ইউনিট ৮

অন্তরক, অন্তরকলণ ও প্রভেদকঃ১
(Derivative, Differentiation and Differential ঃ 1)

মৌলিকভাবে গতিশাস্ত্রে (Dynamics) কোন বস্তুর স্থানান্তরের পরিবর্তনের হার পরিমাপের উদ্দেশ্যে অন্তরকলণ পদ্ধতি ব্যবহৃত হলেও অর্থনীতিতে এর ব্যবহার এবং গুরুত্ব ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাচ্ছে। বিশেষ করে অর্থনীতিতে প্রান্তিক ধারণাসমূহ যেমন প্রান্তিক আয়, প্রান্তিক ব্যয় ইত্যাদি বিশ্লেষণে অন্তরকলণের ব্যবহার অত্যন্ত বেশি। এই ইউনিটের বিভিন্ন পাঠে অন্তরক ও অন্তরকলণের প্রাথমিক বিষয়গুলো বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

- পাঠ-১ ঃ অন্তরক
- পাঠ-২ ঃ অন্তরকলণ
- পাঠ-৩ ঃ অন্তরকলণের নিয়মসমূহ
- পাঠ-৪ঃ অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলণ এবং উচ্চ মাত্রার অন্তরকলণ

পাঠ-৮.১

অন্তরক

(Derivative)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অন্তরকের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- অন্তরকের বৈশিষ্ট্য জানতে পারবেন।

অন্তরক এর সংজ্ঞা (Definition of Derivative) ঃ

যদি y = f(x),x এর কোন অদ্বিতীয় মানের অপেক্ষক হয় এবং যদি $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ বর্তমান থাকে, তবে এই সৈমিক মানকে (Limiting Value) y= f(x) অপেক্ষকের অন্তরক (derivative) বলে।

অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \underset{\Delta x \to o}{\text{Lim}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ।

অন্তরকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Geometrical Explanation of Derivative) ঃ

কোন অপেক্ষকের অন্তরক-এর ধারণা জ্যামিতিকভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। মনে করি y = f(x) হচ্ছে x এর একটি অদ্বিতীয়মানের অপেক্ষক। এখন এর অন্তরক নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়ঃ

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lim}} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

মনে করি, অপেক্ষকটির লেখচিত্র নিম্নরূপ ঃ

চিত্র ৮.১.১ ঃ জ্যামিতিক পদ্ধতিতে অন্তরক নির্ণয়

চিত্রের N বিন্দুতে x এবং y এর মান (x_1, y_1),M বিন্দুতে y এর মান $(y_1 + \Delta y)$ এবং x এর মান $(x_1 + \Delta x)$ । এক্ষেত্রে, $\Delta x = (x_2 - x_1) = NQ$ এবং $\Delta y = (y_2 - y_1) = MQ$; চিত্রানুযায়ী M বিন্দুটি যখন N এর দিকে অগ্রসর হয় তখন Δx এবং Δy ক্রমশ ঃহ্রাস পায়। ফলে দেখা যায় ঃ $M \to N$ হলে $\Delta x \to o$ হবে।

এখন উপরের সূত্র প্রয়োগ করে বলা যায়, N বিন্দুতে (অর্থাৎ যখন $x=x_1$, এবং $y=y_1$) y=f(x) অপেক্ষকের অন্তরক হবে ঃ-

$$\frac{dy}{dx} = f(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{(x_1+\Delta x)-x_1}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{(y_1+\Delta y)-y_1}{(x_1+\Delta x)-x_1}$$

$$= \lim_{NQ \to o} \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$$

$$= \lim_{NQ \to o} \frac{MQ}{NQ}$$

[যেহেতু $\Delta y = (y_2-y_1)$এবং $\Delta x = (x_2-x_1)$]

যেহেতু N বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ স্পর্শক রেখার (tangent line) ঢাল নির্দেশ করে, সেহেতু বিকল্পভাবে বলা যায়ঃ-

$\frac{dy}{dx} = \lim_{NQ \to o} \frac{MQ}{NQ} = \frac{Nx_1}{x_1x_3} = \tan\theta$, θ হলো $y = f(x)$ অপেক্ষকের স্পর্শক x-অক্ষের সাথে যে কোন সৃষ্টি করেছে তার পরিমাপ।

অন্তরকের বৈশিষ্ট্য (Characteristics of Derivative)ঃ

অন্তরকের নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্য রয়েছে ঃ

প্রথমত ঃ অন্তরক -এর ধারণা কেবল অবিচ্ছিন্ন চলকের (Continuous variable) অপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।
দ্বিতীয়ত ঃ h প্রকৃতপক্ষে শূন্য হলে সংজ্ঞায় যে স্বল্পবৃদ্ধির অনুপাতের (Incremental Ratio) কথা বলা হয়, তা অর্থহীন হয়ে পড়ে। তাই h শূন্যমান গ্রহণ করে না। এর মান শূন্যের নিকটবর্তী হতে পারে। h শূন্য হলে অন্তরকের কোন অর্থ থাকে না। কারণ তাহলে সেটা কোন সংখ্যাকে শূন্য দিয়ে ভাগের সামিল হয়। প্রকৃতপক্ষে অন্তরক অপেক্ষকের উপর সংঘটন (operative) ক্রিয়ার ফল। এই সংঘটন প্রক্রিয়া অপেক্ষকের স্বল্প বৃদ্ধির অনুপাত এর সীমা বের করতে ব্যবহার করা হয়।

তাই $\frac{dy}{dx}$ বা $\frac{df(x)}{dx}$ প্রতীকে $\frac{d}{dx}$ কে অন্তরক সংঘটক (Differential Operator) হিসাবে ধরা হয়। এই সংঘটক f(x)-এ ব্যবহৃত f প্রতীকের মত। এজন্য প্রতীক dy/dx দ্বারা dy এবং dx এই দুটি মানের অনুপাতকে বোঝায় না।
তৃতীয়ত ঃ ব্যবহারের সুবিধার্থে অনেক সময় স্বল্পবৃদ্ধির অনুপাত বিকল্পভাবে (alternative form) প্রকাশ করা যায়। $y = f(x)$ অপেক্ষকের চলক x এবং y এর পরিবর্তন Δx এবং Δy দ্বারা অনেক সময় প্রকাশ করা হয়। স্বল্পবৃদ্ধির অনুপাত এখন $\Delta y/\Delta x$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। Δx এবং Δy সীমিত (finite) মান গ্রহণ করে। যদি Δx একটি নির্দিষ্ট মান গ্রহণ করে, তবে Δy এর মান অপেক্ষক থেকে বের করা যায় ঃ $\lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ ।
চতুর্থত ঃ কোন চলকের মানের পরিবর্তন হলে কোন বিন্দুতে অন্তরকের মানের পরিবর্তন হয়। যেমন, x চলকের পূর্বতন একক যদি λএর মান এবং y চলক কোন পূর্ববর্তী একক μ (মিউ)-এর সমান হয়, তবে অন্তরকের নতুন মান পূর্ববর্তী মানের তুলনার $\mu/2$ গুন হবে।
পঞ্চমত ঃ $y = f(x)$ অপেক্ষকের বেলায় x এর বিভিন্ন মানের জন্য অন্তরক এর মান বিভিন্ন হবে।
ষষ্ঠত ঃ অন্তরক দুদিক থেকে বিশ্লেষণ করা যায়। প্রথমত ঃ একে x চলকের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত করা যায়। অর্থাৎ x চলকের কোন প্রদত্ত মানের জন্য অন্তরকের একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়। দ্বিতীয়ত ঃ একে x এর বিভিন্ন বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত করা যায়। এক্ষেত্রে অন্তরককে x এর একটি অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

