ইউনিট ৭

সীমা
(Limit)

অর্থনীতিতে ক্যালকুলাসের ব্যবহার ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাচ্ছে। আর সীমার ধারণাই মূলতঃ ক্যালকুলাসের ভিত্তি। এই ইউনিটে সীমার ধারণা, অদ্বিতীয় মানের ফাংশনের সীমা এবং ফাংশনের সীমা নির্ধারণ সম্পর্কিত পাঠগুলো উপস্থাপন করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছেঃ

- পাঠ-১ : সীমার ধারণা
- পাঠ-২ : অদ্বিতীয় মানের ফাংশনের সীমা
- পাঠ-৩ : ফাংশনের সীমা নির্ধারণ

পাঠ-৭.১

সীমার ধারণা

(Concept of Limit)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সীমার সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- সীমার প্রতীক সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- সীমার অস্তিত্ব সম্পর্কে জানতে পারবেন।

ক্যালকুলাসের প্রয়োজনীয় ধারণাসমূহ যেমন প্রভেদক সহগ (Differential Co-efficient), সমাকলন (integral) ইত্যাদি সীমার ধারণার উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে। কোন প্রদত্ত সংখ্যার ধারা (Sequence) চার ধরনের হতে পারে।

১. এটির ধারা ক্রমান্বয়ে অসীম ধনাত্মক মানের দিকে যেতে পারে-অর্থাৎ সৈমিক মান (+) অসীম (limiting value infinite)।

২. ক্রমশ ঃ ঋণাত্মক অসীমের দিকে ধাবিত হতে পারে অর্থাৎ সৈমিক মান (-) অসীম।

৩. সৈমিক মান কোন নির্দিষ্ট সংখ্যার দিকে যেতে পারে অর্থাৎ এর কোন সংখ্যাগত মান পাওয়া যেতে পারে।

৪. কোন সৈমিক মান (Limiting Value) গ্রহণ না করে ধারার উঠানামা (Oscillation) হতে পারে।

কোন ধারার এই চার ধরনের বৈশিষ্ট্যের উদাহরণ নিম্নে দেয়া হল ঃ

সংখ্যার ধারা	**সৈমিক মান**
1,2,3,4,5......................(+) α	(ধনাত্মকভাবে অসীম)
-1,-2,-3,-4.....................(-) α	(ঋণাত্মকভাবে অসীম)
$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ 1	(সৈমিক মান 1)
$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}$	(সৈমিক মানের উত্থান -পতন)

(উপরোক্ত ধারা থেকে সীমার ধারণার উদ্ভব হয়)

যেমন ঃ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ ....$\frac{1}{2^p}$.........

এই ধারার P তম পদ $Tp = \frac{1}{2^p}$; p যত বাড়বে Tp তত ক্ষুদ্র হবে। অর্থাৎ P কে যত বড় সংখ্যা ধরা হবে, $\frac{1}{2^P}$ তত ক্ষুদ্র হবে এবং P $\varnothing$ α (অর্থাৎ P-এর মান অসীমের দিকে ধাবিত হচ্ছে কিন্তু প্রকৃতপক্ষে অসীম নয়) হলে Tp $\varnothing$ 0 হবে [অর্থাৎ Tp-এর মান 0 এর দিকে ধাবিত হয়ে শূন্যের কাছাকাছি, কিন্তু শূন্যের সমান নয়] এই অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি হবে 1। অনুরূপভাবে যদি x_1, x_2, x_3, x_4.............x_n সংখ্যা শ্রেণী এরূপ হয় যে, n যত বাড়বে x_n তত একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা x এর সন্নিকটবর্তী হবে এবং শেষ পর্যন্ত যখন n বড় হয়ে গণনাতীত (অসীম) হয়-অর্থাৎ n $\varnothing$ α হয়, তখন x এবং X এর পার্থক্য লুপ্ত (শেষ) হয়ে যায়। X-কে এই অভিসারী (Convergent) অসীম ধারার পদসমূহের সৈমিক মান বলা যায়।

তাই যদি কোন অসীম ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি Sn হয় এবং n$\varnothing$ α অনুসারে Sn$\varnothing$ S হয়, তবে S-কে অভিসারী অসীম ধারার সমষ্টির সৈমিক মান বলা যায়।

