ইউনিট ৬

রৈখিক মডেল এবং ম্যাট্রিক্স বীজগণিত :২
(Linear Model and Matrix Algebraঃ 2)

ম্যাট্রিক্স বীজগণিতের ব্যবহার বহুবিধ। কিন্তু ম্যাট্রিক্সের ব্যবহার শুধুমাত্র একমাত্রিক সমীকরণসমূহের সমাধানের ক্ষেত্রেই সীমাবদ্ধ। অবশ্য অর্থনীতিতে ব্যবহৃত সমীকরণসমূহের অধিকাংশই একমাত্রিক হয়ে থাকে। তাই অর্থনীতিতে ম্যাট্রিক্সের ব্যবহার লক্ষ্য করা যায়। বিশেষ করে উপাদান-উৎপাদন বিশ্লেষন, উৎপাদন স্তর নির্ধারণ ইত্যাদি ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের ব্যবহার উল্লেখযোগ্য।

এই ইউনিটে বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং এর বৈশিষ্ট্যসমূহ, বিপরীত ম্যাট্রিক্স বেরকরণ, ক্রেমারের নিয়ম, বাজার মডেলে বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও ক্রেমারের নিয়মের প্রয়োগ, লিওনটিয়েফ উপাদান-উৎপাদন বিশ্লেষণ এবং উৎপাদন স্তর নির্ধারণের শর্ত- সম্পর্কিত পাঠগুলো অন্তর্ভূক্ত করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

- পাঠ-১ : বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং এর বৈশিষ্ট্যসমূহ
- পাঠ-২ : বিপরীত ম্যাট্রিক্স বেরকরণ
- পাঠ-৩ : ক্রেমারের নিয়ম
- পাঠ-৪ : বাজার মডেলে বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও ক্রেমারের নিয়মের প্রয়োগ
- পাঠ-৫ : লিওনটিয়েফ উপাদান-উৎপাদন বিশ্লেষণ
- পাঠ-৬ : উৎপাদন স্তর নির্ধারণের শর্ত

পাঠ-৬.১

বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং এর বৈশিষ্ট্যসমূহ
(Inverse Matrix and its Properties)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে জানতে পারবেন।

বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse Matrix)ঃ

যখন A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয় তখন $AA^{-1}= I$ (অভেদ ম্যাট্রিক্স) হবে। অর্থাৎ মূল ম্যাট্রিক্স A দ্বারা এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} কে বা A^{-1} দ্বারা A কে গুণ করা হলে গুণফল একটি অভেদ (Identity) ম্যাট্রিক্স হবে।

একটি ম্যাট্রিক্স A দেয়া থাকলে এর রূপান্তরিত (transposed) ম্যাট্রিক্স A' সর্বদাই পাওয়া যায়। কিন্তু এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সের অস্তিত্ব থাকতে পারে অথবা নাও থাকতে পারে। সাধারণত A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বিপরীত ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ বিষয় ঃ

(i) A ম্যাট্রিক্সটি অবশ্যই বর্গাকার হতে হবে।

(ii) $|A| \neq 0$ হতে হবে।

(i) হলো প্রয়োজনীয় শর্ত (Necessary Condition) তবে এটি পর্যাপ্ত শর্ত (Sufficient Condition) নয়। যদি একটি বর্গাকার A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে তবে A অবশ্যই একটি Non-Singular Matrix হবে। অর্থাৎ A ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান |A&≠ 0 হতে হবে। অতএব (ii) হলো বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করার পর্যাপ্ত শর্ত।

(iii) যদি বর্গাকার A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} থাকে, তখন A কে A^{-1} এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হিসাবে অভিহিত করা যেতে পারে। সংক্ষেপে A এবং A^{-1} পরস্পরের বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

(iv) যদি A ম্যাট্রিক্স n x n পরিধির হয় তাহলে A^{-1} অবশ্যই n x n পরিধির (ক্রম) হবে। অন্যথায় AA^{-1} বা $A^{-1}A$ প্রাপ্তি সম্ভব নাও হতে পারে।

(v) যদি কোন ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকে তবে সেটা একটি Unique ম্যাট্রিক্স। ধরি ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স B, সুতরাং AB=BA= I ।

ধরি A ম্যাট্রিক্সের অন্য একটি বিপরীত ম্যাট্রিক্স-C রয়েছে। সুতরাং AC = CA =I

এখন AB=I এর উভয়পক্ষকে C দ্বারা গুণ করে পাই CAB=CI(=C) [অভেদ ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য IA=AI=A অনুসারে]

যেহেতু CA=I ধরে নেয়া হয়েছে। সমীকরনটি লিখা যায় IB=C বা B=C [অভেদ ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য IB=B অনুসারে]

