ইউনিট ১০

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি
Coordinates Geometry

ভূমিকা

প্রায় দু'হাজার বছর আগে প্রাচীন গ্রীকরা প্রথম গণিতের জ্যামিতি শাখাটি নিয়ে গবেষণা শুরু করেন। কিন্তু এর অনেক পর বর্তমান জ্যামিতির আত্মপ্রকাশ ঘটে। আর এর পেছনে যার অবদান তিনি হলেন একজন ফরাসী গণিতবিদ, নাম রেনে দেকার্ত (Rene Descartes: 1596-1650)। তিনি দানিউব নদীর তীরে বসে মাথায় চিন্তা আনেন বীজগণিতকে কিভাবে জ্যামিতিতে প্রয়োগ করা যায়। তিনি গণিতের এই নব দিগন্তের সফলতাও আনেন। তিনি এর নাম দেন বিশ্লেষণ জ্যামিতি (Analytic Geometry)। দেকার্তের প্রবর্তিত জ্যামিতির এই স্থানাঙ্ক (Coordinates) প্রথা তারই নামানুসারে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Cartesian Coordinates) নামে পরিচিত। স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ও বিশ্লেষণ জ্যামিতি মূলত কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ভর। বিন্দু, সরলরেখা ও বক্ররেখার বীজগাণিতিক প্রকাশকে জ্যামিতির যে অংশে অধ্যয়ন করা হয় তাই স্থানাঙ্ক জ্যামিতি নামে পরিচিত। সমতলে বিন্দু পাতনের মাধ্যমে সরল বা বক্ররেখা অথবা এদের দ্বারা তৈরি জ্যামিতিক ক্ষেত্র যথা– ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি চিত্র প্রকাশ করা হয়।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন ।
- দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবেন ।
- সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন ।
- সরলরেখার সমীকরণ লেখচিত্রে উপস্থাপন করতে পারবেন ।
- স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন ।
- বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন ।
- বিন্দুপাতনের মাধ্যমে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সংক্রান্ত জ্যামিতিক অঙ্কন করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১০.১ আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ও দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

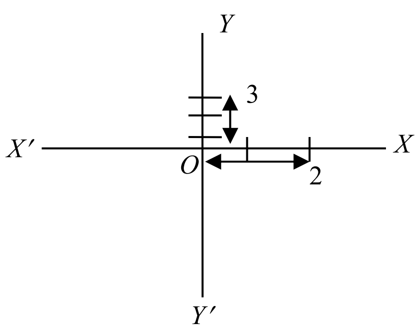
- সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দুরত্ব নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক, আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

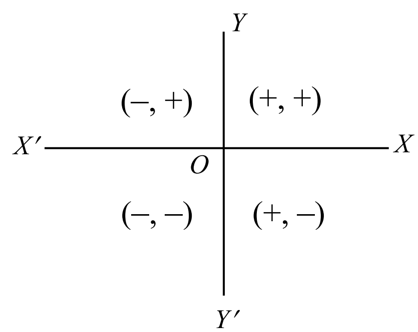
মূলপাঠ

আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian Coordinates): একটি সমতলে অনুভূমিক বরাবর একটি সরলরেখা এবং তার উপর আর একটি লম্ব সরলরেখা অঙ্কন করলে অনুভূমিক রেখাকে x-অক্ষ, তার উপর লম্বরেখাকে y-অক্ষ এবং তাদের ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু (Origin) বলা হয়। মূলবিন্দুকে সাধারণতঃ O দিয়ে নির্দেশ করা হয়।

x-অক্ষ ও y অক্ষকে বাস্তব সংখার সেট $\mathbb{R}$ এবং xy সমতলটি $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ক্রমজোড় (Ordered Pair)-এর সেট দিয়ে প্রকাশ করা হয়।



চিত্র- ১



চিত্র- ২

চিত্রে $X'OX$ অনুভূমিক রেখা ও $Y'OY$ উল্লম্ব রেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। $X'OX$ ও $Y'OY$ কে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং তাদের ছেদ বিন্দু O-কে মুলবিন্দু ধরা হয়। কোন বিন্দু প্রতিস্থাপন করতে গেলে x-অক্ষ ও y-অক্ষকে সমান অনুপাতের এককে বিভক্ত করা হয়। চিত্রে $(2,3)$ বিন্দুটি বসানো হয়েছে।

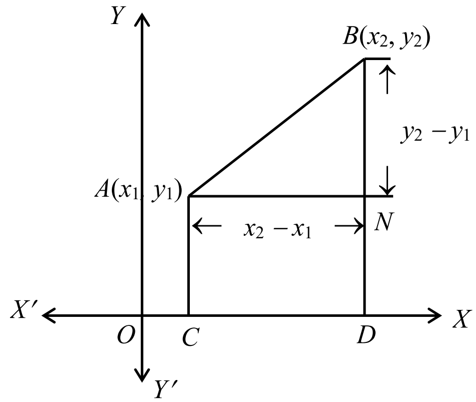
$X'OX$ ও $Y'OY$ রেখাদ্বয় সমতলটিকে ৪টি ভাগে ভাগ করেছে। প্রতিটি ভাগকে একটি চতুর্ভাগ (Quadrant) বলে। মূলবিন্দু O-এর সাপেক্ষে OX বরাবর x-এর ধনাত্মক ও OX' বরাবর x-এর ঋণাত্মক মান ধরা হয়। অনুরূপভাবে OY বরাবর y-এর ধনাত্মক ও OY'বরাবর y-এর ঋণাত্মক মান বসানো হয়। সুতরাং প্রথম চতুর্ভাগে x ও y-এর ধনাত্মক মান, ২য় চতুর্ভাগে x-এর ঋণাত্মক ও y-এর ধনাত্মক মান, ৩য় চতুর্ভাগে x ও y-এর ঋণাত্মক মান এবং ৪র্থ চতুর্ভাগে x-এর ধনাত্মক ও y-এর ঋণাত্মক মান বসবে। উপরের চিহ্নের আলোচনাকে ছক আকারে মনে রাখা যেতে পারে।

প্রথম চতুর্ভাগ	দ্বিতীয় চতুর্ভাগ	তৃতীয় চতুর্ভাগ	চতুর্থ চতুর্ভাগ
(+, +)	(–, +)	(–, –)	(+, –)

দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত (Distance between two points): যে কোন সমতলে $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ দুইটি বিন্দু নিন। x–অক্ষের উপর AC ও BD লম্বদ্বয় অঙ্কন করুন। $AN \perp BD$ অঙ্কন করুন।

চিত্রে, $OC = x_1$, $CA = y_1$

$OD = x_2$, $BD = y_2$



$ACDN$ আয়তক্ষেত্র বলে,

$CA = DN = y_1$

$CD = AN.$

$\therefore \quad AN = CD = OD - OC$

$\therefore \quad AN = x_2 - x_1$ - - - - - - - (1)

এবং $\quad BN = BD - DN = BD - CA$

$\Rightarrow BN = y_2 - y_1$ - - - - - (2)

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABN থেকে আমরা পাই,

$AB^2 = AN^2 + BN^2$

$\Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ [(1) ও (2)-এর সাহায্যে]

$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

অর্থাৎ, দুটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

অনুসিদ্ধান্তঃ মূলবিন্দু $O(0, 0)$ হতে সমতলে অবস্থিত যে কোন বিন্দু $A(x, y)$ এর দূরত্ব,

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

উদাহরণ 1: প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দুসমূহের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

(i) (2, 3) ও (4, 6) (ii) (−3, 7) ও (−7, 3) (iii) (a, b) ও (b, a) (iv) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ ও $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

সমাধানঃ (i) ধরুন, $A(2, 3)$ এবং $B(4, 6)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়।

বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\therefore AB = \sqrt{13}$ একক

নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{13}$ একক

(ii) ধরুন, $A(-3, 7)$ এবং $B(-7, 3)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়।

বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AB = \sqrt{(-7+3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ একক

$\therefore AB = 4\sqrt{2}$ একক

নির্ণেয় দূরত্ব $= 4\sqrt{2}$ একক

(iii) মনে করুন, $A(a, b)$ এবং $B(b, a)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়।

বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AB = \sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{b^2 - 2ab + a^2 + a^2 - 2ab + b^2}$

$= \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 4ab} = \sqrt{2(a^2 + b^2 - 2ab)} = \sqrt{2(a-b)^2}$

$\therefore AB = |a - b|\sqrt{2}$ একক

নির্ণেয় দূরত্ব $= |a - b|\sqrt{2}$ একক

(iv) মনে করুন, $A\left(\frac{-3}{2}, -1\right)$ এবং $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়।

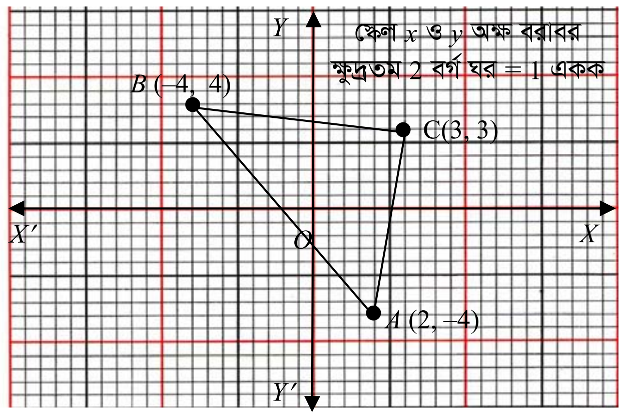
$\therefore\ AB= \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2+(2+1)^2} = \sqrt{(2)^2+(3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$\therefore\ AB = \sqrt{13}$ একক

নির্ণেয় দূরত্ব $= \sqrt{13}$ একক

উদাহরণ 2: একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $A(2, -4), B(-4, 4)$ ও $C(3, 3)$। ত্রিভুজটি অঙ্কন করুন এবং দেখান যে, এটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সমাধান: মনে করুন, $A(2, -4), B(-4, 4)$ এবং $C(3, 3)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ। xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হলো–



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+4)^2+(-4-4)^2}$

$= \sqrt{(6)^2+(-8)^2}$

$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-3)^2+(4-3)^2}$

$= \sqrt{(-7)^2+(1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$ একক

আবার, AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-3)^2+(-4-3)^2}$

$= \sqrt{(-1)^2+(-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$ একক

যেহেতু BC বাহুর দৈর্ঘ্য $=AC$ বাহুর দৈর্ঘ্য

সুতরাং ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদাহরণ 3: দেখান যে, $A(2, 2), B(-2, -2)$ এবং $C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। এর পরিসীমা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(2, 2), B(-2, -2)$ এবং $C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ।