দ্বিতীয় অর্থে $f(x)$ প্রতীক বিশেষভাবে প্রযোজ্য। বিকল্পভাবে একে প্রজাত অপেক্ষক (derived function) বলা যায়। কারণ মূল (original) অপেক্ষক $f(x)$ থেকে অন্তরকলণ প্রক্রিয়ায় (process) x চলকের বিভিন্ন মানের জন্য দ্বিতীয় একটি অপেক্ষক $f'(x)$ বের করা যায়। এই $f'(x)$ একটি প্রজাত অপেক্ষক যা নিজেও x চলকের একটি অপেক্ষক।

সপ্তমত ঃ $f(x)$ অপেক্ষকের স্বল্পবৃদ্ধির অনুপাতের সীমা নির্ধারণ না হওয়া পর্যন্ত ঐ বিন্দুতে অন্তরকের কথা বলা যায় না। তাই কোন অপেক্ষকের কতিপয় বিন্দুতে অন্তরক থাকতে পারে, অপর বিন্দুতে নাও থাকতে পারে। আবার কিছু অপেক্ষকের কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে অন্তরক থাকতে পারে এবং কতগুলোর বেলায় তা নাও থাকতে পারে।

অষ্টমত ঃ অন্তরক এর বিভিন্ন প্রতীক $y = f(x)$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য। অবশ্য এসব প্রতীক অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য অনুসারে পরিবর্তন করা উচিত। যেমন $\frac{d(x^3)}{dx}$ এবং $\frac{d}{dx}(\frac{1}{x})$ প্রতীকদ্বয় যথাক্রমে x^3 এবং $1/x$ অপেক্ষকের অন্তরকলণ নির্দেশ করে। কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে অন্তরক এর মান দেখানোর জন্য আমরা বিভিন্ন ধরনের প্রতীক ব্যবহার করি। যেমন $x = a$ এর জন্য অন্তরকের বিশেষ মানকে $f'(a)$ বা $(\frac{dy}{dx})_{x = a}$ দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। এভাবে নির্দিষ্ট বিন্দু $x = o$ এর জন্য $(\frac{dy}{dx})_{x=o}$ বা $f'(o)$ এবং $x = \frac{1}{2}$ এর জন্য $(\frac{dy}{dx})_{x = \frac{1}{2}}$ বা $f'(\frac{1}{2})$ লিখা যায়। একটি নির্দিষ্ট অপেক্ষক $y = x^3$ এর ক্ষেত্রে $\left[\frac{d(x3)}{dx}\right]_{x = \frac{1}{2}}$, $\left[\frac{d(x^3)}{dx}\right]_{x=0}$ ইত্যাদি যথাক্রমে $x = \frac{1}{2}$ এবং $x = O$ বিন্দুসমূহের অন্তরক নির্দেশের জন্য ব্যবহার করা যায়।

সারাংশ ঃ *যদি $y = f(x)$, x-এর কোন অদ্বিতীয় মানের ফাংশন হয় এবং যদি $\lim_{h \to o} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ বর্তমান থাকে, তবে এই সৈমিক মানকে $y = f(x)$ ফাংশনের অন্তরক (derivative) বলে। কোন ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় করার পদ্ধতিকে অন্তরকলণ (differentiation) বলে। স্বাধীন চলক x-এর নির্দিষ্ট মানের জন্য অন্তরকের নির্দিষ্ট মান থাকে এবং সাধারণতঃ এটা x-এর ফাংশন হিসাবে অনেক ক্ষেত্রে দেখা যায়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। $\frac{dy}{dx}$ প্রতীকে $\frac{dy}{dx}$ দ্বারা dy এবং dx এই দুটি মাপের অনুপাতকে বোঝায়।

পাঠ-৮.২
অন্তরকলণ
(Differentiation)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অন্তরকলণের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- অর্থনীতিতে অন্তরকলণের ব্যবহার জানতে পারবেন।
- মূল নিয়মে অন্তরকলণ বের করতে পারবেন।
- অন্তরকলণ এবং অন্তরকের মধ্যে পার্থক্য জানতে পারবেন।

অন্তরকলণ (Differentiation) ঃ

স্বাধীন চলকের সামান্য বৃদ্ধিজনিত পরিবর্তনের ফলে অধীন চলকের যে পরিবর্তন ঘটে তার পরিমাপকে অন্তরকলণ বলে।

যেমন ঃ $y = f(x)$ [একটি অপেক্ষক]

এক্ষেত্রে x = স্বাধীন চলক এবং y = অধীন চলক।

স্বাধীন চলক x এর সামান্য বৃদ্ধিজনিত পরিবর্তনের ফলে অধীন চলক y- এর পরিবর্তনের হার পরিমাপকে x-এর সাপেক্ষে y-এর অন্তরকলণ বলে।

সাধারণত স্বাধীন চলক x-এর নির্দিষ্ট মানের জন্য অন্তরকলণের নির্দিষ্ট মান থাকে এবং তা x-এর ফাংশন হিসেবে থাকতে পারে। এটা $dy/dx, \frac{d}{dx}$ $f'(x), f'(x), f(x), y$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা যেতে পারে।

উদাহরণস্বরূপ মনে করি y একটি দ্রব্য এবং x (শ্রম) উৎপাদনের উপাদান। যদি x- কে 1 একক পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয়, তবে y দ্রব্যের “2” একক বৃদ্ধি ঘটে একে নিম্নে অপেক্ষকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।

$y = 2x$.......(1)

যদি x এর সামান্য বৃদ্ধিজনিত পরিবর্তন Δx এবং y এর সামান্য বৃদ্ধিজনিত পরিবর্তনকে Δy দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে (1) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়,

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)$$

বা, $y + \Delta y = 2x + 2\Delta x$

বা, $y + \Delta y = y + 2\Delta x$ [$\therefore y = 2x$]

বা, $y + \Delta y - y = 2\Delta x$

বা, $\Delta y = 2\Delta x$

এখন উভয় পক্ষকে Δx দ্বারা ভাগ করে পাই

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 \text{ ....(2)}$$

(2) নং সমীকরণ হতে দেখা যায় x -এর 1 একক পরিবর্তনের ফলে y-এর পরিবর্তন হয় 2 একক।

এখানে $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -কে x-এর সাপেক্ষে y -এর অন্তরকলণ বলে।