অর্থাৎ B এবং C ম্যাট্রিক্স অবশ্যই একটি এবং একই ধরণের বিপরীত ম্যাট্রিক্স হবে। সুতরাং A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স সর্বদা অনন্য (Unique)।

বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্য (Properties of Inverse Matrix)

যদি A ও B (n x n) পরিধির দুটি অ-একাত্ববোধক (Non-Singular) ম্যাট্রিক্স হয়, তখন :

১। কোন বিপরীত ম্যাট্রিক্স (A^{-1}) কে পুনরায় বিপরীত ম্যাট্রিক্স করা হলে মূল ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়।

অর্থাৎ $(A^{-1})^{-1} = A$

প্রমান ঃ $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A\& = \begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 10-6$$
$$= 4 \neq 0$$

ফলে A-ম্যাট্রিক্স থেকে বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়।

$$\text{Co-factor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{ Cofactor } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjoint } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A\&} [\text{ Adjoint A}] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{2}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{10}{4} \end{bmatrix}$$

আবার $|A^{-1}\&= \frac{1}{4} \neq \frac{10}{4} - \frac{3}{4} \infty \frac{2}{4} = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$$\text{Cofactor } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\text{Adjoint } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A^{-1}|} (\text{Adjoint } A^{-1})$$

$$= 4\begin{bmatrix} \frac{10}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10 \text{ x } 4}{4} & \frac{2 \text{ x } 4}{4} \\ \frac{3}{4} \text{x } 4 & \frac{1}{4} \text{x } 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore (A^{-1})^{-1} = A$ (Proved)

(২) দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণফলের বিপরীত ম্যাট্রিক্স, তাদের পৃথক পৃথক বিপরীত ম্যাট্রিক্সের Reverse Order এর গুণফলের সমান। অর্থাৎ $(AB)^{-1} = B^{-1}. A^{-1}$

প্রমাণঃ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

|A& = 12-0 = 12

Cofactor $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Adjoint $A = \begin{bmatrix} 4 & -0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

আবার $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$|B| = 2-0 = 2$

Cofactor $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Adjoint $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A.B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}\,B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$\therefore\ (AB)^{-1} = A^{-1}\,B^{-1}$ (Proved)

(৩) কোন ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত (Transposed) ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স, এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরের সমান হয়। অর্থাৎ $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

প্রমাণঃ $A.\,A^{-1} = I$ (সংজ্ঞাগতভাবে)

$A^{-1}.\,A = I$ (সংজ্ঞাগতভাবে)

উভয় পার্শ্বে Transpose নিলে

$(A^{-1})'.\,A' = I'$

$A'\,(A^{-1})' = I$

$(A^{-1})' = \dfrac{1}{A'}$

$(A^{-1})' = (A')^{-1}$ (Proved)

সারাংশ ঃ *মূল ম্যাট্রিক্স A দ্বারা এর বিপরীত ম্যাটিক্স A^{-1} কে বা A^{-1} দ্বারা A কে গুণ করা হলে গুণফল একটি অভেদ বা একক ম্যাট্রিক্স হবে। বিপরীত ম্যাট্রিক্সের বেশ কিছু বৈশিষ্ট্য রয়েছে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। যখন A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয় তখন $AA^{-1}= 1$ হবে।

২। কোন ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স, এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরের সমান হয়।

পাঠ-৬.২

বিপরীত ম্যাট্রিক্স বেরকরণ
(Finding Inverse Matrix)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিপরীত ম্যাট্রিক্স কিভাবে বের করা যায় তা জানতে পারবেন এবং বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করতে পারবেন।

বিপরীত ম্যাট্রিক্স বেরকরণ (Finding Inverse Matrix) ঃ

প্রথমত ঃ প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি হতে বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করা সম্ভব কিনা তার জন্য দু'টি শর্ত পালন করতে হয়। যেমন-ম্যাট্রিক্সটি একটি বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্স হতে হবে। পর্যাপ্ত শর্তঃ ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়ক মান অশূন্য হতে হবে। অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সটি অ-একাত্ববোধক তথা Non singular হতে হবে। সুতরাং ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের প্রথম ধাপ।

দ্বিতীয়ত ঃ প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির প্রতিটি উপাদানের সহগুণক বা Cofactor বের করে উহার দ্বারা Cofactor Matrix বা সহ-গুণক ম্যাট্রিক্স তৈরী করতে হবে। সুতরাং বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের দ্বিতীয় ধাপ হলো Cofactor Matrix তৈরী করা।

তৃতীয়ত ঃ সহগুণক ম্যাট্রিক্সের সারিকে কলাম এবং কলামকে সারিতে রূপান্তর করে সংযুক্ত ম্যাট্রিক্স বা Adjoint Matrix তৈরী করতে হবে। সুতরাং বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের তৃতীয় ধাপ হলো adjoint Matrix তৈরী করা।