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+2)^2+(2+2)^2} = \sqrt{(4)^2+(4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ একক

আবার, BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2+2\sqrt{3})^2+(-2-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2+(2+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{32}$ একক

এবং $CA = \sqrt{(-2\sqrt{3}-2)^2+(2\sqrt{3}-2)^2} = \sqrt{(2\sqrt{3}+2)^2+(2\sqrt{3}-2)^2}$

$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2)^2+8\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2+(2)^2-8\sqrt{3}} = \sqrt{12+4+12+4} = \sqrt{32}$ একক

যেহেতু $AB = BC = CA = \sqrt{32}$

সুতরাং ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

পরিসীমা $= (AB + BC + CA)$

$= (\sqrt{32}+\sqrt{32}+\sqrt{32}) = 3\sqrt{32}$ একক $= 16.971$ (প্রায়)

উদাহরণ 4: দেখান যে, $A(-5, 0), B(5, 0), C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$ একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A(-5, 0), B(5, 0), C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ। xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হলো–

এখানে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2+(0-0)^2}$

$= \sqrt{(-10)^2+0}$

$= \sqrt{100} = 10$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (0-5)^2}$

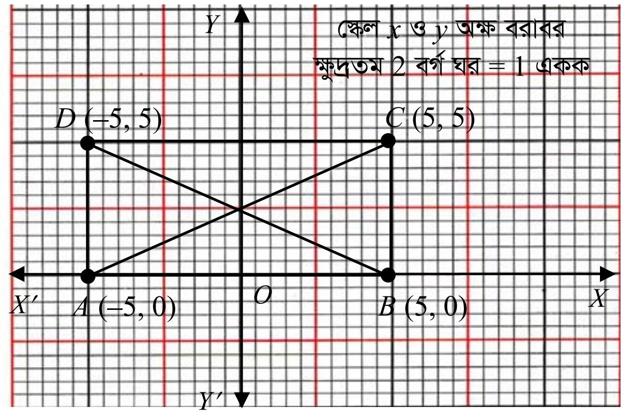
$= \sqrt{0 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+5)^2 + (5-5)^2}$

$= \sqrt{(10)^2 + 0} = \sqrt{100} = 10$ একক

আবার, DA বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5+5)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{0 + (5)} = \sqrt{25} = 5$ একক



যেহেতু AB বাহু $= CD$ বাহু এবং BC বাহু $= DA$ বাহু

আবার, কর্ণ, $AC = \sqrt{(-5-5)^2 + (0-5)^2}$

$= \sqrt{100 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$\therefore\ AC = 5\sqrt{5}$ একক

ΔADC এ $AD^2 + DC^2 = 5^2 + 10^2 = 125$

সুতরাং $AC^2 = AD^2 + DC^2 = 125$ যা একটি সমকোণী ত্রিভুজের শর্ত পূরণ করে।

অর্থাৎ, ΔADC এ D একটি সমকোণ। সুতরাং A, B, C, D একটি আয়াতক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু।

উদাহরণ 5: $A(-2, -1), B(5, 4), C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়তক্ষেত্রে তা নির্ণয় করুন।

সামাধান: দেওয়া আছে $A(-2, -1), B(5, 4), C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ।

xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হলো:

এখন, বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-5)^2 + (-1-4)^2}$

$= \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-6)^2 + (4-7)^2}$

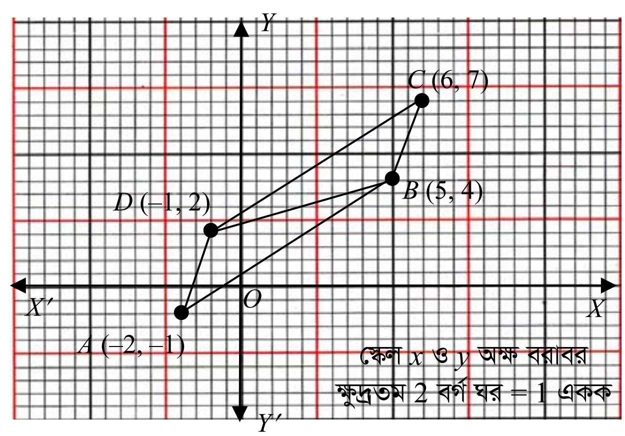
$= \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+1)^2 + (7-2)^2}$

$= \sqrt{(7)^2 + (5)^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$ একক

DA বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1+2)^2 + (2+1)^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ একক



যেহেতু $AB = CD$ এবং $BC = DA$

সুতরাং $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্রের শীর্ষবিন্দু অথবা সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

আবার, কর্ণ $BD = \sqrt{(5+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(6)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$ একক

$\therefore BD^2 = 40$

এবং $BC^2 + CD^2 = 10 + 74 = 84$

যেহেতু $BD^2 \neq BC^2 + CD^2$

সুতরাং এ দ্বারা প্রমাণিত A, B, C, D একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.১

1. মূলবিন্দু হতে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় করুনঃ
   (i) $(3, 4)$, (ii) $(a+b, a-b)$, (iii) $(at^2, 2at)$
2. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের সরলরৈখিক দূরত্ব নির্ণয় করুনঃ
   (i) $(3, 7)$ এবং $(11, -1)$, (ii) $(\sqrt{2}, 0)$ এবং $(0, \sqrt{7})$, (iii) (a, b) এবং (b, a).
3. দেখান যে, বিন্দুত্রয় $(a, 0), (0, b)$ এবং $(1, 1)$ সমরেখ হবে, যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ হয়।
4. দেখান যে, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \left(1a, \frac{1-1}{b}\right)$ এবং $\left(\frac{1-\lambda}{a}, \lambda b\right)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।
5. একটি বিন্দু $(1, 1), (2, 3)$ ও $(-2, 2)$ বিন্দুত্রয় থেকে সমদূরবর্তী। বিন্দুটির স্থানাঙ্ক কত?
6. প্রমাণ করুন যে, $(4, 3), (6, 4), (5, 6)$ এবং $(3, 5)$ বিন্দু চারটি একটি বর্গক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু।
7. দেখান যে, $(a, a), (-a, -a)$ এবং $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।
8. একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(2, -3)$ এবং $(-3, 7)$। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।
9. একটি বিন্দুর কোটি তার ভূজের দ্বিগুণ, যদি তার দূরত্ব $(4, 3)$ বিন্দু থেকে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক বাহির করুন।
10. কোন বিন্দুর কোটি 3 এবং বিন্দুটির দূরত্ব $(5, 3)$ থেকে 4 একক হলে, বিন্দুটির ভুজ নির্ণয় করুন।

পাঠ ১০.২ ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of a Triangle)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।
- বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।
- বিন্দুপাতনের মাধ্যমে ত্রিভুজ সংক্রান্ত জ্যামিতিক অঙ্কন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

মূলপাঠ

ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of a Triangle): মনে করুন, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ও $C(x_3, y_3)$, x-অক্ষের উপর BD, AM, CN লম্ব অঙ্কন করুন।

$OD = x_2, OM = x_1, ON = x_3$

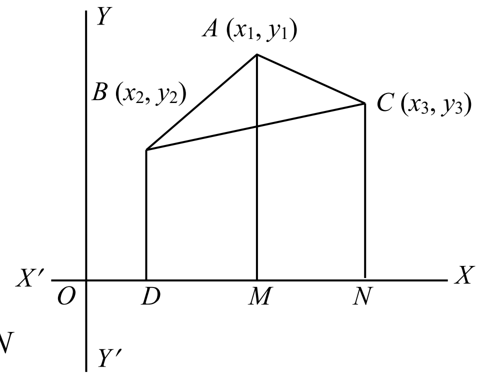
$\therefore \quad DM = OM - OD = x_1 - x_2$

$MN = ON - OM = x_3 - x_1$

$DN = ON - OD = x_3 - x_2$

আবার, $BD = y_2$, $MA = y_1$, $CN = y_3$.

ট্রাপিজিয়াম $BDMA$- এর ক্ষেত্রফল =



$\frac{1}{2}$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের যোগফল) × উচ্চতা

$= \frac{1}{2}(BD + AM).DM$

$= \frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)$

অনুরূপভাবে, ট্রাপিজিয়াম $AMNC$-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(AM + CN).MN$

$= \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)$

এবং ট্রাপিজিয়াম $BDNC$-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(BD + NC).DN$

$= \frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$

$\therefore$ ΔABC-এর ক্ষেত্রফল = (ট্রাপিজিয়াম $BDMA$-এর ক্ষেত্রেফল + ট্রাপিজিয়াম $AMNC$ এর ক্ষেত্রফল) – ট্রাপিজিয়াম $BDNC$-এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2) + \frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1) - \frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$

$= \frac{1}{2}\ [x_1(y_1+y_2-y_1-y_3)-x_2(y_1+y_2-y_2-y_3)+x_3(y_1+y_3-y_2-y_3)$

$\Delta = \frac{1}{2}\ [x_1(y_2-y_3) - x_2(y_1-y_3)+x_3(y_1-y_2)$ ----------(1)

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ .... (2)}$$

(2) থেকে $\Delta = \frac{1}{2}(x_1y_2-x_1y_3-x_2y_1+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3+x_3y_1-x_1y_3-x_2y_1-x_3y_2)$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} \text{ .... (3)}$$

(1) ও (3) নং-এর তুলনায় (2) নং সূত্র ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{or} \quad \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

উদাহরণ 1: একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি যথাক্রমে $A\left(a,\frac{1}{a}\right), B\left(b,\frac{1}{b}\right), C\left(c,\frac{1}{c}\right)$ । দেখান যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2abc}$

সমাধান: ক্ষেত্রফল $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & \frac{1}{a} & 1 \\ b & \frac{1}{b} & 1 \\ c & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a-b & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} & 0 \\ b-c & \frac{1}{b}-\frac{1}{c} & 0 \\ c & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix}$$ [১ম সারি থেকে ২য় সারি এবং ২য় সারি ৩য় সারি বিয়োগ করে ।]

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a-b & \frac{1}{a}-\frac{1}{b} \\ b-c & \frac{1}{b}-\frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a-b & \frac{b-a}{ab} \\ b-c & \frac{c-b}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a-b & -\frac{a-b}{ab} \\ b-c & -\frac{b-c}{bc} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{ab} \\ 1 & -\frac{1}{bc} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2b}(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{a} \\ 1 & -\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2b}(a-b)(b-c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2b}(a-b)(b-c)\left(\frac{c-a}{ac}\right)$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2abc}$$ বর্গ একক ।

উদাহরণ 2: দেখান যে, $(-1, 3)$, $(2, 9)$ ও $(-3, -1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