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - কে আবার গণিতের ভাষায় বলা হয় পার্থক্যজনিত ভাগ (Difference Quotient)।

অর্থনীতিতে অন্তরকলণের ব্যবহার ঃ

অর্থনীতিতে অন্তরকলণের বহুল ব্যবহার রয়েছে। দিন দিন অর্থনীতিতে অন্তরকলণের ব্যবহার এতই ব্যপকভাবে বৃদ্ধি পাচ্ছে যে, অন্তরকলণের ব্যবহার ব্যতীত পূর্ণাঙ্গভাবে গাণিতিক অর্থনীতি কল্পনা করা যায় না। বিশেষ করে অর্থনীতিতে প্রান্তিক ধারণাসমূহের (Marginal Concepts) ক্ষেত্রে অন্তরকলণের প্রচুর ব্যবহার রয়েছে। নিম্নে অন্তরকলণের অর্থনৈতিক ব্যবহার সম্পর্কে আলোকপাত করা হলো ঃ

১. প্রান্তিক আয় (MR) এবং প্রান্তিক ব্যয় (MC) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অন্তরকলণের ব্যবহার রয়েছে।

২. অন্তরকলণের সাহায্যে প্রান্তিক উপযোগ (MU) এবং প্রান্তিক উৎপাদন (MP) বের করা যায়।

৩. প্রান্তিক উপযোগ-এর পরিবর্তনের হার ক্রমবর্ধমান নাকি ক্রমহ্রাসমান তা অন্তরকলণের মাধ্যমে জানা যায়।

৪. চাহিদার দাম স্থিতিস্থাপকতা (Price elasticity), আয় স্থিতিস্থাপকতা (Income elasticity), আড়াআড়ি স্থিতিস্থাপকতা বের করার ক্ষেত্রে ব্যাপকভাবে প্রয়োগ হয়।

৫. প্রান্তিক প্রতিস্থাপনের হার (MRS) এবং প্রান্তিক কারিগরি প্রতিস্থাপনের হার (MRTS) নির্ণয়ে ব্যবহৃত হয়।

৬. ভারসাম্য দাম ($\bar{p}$) ও ভারসাম্য পরিমাণ ($\bar{Q}$)-এর উপর অবধ্রুবক-এর প্রভাব বের করার কাজে অন্তরকলনণ ব্যবহৃত হয়।

৭. প্যারেটোর কাম্যতা (Pareto Optimality) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অন্তরকলণ ব্যবহৃত হয়।

৮. প্রান্তিক খরচ (MC) ও গড় খরচ (AC) এর সম্পর্ক ; প্রান্তিক আয় (MR) ও স্থিতিস্থাপকতার (EP) সম্পর্ক নির্ণয়ে ব্যবহৃত হয়।

৯. প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা (MPC), প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবণতা (MPS), প্রান্তিক বিনিয়োগ প্রবণতা (MPI) এবং গুণক (Multiplier) নির্ণয়ে ব্যবহৃত হয়।

এক কথায় বলা যায় যে, তুলনামূলক স্থীতি বিশ্লেষণে (Comparative Static Analysis) অর্থনীতিতে অন্তরকলণের ব্যবহার ব্যাপক। আর এই ব্যাপকতা সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা নেয়ার জন্য আমরা অর্থনীতিতে বহুলভাবে ব্যবহৃত একটি বিনিয়োগ অপেক্ষক বিবেচনা করি।

ধরি, $I = a\text{-}br$

যেখানে, I = বিনিয়োগ ব্যয়,

r = সুদের হার

এবং a, b = অবধ্রুবক (পরামিতি)।

এখন যদি, সুদের হারের পরিবর্তনকে Δr এবং বিনিয়োগের পরিবর্তনকে ΔI দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে অন্তরকলণের নিয়মানুসারে

$$I + \Delta I = a - b(r + \Delta r)$$

বা, $I + \Delta I = a - br - b\Delta r$

বা, $I + \Delta I = I - b\Delta r$ [$\therefore I = a - br$]

বা, $I + \Delta I - I = -b\Delta r$

বা, $\frac{\Delta I}{\Delta r} = \frac{-b\Delta r}{\Delta r}$ [উভয় পক্ষকে Δr দ্বারা ভাগ করে পাই]

$$\therefore \frac{\Delta I}{\Delta r} = -b$$

অর্থাৎ সুদের হারের পরিবর্তনের (Δr) ফলে বিনিয়োগের পরিবর্তনের হার (ΔI) হচ্ছে -b [ঋণাত্মক]। এখানে b-কে প্রান্তিক বিনিয়োগ প্রবণতা (Marginal propensity to Investment) বলে।

মূল নিয়মে অন্তরকলণ (Differentiation through first principle) ঃ

যদি $y = f(x)$ অপেক্ষক থাকে তবে x এর অন্তরকলণ বের করার জন্য নিম্নোক্তভাবে অগ্রসর হওয়া যায় ঃ-
(i) x এর মান পরিবর্তন করতে হবে। মনে করি h হচ্ছে এই পরিবর্তনের পরিমাপ। সুতরাং y এর মান বা f(x) এর মান f(x+h) স্তরে উন্নীত হবে।
(ii) এখন f(x+h) থেকে y এর প্রথম মান f(x) বিয়োগ করলে y এর পরিবর্তন পাওয়া যাবে ঃ f(x+h) -f(x)
(iii) এখন y এর এই পরিবর্তিত মান x এর পরিবর্তন h দ্বারা ভাগ করলে y এর গড় পরিবর্তন পাওয়া যায় ঃ

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(iv) এখন সীমার ধারণা প্রয়োগ করে $\frac{dy}{dx}$ নিম্নোক্তভাবে দেখানো যায় ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\emptyset 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

উদাহরণ ঃ ১ অপেক্ষক $y = x^2$ থেকে (i) যে কোন বিন্দুর জন্য এবং (ii) x=3 এর জন্য $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ (i) $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\emptyset 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\emptyset 0} \frac{f(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\emptyset 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\emptyset 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h\emptyset 0} (2x+h)$$

$$= 2x+o$$

$$= 2x$$

(ii) যখন x =3 তখন

$$\frac{dy}{dx} = [2x] = [2\infty 3] = 6$$

উদাহরণ ঃ ২ যদি $y = \frac{1}{x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ

আমরা জানি $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\emptyset 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\emptyset 0} \frac{1}{h} \left\{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}\right\}$$

$$= \lim_{h\emptyset 0} \frac{1}{h} \left\{\frac{x-x-h}{x(x+h)}\right\}$$

$$= \lim_{h\emptyset 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= \frac{-1}{x(x+o)}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

অর্থনীতিতে কোথায় অন্তরজ ক্যালকুলাস (Differential Calculas) অথবা dy/dx প্রয়োগ করা যায় না?