চলকের সীমা (Limit of a Variable)

কোন চলকের ব্যপ্তির (interval) মধ্যে কোন স্থির রাশির (Constant) সন্নিকটবর্তী হলে যখন এদের পার্থক্য শূন্য হয় তখন ঐ স্থির রাশিকে সীমা বলা হয়। ধরি চলক x এর ব্যপ্তির মধ্যে কোন স্থির রাশি a-এর সন্নিকটবর্তী হয় যাতে $|x-a|$ (অর্থাৎ x এবং a-এর পরম অন্তর) ক্রমান্বয়ে ক্ষুদ্র হয়ে শেষ পর্যন্ত শূন্যে পরিনত হল। এক্ষেত্রে a কে চলক x-এর সীমা বলা হয়। চলক x, a এর সন্নিকটবর্তী হওয়াকে প্রতীক চিহ্ন $x \to a$ দ্বারা বোঝানো হয়।
উল্লেখ্য x দু'ভাবে a -এর অভিমুখী (tend to) হতে পারে। প্রথমত ঃ x এর প্রতিটি মান a অপেক্ষা ক্রমশ ঃ বড় হতে পারে। একে x এর ডান সীমা (right hand limit) বলা হয়। আবার x -এর মান a অপেক্ষা ক্রমশ ঃ ক্ষুদ্র হতে পারে। সেক্ষেত্রে বলা যায়; x বামদিক থেকে a এর নিকটবর্তী বা অভিমুখী হচ্ছে। একে x এর বাম সীমা (left hand limit) বলে।
সাধারণত অতি ক্ষুদ্র ধণাত্মক সংখ্যা প্রতীক $\in$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখন $\in$ প্রদত্ত অবস্থায় x এর সব মানের জন্য $|x-a|$, $\in$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হবে।
অর্থাৎ বলা যায় ঃ $0 < |x-a| < \in$

বা, $a - \in < x < a + \in$

এক্ষেত্রে $x = a$ সাধারণত ধরা হয় না, বিশেষ ক্ষেত্রে ধরা যেতে পারে।

সীমার প্রতীক (Notation or Symbol of Limit)

ডান দিক থেকে x যখন a এর নিকটবর্তী হয়, তখন $x \to a + 0$, বা, $x \to a^t$ বা, $x \to (a + o)$ ইত্যাদি প্রতীকের সাহায্যে নির্দেশ করা হয়। অন্যদিকে বামদিক থেকে x, a এর নিকটবর্তী হলে তাকে $x \varnothing a$, বা $x \to a - o$ ইত্যাদির মধ্যে যে কোন একটি প্রতীক ব্যবহার করা যায়।

$x \to a^{-1}o$ (বামদিক থেকে) (অর্থাৎ $a - \in < x < a$)

$x \to a^{+1}o$ (ডানদিক থেকে) (অর্থাৎ $a < x < a + \in$)

সীমার অস্তিত্ব (Existence of limit)

$x \to a$, হলে নিম্নোক্ত শর্তসাপেক্ষ $f(x)$ ফাংশনের অস্তিত্ব থাকতে পারে ঃ

(i) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে

(ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ বর্তমান থাকে;

(iii) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ হয়। অর্থাৎ যদি ডান এবং বাম সীমা যেমন চলক x যদি পর্যায়ক্রমে নিম্নের মানসমূহ গ্রহণ করে ঃ

$x_1 = 2;\ x_2 = 1\frac{1}{2};\ x_3 = 1\frac{1}{3},\ x_4 = 1\frac{1}{4}$ .... তাহলে দেখানো যায়, $n \to \alpha$ অনুসারে

$|x_n - 1| = \left|1\frac{1}{n} - 1\right| \to 0$, অর্থাৎ $x \to 1$ হবে।

সারাংশ *ঃ ক্যালকুলাসের প্রয়োজনীয় ধারণাসমূহ মূলত ঃ সীমার ধারণার (Concept) উপর ভিত্তি করে গড়ে উঠেছে। কোন চলকের ব্যপ্তির মধ্যে কোন স্থির রাশির সন্নিকটবর্তী হলে যখন এদের পার্থক্য শূন্য হয় তখন ঐ স্থির রাশিকে সীমা (Limit) বলে। উদাহরণস্বরূপ চলক x, a-এর সন্নিকটবর্তী হওয়াকে প্রতীক চিহ্ন $x \varnothing a$ দ্বারা বোঝানো হয়। উল্লেখ্য যে, কোন প্রদত্ত সংখ্যার ধারা (Suquence) চার ধরণের হতে পারে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.১