সমাধান: তিনটি বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & -6 & 0\\ 5 & 10 & 0\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}$$ [১ম থেকে ২য় এবং ২য় থেকে ৩য় সারি বিয়োগ করে।]

$$=\frac{1}{2}(-30+30)=0$$

যেহেতু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য অতএব বিন্দুগুলি সমরেখ।

সিদ্ধান্ত: (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে, যদি তাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়।

i.e. $$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$$ হয়।

উদাহরণ 3: যদি (x, y) $(1,2)$ ও $(2,1)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক হয় তবে প্রমাণ করুন যে, $x+y = 21$

সমাধান: আমরা পাই, ক্ষেত্রফল = 9 বর্গ একক।

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=9$$ [১ম থেকে ২য় এবং ২য় থেকে ৩য় সারি বিয়োগ করে।]

$$\Rightarrow (x-1)+(y-2)=18$$

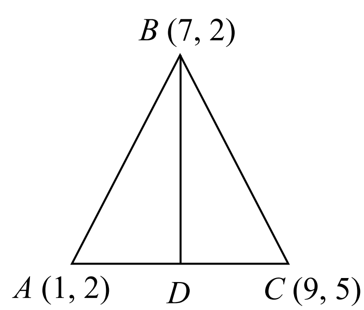
$$\Rightarrow x+y=21.$$

উদাহরণ 4: $A(1,2)$, $B(7,2)$ ও $C(9, 5)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বাহির করুন এবং B বিন্দু থেকে AC বাহুর উপর লম্বদূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান: $A(1,2)$, $B(7,2)$ ও $C(9, 5)$ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল,

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 7 & 2 & 1\\ 9 & 5 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-6 & 0 & 0\\ 7 & 2 & 1\\ 9 & 5 & 1\end{vmatrix}$$ [১ম থেকে ২য় সারি বিয়োগ করে।]

$$=\frac{1}{2}\times[-6(2-5)]=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9$$ বর্গ একক।



এখন, $AC=\sqrt{(1-9)^2+(2-5)^2}=\sqrt{64+9}=\sqrt{73}$ একক।

মনে করুন, B বিন্দু থেকে AC–এর লম্ব BD.

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 9

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\,.AC.\,BD=9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\,.\sqrt{73}\,.BD=9$$

$$\therefore\ BD=\frac{9\times 2}{\sqrt{73}}=2.11$$ একক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.২

1. নিম্নের বিন্দুগুলির দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
   i. (3, 0), (8, 0) ও (7, 3)
   ii. (2, 3), (0, 3) ও (2, –3)
   iii. (–3, –2), (1, 4) ও (2, 3)
2. দেখান যে, নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি সমরেখ।
   i. $(8a, 0), (0, 8b), (a, 2b)$
   ii. $(a\cos\theta, b\sin\theta), (0, 0), (-a\cos\theta, -b\sin\theta)$
   iii. $\left(a, \frac{1}{bc}\right), \left(b, \frac{1}{ca}\right), \left(c, \frac{1}{ab}\right)$
3. A, B, C বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (6, 3), (–3, 5), (4, –2) এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, দেখান যে, $\frac{\Delta PBC}{\Delta ABC} = \frac{x+y-2}{7}$
4. ΔABC-এর শীর্ষবিন্দু A, B, C-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (3, 5), (–3, 3) ও (–1, –1) এবং D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB এর মধ্যবিন্দু। ΔABC ও ΔDEF এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় এবং দেখান যে, $\Delta ABC = 4\Delta DEF$.

পাঠ ১০.৩ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

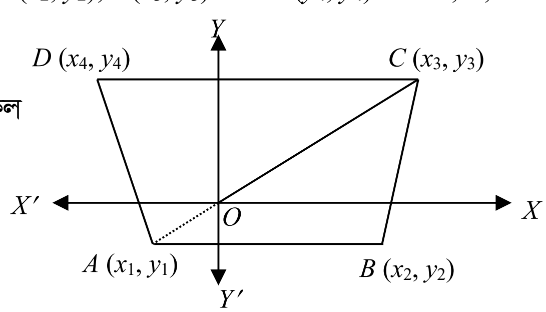
- বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।
- বিন্দুপাতনের মাধ্যমে চতুর্ভুজ সংক্রান্ত জ্যামিতিক অঙ্কন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

মূলপাঠ

চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। চতুর্ভুজটির চারটি শীর্ষ যথাক্রমে $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ এবং $D(y_4, y_4)$ এবং A, B, C, D কে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিক অনুসারে নেয়া হয়েছে।



এখন চতুর্ভুজ ক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

= ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল + ত্রিভুজ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{2}\ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1x_3)$

$+\ \frac{1}{2}\ (x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_3y_1 - x_4y_3 - x_1y_4)$

$= \frac{1}{2}\ (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$

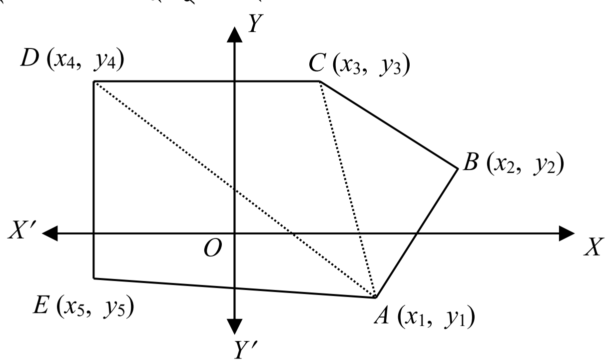
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$

সুতরাং চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$

অনুরূপভাবে একটি পঞ্চভুজ $ABCDE$ এর শীর্ষ বিন্দুগুলো যদি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ এবং $D(y_4, y_4)$ ও $E(x_5, y_5)$ হয় এবং চিত্রের মত শীর্ষগুলো যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হয়, তবে পঞ্চভুজ $ABCDE$ এর ক্ষেত্রফল তিনটি ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC, ACD ও ADE এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। ত্রিভুজ ক্ষেত্র ও চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ঠিক অনুরূপভাবে পঞ্চভুজ ক্ষেত্র $ABCDE$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_1 \end{vmatrix}$

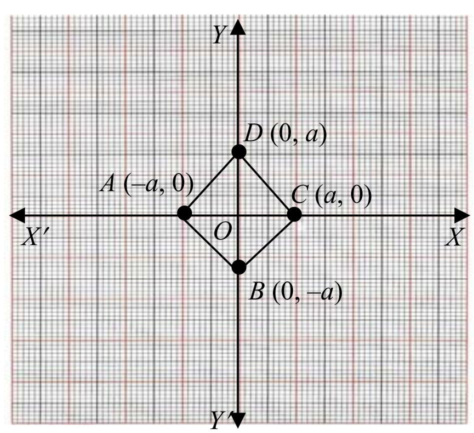
একইভাবে যে কোনো বহুভুজের শীর্ষ বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক জানা থাকলে সহজেই উপরোক্ত পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।



উদাহরণ 1: $A(-a, 0)$, $B(0, -a)$ $C(a, 0)$ ও $D(0, a)$ শীর্ষবিশিষ্ট $ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত**?**

সমাধান: মনে করুন $A(-a, 0)$; $(B(0, -a)$; $C(a, 0)$ এবং $D(0, a)$ কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ।

xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হলো



$\therefore \Delta ABC$-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -a & 0 & a & -a \\ 0 & -a & 0 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(a^2 + a^2)$ বর্গ একক $= a^2$ বর্গ একক

আবার, ΔADC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -a & 0 & a & -a \\ 0 & a & 0 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(-a^2 - a^2)$ বর্গ একক $= \frac{-2a^2}{2}$ বর্গ একক

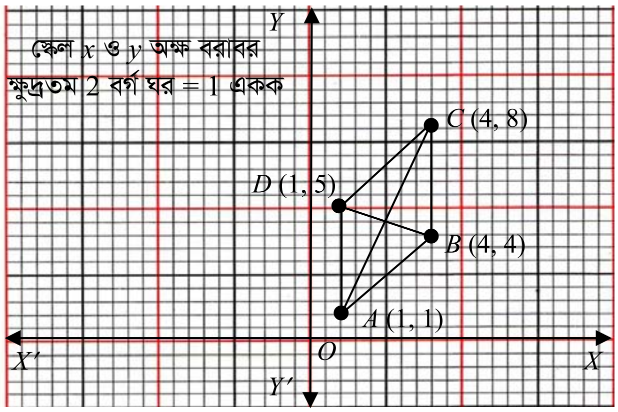
$= a^2$ বর্গ একক [ক্ষেত্রফলের ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই ঋণাত্মক চিহ্ন অগ্রাহ্য করে]

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $=\Delta ABC + \Delta ADC = (a^2 + a^2)$ বর্গ একক $= 2a^2$ বর্গ একক

উদাহরণ 2: দেখান যে, $A(1, 1), B(4, 4), C(4, 8)$ এবং $D(1, 5)$ বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। AC ও BD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের মাধ্যমে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $A(1, 1); B(4, 4); C(4, 8); D(1, 5)$

xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হলো–



এখন, $AB = \sqrt{(1-4)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক

$BC = \sqrt{(4-4)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{0 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ একক

$CD = \sqrt{(4-1)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

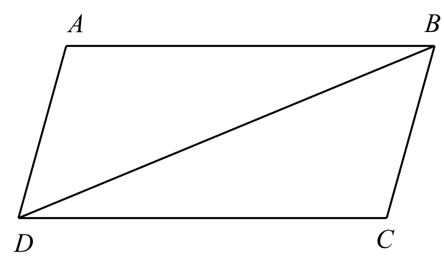
এবং $DA = \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{0 + (4)^2} = \sqrt{16} = 4$ একক

এখন, $AC = \sqrt{(1-4)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2}$

$= \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$ একক

আবার, $BD = \sqrt{(4-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ একক



এখানে $BC = DA, AB = CD$ এবং কর্ণ $AC \neq BD$।

বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান কিন্তু $BD^2 \neq BC^2 + CD^2$

সুতরাং $ABCD$ বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দুসমূহ। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল:

ত্রিভুজ ABD হতে পাই

$AB = 3\sqrt{2}$, $AD = 4$ এবং $BD = \sqrt{10}$

$\therefore 2s = \left(3\sqrt{2} + 4 + \sqrt{10}\right) = (4.242640 + 4 + 3.1622) = 11.404917$