চতুর্থত ঃ Adjoint ম্যাট্রিক্সের প্রতিটি উপাদানকে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান দ্বারা ভাগ করে প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স তৈরী করতে হবে। সুতরাং Adjoint ম্যাট্রিক্সকে নির্ণায়ক এর মান দ্বারা ভাগ করতে হবে। অর্থাৎ

$$\text{বিপরীত ম্যাট্রিক্স} = \frac{1}{\text{নির্ণায়কেরমান}}\ [\text{Adjoint Matrix})$$

$$\text{বা বিপরীত ম্যাট্রিক্স} = \frac{\text{Adjoint Matrix}}{\text{নির্ণায়কেরমান}}$$

যেমন ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ দেয়া আছে। এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} বের করি।

সমাধান

প্রথম ধাপ ঃ প্রথমেই পরীক্ষা করি, প্রদত্ত ম্যাট্রিক্স (A) থেকে বিপরীত ম্যাট্রিক্স (A^{-1}) নির্ণয় সম্ভব কিনা? এর জন্য A ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান $|A|$ বের করি।

$$|A| = 1\begin{bmatrix}3 & 4\\4 & 3\end{bmatrix} -2\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}$$
$$= 1(9-16)-2(3-4)+3(4-3)$$
$$=-7+2+3$$
$$= -2 \neq 0$$

সুতরাং বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া সম্ভব।

এখানে $|A| = -2$

দ্বিতীয় ধাপ ঃ Cofactor ম্যাট্রিক্স বের করতে হবে।

$$\text{Cofactor } A = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\A_{21} & A_{22} & A_{23}\\A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}$$

এখানে,

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\4 & 3\end{vmatrix} = (9-16)=-7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\1 & 3\end{vmatrix} = -(3-4)=1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{vmatrix} = (4-3)=1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 3\end{vmatrix} = -(6-12)=6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 3\end{vmatrix} = (3-3)=0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{vmatrix} = -(4-2)=-2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{vmatrix} = (8-9)=-1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{vmatrix} = -(4-3)=-1$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix} = (3-2)=1$$

$$\therefore \text{Cof } A = \begin{bmatrix}-7 & 1 & 1\\6 & 0 & -2\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

তৃতীয় ধাপ ঃ

Adjoint A = [Cofactor A′]

ম্যাট্রিক্সে বিপরীতকরণের সাহায্যে সহসমীকরণের সমাধান (Solution of a System of Equations with the help of Matrix Inversion)

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে অতি সহজে সহসমীকরণের সমাধান করা সম্ভব। সহসমীকরণের সমাধান সরাসরি ও দ্রুত করার জন্য Matrix Inversion-এর ধারণা ব্যবহার করা যায়। নিম্নে উদাহরণ দিয়ে ব্যাখ্যা করা হলো:

উদাহরণ:

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে নিম্নোক্ত সহসমীকরণটি সমাধান করুন।

$x + y + z = 6$

$5x - y + 2z = 9$

$3x + 6y - 5z = 0$

সমাধান

প্রথমেই সমীকরণগুলোকে ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে সাজিয়ে পাই,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

=A =X =C

3∞3 3∞1 3∞1

এখানে প্রথম ম্যাট্রিক্সটি সহগ ম্যাট্রিক্স যা A ধরা হয়েছে , দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স চল ম্যাট্রিক্স যা (X) এবং তৃতীয় ম্যাট্রিক্স স্থির ম্যাট্রিক্স যা (C) দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে। সুতরাং সংকেত অনুসারে

$A.X = C$

$\therefore X = A^{-1}C$ [উভয় পার্শ্বে A^{-1} দ্বারা পূর্ব গুণন করে]

এখানে $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

এখন A^{-1} বের করতে হবে।

প্রথম ধাপ : $|A|$ = বের করতে হবে।

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} -1 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$= 1\,(5-12)-1\,(-25-6)+1\,(30+3)$

$= -7 + 31 + 33$

$= 57$

$\therefore |A| = 57$ □ 0 ফলে A^{-1} নির্ণয় সম্ভব।

এখানে $|A| = 57$

দ্বিতীয় ধাপ ঃ Cofactor A বের করতে হবে।

আমরা জানি, Cofactor A = $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$

এখানে,

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = (5-12) = -7$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(25-6) = 31$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (30+3)=33$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -(5-6)=11$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-5-3)=-8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(6-3)=-3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2+1)=3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(2-5)=3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-1-5)=-6$$

সুতরাং Cofactor A = $\begin{bmatrix} -17 & 31 & 33 \\ 11 & -8 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

তৃতীয় ধাপ ঃ Adjoint A বের করতে হবে।

আমরা জানি, Adjoint A = Cofactor A′

সুতরাং Adjoint A = $\begin{bmatrix} -7 & 11 & 3 \\ 31 & -8 & 3 \\ 33 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