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। ক্যালকুলাসের প্রয়োজনীয় ধারণসমূহ মূলত ঃ গড়ে উঠেছে-

(ক) সীমার ধারণার উপর ভিত্তি করে　　(খ) প্রভেদক সহগের উপর ভিত্তি করে

(গ) সমাকলনের উপর ভিত্তি করে　　(ঘ) অন্তরকলনের উপর ভিত্তি করে

২। কোন প্রদত্ত সংখ্যার ধারা (Suquence) কত ধরনের হতে পারে ?

(ক) এক ধরনের　　(খ) দুই ধরনের

(গ) তিন ধরনের　　(ঘ) চার ধরনের

পাঠ-৭.২

অদ্বিতীয় মানের ফাংশনের সীমা

(Limit of a Single Valued Function)

এ পাঠ শেষে আপনি-

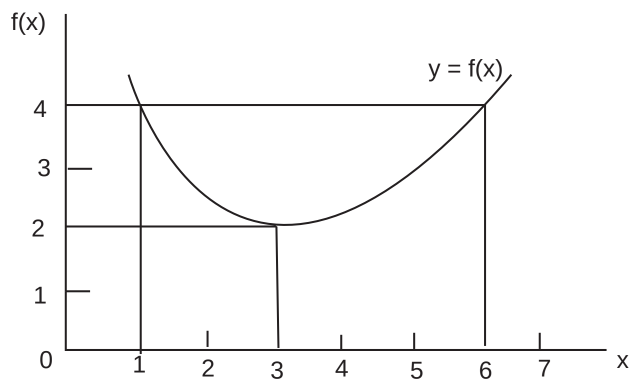
- অদ্বিতীয় মানের ফাংশন সম্পর্কে জানতে পারবেন।

ফাংশনের সীমার ধারণা কোন সংখ্যা ধারার সীমার সাথে সংশ্লিষ্ট। ধরি y চলক x চলকের অদ্বিতীয় মানের ফাংশন। এখন যদি x চলকের বিভিন্ন মানের দ্বারা একটি ধারা তৈরি করা হয়, তবে তার প্রাতিষঙ্গিক (Corresponding) y এর মান দ্বারা অন্য যে একটি ধারা সৃষ্টি করা যায়, তার বৈশিষ্ট্যের উপর ফাংশনটির সীমা নির্ভর করবে। এখানে y চলকের সীমা x চলরাশির সীমার উপর নির্ভর করে। অদ্বিতীয় মানের ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা নিচে দেয়া হল।

সংজ্ঞা ঃ স্থির রাশি a কে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বলা হয় যদি x উভয় দিক থেকে থেকে তার মান c এর সন্নিকটবর্তী হওয়ার প্রেক্ষিতে $f(x)$, a-এর সন্নিকটবর্তী হয় এবং শেষ পর্যায়ে $x \varnothing c$ অনুসারে $f(x) \varnothing a$ হয়। চলক $x \varnothing c$ অনুসারে $f(x)$ এর এভাবে a-এর সন্নিকটবর্তী হওয়াকে প্রতীক চিহ্ন $\lim\limits_{x \varnothing c} f(x) = a$ দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।

লেখচিত্র ৭.২.১ থেকে দেখা যায় x চলকের মান বাম অথবা ডান দিক থেকে 3 এর সন্নিকটবর্তী (approachy) হলে ফাংশনটির মান $f(x)$ মূলত ঃ 2 এর সন্নিকটবর্তী হয়। এর অর্থ হচ্ছে x এর মান 3 এর সন্নিকটবর্তী হলে $f(x)$ এর সীমা 2 হবে যা নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$\lim_{x \varnothing 3} f(x) = 2$$



চিত্র- ৭.২.১ ঃ অদ্বিতীয় মানের ফাংশনের সীমা

আবার x এর মান উভয় দিক থেকে 6 এর সন্নিকটবর্তী হলে লেখচিত্র অনুযায়ী $f(x)$ এর মান 4 এর সন্নিকটবর্তী হয়।