$\therefore s = 5.702458$

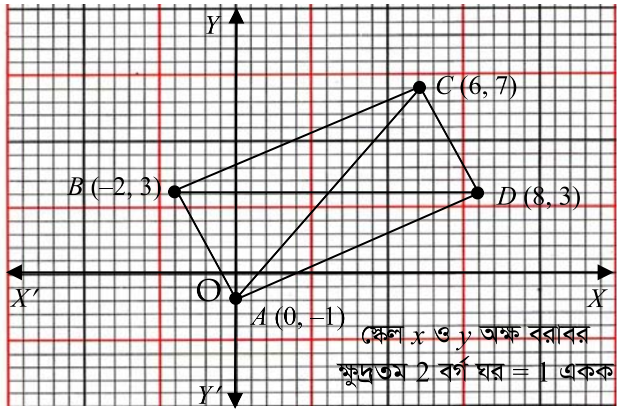
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $\Delta ABD = \sqrt{s\left(s - 3\sqrt{2}\right)(s-4)\left(s - \sqrt{10}\right)}$

$= \sqrt{5.702458 \times 1.4598 \times 1.7027 \times 2.54018} = \sqrt{35.998}$ বর্গ একক $= 5.999$ বর্গ একক

$\therefore$ $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= (2 \times 5.999) = 11.998$ বর্গ একক $= 12.000$ বর্গ একক (প্রায়)

উদাহরণ 3: দেখান যে, $(0, -1), (-2, 3), (6, 7)$ এবং $(8, 3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষ। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে $A(0, -1)$; $B(-2, 3)$; $C(6, 7)$ এবং $D(8, 3)$ বিন্দুগুলো কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ।



AB বাহু $=\sqrt{(0+2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$ একক

BC বাহু $=\sqrt{(-2-6)^2+(3-7)^2}=\sqrt{(-8)^2+(-4)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=2\sqrt{20}$ একক

CD বাহু $=\sqrt{(6-8)^2+(7-3)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}$ একক

DA বাহু $=\sqrt{(8+0)^2+(3+1)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=2\sqrt{20}$ একক

কর্ণ $BD=\sqrt{(-2-8)^2+(3-3)^2}=\sqrt{(-10)^2}=\sqrt{100}=10$ একক

এবং কর্ণ $CA=\sqrt{(6-0)^2+(7+1)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ একক

$ABCD$ চতুর্ভুজের চারটি বাহু $AB = BC = CD = DA$ এবং কর্ণ $BD =$ কর্ণ CA । সুতরাং প্রদত্ত বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষ।

এখন, ΔABD এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}(0-6-8-2-24-0)$ বর্গ একক $=\frac{-40}{2}$ বর্গ একক $= 20$ বর্গ একক [ঋণাত্মক চিহ্ন অগ্রাহ্য করে]

আবার, ΔBDC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 8 & 6 & -2 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}(-6+56+18-24-18+14)$ বর্গ একক $=\frac{1}{2}(40)$ বর্গ একক $= 20$ বর্গ একক

$\therefore$ $ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \Delta ABD + \Delta BDC = (20 + 20)$ বর্গ একক $= 40$ বর্গ একক।

উদাহরণ 4: নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

(i) (0, 0), (–2, 4), (6, 4), (4, 1); (ii) (1, 4), (–4, 3), (1, –2), (4, 0); (iii) (1, 0), (–3, –3), (4, 3), (5, 1)

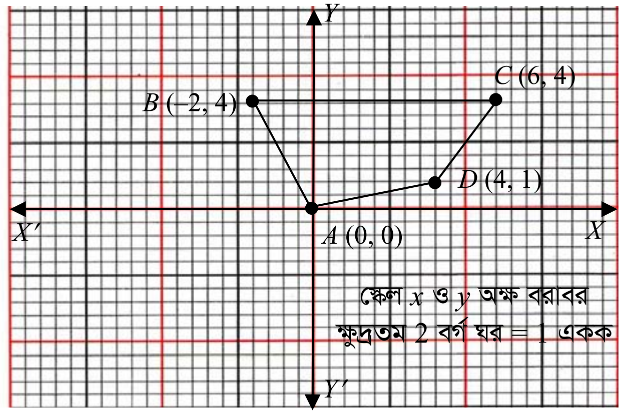
সমাধান: (i) দেওয়া আছে, $A = (0, 0)$, $B = (-2, 4)$, $C = (6, 4)$ ও $D = (4, 1)$ বিন্দুগুলো কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ।

এখন,

ΔABD এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}(-2-16)=\frac{-18}{4}$

$= 9$ বর্গএকক [ঋণাত্মক চিহ্ন অগ্রাহ্য করে]



আবার,

ΔBDC এর ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & 4 & 6 & -2\\ 4 & 1 & 4 & 4\end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\dfrac{1}{2}(-2+16+24-16-6+8)$ বর্গ একক

$=\dfrac{1}{2}(24)$ বর্গ একক $= 12$ বর্গ একক

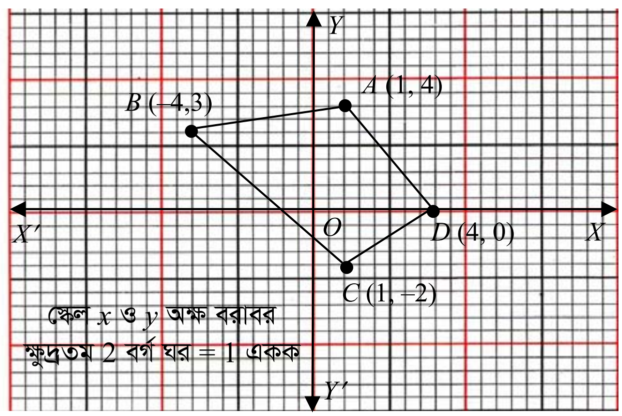
$\therefore$ চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \Delta ABD + \Delta BDC = 9 + 12 = 21$ বর্গ একক।

(ii) এখানে $A(1, 4)$, $B(-4, 3)$, $C(1, -2)$ এবং $D(4, 0)$ কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ।

এখন, ΔABD এর ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -4 & 4 & 1\\ 4 & 3 & 0 & 4\end{vmatrix}$ বর্গ একক $=\dfrac{1}{2}(3+0+16+16-12-0)$ বর্গ একক

$=\dfrac{1}{2}\times 23=\dfrac{23}{2}$ বর্গ একক



আবার,

ΔBDC এর ক্ষেত্রফল $=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}-4 & 4 & 1 & -4\\ 3 & 0 & -2 & 3\end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\dfrac{1}{2}(0-8+3-12-0-8)$ বর্গ একক

$=\dfrac{1}{2}(-25)=\dfrac{25}{2}$ বর্গ একক [ঋণাত্মক চিহ্ন অগ্রাহ্য করে]

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \Delta ABD + \Delta BDC$

$=\left(\dfrac{23}{2}+\dfrac{25}{2}\right)$ বর্গ একক $=\dfrac{48}{2}$ বর্গ একক $= 24$ বর্গ একক।

(iii) এখানে $A(1, 0)$; $B(-3, -3)$; $C(4, 3)$ এবং $D(5, 1)$ কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু।

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -3 & 4 & 5 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 1 & 0\end{vmatrix}$ বর্গ একক $=\dfrac{1}{2}(-3-9+4+12-15-1)$ বর্গ একক

$=\dfrac{1}{2}(16-28)$ বর্গ একক $=\dfrac{1}{2}\times(-12)$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক [কোনো ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক

উদাহরণ 5: দেখান যে, $A(2, -3)$, $B(3, -1)$, $C(2, 0)$, $D(-1, 1)$ এবং $E(-2, -1)$ শীর্ষ বিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল 11 বর্গ একক।

সমাধান: এখানে $A(2, -3)$, $B(3, -1)$, $C(2, 0)$, $D(-1, 1)$, $E(-2, -1)$ বিন্দুগুলো কোনো বহুভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ।

$\therefore$ $ABCDE$ বহুভুজের ক্ষেত্রফল

$=\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 3 & 2 & -1 & -2 & 2\\ -3 & -1 & 0 & 1 & -1 & -3\end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}(-2+2+1+6+9+2+2+2)$ বর্গ একক $=\frac{1}{2}(22)$ বর্গ একক = 11 বর্গ একক (প্রমাণিত)

উদাহরণ 6: একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ $A(3, 4), B(-4, 2), C(6, -1)$ এবং $D(P, 3)$ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে P এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $A(3, 4), B(-4, 2), C(6, -1), D(P, 3)$ বিন্দুসমূহ কোনো চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু।

$ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & P & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}(6+4+18+4P+16-12+P-9)$ বর্গ একক $=\frac{1}{2}(23+5P)$ বর্গ একক

আবার, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$=\frac{1}{2}(6+4+24+16-12+3)$ বর্গ একক $=\frac{41}{2}$ বর্গ একক

শর্ত মতে, $ABCD = 2\Delta ABC$

বা, $\frac{1}{2}(23+5P)=2\times\frac{41}{2}$

বা, $23 + 5P = 82$

বা, $5P = 82 - 23$

বা, $5P = 59$

$\therefore P=\frac{59}{5}$

শিক্ষার্থীর কাজ	চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতির সাহায্যে পঞ্চভুজ ও ষড়ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র প্রতিপাদন করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৩

1. একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে এবং । চতুর্ভুজটির চিত্র অঙ্কন করুন এবং যে কোনো দুই বাহু ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
2. এবং দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি অঙ্কন করে এর প্রতিটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন এবং চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
3. চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে এবং
   a) দেখান যে, একটি রম্বস।
   ও এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন এবং একটি বর্গ কিনা যাচাই করুন।

ত্রিভুজক্ষেত্রের মাধ্যমে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

4. এবং শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্র এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

পাঠ ১০.৪ সরলরেখার ঢাল

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সরলরেখার ঢালের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সরলরেখার ঢাল

মূলপাঠ

সরলরেখার ঢাল (Gradient or Slope of a Straight Line)

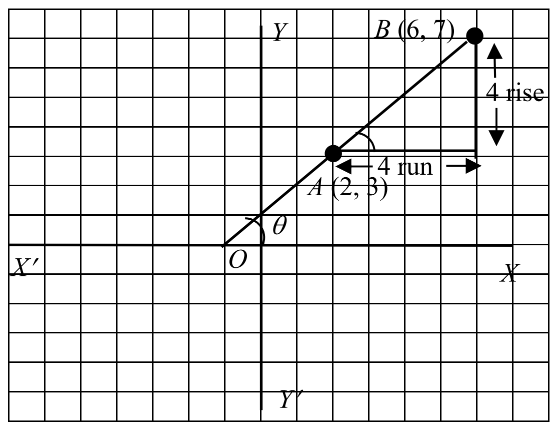
চিত্রে সরলরেখাটি বিবেচনা করুন। রেখাটি $A\,(2, 3)$ ও $B\,(6, 7)$ দুটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করেছে। চিত্রানুসারে রেখাটি x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে। এই কোণ θ হলো অনুভূমিক অক্ষের সাথে সরলরেখাটি কী পরিমাণ আনত হয়েছে এর পরিমাপ। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে আমরা রেখার ঢালকে নিম্নোক্তভাবে পরিমাপ করে থাকি–