চতুর্থ ধাপ ঃ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ [Adjoint A]

$$= \frac{1}{57}\begin{bmatrix} -7 & 11 & 3 \\ 31 & -8 & 3 \\ 33 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

এবার (i) নং সমীকরণ থেকে

$X = A^{-1}. C$

$$= \frac{1}{57}\begin{bmatrix} -7 & 11 & 3 \\ 31 & -8 & 3 \\ 33 & -3 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{57}\begin{bmatrix} -7\infty6+11\infty9+3\infty0 \\ 31\infty6-8\infty9+3\infty0 \\ 33\infty6-3\infty9-6\infty0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{57}\begin{bmatrix} -42+99+0 \\ 186-72+0 \\ 198-27-0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{57}\begin{bmatrix} 57 \\ 114 \\ 171 \end{bmatrix}$$

বা $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

সুতরাং $x = 1$, $y = 2$ এবং $z = 3$

সারাংশ ঃ *বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করার কিছু শর্ত আছে। প্রথমত: ম্যাট্রিক্সটি বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্স হতে হবে। তবে পর্যাপ্ত শর্ত হচ্ছে ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়ক মান অশূন্য হতে হবে অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সটি অ-একাত্ববোধক (Non-singular) হতে হবে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.২

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করার পর্যাপ্ত শর্ত হচ্ছে ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়ক মান শূন্য হতে হবে।

২। বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের চতুর্থ ধাপ হলো Adjoint ম্যাট্রিক্সকে নির্ণায়কের মান দ্বারা ভাগ করতে হবে।

পাঠ-৬.৩

ক্রেমারের নিয়ম
(Cramer's Rule)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- ক্রেমারের নিয়ম সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

ক্রেমারের নিয়ম (Cramer's Rule):

একমাত্রিক সহ-সমীকরণসমূহ ক্রেমারের নিয়মেও সমাধান কর যায়। একমাত্রিক সমীকরণসমূহ থেকে চলকগুলোর মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ক্রেমার নিয়ম একটি গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি হিসেবে বিবেচিত। এই নিয়মে প্রথমেই সমীকরণসমূহকে Matrix আকারে রূপ দিতে হয়। এরপর সহগ ম্যাট্রিক্স (Co-efficient Matrix) এর নির্ণায়ক $|A|$ নির্ণয় করতে হবে। তবে নির্ণায়কের মান $\neq 0$ হলেই মান নির্ণয় সম্ভব। এরপর যে চলকটির মান নির্ণয় করতে হবে তার কলাম সহগগুলো সরিয়ে ডানপার্শ্বের স্থির কলামে বসিয়ে যে ম্যাট্রিক্স তৈরী হবে তার নির্ণায়ক (Aj) নির্ণয় করতে হবে। এরপর $|Aj|$ কে $|A|$ দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যাবে তাই হবে xj এর মান। সুতরাং বলা যায় যে, ক্রেমারের নিয়মানুসারে xj এর সমাধান পাওয়া যায় দুটো নির্ণায়কের অনুপাত হতে। যেমন-

$xj = \frac{|Aj|}{|A|}$ এখন $j=1,2,3$ হলে; যেমন

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

ক্রেমার নিয়মের প্রয়োজন কেন?

কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের পরিধি খুব বড় হলে এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় খুব জটিল হয়। সেক্ষেত্রে বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় না করে ক্রেমার নিয়মটি ব্যবহার করে সহজেই একটি সুবিধাজনক ও বাস্তব মান পাওয়া সম্ভব। বিপরীত ম্যাট্রিক্সে প্রাপ্ত সমাধান একই সাথে সকল অভ্যন্তরীন চলকের সমাধান মান প্রকাশ করে। পক্ষান্তরে ক্রেমার নিয়মে প্রাপ্ত সমাধান একই সময়ে শুধুমাত্র একটি অভ্যন্তরীন চলকের সমাধান মান দেখায়।

উদাহরণ:

ক্রেমার নিয়ম ব্যবহার করে নিচের সহসমীকরণসমূহের সমাধান করুন।

$2x_1 - x_2 = 2$

$3x_2 + 2x_3 = 16$

$5x_1 + 3x_3 = 21$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকরণসমূহকে ম্যাট্রিক্স এ রূপান্তর করে

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ 21 \end{bmatrix}$$

A X C

এখানে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

সুতরাং $|A| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} +0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2(9-0) + 1(0-10) +0(0-15)$

$= 2 \infty 9 + 1 \infty (-10) + 0$

$= 18-10$

$\therefore |A| = 8$

এখন X_1 নির্ণয়ের জন্য সহগ ম্যাট্রিক্স (A) এর প্রথম কলাম উপাদানসমূহকে স্থির C ভেক্টর দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে নতুন ম্যাট্রিক্স তৈরী করি।

$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 16 & 3 & 2 \\ 21 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