অর্থাৎ $\lim\limits_{x \varnothing 6} f(x) = 4$

ব্যক্ত (explicit type) কোন অদ্বিতীয় ফাংশন $y = f(x)$ এর সীমা নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় ঃ

যখন $x \emptyset + \alpha$ হয়, তখন $f(x)$ এর সীমার জন্য আমরা x চলকের জন্য নির্বাচিত কোন ধণ্মক অসীম ধারার জন্য y-এর প্রাতিষঙ্গিক মানের যে ধারা পাই তার বৈশিষ্ট্য পর্যালোচনা করি। এই পর্যালোচনা করতে গেলে চার ধরনের সম্ভাবনা দেখা দেয়।

প্রথমত ঃ $f(x)$-এর মান সমূহ ধণ্মক হতে পারে এবং x এর মান বসিয়ে $f(x)$-এর মানকে কোন সংখ্যার চেয়ে বড় করা সম্ভব। যেমন- x-এর ধারা অসীমের সন্নিকটবর্তী হলে $f(x)$-এর ধারা অসীমের সন্নিকটবর্তী হবে বলা যায়। এটি প্রতীকের সাহায্যে দেখানো যায় ঃ

$f(x) \emptyset \alpha$ যখন $x \emptyset \alpha$

বা, $\lim\limits_{x \emptyset \alpha} f(x) = \alpha$

দ্বিতীয়ত ঃ $f(x)$-এর মান ঋণ্মক হতে পারে এবং তা x এর মান বৃদ্ধির সাথে ক্রমান্বয়ে বেশী ঋণ্মক হতে পারে। এক্ষেত্রে $f(x)$ ঋণ্মক অসীমের সন্নিকটবর্তী হবে যখন x এর মান অসীমের সন্নিকটবর্তী হবে।

প্রতীকের সাহায্যে বলা যায় ঃ

$f(x) \emptyset -\alpha$ যখন $x \emptyset \alpha$

বা, $\lim\limits_{x \emptyset \alpha} f(x) = -\alpha$

তৃতীয়ত ঃ x-এর মান বাড়ার প্রেক্ষিতে $f(x)$ এর মান দ্বারা গঠিত ধারা কোন নির্দিষ্ট মান λ (ল্যামডা-একটি স্থির রাশি)-এর সন্নিকটবর্তী হতে পারে। x-এর বড় কোন মানের প্রেক্ষিতে $f(x)$ এবং λ এর মানের বিয়োগফল আমরা ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র করতে পারি। এক্ষেত্রে x-এর ধারা অসীমের সন্নিকটবর্তী হলে $f(x)$-এর মান λ এর সন্নিকটবর্তী হবে এবং প্রতীকের সাহায্যে আমরা লিখতে পারি ঃ

$f(x) \emptyset \lambda$ যখন $x \emptyset \alpha$

বা, $\lim\limits_{x \emptyset \alpha} f(x) = \lambda$

চর্তুথত ঃ $f(x)$ এর মানসমূহ x এর মান বৃদ্ধির সাথে কোন বিশেষ অভিমুখী না হয়ে উত্থান-পতন হতে পারে। এক্ষেত্রে x -এর মান অসীমাভিমুখী বলে $f(x)$-এর কোন সৈমিক মান (Limiting value) নেই।

উদাহরণ-১ ঃ $y = 1-\frac{1}{x}$ একটি অদ্বিতীয় মানের ফাংশন যেখানে x একটি অবিচ্ছিন্ন চলক (Continuous variable)। এখন যদি আমরা x চলকের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক বিভিন্ন মানে এর মানের দুটি ধারা তৈরী করি তবে y -এর মানেরও দুটি ধারা পাব। পরবর্তী টেবিলের সাহায্যে তা দেখানো হল ঃ

(ক)

x	1	2	4	5	....
y	0	$1/2$	$3/4$	$4/5$	....

(খ)

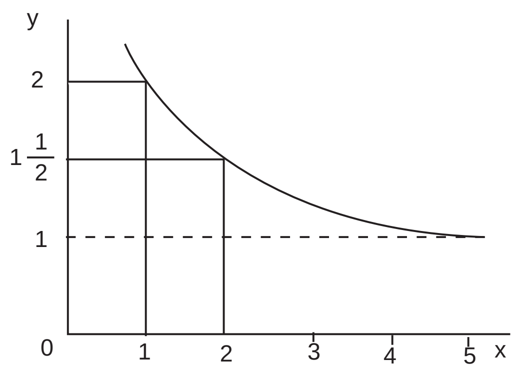
x	-1	-2	-3	-4	-5	....
y	2	$3/2$	$4/3$	$5/4$	$6/5$	....