অর্থনীতিতে প্রান্তিক ধারণা বিশ্লেষণের ব্যাপারে গণিতের অন্তরকলণ পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। কেননা প্রান্তিক ধারণা কোন ফাংশনের একটি চলকের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র (Infinitesimal)পরিবর্তনের ফলে উদ্ভুত অন্য একটি চলকের গড় পরিবর্তন নির্দেশ করে। অন্তরক কোন প্রদত্ত অপেক্ষক হতে একটি চলকের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের প্রেক্ষিতে অন্য একটি চলকের গড় পরিবর্তন পরিমাপ করে। অন্তরক তাই নিজেই একটি প্রান্তিক ধারণা।

কোন অপেক্ষকের অন্তরকলণ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে করা সম্ভব কিনা তা নির্ভর করে দুটি শর্তের উপস্থিতির উপর।

প্রথমত ঃ অপেক্ষকটিকে ঐ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন (Continuous) থাকতে হবে। অন্য কথায় বলা যায় যদি অপেক্ষকটির একটি লেখচিত্র অংকন করা যায়, তবে তা অবিচ্ছিন্ন থাকতে হবে। যদি বিচ্ছিন্ন অবস্থায় থাকে তবে ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটির কোন অন্তরক বের করা সম্ভব নয়।

দ্বিতীয়ত ঃ অপেক্ষকটি শুধু অবিচ্ছিন্ন থাকলে চলবে না। একে মসৃণ (Smooth) হতে হবে। অর্থাৎ অপেক্ষকটির লেখচিত্র মসৃন হতে হবে। এতে কোন কৌনিক বিন্দু (Corner point) বা অমসৃনতা নির্দেশ করে এমন কোন অবস্থান থাকবে না।

উপরোক্ত দুটি শর্ত যেখানে লংঘন হয় সেখানে অন্তরকলণ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা যায় না। এই অবস্থার একটি প্রকৃষ্ট উদাহরণ হচ্ছে-ওলিগোপলি বাজারে কিংক চাহিদা (Kink Demand) মডেল।

চিত্র-৮.২.১ ঃ ওলিগোপলি বাজারে কিংক চাহিদা রেখা (গড় আয় রেখা)

এবং a ও b বিন্দুর মাঝে বিচ্ছিন্ন প্রান্তিক আয় রেখা।

চিত্রে ওলিগোপলি বাজারের কিংক চাহিদা মডেলে মূল্যের স্থির অবস্থা দেখানো হয়েছে। এক্ষেত্রে গড় আয় রেখা অবিচ্ছিন্ন হওয়া সত্ত্বেও তা Smooth বা মসৃন নয়। কেননা এর E একটি কৌনিক বিন্দু। অন্তরকলণের দ্বিতীয় শর্তটি এক্ষেত্রে লংঘিত হয়েছে। আবার a এবং b বিন্দুর মধ্যবর্তী কোন বিন্দুতে MR অপেক্ষকটির অন্তরকলণ বা MR রেখাটির ঢাল বের করা সম্ভব নয় (চিত্র ৮.২.১)।

অন্তরকলণ এবং অন্তরকের মধ্যে পার্থক্য (Distinction between differentiation and Derivative)

সাধারণত ঃ মনে করা হয় অন্তরকলণ এবং অন্তরকের মধ্যে কোন পার্থক্য নেই। আসলে তা সত্য নয়। কারণ এদের মধ্যে একটি হচ্ছে গাণিতিক প্রক্রিয়া এবং অন্যটি হচ্ছে তার ফলাফল। এদের মধ্যে নিগোক্ত পার্থক্য দেখানো যায় ঃ

প্রথমত ঃ অপেক্ষক $y = f(x)$ থেকে অন্তরক (derivative) বের করার গাণিতিক প্রক্রিয়াকে অন্তরকলণ বলে। অর্থাৎ যে প্রক্রিয়ার সাহায্যে অপেক্ষক থেকে আমরা এর অন্তরক নির্ণয় করি তাকে অন্তরকলণ বলে। তাই বলা

যায় অন্তরকলণ হচ্ছে একটি গাণিতিক প্রক্রিয়া এবং অন্তরক তার চুড়ান্ত ফল (final result)। যেমন $y = f(x)$ অপেক্ষকের বেলায় dy/dx কে অন্তরকলণ এবং $f'(x)$ কে অন্তরক বলা যায়।

দ্বিতীয়ত ঃ সামগ্রিক অর্থে অন্তরকলণ প্রক্রিয়ায় উপাদান রয়েছে $\frac{d}{dx}(y) = f'(x)$। এক্ষেত্রে $\frac{d}{dx}$ কে সংঘটক (operator) বলা হয়। y হচ্ছে অধীন চলক যার উপর কার্যক্রম (operation) চালানো হয় এবং $f'(x)$ হচ্ছে চুড়ান্ত ফলাফল। এই সামগ্রিক প্রক্রিয়ার একটি অংশ হচ্ছে $f'(x)$ নির্ণয় যাকে অপেক্ষক $y = f(x)$ এর অন্তরক বলা হয়।

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ এর ধারণা/সংজ্ঞা (Concept/Definition of $\Delta y/\Delta x$)

ধরি $y = f(x)$ হচ্ছে x এর প্রেক্ষিতে y এর অপেক্ষক এবং Δx এবং Δy দ্বারা চলক x এবং y এর পরিবর্তন বোঝায়। তাহলে x চলকের পরিবর্তন হেতু y চলকের যে পরিবর্তন হয় এই দুইয়ের অনুপাতকে $\Delta y/\Delta x$ বলে। এজন্য $\Delta y/\Delta x$ কে একটি অন্তরক অনুপাত বলা যায়।

লেখচিত্রের $y = f(x)$ একটি বক্র রেখা। এর A এবং B বিন্দু সংযোগকারী MN রেখাকে Tangent line বলে। লেখ চিত্র থেকে দেখা যায়, x এর মান x_1 হলে y চলকের মান y_1 হয়। আবার x চলকের মান বৃদ্ধি পেয়ে x_2 হলে y চলকের মান y_2 তে উন্নীত হয়। এখন লেখা যায় ঃ

$\Delta x = (x_2 - x_1) = AC;$

$\Delta y = y_2 - y_1 = BC$

সুতরাং $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{BC}{AC}$ । কাজেই দেখা যায় $\Delta y/\Delta x$ মূলতঃ Tangent line এর ঢাল নির্দেশ করে (চিত্র-৮.২.২)।

চিত্র- ৮.২.২ ঃ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ -এর জ্যামিতিক ধারণা

dy/dx এবং $\Delta y/\Delta x$ এর মধ্যে পার্থক্য (Difference between dy/dx and $\Delta y/\Delta x$)

অন্তরক সম্পর্কিত দুটি ধারণা $\Delta y/\Delta x$ এবং dy/dx এর মধ্যে নিম্নোক্ত পার্থক্য করা যায় ঃ-

প্রথমত ঃ x চলকের পরিদৃষ্ট (Observed) পরিবর্তন Δx হেতু y চলকের মধ্যে যে পরিদৃষ্ট পরিবর্তন Δy হয় এই দুয়ের অনুপাতকে $\Delta y/\Delta x$ বলা যায়। পক্ষান্তরে x এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের (infinitesimal change in x) ফলে y তে যে গড় পরিবর্তন আসে তা dy/dx নির্দেশ করে।