সুতরাং $|A_1| = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} +1 \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 21 & 3 \end{vmatrix} +0 \begin{vmatrix} 16 & 3 \\ 21 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2(9-0) + 1(48-42) + 0(0-63)$

$= 2 \infty 9 + 1 \infty 6 + 0$

$= 18 + 6$

$\therefore |A_1| = 24$

আবার x_2 এর মান নির্ণয়ের জন্য সহগ ম্যাট্রিক্স (A) এর x_2 এর কলাম তথা ২য় কলাম উপাদানসমূহকে স্থির C ভেক্টর দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে নতুন ম্যাট্রিক্স তৈরী করি।

$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 16 & 2 \\ 5 & 21 & 3 \end{bmatrix}$

সুতরাং $|A_2| = 2 \begin{vmatrix} 16 & 2 \\ 21 & 3 \end{vmatrix} -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} +0 \begin{vmatrix} 0 & 16 \\ 5 & 21 \end{vmatrix}$

$= 2(48-42) -2 (0-10) + 0(0-80)$

$= 2 X 6 - 2(-10) + 0$

$= 12+ 20$

$\therefore |A_2| = 32$

অনুরূপভাবে x_3 এর মান নির্ণয়ের জন্য সহগ ম্যাট্রিক্স (A) এর x_3 এর কলাম তথা তৃতীয় কলাম উপাদানসমূহকে স্থির C ভেক্টর দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে নতুন ম্যাট্রিক্স তৈরী করি।

$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 16 \\ 5 & 0 & 21 \end{bmatrix}$

সুতরাং $|A_3| = 2\begin{vmatrix} 3 & 16 \\ 0 & 21 \end{vmatrix} +1\begin{vmatrix} 0 & 16 \\ 5 & 21 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2(63-0) +1\ (0-80) + 2(0-15)$

$= 2 \times 63 +1 \times (-80) + 2 \times (-15)$

$= 126 - 80 - 30$

$\therefore |A_3| = 16$

এখন সূত্রানুসারে

$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{24}{8} = 3$

$\therefore x_1 = 3$

$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{32}{8}$

$\therefore x_2 = 4$

এবং $x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{16}{8}$

$\therefore x_3 = 2$

অতএব, $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 2$

অর্থাৎ $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ প্রদত্ত সহ-সমীকরণের সমাধান।

সারাংশ *ঃ একমাত্রিক সমীকরণসমূহ থেকে চলকগুলোর মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ক্রেমার নিয়ম একটি গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি হিসাবে বিবেচিত। কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের পরিধি খুব বড় হলে বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় জটিল হয়। সেক্ষেত্রে বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় না করে ক্রেমার নিয়মটি ব্যবহার করে সহজেই একটি সুবিধাজনক ও বাস্তব মান পাওয়া সম্ভব।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৩

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। ক্রেমার নিয়মে প্রাপ্ত সমাধান একই সময়ে দুটি আভ্যন্তরীন চলকের সমাধান মান দেখায়।

২। কোন বর্গাকার ম্যাট্রিক্সের পরিধি খুব বড় হলে বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় না করে ক্রেমার নিয়মটি ব্যবহার করে সহজেই একটি মান পাওয়া সম্ভব।

পাঠ-৬.৪

বাজার মডেলে বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও ক্রেমারের নিয়মের প্রয়োগ

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বাজার ভিত্তিক যেকোন সমস্যা সমাধানে বিপরীত ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করতে পারবেন।
- বাজার ভিত্তিক যেকোন সমস্যা সমাধানে ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করতে পারবেন।

বাজার মডেলের বিশ্লেষণে বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং ক্রেমার নিয়ম একটি গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি হিসাবে অভিহিত। বাজার ভিত্তিক যে কোন সমস্যা সমাধানে আমরা বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং ক্রেমার নিয়ম ব্যবহার করতে পারি।

বিপরীত ম্যাট্রিক্স এর ব্যবহার ঃ

উদাহরণ ঃ দুটি দ্রব্যের চাহিদা ও যোগান অপেক্ষক নিম্নরূপ ঃ

$Qd_1 = 410 - 5p_1 - 2p_2$ $\qquad$ $Qd_2 = 295 - P_1 - 3p_2$

$QS_1 = - 60 + 3p_1$ $\qquad$ $QS_2 = - 120 + 2p_2$

বিপরীত ম্যাট্রিক্স পদ্ধতি ব্যবহার করে ভারসাম্য মূল্য $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ এবং দ্রব্যের পরিমাণ $\bar{Q}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ 1 নং দ্রব্যের বাজার ভারসাম্যের শর্তানুসারে

$Q_{d1} = Q_{s1}$

বা, $410 - 5p_1 - 2p_2 = -60 + 3p_1$

বা, $-8p_1 - 2p_2 + 470 = 0$

বা $8p_1 + 2p_2 = 470$ ....(1)