টেবিল (ক) থেকে দেখা যায় x চলকের মান যখন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার মাধ্যমে ক্রমান্বয়ে বাড়ছে (অর্থাৎ অসীমের দিকে যায়), y চলকের মান তখন বাড়ছে এবং এর সৈমিক মান 1; x চলকের ধারার সাথে y চলকের ধারার এই সম্পর্ককে $y = 1-\frac{1}{x} \to 1$ যখন $x \to \alpha$ এই প্রতীকের সাহায্যে দেখানো হয়।

টেবিল (খ) থেকে দেখা যায়, যখন x -এর মান ঋণাক অসীমের দিকে যায় y এর মানের ধারা তখন ক্রমান্বয়ে কমে এবং একটি নির্দিষ্ট মান এর দিকে অগ্রসর হয়। সংক্ষেপে আমরা একে প্রতীকের সাহায্যে লিখি ঃ

$y = 1 - \frac{1}{x} \rightarrow 1$ যখন $x \rightarrow (-)\ \alpha$

উদাহরণ -২ ঃ ধরি, $y = f(x) = \frac{1}{x} + 1$; এই ফাংশনটিতে $x \rightarrow \alpha$ হলে $y \rightarrow 1$ হবে। y এর এই সীমা নিম্নে চিত্রের সাহায্যে দেখানো হল।



চিত্র- ৭.২.২ ঃ ফাংশনের সীমা

চিত্র থেকে দেখা যায় $x \rightarrow \alpha$ হলে $y \rightarrow 1$; অর্থাৎ $\lim_{x \to \alpha} f(x) = \frac{1}{x} + 1 = 1$

সুতরাং $x \rightarrow \alpha$ এর প্রেক্ষিতে 1 হবে f(x) ফাংশনের সীমা।

সারাংশ ঃ *ফাংশনের সীমার ধারণা কোন সংখ্যা ধারার সীমার সাথে সংশ্লিষ্ট। স্থির রাশি a কে $f(x)$ ফাংশনের সীমা বলা হয় যদি x উভয় দিক থেকে থেকে তার মান c এর সন্নিকটবর্তী হওয়ার প্রেক্ষিতে $f(x)$, a-এর সন্নিকটবর্তী হয় এবং শেষ পর্যায়ে $x \rightarrow c$ অনুসারে $f(x) \rightarrow a$ হয়। চলক $x \rightarrow c$ অনুসারে $f(x)$ এর এভাবে a-এর সন্নিকটবর্তী হওয়াকে প্রতীক চিহ্ন $\lim_{x \to c^+} f(x) = a$ দ্বারা ব্যক্ত করা হয়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.২

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। ফাংশনের সীমার ধারণা কোন সংখ্যা ধারার সীমার সাথে সংশ্লিষ্ট।

পাঠ-৭.৩

ফাংশনের সীমা নির্ধারণ
(Finding the Limit of a Function)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সীমার বিধিসমূহ সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- ফাংশনের বিচ্ছিন্নতা সম্পর্কে জানতে পারবেন।

ফাংশনের সীমা (Limit of a Function)

(ক) ধরি $x \varnothing a$ এবং $f(x)$ ফাংশনে $x = a$ বসালে (☼) হয় না -এই শর্তসাপেক্ষে $f(x)$-এ $x = a$ বসালে যে মান পাওয়া যায়, তা ফাংশনের সীমা হবে।

উদাহরণ : $y = \frac{x^2+4x+5}{x^2+6x+2}$ এই ফাংশনটির সীমা $x=2$ অবস্থায় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এ ক্ষেত্রে ফাংশনটিতে $x = 2$ বসানো হলে (☼) আকার ধারণ করে না। এজন্য $x=2$ বসিয়ে ফাংশনটির সীমা বের করা যাবে।

$$\lim_{x \varnothing 2} \frac{x^2+4x+5}{x^2+6x+2} = \frac{4+8+5}{4+12+2} = \frac{17}{18}$$