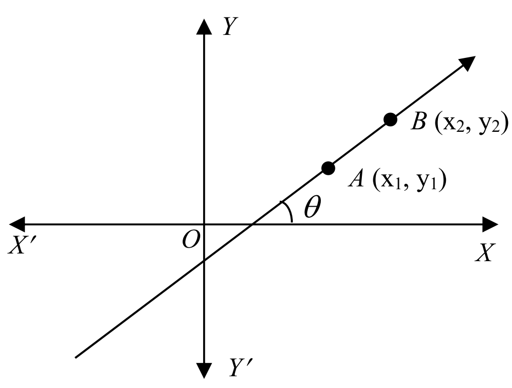
$$\frac{y \text{ স্থানাঙ্কের পরিবর্তন}}{x \text{ স্থানাঙ্কের পরিবর্তন}} = \frac{7-3}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$$

একটি সরলরেখা যখন $A\,(x_1, y_1)$ ও $B\,(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তখন এর ঢাল-কে আমরা

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left[\frac{\text{rise}}{\text{run}}\right] = \left[\frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}}\right]$$

দ্বারা প্রকাশ করে থাকি।





বাস্তবিকপক্ষে, কোনো সরলরেখা দ্বারা অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ θ ও ঢাল m এর মধ্যে সম্পর্ক হলো, $m = \tan\theta$ ।
চিত্রে রেখার ক্ষেত্রে সরলরেখার ঢাল 1 অর্থাৎ, $\tan\theta = 1$

বা, $\theta = 45^\circ$ (একটি সূক্ষ্মকোণ)।

উদাহরণ 1: নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে A ও B বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন।

(ক) $A(5, -2)$ এবং $B(2, 1)$ (খ) $A(3, 5)$ এবং $B(-1, -1)$

(গ) $A(t, t)$ এবং $B(t^2, t)$ (ঘ) $A(t, t+1)$ এবং $B(3t, 5t+1)$

সমাধান: (ক) এখানে, $A(5, -2)$ এবং $B(2, 1)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়;

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \dfrac{1-(-2)}{2-5} = \dfrac{3}{-3} = -1$

(খ) এখানে, $A(3, 5)$ এবং $B\ (-1, -1)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়;

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \dfrac{-1-5}{-1-3} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

(গ) এখানে, $A(t, t)$ এবং $B(t^2, t)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়;

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \dfrac{t-t}{t^2-t} = \dfrac{0}{t^2-t} = 0$

(ঘ) এখানে, $A(t, t+1)$ এবং $B(3t, 5t+1)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়;

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \dfrac{5t+1-t-1}{3t-t} = \dfrac{4t}{2t} = 2$

উদাহরণ 2: তিনটি ভিন্ন বিন্দু $A(t, 1)$, $B(2, 4)$ এবং $C(1, t)$ সমরেখ হলে t এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $A(t, 1)$, $B(2, 4)$ এবং $C(1, t)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ;

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \dfrac{1-4}{t-2} = \dfrac{-3}{t-2}$

এবং BC রেখার ঢাল $= \dfrac{4-t}{2-1} = \dfrac{4-t}{1}$

শর্তমতে, $\dfrac{-3}{t-2} = \dfrac{4-t}{1}$

বা, $-3 = (4-t)(t-2)$ বা, $-3 = 4t - 8 - t^2 + 2t$

বা, $-t^2 + 6t - 8 = -3$ বা, $t^2 - 6t + 5 = 0$

বা, $t^2 - 5t - t + 5 = 0$ বা, $t(t-5) - 1(t-5) = 0$

বা, $(t-5)(t-1) = 0$

$\therefore$ $t - 5 = 0$ | কিন্তু, $t - 1 \neq 0$, কারণ $t - 1 = 0$ বা $t = 1$ হলে A ও C বিন্দু দুইটি অভিন্ন হয়।

$\therefore$ $t = 5$ (Ans.)

উদাহরণ 3: দেখান যে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

সমাধান: এখানে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ।

AB রেখার ঢাল $= \dfrac{-3+2}{0-4} = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$

আবার, BC রেখার ঢাল $= \dfrac{-2-1}{4-16} = \dfrac{-3}{-12} = \dfrac{1}{4}$

যেহেতু AB রেখার ঢাল $=$ BC রেখার ঢাল। সুতরাং A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ। (দেখানো হলো)

উদাহরণ 4: $A(1, -1), B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t + 3)$ সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করুন।
সমাধান: এখানে, $A(1, -1), B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t + 3)$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয়;

AB রেখার ঢাল $= \dfrac{-1-2}{1-t} = \dfrac{-3}{1-t}$

BC রেখা ঢাল $= \dfrac{2-t-3}{t-t^2} = \dfrac{-t-1}{t-t^2}$

শর্তমতে, $= \dfrac{-3}{(1-t)} = \dfrac{-(1+t)}{t(1-t)}$

বা, $3t(t-1) = (t-1)(t+1)$ বা, $3t(t-1) - (t-1)(t+1) = 0$

বা, $(t-1)(3t-t-1) = 0$ বা, $(t-1)(2t-1) = 0$

$\therefore\ t = 1, \dfrac{1}{2}$ (Ans)

উদাহরণ 5: $A(3, 3p)$ এবং $B(4, p^2 + 1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল -1 হলে P এর মান নির্ণয় করুন।
সমাধান: এখানে, $A(3, 3p)$ এবং $B(4, p^2 + 1)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়।

AB রেখার ঢাল $= \dfrac{3p-p^2-1}{3-4} = \dfrac{3p-p^2-1}{-1}$

শর্তমতে, $\dfrac{3p-p^2-1}{-1} = -1$ বা, $3p - p^2 - 1 = 1$

বা, $3p - p^2 - 2 = 0$ বা, $p^2 - 3p + 2 = 0$

বা, $p^2 - 2p - p + 2 = 0$ বা, $p(p-2) - 1(p-2) = 0$

বা, $(p-1)(p-2) = 0$

হয়, $p - 1 = 0$ অথবা, $p - 2 = 0$

বা, $p = 1$ বা, $p = 2$

$\therefore p = 1, 2$

$\therefore p$ এর মান 1, 2 (Ans)

উদাহরণ 6: প্রমাণ করুন যে, $A(a, 0), B(0, b)$ এবং $C(1, 1)$ সমরেখ হবে, যদি $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$ হয়।

সমাধান: এখানে $A(a, 0), B(0, b)$ এবং $C(1, 1)$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয়;

AB রেখাল ঢাল $= \dfrac{0-b}{a-0} = \dfrac{-b}{a}$

BC রেখাল ঢাল $= \dfrac{b-1}{0-1} = \dfrac{b-1}{-1}$

শর্ত মতে, $\dfrac{-b}{a} = \dfrac{b-1}{-1}$ বা, $b = ab - a$

বা, $a + b = ab$ বা, $\dfrac{a}{ab} + \dfrac{b}{ab} = 1$ [ab দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore\ \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a} = 1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 7: $A(a, b), B(b, a)$ এবং $C\left(\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}\right)$ সমরেখ হলে প্রমাণ করুন যে, $a + b = 0$

সমাধানঃ এখানে $A(a, b), B(b, a)$ এবং $C\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয়;

AB রেখার ঢাল $= \frac{a-b}{b-a}$

BC রেখার ঢাল $= \frac{\frac{1}{b}-a}{\frac{1}{a}-b} = \frac{\frac{1-ab}{b}}{\frac{1-ab}{a}} = \frac{1-ab}{b} \times \frac{a}{1-ab} = \frac{a}{b}$

শর্তমতে, $\frac{a-b}{b-a} = \frac{a}{b}$ বা, $= \frac{a-b}{-(a-b)} = \frac{a}{b}$ বা, $-1 = \frac{a}{b}$ বা, $a = -b$

$\therefore\ a + b = 0$ (প্রমাণিত)।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৪

1. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে বিন্দুদ্বয় দ্বারা অতিক্রান্ত সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন।
   (i) $A(2, 3)$ এবং $B(3, 6)$ (ii) $A'(2, 1)$ এবং $B'(-1, 4)$
2. A, B এবং C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 2), (5, 2)$ এবং $(2, 7)$। কার্তেসীয় তলে AB ও AC রেখা অঙ্কন করুন। সম্ভব হলে AB ও AC রেখার ঢাল নির্ণয় করুন।
3. $A(-3, 2)$ এবং $B(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল নির্ণয় করুন।
4. $A(1, -1), B(2, 2)$ এবং $C(4, t)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে t এর মান কত?
5. $A(t, 3t), B(t^2, 2t), C(t-2, t)$ এবং $D(1, 1)$ চারটি ভিন্ন বিন্দু। AB এবং CD রেখা সমান্তরাল হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করুন।

পাঠ ১০.৫ সরলরেখার সমীকরণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন ।
- সরলরেখার সমীকরণ লেখচিত্রে উপস্থাপন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সরলরেখা, সরলরেখার সমীকরণ

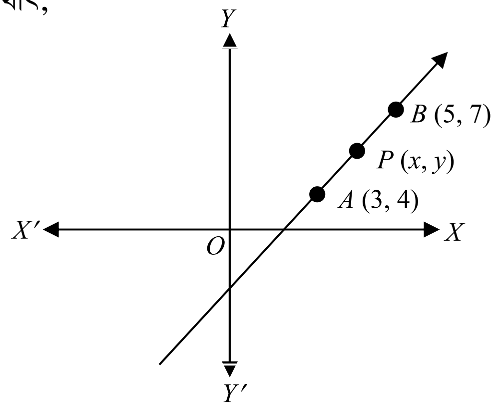
মূলপাঠ

সরলরেখার সমীকরণ

ধরুন, একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা $'L'$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(3, 4)$ এবং $B(5, 7)$ দিয়ে অতিক্রম করে। নিম্নের চিত্রে রেখাটি দেখানো হলো। তাহলে AB সরলরেখার ঢাল $m_1 = \frac{7-4}{5-3} = \frac{3}{2}$ ....(1)

মনে করি, $P(x, y)$ সরলরেখা, L এর ওপর একটি বিন্দু। তাহলে AP রেখার ঢাল $m_2 = \dfrac{y-4}{x-3}$ .... (2)

কিন্তু AP ও AB একই সরলরেখা হওয়ায় উভয়ের ঢাল সমান। অর্থাৎ,



$m_1 = m_2$

বা, $\dfrac{3}{2} = \dfrac{y-4}{x-3}$ [(1) ও (2) থেকে পাই]

