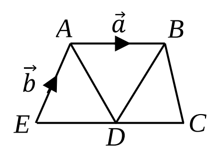


(ক) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP}$

(খ) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BQ}$

(গ) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB}$

12. পাশের চিত্রে, $ABDE$ ও $ABCD$ দুইটি সামান্তরিক। নিচের ভেক্টরগুলোকে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন:



(ক) $\overrightarrow{ED}$ (খ) $\overrightarrow{DC}$ (গ) $\overrightarrow{DB}$ (ঘ) $\overrightarrow{AD}$ (ঙ) $\overrightarrow{BC}$ (চ) $\overrightarrow{EC}$

13. দেখান যে,

(ক) $-(-\vec{a}) = \vec{a}$

(খ) $-(\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b}$

(গ) $(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w}$ হলে, $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ এবং বিপরীতক্রমে।

14. দেখান যে,

(i) $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$

(ii) $-m(\vec{a}) = m(-\vec{a}) = (m\vec{a})$, যেখানে m একটি স্কেলার।

(iii) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$, যেখানে m একটি স্কেলার।

(iv) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$, যেখানে m,n একটি স্কেলার।

15. $ABCDEF$ একটি সুষম ষড়ভুজ এবং $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ।

নিচের ভেক্টরগুলোকে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন :

(ক) $\overrightarrow{BC}$ (খ) $\overrightarrow{AD}$ (গ) $\overrightarrow{AE}$ (ঘ) $\overrightarrow{AF}$

16. $OACB$ একটি সামান্তরিক, যদি $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, হয়, তাহলে $\overrightarrow{OC}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ এর মান $\vec{a}$, $\vec{b}$ তে প্রকাশ করুন।

17. যদি ΔABC এ $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ এবং $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

18. যদি ΔABC এ D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু এবং $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ হয়, তবে দেখান যে, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c})$

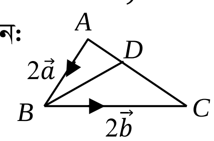
19. *ABCDEF* একটি পঞ্চভুজ। $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \vec{d}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

20. ΔABC এ D, E, F যথাক্রমে BC, CA AB এর মধ্যবিন্দু হলে, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ও $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

21. ভেক্টর পদ্ধতি প্রমাণ করুন, যদি $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$ এবং $\overrightarrow{OR} = \vec{a} + \vec{b}$ হয়, তবে $OPRQ$ একটি সামন্তরিক।

22. ΔABC এ BC বাহুর মধ্যবিন্দু M হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$

23. পাশের চিত্রে, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}, \overrightarrow{BC} = 2\vec{b}$, নিচের ভেক্টরগুলোকে $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন:



ক) $\overrightarrow{AC}$ খ) $\overrightarrow{AD}$ গ) $\overrightarrow{BD}$

24. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

25. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

২৬। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

২৭। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

২৮। ABC ত্রিভুজের মধ্যমা AD কে E বিন্দুতে দ্বিখন্ডিত করা হলো। BE কে বর্ধিত করলে এটি AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, $AF = \frac{1}{3}AC$ এবং $EF = \frac{1}{4}BF$।