দ্বিতীয়ত ঃ $\Delta y/\Delta x$ কে একটি অন্তরক অনুপাত (difference quotient) বলা যায়। কিন্তু কঠোর অর্থে (Strictly speaking) $\frac{dy}{dx}$ হচ্ছে এর সীমার (a Limit Concept) ধারণা এবং এটি dy কে dx দ্বারা ভাগ করা বোঝায় না অর্থাৎ $\Delta y/\Delta x$ এর মতো এটি একটি অনুপাত নয়।

তৃতীয়ত ঃ কোন বক্ররৈখিক $y = f(x)$ অপেক্ষকের যে কোন বিন্দুর ঢাল dy/dx নির্দেশ করে। পক্ষান্তরে এর দুটো বিন্দুর সংযোগ রেখা অর্থাৎ Tangent রেখার ঢাল $\Delta y/\Delta x$ দ্বারা প্রকাশ পায়।

চিত্রের $y = f(x)$ অপেক্ষকের দুটো বিন্দু M এবং R সংযোগকারী MN হচ্ছে Tangent রেখা। এর ঢাল $\Delta y/\Delta x = RP/MP$ নির্দেশ করে। অন্যদিকে M বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক HS এর ঢাল দ্বারা dy/dx প্রকাশ পায়। চিত্রানুযায়ী বলা যায় ঃ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta \quad \underset{\Delta x \emptyset 0}{\text{Lim}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

সুতরাং পরিমাপের দিক থেকে dy/dx মূলত $\Delta y/\Delta x$ অপেক্ষা বড় হয়।

চিত্র-৮.২.৩ ঃ অন্তরক ও অন্তরকলণের পার্থক্য

সারাংশ *ঃ স্বাধীন চলকের সামান্য বৃদ্ধিজনিত পরিবর্তনের ফলে অধীন চলকের যে পরিবর্তন ঘটে তার পরিমাপকে অন্তরকলণ বলে। সাধারণতঃ স্বাধীন চলক x-এর নির্দিষ্ট মানের জন্য অন্তরকলণের নির্দিষ্ট মান থাকে এবং তা x-এর ফাংশন হিসেবে থাকতে পারে, অর্থনীতিতে অন্তরকলণের বহুল ব্যবহার রয়েছে। বিশেষ করে অর্থনীতিতে প্রান্তিক ধারণা যেমন, প্রান্তিক আয়, প্রান্তিক ব্যয়, প্রান্তিক উপযোগ, প্রান্তিক উৎপাদন, প্রান্তিক খরচ, প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা, প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবণতা, ইত্যাদিতে অন্তরকলণ ব্যবহৃত হয়। সাধারণভাবে অন্তরকলণ এবং অন্তরকের মধ্যে কোন পার্থক্য নেই মনে হলেও মূলতঃ এটি সত্য নয়। যে প্রক্রিয়ার সাহায্যে অপেক্ষক থেকে এর অন্তরক নির্ণয় করি, তাকে অন্তরকলণ বলে। অন্তরক হচ্ছে চুড়ান্ত ফল। যেমন, $y = f(x)$ অপেক্ষকের বেলায় $\frac{dy}{dx}$ কে অন্তরকলণ এবং $f'(x)$ কে অন্তরক বলে। যদি $y = f(x)$ অপেক্ষক থাকে তবে যে নিয়মে x-এর অন্তরকলণ বের করা হয়, তাকে মূল নিয়মে অন্তরকলণ (Differentiation through first principle) বলে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ণ ৮.২

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন

১। অর্থনীতিতে মোট ধারণাসমূহ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অন্তরকলণের ব্যবহার হয়।

২। অন্তরকলণ এবং অন্তরকের মধ্যে পার্থক্য হচ্ছে এদের একটি গাণিতিক প্রক্রিয়া এবং অন্যটি হচ্ছে তার ফলাফল।

৩। কোন অপেক্ষকের অন্তরকলণ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে সম্ভব কিনা তা নির্ভর করে অপেক্ষকটির অবিচ্ছিন্নতা ও মসৃনতার উপর।

পাঠ-৮.৩

অন্তরকলণের নিয়মসমূহ
(Rules of Differentiation)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন নিয়মে অন্তরকলণ করতে পারবেন।

$y= f(x)$ এই অদ্বিতীয়মানের অপেক্ষকের বিভিন্ন রূপ অনুসারে অন্তরকলণও বিভিন্ন উপায়ে করা হয়। অন্তরকলণ সহজ এবং সংক্ষিপ্ত করার জন্য কতিপয় নিয়মের উদ্ভব হয়েছে। নিম্নে এদের সম্বন্ধে আলোচনা করা হল।

১. ঘাতের নিয়ম (Power Rule) ঃ

ধরি $y = x^2$ এখন এই ঘাতযুক্ত অপেক্ষকের অন্তরক কি? এখানে x স্বাধীন চলক এবং y অধীন চলক। প্রথমত ঃ আমরা $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ বের করে সীমার (Limiting process) সাহায্য নেব ঃ

$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^2$$

বা $y+\Delta y = x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2$

বা $\Delta y = -y+x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2$

বা $\Delta y = 2x.\Delta x + \Delta x^{2}$ [যেহেতু $y = x^2$]

বা $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x.\Delta x}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{\Delta x}$ [উভয় পক্ষে Δx দ্বারা ভাগ করে]

$$= 2x + \Delta x$$

এখন, $\lim_{\Delta x \varnothing 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \varnothing 0} (2x + \Delta x)$

$$= 2x$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

যদি $y=x^n$ হয়, তবে Δx বৃদ্ধির জন্য $y+\Delta y = (x+\Delta x)$; এখন দ্বিপদী সম্প্রসারণের নিয়ম (Binomial expansion) অনুসারে লিখা যায় ঃ

$$y + \Delta y = x^n +(\frac{n}{1})x^{n-1} (\Delta x) + (\frac{n}{2})x^{n-2}(\Delta x)^2+..........+ \frac{n}{n-1} x(\Delta x)^{n-1} +(\Delta x)^n$$

এখন উভয় দিকে সীমা নেয়ার পর আমরা পাই ঃ

$$\lim_{\Delta x \varnothing 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} (\frac{n}{1}) x^{n-1} = nx^{n-1}$$

উদাহরণ ঃ ১ $y =x^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

উদাহরণ ঃ ২ ধরি মোট উৎপাদন ব্যয় C এবং q উৎপাদনের পরিমাণ। পণ্যের উৎপাদনের উপর ব্যয় নির্ভরশীল। ধরি উৎপাদন ব্যয় এবং উৎপাদনের মধ্যে সম্পর্ক হচ্ছে ঃ

$$C=q^3$$

এখন $\frac{dc}{dq} = \frac{d}{dq}(q3) = 3q^{3-1} = 3q^2$

এখন $3q^2$ হচ্ছে q এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তনের ফলে উৎপাদন ব্যয় C এর গড় পরিবর্তনের হার। একে অর্থনীতিতে প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় (Marginal cost) বলা হয়।