বা, $3x - 9 = 2y - 8$

বা, $2y - 8 = 3x - 9$

বা, $2y = 3x - 1$

বা, $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$ .... (3)

আবার, PB রেখার ঢাল m_3 ধরে $m_3 = \dfrac{7-y}{5-x}$ .... (4)

AB এবং PB রেখার ঢাল সমান বলে [(1) ও (4) থেকে পাই]

$m_1 = m_3$

বা, $\dfrac{3}{2} = \dfrac{7-y}{5-x}$ [(1) ও (4) থেকে পাই]

বা, $15 - 3x = 14 - 2y$

বা, $2y + 15 = 3x + 14$

বা, $2y = 3x - 1$

বা, $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$ .... (5)

সমীকরণ (3) ও (5) একই সমীকরণ। সুতরাং সমীকরণ (3) বা (5) হচ্ছে সরলরেখা L এর কার্তেসীয় সমীকরণ। লক্ষ্য করলে দেখা যাবে সমীকরণ (3) বা (5) x এবং y এর একঘাত সমীকরণ এবং এটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। তাই নিঃসন্দেহে বলা যায় x এবং y এর একঘাত সমীকরণ সব সময় একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। সমীকরণ (3) বা (5) কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়–

$y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$ .... (3) বা (5)

এখন, $\dfrac{y-4}{x-3} = \dfrac{3}{2}$ অথবা $\dfrac{y-7}{x-5} = \dfrac{3}{2}$

অর্থাৎ, $\dfrac{y-4}{x-3} = \dfrac{7-4}{5-3}$ অথবা $\dfrac{y-7}{x-5} = \dfrac{7-4}{5-3}$

অর্থাৎ, $\dfrac{y-4}{x-3} = m$ অথবা $\dfrac{y-7}{x-5} = m$

সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায়, যদি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু, $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ কোনো সরলরেখার ওপর অবস্থিত হয়, তাহলে ঢাল

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}\left[\frac{\text{rise}}{\text{run}}\right] \text{ বা } \left[\frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}}\right]$$

এবং উক্ত সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ হবে–

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \text{ ....}(6)$$

বা, $\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=m$ ....(7)

সমীকরণ (6) হতে পাই- $y-y_1=m(x-x_1)$ .... (8)

সমীকরণ (7) হতে পাই- $y-y_2=m(x-x_2)$ .... (9)

$\therefore$ (8) এবং (9) হতে আমরা বলতে পারি একটি সরলরেখার ঢাল m হলে এবং রেখাটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) বা (x_2, y_2) দিয়ে অতিক্রম করলে রেখাটির কার্তেসীয় সমীকরণ (8) অথবা (9) দ্বারা নির্ণয় করা যাবে।

অপর সমীকরণ (6) এবং (7) হতে আমরা পাই−

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2} \text{ .... } (10)$$

সমীকরণ (10) হতে স্পষ্টভাবে বলা যায়, একটি সরলরেখা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দিয়ে অতিক্রম করলে এর কার্তেসীয় সমীকরণ হবে

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \quad \text{বা, } \frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ .... } (11)$$

যেহেতু, $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

উদাহরণ 1: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যায় ঢাল 2.

সমাধান: $(2, -1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$(y+1)=m(x-2)$ বা, $(y+1)=2(x-2)$ [দেওয়া আছে, $m=2$]

বা, $(y+1)=2x-4$ বা, $2x-y-5=0$

$\therefore$ $y=2x-5$, যা নির্ণেয় সমীকরণ।

উদাহরণ 2: নিম্নোক্ত বিন্দুসমূহ দ্বারা অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(a) $A(1, 5), B(2, 4)$ (b) $A(3, 0), B(0, -3)$ (c) $A(a, 0), B(2a, 3a)$

সমাধান: a) এখানে, $A(1, 5)$ এবং $B(2, 4)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়;

AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-1}{y-5}=\dfrac{1-2}{5-4}$ বা, $\dfrac{x-1}{y-5}=\dfrac{-1}{1}$ বা, $(x-1)=-y+5$ বা, $x+y=6$

$\therefore$ $y=-x+6$

b) এখানে, $A(3, 0), B(0, -3)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়;

AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-3}{y-0}=\dfrac{3-0}{0+3}$ বা, $\dfrac{x-3}{y}=\dfrac{3}{3}$ বা, $x-3=y$

$\therefore$ $y=x-3$

c) এখানে, $A(a, 0)$ এবং $B(2a, 3a)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়;

AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{x-a}{y-0}=\dfrac{a-2a}{0-3a}$ বা, $\dfrac{x-a}{y}=\dfrac{-a}{-3a}$

বা, $3x-3a=y$ বা, $3x-y=3a$

$\therefore$ $y=3x-3a$

উদাহরণ 3: নিম্নোক্ত প্রতি ক্ষেত্রে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(a) ঢাল 3 এবং y-অক্ষের ছেদক -5 (b) ঢাল -3 এবং y-অক্ষের ছেদক -5 (c) ঢাল 3 এবং y-অক্ষের ছেদক 5 (d) ঢাল -3 এবং y-অক্ষের ছেদক 5।

উপরোক্ত চারটি রেখা একই সমতলে এঁকে দেখান।

[এই রেখাসমূহের মাধ্যমে বোঝা যাবে ঢাল এবং y চিহ্নের জন্য রেখা কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।]

সমাধানঃ

(a) এখানে ঢাল $m = 3$ এবং y-অক্ষের ছেদক $c = -5$

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$\therefore$ $y = 3x - 5$ (Ans.)

এখানে, x-অক্ষকে $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ বিন্দুতে [$y = 0$ বসিয়ে $x = \frac{5}{3}$] এবং y-অক্ষকে $(0, -5)$ বিন্দুতে ছেদ করে [$x = 0$ বসিয়ে $y = -5$]

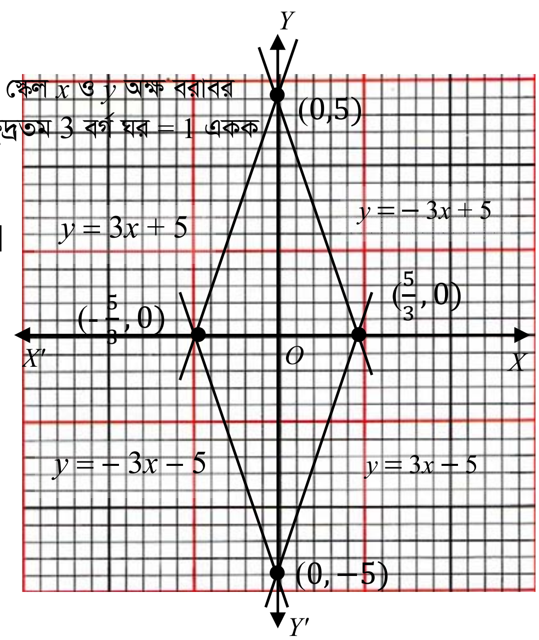
(b) এখানে ঢাল $m = -3$ এবং y-অক্ষের ছেদক $c = -5$

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ, $y = m\,x + c = -3x - 5$

$\therefore$ $y = -3x - 5$ (Ans.)

এখানে x-অক্ষকে $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ বিন্দুতে [$y = 0$ বসিয়ে $x = -\frac{5}{3}$] এবং y-অক্ষকে $(0, -5)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[$x = 0$ বসিয়ে $y = -5$]



(c) এখানে ঢাল $m = 3$ এবং y-অক্ষের ছেদক $c = 5$

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx + c$

$\therefore$ $y = 3x + 5$ (Ans.)

এখানে x-অক্ষকে $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ বিন্দুতে [$y = 0$ বসিয়ে $x = -\frac{5}{3}$]

এবং y-অক্ষকে $(0, 5)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[$x = 0$ বসিয়ে $y = 5$]

$d)$ এখানে ঢাল $m = -3$ এবং y-অক্ষের ছেদক $c = 5$

$\therefore$ সরলরেখার সমীকরণ, $y = mx + c = -3x + 5$

$\therefore$ $y = -3x + 5$ (Ans.)

x-অক্ষকে $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ বিন্দুতে [$y = 0$ বসিয়ে $x = \frac{5}{3}$] এবং

x-অক্ষকে $(0, 5)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[$x = 0$ বসিয়ে $y = 5$]

উপরোক্ত চারটি সরলরেখা xy সমতলে দেখানো হলো।

উদাহরণ 4: নিম্নোক্ত রেখাসমূহ x অক্ষকে ও y অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে নির্ণয় করুন। তারপর রেখাসমূহ এঁকে দেখান।

(a) $y = 3x - 3$; (b) $2y = 5x + 6$; (c) $3x - 2y - 4 = 0$

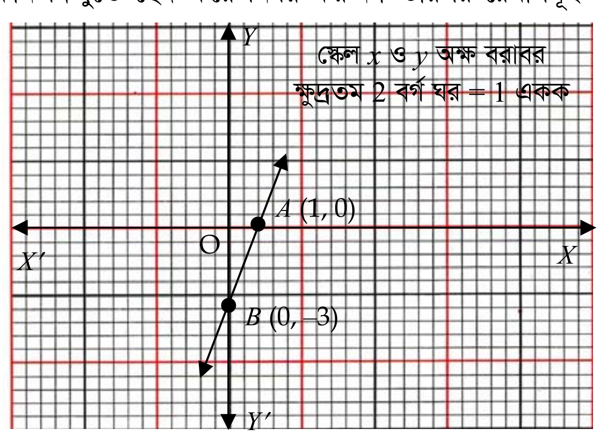
সমাধানঃ (a) $y = 3x - 3$

বা, $3x - y = 3$

বা, $\frac{x}{1} + \frac{y}{-3} = 1$ ....(i)

(i) নং রেখাটি x অক্ষকে $(1, 0)$

এবং y অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।



(b) $2y = 5x + 6$

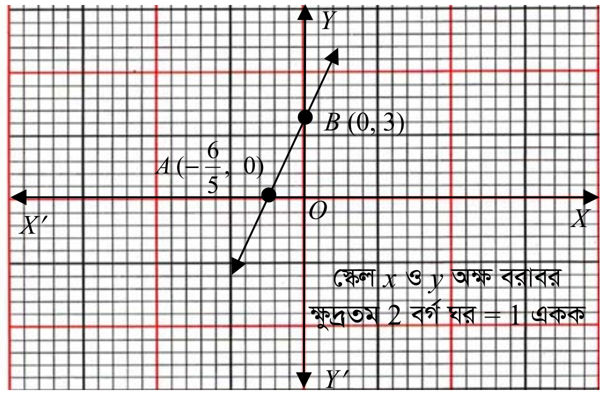
বা, $5x - 2y = -6$

বা, $\dfrac{5x}{-6}+\dfrac{2y}{6}=1$

বা, $\dfrac{x}{\frac{-6}{5}}+\dfrac{y}{3}=1$ ....(i)