২ নং দ্রব্যের বাজার ভারসাম্যের শর্তানুসারে

$Q_{d2} = Q_{S2}$

বা, $295 - p_1 - 3p_2 = -120 + 2p_2$

বা, $-p_1 - 5p_2 + 415 = 0$

বা $p_1 + 5p_2 = 415$ ....(2)

এবার (1) ও (2) নং সমীকরণকে ম্যাট্রিক্স সারণীতে সাজিয়ে

$$\underset{2 \times 2}{\underset{A}{\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}} \underset{2 \times 1}{\underset{P}{\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}}} = \underset{2 \times 1}{\underset{C}{\begin{bmatrix} 470 \\ 415 \end{bmatrix}}}$$

সংকেতানুসারে লিখলে-

$A.P = C$

$\bar{p} = A^{-1} . C$..................(3)

এখানে, $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

এখন, A^{-1} বের করতে হবে।

প্রথম ধাপ :

$$|A| = 40-2$$
$$= 38 \neq 0$$

ফলে A^{-1} নির্ণয় সম্ভব।

দ্বিতীয় ধাপ:

$$\text{Cofactor } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

এখানে,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 5 = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 8 = 8$$

সুতরাং $\text{Cofactor } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

তৃতীয় ধাপ:

$$\text{Adjoint } A = \text{Cofactor } A'$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

চতুর্থ ধাপ :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$$

(3) নং সমীকরণ থেকে

$$\bar{P} = A^{-1} . C$$
$$= \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 470 \\ 415 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 5 \infty 470 - 2 \infty 415 \\ -1 \infty 470 + 8 \infty 415 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 1520 \\ 2850 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 40 \\ 75 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \bar{p}_1 \\ \hline \bar{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 75 \end{bmatrix}$$

সুতরাং $\bar{P}_1 = 40$ এবং $\bar{P}_2 = 75$

এখন p_1 ও p_2 এর মান 1 নং ও 2 নং দ্রব্যের চাহিদা বা যোগান অপেক্ষকে বসিয়ে

$Q_1 = - 60 + 3p_1$

$= - 60 + 3 \infty 40$

$= - 60 + 120$

$\therefore \bar{Q}_1 = 60$

এবং $Q_2 = - 120 + 2p_2$

$= - 120 + 2 \infty 75$

$= - 120 + 150$

$\therefore \bar{Q}_2 = 30$

উত্তরঃ $P_1 = 40$, $P2 = 75$

$Q_1 = 60$ এবং $Q_2 = 30$

ক্রেমার নিয়ম ব্যবহার করে ঃ

১ নং দ্রব্য বাজার

$Qd_1 = 410 - 5p_1 - 2p_2$

$Qs_1 = - 60 + 3p_1$

এবং ২ নং দ্রব্য বাজার

$Qd_2 = 295 - p_1 - 3p_2$

$Qs_2 = -120 + 2p_2$

ভারসাম্যের শর্তানুসারে

$Qd_1 = Qs_1$

$410 - 5p_1 - 2p_2 = - 60 + 3p_1$

বা $8p_1 + 2p_2 = 470$ ....(1)

আবার, $Qd_2 = Qs_2$

$295 - p_1 - 3p_2 = - 120 + 2p_2$

বা $p_1 + 5p_2 = 415$ ....(2)

এখন (1) ও (2) নং সমীকরণকে ম্যাট্রিক্স সারণীতে সাজিয়ে

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 470 \\ 415 \end{bmatrix}$$

$= A \qquad = P \qquad = C$

এখানে A হচ্ছে সহগ ম্যাট্রিক্স, P চলক ভেক্টর, C হচ্ছে স্থির রাশির ভেক্টর।

এখানে $|A| = 40 - 2$

$\therefore |A| = 38$

P_1 নির্ণয়ের জন্য সহগ ম্যাট্রিক্সের ১ম কলামের উপাদানসমূহের স্থলে স্থির দফার মান প্রতিস্থাপিত করে।

$A_1 = \begin{bmatrix} 470 & 2 \\ 415 & 5 \end{bmatrix}$

সুতরাং $|A| = 2350 - 830$

$\therefore \quad |A| = 1520$

আবার P_2 নির্ণয়ের জন্য সহগ ম্যাট্রিক্সের ২য় কলাম উপাদানসমূহের স্থলে স্থির দফার মান প্রতিস্থাপিত করে