(খ) $y = f(x)$ ফাংশনে $x \varnothing a$ সাপেক্ষে $x \varnothing a$ বসালে যদি তা (☼) আকার ধারণ করে, তবে $x = a + h$ (যেখানে h একটি ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র সংখ্যা) বসিয়ে পরে $h = 0$ সাপেক্ষে যে মান পাওয়া যাবে তা ফাংশনের সৈমিক মান (Limiting value) হবে।

উদাহরণ -১ : $x \varnothing 2$ সাপেক্ষে $y= f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ এর সৈমিক মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে ফাংশনটিতে $x = 2$ বসালে তা (☼) আকার ধারণ করে। এজন্য $x = 2$ এর পরিবর্তে আমরা $x = 2+h$ বসাই :

$$\lim_{x \varnothing 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{h \varnothing 0} \frac{(2+h)^2-4}{(2+h)-2}$$
$$= \lim_{h \varnothing 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h}$$
$$= \lim_{h \varnothing 0} (4+h)$$
$$= 4$$

সুতরাং $\lim_{x \varnothing 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ হবে।

উদাহরণ -২ ঃ $\underset{x \varnothing \alpha}{\text{Lim}} \frac{x+1}{x} = \underset{x \varnothing \alpha}{\text{Lim}} \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}$ [উপরে ও নীচে x দ্বারা ভাগ করে]

$$= \underset{x \varnothing \alpha}{\text{Lim}} \frac{1+\frac{1}{x}}{1} = \frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1} = \frac{1+0}{1} = 1$$

সীমার বিধিসমূহ (Rules of Limit)

যদি $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} f(x)$ এবং $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} g(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে তবে সীমার বিধিসমূহ নিুরূপ হবে

১. $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} k = k$ (যেখানে k = স্থির রাশি)

২. $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} x^n = a^n$ (যেখানে n = ধণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)

৩. $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} k\ f(x) = k \underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} f(x)$ (k= স্থির রাশি)

৪. $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} k\ [f(x) \pm g(x)] = \underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} f(x) \pm \underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} g(x)$

৫. $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} [f(x) .g(x)] = \underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} f(x). \underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} g(x)$

৬. $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} [f(x) /g(x)] = \underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} f(x)/ \underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} g(x)\ [\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} g(x) \square 0]$

৭. $\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} [f(x)^n] = [\underset{x \varnothing a}{\text{Lim}} f(x)]^n$(যেখানে n >0)

ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা (Continuity of Function)

কোন চলকের অবিচ্ছিন্নতা এর সব মানের সমম্বয়ে যে সংখ্যা শ্রেণী গঠিত হয়, তার অবিচ্ছিন্নতার উপর নির্ভর করে চলক বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন (Continuous or discontinuous) হতে পারে।

অবিচ্ছিন্নতার ধারণা অবিচ্ছিন্ন এবং বিচ্ছিন্ন ফাংশনের মধ্যে পার্থক্য দেখানোর জন্য উদ্ভব হয়। সাধারণত কোন ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা হয়, যদি ঐ ফাংশনের সাথে সংশ্লিষ্ট (related) চলক সমূহের মান অবিচ্ছিন্নভাবে একত্রে বাড়ে বা কমে (varies)। অবশ্য এক্ষেত্রে চলকসমূহ অবিচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তিত হওয়া আবশ্যক।

সাধারণত y = f(x) কে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা যায়, যখন x চলকের মান অবিচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তন হলে y চলকের মান অবিচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তিত হয়। প্রথমে অবিচ্ছিন্নভাবে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর প্রেক্ষিতে আলোচনা করি।

প্রথমত ঃ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে অদ্বিতীয় মানের ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা নির্ণয় করতে হলে স্বাধীন চলকের একটি নির্দিষ্ট মান বিবেচনা করতে হয়। **দ্বিতীয়ত ঃ** ঐ নির্দিষ্ট মানের পার্শ্ববর্তী (neighbourhood) সম্ভাব্য মান বিবেচনা করতে হয়। যদি y =f(x) অদ্বিতীয় মানের ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতা x=a বিন্দুতে নির্ণয় করতে হয়, তবে x=a এই মান এবং তার পার্শ্ববর্তী সব মানের জন্য f(x) এর সংজ্ঞা নির্ধারণ করতে হয়। এ অবস্থায় তিন ধরণের পরিস্থিতির উদ্ভব হয়:

প্রথমত ঃ f(x) কোন সৈমিক মানের দিকে অগ্রসর (tends to) নাও হতে পারে। অথবা x এর মান যখন দুই দিক থেকে a -এর দিকে অগ্রসর হয় তখন f(x) দুটি ভিন্ন সৈমিক মানের দিকে অগ্রসর (tends to) হতে পারে।

দ্বিতীয়ত ঃ x যে কোন দিক থেকে a-এর দিকে অগ্রসর হতে পারে। তখন f(x) কোন নির্দিষ্ট সৈমিক মানের দিকে অগ্রসর হতে পারে - যদিও এই সীমা f(a) থেকে পৃথক (different)।

তৃতীয়ত ঃ উভয় দিক থেকে x যখন a-এর নিকটবর্তী হয় তখন $f(x)$, $f(a)$-এই মানের দিকে অগ্রসর হতে পারে। উপরোক্ত তিন ধরনের পরিস্থিতি পর্যালোচনা করলে দেখা যায়, $y=f(x)$ ফাংশন কেবল তৃতীয় ক্ষেত্রে $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হতে পারে।

তাই $y=f(x)$ যদি $x=a$ বিন্দুর নিকটবর্তী (Neighbourhood) প্রতিটি বিন্দুতে সংজ্ঞায়িত করা যায় তবে এই ফাংশনকে $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন (Continuous) বলা হয়। অর্থাৎ যদি (ক) $y=f(x)$ ফাংশনের নির্দিষ্ট মান $x=a$ বিন্দুতে $f(a)$ হয়; (খ) $x = a$ এর সন্নিকটে $y=f(x)$ এর মান $f(a)$ হয়, অর্থাৎ যদি

$\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$ হয়, তবে $y=f(x)$, $x=a$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

তবে এই $\text{Lim } f(x)=f(a)$ নিম্নের তিনটি শর্তের উপর নির্ভরশীল ঃ

(i) $f(a)$ নির্দিষ্ট এবং সসীম (finite)হবে, অর্থাৎ $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর একটি নির্দিষ্ট মান থাকতে হবে।

(ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$-এর অস্তিত্ব (Existence) থাকতে হবে।

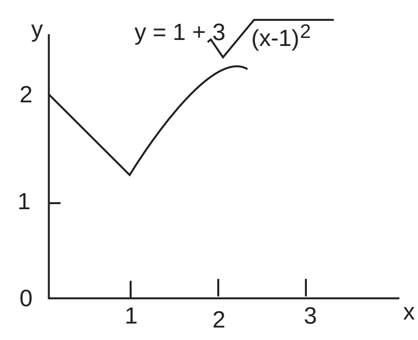
(iii) $\text{Lim } f(x)=f(a)$ হতে হবে।

কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতার নিশ্চয়তা পেতে হলে এই তিনটি শর্ত অবশ্যই পূরণ করা দরকার।

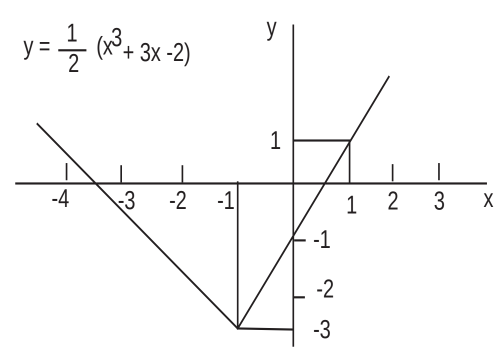
ফাংশনের বিচ্ছিন্নতা (Discontinuity of function)

যদি কোন ফাংশন কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন না হয়, তবে তাকে ঐ বিন্দুর বিচ্ছিন্ন ফাংশন বলা যায়। যদি $y=f(x)$ এর $x=a$ বিন্দুতে বিরতি বা ভঙ্গুরত্ব (break) থাকে তবে সেটি $x=a$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন। অর্থাৎ $\lim\limits_{x \emptyset a}$ $f(x)$□$f(a)$ হলে $y=f(x)$ ফাংশন $x= a$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন হবে।