(i) নং রেখাটি x অক্ষকে $\left(\dfrac{-6}{5}, 0\right)$

এবং y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

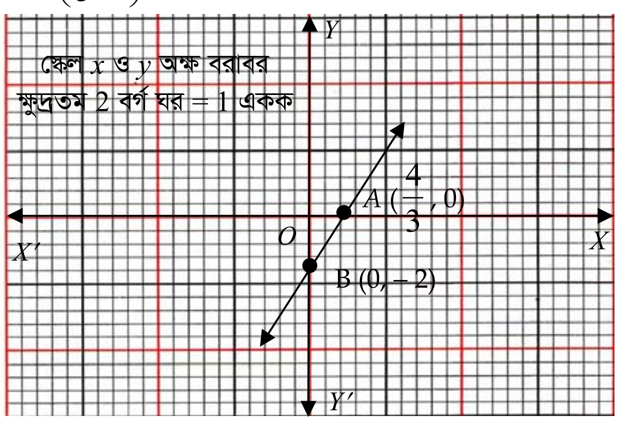


c) $3x-2y-4=0$

বা, $3x-2y=4$

বা, $\dfrac{x}{\frac{4}{3}}+\dfrac{y}{-2}=1$ .... (i)

(i) নং রেখাটি x অক্ষকে $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ এবং y অক্ষকে $(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।



উদাহরণ 5: $(k, 0)$ বিন্দুগামী ও k ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ k এর মাধ্যমে নির্ণয় করুন। যদি রেখাটি $(5, 6)$ বিন্দুগামী হয় তবে k এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $(k, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$(y-0)=m(x-k)$ বা, $(y-0)=k(x-k)$ [$m=k$ দেওয়া আছে]

বা, $y=kx-k^2$ বা, $y=k(x-k)$

$\therefore kx-y-k^2=0$ .... (i)

(i) নং রেখাটি $(5, 6)$ বিন্দুগামী হলে

$5k-6-k^2=0$

Y′

বা, $k^2-5k+6=0$ বা, $k^2-3k-2k+6=0$

বা, $k(k-3)-2(k-3)=0$ বা, $(k-3)(k-2)=0$

$\therefore k=3$ অথবা $k=2$

উদাহরণ 6: $(k^2, 2k)$ বিন্দুগামী এবং $\dfrac{1}{k}$ ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন। যদি রেখাটি $(-2, 1)$ বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে তবে k এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $(k^2, 2k)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{k}$ ঢাল বিশিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$(y-2k) = m(x-k^2)$ বা, $(y-2k) = \frac{1}{k}(x-k^2)$ $\left[m = \frac{1}{k}\right]$

বা, $ky - 2k^2 = x - k^2$ বা, $y = \frac{1}{k}(x+k^2)$

বা, $x - ky + k^2 = 0$

নির্ণেয় সমীকরণ রেখাটি $(-2, 1)$ বিন্দুগামী হলে

$-2 - k + k^2 = 0$

বা, $k^2 - k + 2 = 0$ বা, $k^2 - 2k + k - 2 = 0$

বা, $k(k-2) + 1(k-2) = 0$ বা, $(k-2)(k+1) = 0$

$\therefore k = 2$ অথবা $k = -1$

উদাহরণ 7: একটি রেখা $A(-2, 3)$ বিন্দু দিয়ে যায় যার ঢাল $\frac{1}{2}$ । রেখাটি যদি আবারও $(3, k)$ বিন্দু দিয়ে যায় তবে k এর মান কত?

সমাধান: $(-2, 3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$(y-3) = m(x+2)$ বা, $y - 3 = \frac{1}{2}(x+2)$ $\left[\text{ঢাল } m = \frac{1}{2}\right]$

বা, $2y - 6 = x + 2$ বা, $x - 2y + 8 = 0$

আবার রেখাটি $(3, k)$ বিন্দুগামী

$\therefore 3 - 2k + 8 = 0$ বা, $-2k + 11 = 0$

$\therefore k = \frac{11}{2}$

উদাহরণ 8: 3 ঢাল বিশিষ্ট একটি রেখা $A(-1, 6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী অন্য একটি রেখা x অক্ষকে $C(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(*a*) AB ও AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(*b*) ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধান: $A(-1, 6)$ বিন্দুগামী এবং 3 ঢাল বিশিষ্ট রেখার সমীকরণ,

$(y-6) = m(x+1)$ বা, $(y-6) = 3(x+1)$ [ঢাল $m = 3$]

বা, $(y-6) = 3x + 3$ বা, $3x - y + 9 = 0$ .... (i)

বা, $3x - y = -9$ বা, $\frac{3x}{(-9)} - \frac{y}{(-9)} = 1$

বা, $\frac{x}{-3} + \frac{y}{9} = 1$

(i) নং রেখাটি x-অক্ষকে $B(-3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

a) AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{x+1}{y-6} = \frac{-1+3}{6-0}$

বা, $\frac{x+1}{y-6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

বা, $3x + 3 = y - 6$

AC রেখার সমীকরণ,

$\frac{x+1}{y-6} = \frac{-1-2}{6-0}$

বা, $\frac{x+1}{y-6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$

বা, $-2(x+1) = y - 6$

বা, $3x - y + 9 = 0$ | বা, $-2x - 2 = y - 6$
বা, $2x + y - 4 = 0$

(*b*) এখানে, $A(-1, 6)$, $B(-3, 0)$ এবং $C(2, 0)$ ত্রিভুজটির শীর্ষ বিন্দুত্রয়।

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক } = \frac{1}{2}(0+0+12+18-0-0) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \text{ বর্গ একক } = 15 \text{ বর্গ একক}$$

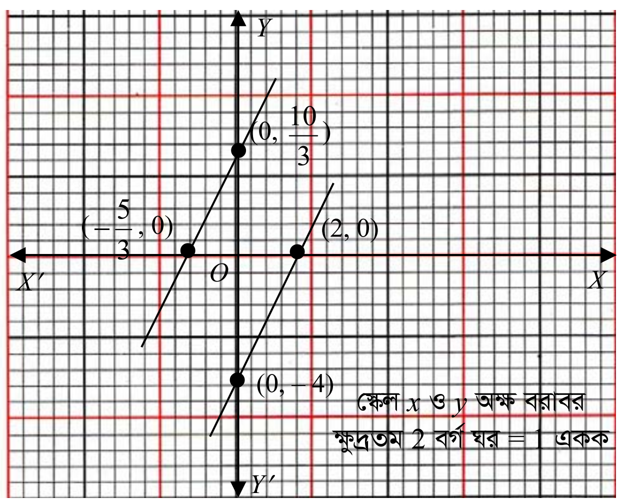
উদাহরণ 9: দেখান যে, $y - 2x + 4 = 0$ এবং $3y = 6x + 10$ রেখাদ্বয় পরস্পর ছেদ করে না। রেখাদ্বয়ের চিত্র এঁকে ব্যাখ্যা করুন কেন সমীকরণ দুইটির সমাধান নাই।

সমাধান: $y - 2x + 4 = 0 \Rightarrow y = 2x - 4$ .... (i)

(i) নং রেখার ঢাল $m_1 = 2$ আবার, $3y = 6x + 10 \Rightarrow y = 2x + \frac{10}{3}$ .... (ii)

(ii) নং রেখার ঢাল $m_2 = 2$ যেহেতু ঢাল $m_1 = m_2$

$\therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল এবং রেখাদ্বয়ের কোনো ছেদবিন্দু নাই।



উপরের চিত্র হতে দেখা যায় যে, রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল অর্থাৎ তাদের কোনো ছেদবিন্দু নাই।
সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের কোনো সমাধান নাই।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৫

1. $A(3, 4)$ ও $B(6, 7)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ঢাল 3 এবং রেখাটি $(-2, -3)$ বিন্দুগামী। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. সরলরেখা $y = 3x + 3$ নির্দিষ্ট বিন্দু $P(t, 4)$ দিয়ে অতিক্রম করে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। রেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
4. $y - 2x + 3 = 0$ রেখার ঢাল ও y অক্ষের ছেদকাংশ নির্ণয় করুন। কাতেসীয় তলে রেখাটি এঁকে দেখান।
5. $A(-1, 3)$ এবং $B(5, 15)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

৩ চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

1. (3, 0) এবং (0, 3) বিন্দু দুইটি একটি সমতলে অবস্থান করলে এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?
   (ক) $3\sqrt{2}$ একক (খ) $\sqrt{3}$ একক (গ) 2 একক (ঘ) 4 একক
2. $y = 5x + 7$ রেখাটির ঢাল কত?
   (ক) 5 (খ) 7 (গ) $\frac{5}{7}$ (ঘ) 1
3. $y = 3x + 5$ এবং $y = 3x - 5$ এর ছেদ বিন্দু কত?
   (ক) (3, 0) (খ) (0, 3) (গ) ছেদ বিন্দু নেই (ঘ) (5, 5)
4. *i.* $y = 5x + 6$; এখানে, $m = 5$ *ii.* x অক্ষের উপর $y = 0$ *iii.* y অক্ষের উপর $y = 0$
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) *i* ও *ii* (খ) *i* ও *iii* (গ) *ii* ও *iii* (ঘ) *i*, *ii* ও *iii*
5. y অক্ষের সাথে $4x + 5y = 15$ রেখার ছেদবিন্দু নিচের কোনটি?
   (ক) (3, 0) (খ) (0, 3) (গ) (0, 5) (ঘ) (2, 0)
6. $5x + 6y = 8$ রেখার ঢাল কত?
   (ক) 5 (খ) –6 (গ) $-\frac{5}{6}$ (ঘ) $\frac{6}{5}$
7. স্থানাঙ্কর জ্যামিতিতে (i) ঢাল, $m = \frac{y \text{ স্থানাঙ্কেরপরিবর্তন}}{x \text{ স্থানাঙ্কেরপরিবর্তন}}$

   (ii) ঢাল $= \frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}}$

   (iii) যদি A, B ও C বিন্দু তিনটি সমরেখ হয়, তবে AB ও AC রেখার ঢাল সমান হবে
   নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
8. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c এবং পরিসীমা $2s$ হলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?
   (ক) $\sqrt{s + s(s-a) + s(s-b)}$ (খ) $\sqrt{\{s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)\}^2}$
   (গ) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (ঘ) $\sqrt{sab}$
9. $O(0, 0)$, $A(6, 0)$, $B(0, 10)$ শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
   (ক) 30 (খ) 20 (গ) 15 (ঘ) 40

   ►$A(2, 5)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 1)$ একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। উপরের তথ্যের ভিত্তিতে (10-12) নং প্রশ্নের উত্তর দিনঃ
10. AB বাহুর দৈর্ঘ্য কত?
    (ক) 4 একক (খ) 6 একক (গ) 7 একক (ঘ) 8 একক
11. BC বাহুর দৈর্ঘ্য কত?
    (ক) 4 একক (খ) 3 একক (গ) 2 একক (ঘ) 5 একক
12. ত্রিভুজের পরিসীমা কত?
    (ক) $8 + \sqrt{45}$ একক (খ) 12 একক (গ) $8 + \sqrt{47}$ একক (ঘ) 24 একক
13. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5, 6 ও 9 একক হলে তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?
    (ক) 10 (খ) $10\sqrt{2}$ (গ) 20 (ঘ) $\sqrt{20}$
14. (3, 4) বিন্দুগামী কোন সরলরেখার ঢাল m হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ কোনটি?