$A_2 = \begin{bmatrix} 8 & 470 \\ 1 & 415 \end{bmatrix}$

তাহলে $|A_2| = 3320 - 470$

$\therefore |A_2| = 2850$

আমরা জানি

$P_1 = \left|\frac{A_1}{A}\right|$

$= \frac{1520}{38}$

$\therefore P_1 = 40$

আমরা জানি

$P_2 = \frac{|A2|}{|A|}$

$= \frac{2850}{38}$

$\therefore P_2 = 75$

এখন 1 নং বাজার এর চাহিদা বা যোগান অপেক্ষকে P_1 ও P_2 এর মান বসিয়ে

$Q_1 = -60 + 3P_1$

$= -60 + 3 \infty 40$

$= - 60 + 120$

$\therefore Q_1 = 60$

এবং $Q_2 = - 120 + 2P_2$

$= -120 + 2 \infty 75$

$= -120 + 150$

$\therefore Q_2 \quad = 30$

অতএব, $P_1 = 40, P_2 = 75, Q_1 = 60, Q_2 = 30$

সারাংশ ঃ *বাজারে মডেলের বিশ্লেষণে বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও ক্রেমার নিয়ম একটি গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি হিসাবে অভিহিত। বাজার ভিত্তিক যে কোন সমস্যা সমাধানে বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও ক্রেমার নিয়ম ব্যবহার করা যায়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৪

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। বাজার ভিত্তিক যে কোন সমস্যা সমাধানে বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও ক্রেসার নিয়ম ব্যবহার করা যায়।

পাঠ-৬.৫

লিওনটিয়েফ উপাদান-উৎপাদন বিশ্লেষণ
(Leontief's Input-output Analysis)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- লিওনটিয়েফ উপাদান-উৎপন্ন মডেল সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- লিওনটিয়েফ উপাদান-উৎপন্ন মডেলে বিপরীত ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

বর্তমান কালে বহুলভাবে ব্যবহৃত উপাদান-উৎপন্ন বিশ্লেষণ পদ্ধতি হারভার্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক W. W. Leontief তার গবেষনায় তুলে ধরেন। বিভিন্ন শিল্পের উপাদান-উৎপন্ন অথবা উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স এবং চুড়ান্ত চাহিদা জানা থাকলে বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে শিল্পসমূহের মোট উৎপাদন নির্ণয় করা সম্ভব।

উপাদান-উৎপন্ন বিশ্লেষণ ঃ

উপাদান-উৎপন্ন বিশ্লেষণ এমন এক পদ্ধতি যেখানে অর্থনীতিতে কার্যরত বিভিন্ন শিল্প উৎপাদিত উপকরণ/পণ্য ক্রয়-বিক্রয়ের মাধ্যমে কিভাবে একে অপরের উপর নির্ভরশীল তা দেখানো হয়। সাধারণত কোন শিল্পই পণ্য উৎপাদনের বেলায় স্বাধীন নয়। অর্থাৎ একটি শিল্পকে পণ্য উৎপাদনের জন্য অপর শিল্পের উৎপাদিত পণ্য উপকরণ হিসাবে ব্যবহার করতে হয়। এভাবে মাধ্যমিক দ্রব্যের যে প্রবাহ বিভিন্ন শিল্পের মধ্যে দেখা যায় তা টেবিল বা সহ-সমীকরণ পদ্ধতির সাহায্যে উপস্থাপন করা হলে তাকে আমরা উপাদান উৎপন্ন টেবিল/মডেল বলি। মনে করি x_{ij} হচ্ছে x_i শিল্পের উৎপাদিত পণ্যের ঐ অংশ যা সে j শিল্পে মাধ্যমিক পণ্য/উপকরণ হিসাবে বিক্রয় করে। এর অর্থ x_{11}, x_{12}......x_{1n} হচ্ছে শিল্পের উৎপাদন যা সে নিজে এবং x_2........x_n শিল্প মাধ্যমিক পণ্য/উপকরণ হিসাবে ব্যবহার করে। বাকী উৎপাদন ধরি d_i.এই শিল্পে কর্তৃক পরিবার বর্গের নিকট চুড়ান্ত দ্রব্য হিসাবে বিক্রয় করা হয়। অনুরূপভাবে x_n শিল্প কর্তৃক x_1, x_2........x_n শিল্প মাধ্যমিক পণ্য বিক্রয়ের পরিমান যথাক্রমে x_{n1}, x_{n2}...........x_{nn} দ্বারা প্রকাশ পায়। সাধারণভাবে বলতে গেলে x_{ij} হচ্ছে i তম শিল্পের উৎপাদন যা j তম শিল্প মাধ্যমিক পন্য উপকরণ হিসাবে ক্রয়/ ব্যবহার করে। পক্ষান্তরে d_i হচ্ছে i তম শিল্পের চূড়ান্ত দ্রব্য যা পরিবারবর্গ ভোগের জন্য ব্যবহার করে।

পক্ষান্তরে পরিবারবর্গ/পারিবারিক খাত বিভিন্ন শিল্পে প্রাথমিক উপকরণ সরবরাহ/বিক্রয় করে, পরিবর্তে বিভিন্ন শিল্প থেকে এই চূড়ান্ত দ্রব্য ভোগের উদ্দেশ্যে ক্রয় করে।