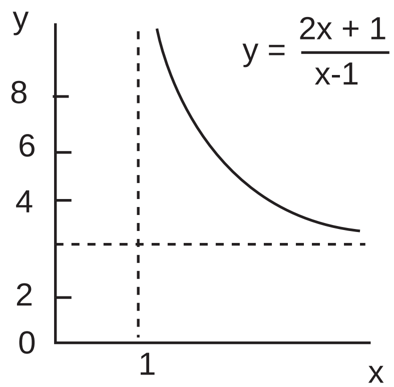
কোন ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করা হলে তা মসৃন (Smooth) নাও হতে পারে। কোন ফাংশনের লেখচিত্র তীর্যক বিন্দু (sharp point) হতে পারে; আবার কোন ফাংশনে তাও নাও থাকতে পারে। তবে কোন ফাংশন যদি নির্দিষ্ট বিস্তারের মধ্যে অবিচ্ছিন্ন হয়, তবে ঐ বিস্তারের প্রেক্ষিতে যে লেখচিত্র পাওয়া যাবে, সেটি একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হবে, এর মধ্যে কোন বিরতি থাকবে না। কোন ফাংশন যদি কোন নির্দিষ্ট বিস্তারের প্রেক্ষিতে বিচ্ছিন্ন হয়, তবে এর বিস্তারের মধ্যে এমন বিন্দু থাকবে যেখানে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন। এই জাতীয় ফাংশনের লেখচিত্রে বিরতি বা জাম্প(Jump) হয়।



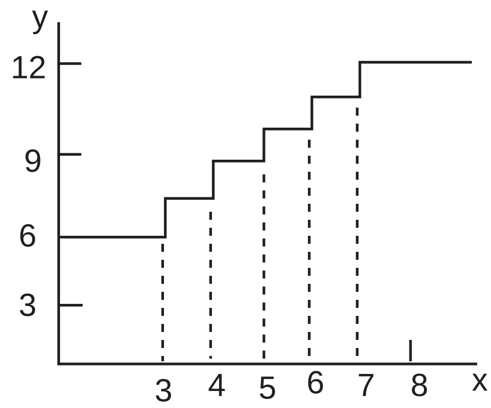
(a)



(b)



(c)



(d)

চিত্র-৭.৩.১ ঃ ফাংশনের বিচ্ছিন্নতা

(a) চিত্রের ফাংশন $y = 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}$ লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন। তবে এটি মসৃন (smooth) নয়। কারণ $x = 1$মানে একটি তীর্যক বিন্দু (sharp point) আছে।

(b) চিত্রের লেখচিত্র অবিচ্ছিন্ন।

(c) চিত্রে একটি সমপরাবৃত্ত (Hyperbola) দেখানো হয়েছে যা $x=1$ মানে অসীম বিচ্ছিন্নতা প্রকাশ করে।

(d) লেখচিত্রে ফাংশনের বিচ্ছিন্নতা ধাপ ভিত্তিক (Step wise)। এ ধরণের লেখচিত্রের ফাংশনের নাম ধাপ-ভিত্তিক ফাংশন (step function)।

সারাংশ ঃ *ধরি $x \to a$ এবং $f(x)$ ফাংশনে $x = a$ বসালে $(\div)$ হয় না -এই শর্তসাপেক্ষে $f(x)$-এ $x \to a$ বসালে যে মান পাওয়া যায়, তা ফাংশনের সীমা হবে। সীমার কিছু বিধি আছে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৩

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। কোন ফাংশন যদি নির্দিষ্ট বিস্তারের মধ্যে অবিচ্ছিন্ন হয় তবে ঐ বিস্তারের প্রেক্ষিতে যে লিখচিত্র পাওয়া যাবে, সেটি একটি অবিচ্ছিন্ন ফাংশন হবে।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন -ইউনিট ৭

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। চলকের সীমা বলতে কি বোঝায় ?

২। অদ্বিতীয় মানের ফাংশনের সীমার সংজ্ঞা লিখুন।

৩। $\lim_{x \to a} \frac{2x^2-2x+1}{x^2+4x+1}$ এর মান নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা-ইউনিট ৭

পাঠ-১ ঃ (১) (ক) (২) ঘ

পাঠ-২ ঃ (১) সত্য

পাঠ-৩ ঃ (১) সত্য