(ক) $y-3 = m(x-4)$ (খ) $y = 4m$ (গ) $y-4 = m(x-3)$ (ঘ) $y+3 = m(x-4)$

15. $3y-4x-5 = 0$ রেখাটির ঢাল কত?

(ক) 4 (খ) $\frac{4}{3}$ (গ) $\frac{3}{4}$ (ঘ) 3

16. $3x - 2x - 8 = 0$ সরলরেখাটি y অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক কত?

(ক) (0, 4) (খ) (0, 3) (গ) (4, 0) (ঘ) (0, 5)

17. নিচের কোনটি মূলবিন্দুগামী সমীকরণ?

(ক) $x+2y = 5$ (খ) $x-y= 2$ (গ) $x+2y = 0$ (ঘ) $x+3y = 3$

►একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A(2, 0)$, $B(7, 0)$ ও $C(3, 4)$। উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের (18-21) নং প্রশ্নের উত্তর দিনঃ

18. AB বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

(ক) 5 একক (খ) 4 একক (গ) 3 একক (ঘ) 6 একক

19. BC বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

(ক) 5 একক (খ) $4\sqrt{2}$ একক (গ) 3 একক (ঘ) $2\sqrt{4}$ একক

20. AC বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

(ক) 5 একক (খ) $4\sqrt{2}$ একক (গ) $\sqrt{17}$ একক (ঘ) $\sqrt{18}$ একক

21. ত্রিভুজটির পরিসীমা কত?

(ক) 14.78 একক (খ) 15 একক (গ) 14.39 একক (ঘ) 16 একক

22. কোনো সরলরেখার দ্বারা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ θ ও ঢাল m এর মধ্যে সম্পর্ক কোনটি?

(ক) $m = cos\theta$ (খ) $m = sin\theta$ (গ) $m = tan\theta$ (ঘ) $m = cot\theta$

23. ঢাল ধনাত্মক হলে, কোনো রেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ কেমন হবে?

(ক) সূক্ষ্মকোণ (খ) স্থূলকোণ (গ) সমকোণ (ঘ) সরলকোণ

24. যদি কোন দুইটি রেখা সমান্তরাল হয় তবে ঢাল কিরূপ হবে?

(ক) লম্ব (খ) সমান (গ) অসমান্তরাল (ঘ) সমকোণ

25. $y = x + 3$ এবং $y = -y - 3$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু কোনটি?

(ক) (–3, 0) (খ) (3, 0) (গ) (0, 3) (ঘ) (2, 3)

সৃজনশীল প্রশ্ন

27. $ABCD$ চতুর্ভুজের $A(6, -4)$, $(2, 2)$, $C(-2, 2)$, $D(-6, -4)$ শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

(ক) BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

(খ) $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

(গ) $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম এবং P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, $PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

28. $P(7, 2)$, $Q(-4, 2)$, $R(-4, -3)$ এবং $S(7, -3)$ বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

(ক) PQ বাহুর ঢাল নির্ণয় করুন।

(খ) বিন্দু চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র নাকি সামান্তরিক– যাচাই করুন।

(গ) যদি উদ্দীপকে উল্লেখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ও G হয়, তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, $DEFG$ একটি সামান্তরিক।

29. 5 ঢাল বিশিষ্ট একটি রেখা $A(2, -5)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী অন্য একটি রেখা x অক্ষকে $C(-1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ক) A বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(খ) AB রেখার সমীকরণ এবং এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
(গ) ছক কাগজে স্থাপণপূর্বক ΔABC এর শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

30. $P(t, 2)$ বিন্দুগামী $2y - 3x + 6 = 0$ রেখাটি x অক্ষকে A এবং y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে।
(ক) রেখাটির ঢাল নির্ণয় করুন।
(খ) ΔAPB এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
(গ) ΔOAB কে OB বাহুর চতুর্দিকে একবার ঘুরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

31. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে $A(2, -4)$, $B(-4, 4)$ এবং $C(3, a)$, যেখানে $a > 0$
(ক) $AC = BC$ হলে a এর মান নির্ণয় করুন।
(খ) AB রেখার সমীকরণ ও ঢাল নির্ণয় করুন।
(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, ΔABC এর যে কোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক।

32. তিনটি বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $A(2, -3)$, $B(7, -3)$ এবং $C(2, 3)$.
(ক) BC রেখার ঢাল নির্ণয় করুন।
(খ) বিন্দুত্রয় ছক কাগজে স্থাপন করুন এবং প্রমাণ করুন যে, এরা একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।
(গ) AB কে অক্ষ ধরে ΔABC কে একপাক ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

33. $ABCD$ চতুর্ভুজের $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ এবং $(-5, 5)$ শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত হয়।
(ক) $ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
(খ) দেখান যে, $ABCD$ চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।
(গ) AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, $ST \parallel BC$ এবং $ST = \frac{1}{2}$ BC.

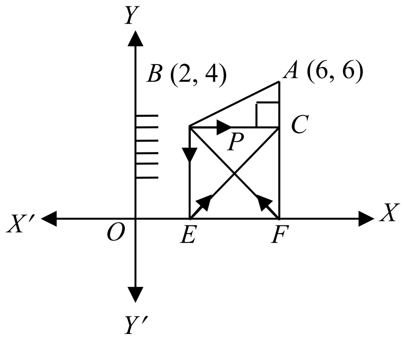
34. $A(1, 4a)$ এবং $B(5, a^2 - 1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল -1
(ক) দেখান যে, a এর দুইটি মান রয়েছে।
(খ) a এর মানদ্বয়ের অন্য যে চারটি পাওয়া যায় তাদের C, D, E ও F ধরে গঠিত চতুর্ভুজ $CDEF$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
(গ) চতুর্ভুজটি সামান্তরিক বা আয়ত? আপনার মতামতের পক্ষে যুক্তি দিন।

35. $ABCD$ চতুর্ভুজের $A(6, -4)$, $B(2, 2)$, $C(-2, 2)$ এবং $D(-6, -4)$ শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।
(ক) AC কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
(খ) $ABCD$ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা নির্ণয় করুন।
(গ) P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে,

$PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

36. $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$ বিন্দুগামী একটি সরলরেখার ঢাল $-\frac{2}{3}$ এবং রেখাটি x অক্ষ ও y অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে।
(ক) PQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(খ) PQ রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার বাহুগুলোর দের্ঘ্য নির্ণয়পূর্বক ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
(গ) OPQ ত্রিভুজটিকে y অক্ষের সাপেক্ষে চতুর্দিকে একবার ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল ও আয়তনের সাংখ্যিক মানের পার্থক্য নির্ণয় করুন।

37. BF ও CE এর মধ্যবিন্দু P। BEFC এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\underline{b}$, $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{c}$



(ক) AB এর দূরত্ব নির্ণয় করুন।

(খ) AB রেখার সমীকরণ ও ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

(গ) অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, $BEFC$ একটি সামান্তরিক।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.২

1. (i) $\frac{15}{2}$ বর্গ একক, (ii) 6 বর্গ একক, (ii) 5 বর্গ একক

4. 14 বর্গ একক, $\frac{7}{2}$ বর্গ একক

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৩

1. 2 বর্গ একক
2. বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{13}$ একক, $\sqrt{17}$ একক, $\sqrt{13}$ একক, $\sqrt{29}$ একক
   কর্ণের দৈর্ঘ্য $\sqrt{20}$ একক
   ক্ষেত্রফল বর্গ একক (প্রায়)
3. $\sqrt{20}$ একক
   $\sqrt{20}$ একক
   একটি রম্বস বা বর্গ
   বর্গ একক
4. বর্গ একক

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৪

1. (a) 3, (b) -1 2. AB রেখার ঢাল 0, AC রেখার ঢাল নির্ণয় করা যায় না।

3. $-\frac{2}{3}$ 4. $t = 8$ 5. t এর সম্ভাব্য মানসমূহ $-1, 2$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৫

1. $y = x + 1$ 2. $y = 3x + 3$ 3. $P\left(\frac{1}{3}, 4\right)$, $A(-1, 0), B(0, 3)$ 4. ঢাল $= 2$, ছেদকাংশ $= -3$

5. $y = 2x + 5$, $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ একক

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. ক 2. ক 3. গ 4. ক 5. খ 6. গ 7. ঘ 8. গ 9. ক 10. ক 11. খ 12. খ 13. খ
14. গ 15. খ 16. ক 17. গ 18. ক 19. খ 20. গ 21. ক 22. গ 23. ক 24. খ 25. ক

27. (ক) 10 একক (খ) $4\sqrt{6}$ একক
28. (ক) 0 (খ) চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র
29. (ক) $y = 5x - 15$ (খ) $5x - y - 15 = 0$, $\sqrt{26}$ একক (গ) 10 বর্গ একক
30. (ক) $\frac{3}{2}$ (খ) 0 বর্গ একক (গ) 35. 224 বর্গ একক
31. (ক) 3 (খ) $4x + 3y = -4$
32. (ক) $-\frac{6}{5}$ (গ) 260.31 বর্গ একক (প্রায়)
33. (ক) 50 বর্গ একক
34. (খ) 31 বর্গ একক (গ) চতুর্ভুজটি একটি সামন্তরিক
35. (ক) 10 একক (খ) 24 বর্গ একক
36. (ক) $y = -\frac{2}{3}x + 4$ (খ) 12 বর্গ একক (গ) 98.22 বর্গ একক
37. (ক) $2\sqrt{5}$ একক (খ) 4 বর্গ একক