২. স্থির ফাংশনের নিয়ম (Constant Function Rule) ঃ

ধরি $y = g(x) = k$, k একটি স্থির মান (Constant)।

$\frac{dy}{dx} = o$ বা $g'(x) = o$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যেমন স্থির অপেক্ষকের অন্তরক শূন্য হয়, অর্থনীতিতে এরূপ অপেক্ষকের উদাহরণ হিসেবে আমরা পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক বাজারের গড় আয় এবং প্রান্তিক আয় অপেক্ষকের কথা বলতে পারি। অনুরূপভাবে মোট স্থির ব্যয় ফাংশনের কথাও বলা যায়। যদি স্থির ব্যয় ফাংশন C=f(q)=Tk.500 হয় তবে এর অন্তরক হবে নিম্নরূপ ঃ $\frac{d}{dq} f(q) = \frac{d}{dq}(500) = 0$

চিত্র-৮.৩.১ ঃ স্থির অপেক্ষক

৩. স্থির রাশি দ্বারা গুনোত্তর অপেক্ষকের অন্তরকলণ (Multiplication by a Constant) ঃ

যদি $y = f(x)$ অপেক্ষকে C একটি স্থির রাশি হয়, তবে এর অন্তরক $f(x)$ অপেক্ষকের অন্তরক এবং Cএর গুণফলের সমান হবে।

উদাহরণ ঃ ১ $y = f(x) = 5x^3$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 5\frac{d(x3)}{dx} = 5.(3x^2) = 15x^2$$

উদাহরণ ঃ ২ $y = ax^b$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = a.\frac{d(x^b)}{dx} = a.bx^{b-1} = abx^{b-1}$$

৪. যোগ এবং বিয়োগের নিয়ম (Composite function Rule)ঃ

দুই বা ততোধিক অন্তরকলণযোগ্য অপেক্ষকের যোগ বা বিয়োগের অন্তরক এদের পৃথক অন্তরকের যোগ বা বিয়োগের সমান হবে। যদি $y = u \pm v \pm w$ হয়, এবং $u = f(x), v = f(x)$, ও $w = f(x)$, তাহলে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx}$$ হবে।

উদাহরণ ঃ ১ $y = x^2 + 3x^4 + 4x^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} + 3.\frac{d(x4)}{dx} + 4\frac{d(x^5)}{dx}$$
$$= 2x + 3\ (4x^3) + 4(5x^4)$$
$$= 2x + 12x^3 + 20x^4$$

উদাহরণ ঃ ২ $y = ax^3 - bx^2 - cx$

$$\frac{dy}{dx} = a.\frac{d(x^3)}{dx} - b\frac{d(x^2)}{dx} - c\frac{d(x)}{dx}$$
$$= a.\ (3x^2) - b.(2x) - c(1)$$
$$= 3ax^2 - 2bx - c$$

৫. গুণের নিয়ম (Multiplication Rule) ঃ

ধরি, $u = f(x)$ এবং $v = g(x)$ অপেক্ষক দুটি অন্তরকলণযোগ্য। তবে তাদের গুণফল অন্তরকলণযোগ্য এবং লেখা যায় ঃ

$$\frac{dy}{dx} = u.\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

উদাহরণ ঃ ১ $y = (3x^2+1)\ (x^3 + 2x)$

এখানে $u = (3x^2 + 1)$ এবং $v = (x^3 + 2x)$ ধরে পাওয়া যায় ঃ

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 1)\frac{d(x^3+2x)}{dx} + (x^3 + 2x)\frac{d(3x^2+1)}{dx}$$
$$= (3x^2+1)\ (3x^2+2) + (x^3 + 2x)\ (6x)$$
$$= 9x^4 + 6x^2 + 3x^2 + 2 + 6x^4 + 12x^2$$
$$= 15x^4 + 21x^2 + 2$$

উদাহরণ ঃ ২ $y = (x^2+x+3)\ (x^3-x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+x+3).\frac{d(x^3-x+1)}{dx} + (x^3-x+1).\frac{d(x^2+x+3)}{dx}$$
$$= (x^2+x+3)\ (3x^2-1) + (x^3-x+1)\ (2x+1)$$
$$= 3x^4 + 3x^3 + 9x^2 - x^2 - x - 3 + 2x^4 - 2x^2 + 2x + x^3 - x + 1$$
$$= 5x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 2$$

৬. ভাগের নিয়ম (Quotient Rule) ঃ

ধরি $u(x)$ এবং $v(x)$ দুটি অন্তরকলণযোগ্য অপেক্ষক এবং $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ । এখন যদি $v(x)□x$ হয় তবে বলা যায় ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

উদাহরণ ঃ ১ $y = \frac{3x^2+1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\frac{d}{dx}(3x^2+1)-(3x^2+1)\frac{d(x)}{dx}}{x^2}$$

$$= \frac{x(6x)-(3x^2+1)\,(1)}{x^2}$$

$$= \frac{6x^2-3x^2-1}{x^2}$$

$$= \frac{3x^2-1}{x^2}$$

উদাহরণ ঃ ২ $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{(1-x)} - \sqrt{1-x}\,\frac{d}{dx}\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1+x})^2}$$

$$= \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1-x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)}$$

$$= \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}\left\{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\}-(1-x)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right\}}{(1+x)}$$

$$= \frac{\dfrac{-(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{2(1+x)^{\frac{1}{2}}}}{(1+x)}$$

$$= \frac{\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}}{(1+x)}$$

$$= \frac{-(1+x-1+x)}{2(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)}$$

$$= \frac{-2x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

৭. অপেক্ষকের অপেক্ষক নিয়ম (Function of a Function Rule) ঃ

যদি y=f(z), যেখানে z=g(x) হয় তবে,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} . \frac{dz}{dx}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ উপরোক্ত সূত্রটিকে একাধিক অপেক্ষকের ক্ষেত্রে বর্ধিত করা যায় ঃ

যদি y = f(v) যেখানে v = (u) এবং u = ψ(x) হয় তবে-

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

উদাহরণ ঃ ১ $z = y^4 + 3y^3$ এবং $y = x^2$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} . \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{d}{dy}(y^4 + 3y^3) . \frac{d(x^2)}{dx}$$

$$= (4y^3 + 9y^2).(2x)$$

$$= 8xy^3 + 18xy^2$$

$= 8x(x^2)^3 + 18(x^2)^2$ [$y=x^2$ বসিয়ে]

$$= 8x^7 + 18x^5$$

উদাহরণ ঃ ২ $z = (x^3 + 3x)^2$

মনে করি, $y = x^3 + 3x$, তবে প্রদত্ত অপেক্ষক দাড়ায়,

$z = y^2$ যেখানে $y = x^3+3x$

এখানে, $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

$$= \frac{d(y^2)}{dy} . \frac{d(x^3+3x)}{dx}$$

$$= 2y. (3x^2+3)$$

$$= 2(x^3+3x) (3x^2+3)$$

$= (2x^3 + 6x) (3x^2+3)$ [যেহেতু, $y = x^3+3x$]

$$= 6x^5 + 6x^3 + 18x^3 + 18x$$

$$= 6x^5 + 24x^3 + 18x$$

উদাহরণ ঃ ৩ $y = 2w^2+1; w = 3z^2$ এবং $z = 2x + x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{d(2w^2+1)}{dw} \cdot \frac{d(3z^2)}{dz} \cdot \frac{d(2x+x^3)}{dx}$$

$$= (4w) (6z) (2+3x^2)$$

$$= (12z^2) (6z) (2+3x^2)$$

$$= 72z^3 (2+3x^2)$$

$= 72(2x+x^3)^3 (2+3x^2)$ [$\therefore$ [$z=2x+x^3$]

উদাহরণ ঃ ৪ ধরুন C মোট উৎপাদন ব্যয় ; q কোন দ্রব্যের উৎপাদন। মনে করি এদের সম্পর্ক নিম্নের অপেক্ষক দ্বারা প্রকাশ পায় ঃ

$C= (3+2q^2)^2;$

এই অপেক্ষক থেকে অপেক্ষকের অপেক্ষক নিয়মানুসারে আমরা প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় (Marginal Cost) অপেক্ষক বা $\frac{dc}{dq}$ বের করতে পারি।

ধরি. $v = 3+2q^2$ তাহলে $C=v^2$ এবং $v=3+2q^2$

এখন,
$$\frac{dc}{dq} = \frac{dc}{dv} \cdot \frac{dv}{dq}$$
$$= \frac{d(v^2)}{dv} \cdot \frac{d(3+2q^2)}{dq}$$
$$= (2v)(4q)$$
$$= 8vq$$
$$= 8q(3+2q^2)$$
$$= 24q + 16q^3 \text{ [} v=3+2q^2 \text{ বসিয়ে]}$$

৮. বিপরীত অপেক্ষকের নিয়ম (Inverse Function Rule) ঃ

ধরি $y = f(x)$ অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক $x = g(y)$ আছে। তবে লেখা যায় ঃ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dg(y)}{dy}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

উদাহরণ ঃ ১ যদি $y = 3x^2 + 4x$ হয় তবে $\frac{dx}{dy}$ কত হবে?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d(3x^2+4x)}{dx}} = \frac{1}{6x+4}$$

উদাহরণ ঃ ২ মনে করি $D=100-5p$ পণ্যের চাহিদা অপেক্ষক। এই অপেক্ষক থেকে $\frac{dp}{dD}$ বের করা যায়।

এক্ষেত্রে $\frac{dp}{dD} = \frac{1}{\frac{dD}{dp}} = \frac{1}{\frac{(100-5p)}{dp}} = -\frac{1}{5}$

সারাংশ ঃ $y=f(x)$ এই অদ্বিতীয়মানের অপেক্ষকের বিভিন্ন রূপ অনুসারে অন্তরকলণও বিভিন্ন উপায়ে বের করা হয়। এটি সহজ ও সংক্ষিপ্ত করার জন্য কয়েকটি নিয়মের উদ্ভব হয়েছে। যেমন, ঘাতের নিয়ম, যোগ ও বিয়োগের নিয়ম, গুণের নিয়ম, ভাগের নিয়ম, অপেক্ষকের অপেক্ষক নিয়ম, ইত্যাদি।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৩
সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। $y = 3x^2$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

(ক) x^3 (খ) $6x$

(গ) $\frac{3}{2}x^3$ (ঘ) $\frac{3}{2}x^2$

২। $q = 300$ হলে $\frac{d}{dq}(300) = ?$

(ক) ০ (খ) 1

(গ) α (গ) 300

৩। যদি $u(x)$, $v(x)$ দুটি অন্তরকলণযোগ্য অপেক্ষক ও $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ হয় এবং যদি $v(x) \neq x$ হয় তবে, $\frac{dy}{dx} = ?$

(ক) $\frac{dy}{dx} = u.\frac{du}{dx} + v.\frac{du}{dx}$ (খ) $\frac{dy}{dx} = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v2}$

(গ) ক ও খ উভয়ই হতে পারে (ঘ) কোনটিই নয়।

পাঠ-৮.৪

অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলণ এবং উচ্চ মাত্রার অন্তরকলণ

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলণ করতে পারবেন।
- উচ্চ মাত্রার অন্তরকলণ করতে পারবেন।

অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলণ (Differentiation of Implicit Function)

অনেক সময় দুটি চলকের নির্ভরশীলতা অব্যক্ত আকারে থাকতে পারে। যেমন $f(x,y) = o$ এই সমীকরণটি দ্বারা x এবং y এর মধ্যে নির্ভরশীলতা (যা f প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে) রয়েছে। কিন্তু এদের মধ্যে কোন্‌টি কার উপর নির্ভরশীল তা ব্যক্ত (explicitly expressed) করা হয় নাই।

তবে এরূপ অপেক্ষকের অন্তরকলণের সময় আমরা সাধারণত x কে স্বাধীন এবং y কে অধীন চলক ধরতে পারি। এরপর প্রদত্ত অব্যক্ত অপেক্ষক বা সমীকরণের উভয় দিকের অন্তরকলণ নিয়ে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে পারি। আবার ইচ্ছা করলে x কে অধীন এবং y কে স্বাধীন চলক ধরেও প্রদত্ত সমীকরণ/অপেক্ষকের উভয় দিকের অন্তরকলণ নিয়ে $\frac{dx}{dy}$ নির্ণয় করা যায়।

যেমন $x^2 + xy + y - 1 = o$ একটি অব্যক্ত অপেক্ষক। এখন এটি থেকে y চলককে x চলকের বা x কে y এর ব্যক্ত অপেক্ষক হিসাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়। যদি x কে স্বাধীন চলক ধরা হয় তবে x এর সম্পর্কে y এর অন্তরক বের করা যায়।

উদাহরণ ঃ ১ $xy + (x+y+1) = 0$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ বাহির করুন।

$$\frac{d(xy)}{dx} + \frac{d(x+y+1)}{dx} = 0$$

বা $$y.\frac{d(x)}{dx} + x.\frac{d(y)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(y)}{dx} + \frac{(1)}{dx}) = 0$$

বা $$y + x.\frac{dy}{dx} + 1 + \frac{dy}{dx} = 0$$

বা $$x\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = -(y+1)$$

বা $$\frac{dy}{dx}(x+1) = -(y+1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(y+1)}{(x+1)}$$

উদাহরণ ঃ ২ $x^3 + 3axy + y^3 = a^3$

প্রদত্ত অপেক্ষকের বেলায় x কে স্বাধীন এবং y কে অধীন চলক ধরে উভয় দিকের অন্তরকলণ নিলে পাই ঃ

$$\frac{d(x^3)}{dx} + 3a\frac{d(xy)}{dx} + \frac{d(y^3)}{dx} = \frac{d(a^3)}{dx}$$

বা $3x^2 + 3a\,(x.\frac{dy}{dx} + y) + 3y^2 . \frac{dy}{dx} = 0$

বা $3ax\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -\,(3x^2+3ay)$

বা $\frac{dy}{dx}(3ax+3y^2) = -(3x^2+3ay)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2+3ay)}{(3ax+3y^2)}$$

$$= \frac{-(x^2+ay)}{ax+y^2}$$

অনুরূপভাবে ঃ $\frac{dx}{dy} = -(ax+y^2)/(x^2+ay)$

উচ্চমাত্রার অন্তরকলণ (Higher Order Differentiation)

যদি $y = x^4+x^2+x$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 4x^3+2x+1$

এখন $\frac{dy}{dx}$ প্রথম মাত্রার অন্তরকলণ। এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ এখনও x এর অপেক্ষক। সুতরাং $\frac{dy}{dx}$ কে x এর প্রেক্ষিতে পুনরায় অন্তরকলণ সম্ভব। অর্থাৎ এ থেকে দ্বিতীয় মাত্রার অন্তরক বের করা যায়।

$$f\delta(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d(x^4+x^2+x)}{dx}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}(4x^3+2x+1)$$

$$= 12x^2 + 2$$

$12x^2 + 2$ কে দ্বিতীয় মাত্রার অন্তরক বলা যায়। এই প্রক্রিয়া ক্রমান্বয়ে অনুসরণ করা যায় যতক্ষণ না অন্তরক এর মান শূন্য হয়। সাধারণ কথায় n তম মাত্রার অন্তরকলণ প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়:

$$y^{(n)} = f^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

উদাহরণ ঃ ১ $y = x^6+x^4+x$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 6x^5+4x^3+1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\delta\,(x) = 30x^4 + 12x^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = 120x^3+24x$$ ইত্যাদি

উদাহরণ ঃ ২ $y = \sqrt{2x^2-3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2-3)^{\frac{1}{2}} \left[\text{PpPyfM } \sqrt{2x^2-3} = (2x^2-3)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(4x)(2x^2-3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (2x)(2x^2-3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2x}{(2x^2-3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{2x^2-3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{2x}{\sqrt{2x^2-3}}\right]$$

$$= \frac{(2x^2-3)^{1/2}\frac{d(2x)}{dx} - 2x.\frac{d}{dx}\left\{(2x^2-3)^{1/2}\right\}}{\left\{(2x^2-3)^{1/2}\right\}2}$$

$$= \frac{2(2x^2-3)^{1/2} - 2x\frac{1}{2}.(4x)(2x^2-3)^{1/2}}{2x^2-3}$$

$$= \frac{2(2x^2-3)^{1/2} - \frac{4x^2}{(2x^2-3)^{-1/2}}}{((2x^2-3))}$$

$$= \frac{\frac{2(2x^2-3) - 4x^2}{(2x^2-3)^{1/2}}}{(2x^2-3)}$$

$$= \frac{-6}{(2x^2-3)^{\frac{3}{2}}}$$

সারাংশ ঃ অনেক সময় দুটি চলকের নির্ভরশীলতা অব্যক্ত থাকে। এরূপ অপেক্ষকের অন্তরকলণের সময় একটি চলককে স্বাধীন ও অপর চলককে যেমন x ও y অধীন ধরা হয়। এরপর প্রদত্ত অপেক্ষক বা সমীকরণের উভয় দিকের অন্তরকলণ দিয়ে $\frac{dy}{dx}$ বা $\frac{dx}{dy}$ নির্ণয় করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৪

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। দুটি চলকের নির্ভরশীলতা অব্যক্ত থাকলে, অপেক্ষকটির অন্তরকলণ করা সম্ভব নয়।

২। $y = 2x^3 + 3x$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ বা $f'''(x) = 12x$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন ইউনিট ৮

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। অন্তরক এর সংজ্ঞাসহ বৈশিষ্ট্যগুলো আলোচনা করুন।

২। অন্তরকলণের সংজ্ঞা দিন। অন্তরকলণের অর্থনৈতিক ব্যবহার সম্পর্কে আলোচনা করুন।

৩। অন্তরকলণ বলতে কি বোঝায় ?

৪। অন্তরকের সংজ্ঞা দিন।

৫। অন্তরকলণ এবং অন্তরকের মধ্যে পার্থক্য কি ? মূল নিয়মে অন্তরকলণ কি ভাবে করা যায় ?

৬। মূল নিয়মে অন্তরকলণ করুন :-

ক. $y = \sqrt{x}$ খ. $y = x^3$

গ. $y = 5x^4$ ঘ. $y = \frac{1}{x}$

৭। অন্তরকলণের ঘাতের নিয়ম কি ?

৮। অর্থনীতিতে অন্তরকলণের স্থির ফাংশনের নিয়ম কোথায় ব্যবহৃত হয় ?

৯। অন্তরকলণের অপেক্ষকের অপেক্ষক নিয়ম কি ?

১০। অন্তরকলণের নিয়মসমূহ আলোচনা করুন।

১১। নিগোক্ত সমস্যা সমাধান করুন।

ক. $y = 9x^{-5}$ -এর অন্তরক সহগ বের করুন।

খ. $y = 5x^{-3} -2x^2 + 6x -9; \frac{dy}{dx} = ?$

গ. $y = (x^2-3x)(3x^3-6x); \frac{dy}{dx} = ?$

ঘ. $y = \frac{x^2+3}{x-2}; \frac{dy}{dx} = ?$

১২। অপেক্ষকের অপেক্ষক নিয়ম অনুসারে অন্তরক সহগ বের করুন।

ক. $y = U^{10}$ খ. $y= (5x-7)^3$

গ. $y = (3x^2-1)^5$ ঘ. $y= (x^2+4x-2)^4$

ঙ. $u = 5x-3$ চ. $U= -x^2+6x-3$

১৩। অব্যক্ত অপেক্ষক কি? অর্থনীতিতে কোথায় অন্তরজ ক্যালকুলাস বা $\frac{dy}{dx}$ প্রয়োগ করা যায় না ?

১৪। নিম্নোক্ত সমাধান বের করুন।

ক. $x^4+x^2y^2+y^4 = 0$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{dx}{dy} = ?$

খ. $2xy+3x+y^2 = 0$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

গ. $5x^3 -3x^2 +3y^2-6 = 0$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{dx}{dy} = ?$

ঘ. $x^2+2xy-5y^2-4 = 0$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{dx}{dy} = ?$

উত্তরমালা -ইউনিট-৮

পাঠ-১ ঃ	(১) মিথ্যা		
পাঠ-২ ঃ	(১) মিথ্যা	(২) সত্য	(৩) সত্য
পাঠ-৩ ঃ	(১) খ	(২) ক	(৩) খ
পাঠ-৪ ঃ	(১) মিথ্যা	(২)মিথ্যা	