মনে করি O দ্বারা পরিবারবর্গ/পারিবারিক খাত প্রকাশ পায় এবং x_{oj} হচ্ছে পরিবারবর্গ থেকে j তম শিল্প যে পরিমান প্রাথমিক উপকরণ ক্রয় করে তার পরিমাণ। অর্থাৎ আমাদের এক্ষেত্রে x_1,x_2.........x_n শিল্প পরিবারবর্গ থেকে যথাক্রমে x_{o1},x_{o2}........x_{on} পরিমাণ প্রাথমিক উপকরণ ক্রয় করে। পরিবর্তে শিল্পগুলো যথাক্রমে d_1, d_2...........d_n পরিমান চুড়ান্ত দ্রব্য পরিবারবর্গের নিকট বিক্রয় করে।

এখন উপরোক্ত আলোচনার প্রেক্ষাপটে আমরা একটি n সংখ্যক শিল্প সমৃদ্ধ অর্থনীতির উপাদান-উৎপন্ন মডেল নিম্নের টেবিলে উপস্থাপন করতে পারি।

বিক্রয়ের ক্ষেত্রসমূহ	আন্তঃশিল্পের প্রবাহ				চূড়ান্ত চাহিদা	মোট উৎপাদন
	x_1	x_2	....	x_n		
x_1	x_{11}	x_{12}	....	x_{1n}	d_1	x_1
x_2	x_{21}	x_{22}	....	x_{2n}	d_2	x_2
.	.	.		.	.	.
.	.	.		.	.	.
x_n	.	.		.	.	.
	x_{n1}	x_{n2}		x_{nn}	d_n	x_n
প্রথমিক উপকরণ	x_{o1}	x_{o2}	....	x_{on}		
মোট উৎপাদন	x_1	x_2	....	x_n		

টেবিল থেকে দেখা যায় প্রতিটি শিল্প উৎপাদন ক্ষেত্রে একে অপরের উপর নির্ভরশীল।

উপাদান-উৎপাদন টেবিল থেকে কারিগরী সহগ নির্ণয় (Finding Technological Co-efficient from Input-output Table)

লিওনটিফ তার উপাদান-উৎপন্ন বিশ্লেষণে প্রতিটি শিল্পের বেলায় এমন উৎপাদন অপেক্ষক বিবেচনা করেন যেখানে পণ্য উৎপাদনে ব্যবহৃত উপকরণ সহগ স্থির। অর্থাৎ 1 একক পণ্য উৎপাদন করতে যদি j-তম শিল্প থেকে a_{ij} পরিমান পণ্য ক্রয় ও ব্যবহার করে তবে a_{ij} কে উপকরণ সহগ (input Co-efficient) বলা যায়।

এখন j শিল্পের মোট উৎপাদন x_j দ্বারা নির্দেশ করি। পক্ষান্তরে x_{ij} হচ্ছে j শিল্প কর্তৃক i শিল্প থেকে ক্রয়কৃত মাধ্যমিক দ্রব্যের পরিমান যা উপকরণ হিসাবে ব্যবহৃত হয়। তাহলে বলা যায় ঃ

$x_{ij} = a_{ij}\, x_j$ বা $a_{ij} = x_{ij}/x_j$

এখন এই সমীকরণের ভিত্তিতে আমরা উপরের উপাদান-উৎপন্ন টেবিল থেকে প্রতিটি শিল্পের কারিগরী সহগ বের করতে পারি।

ক্রয়ের ক্ষেত্রসমূহ

বিক্রয়ের ক্ষেত্রসমূহ	আন্তঃশিল্পের প্রবাহ				চূড়ান্ত দ্রব্য চাহিদা	মোট উৎপাদন
	x_1	x_2	....	x_n		

x_1 x_2 . . . . x_n	a_{11} a_{21} . . . . . a_{n1}	a_{12} a_{22} . . . . . a_{n2}	....	a_{1n} a_{2n} . . . . . a_{nn}	d_1 d_2 . . . . . d_n	x_1 x_2 . . . . . x_n
প্রাথমিক উপকরণ	a_{o1}	a_{o2}	....	a_{on}		
মোট উৎপাদন	x_1	x_2	....	x_n		

উদাহরণ ঃ

ক্রয়ের ক্ষেত্রসমূহ

বিক্রয়ের ক্ষেত্রসমূহ	কয়লা (x_1)	ইস্পাত (x_2)	লৌহ (x_3)	চূড়ান্ত চাহিদা (d)	মোট উৎপাদন
কয়লা x_1 ইস্পাত x_2 লৌহ x_3	25 40 10	100 20 60	50 100 20	80 90 100	200 300 400
প্রাথমিক উপকরণ	10	30	40		

আমাদের এক্ষেত্রে $x_{11} = 25$, $x_{21} = 40$; $x_{31} = 10$ এবং $x_1 = 200$ হওয়ায় এক্ষেত্রে $a_{11} = 25/200 = 0.13$; $a_{21} = 40/200 = 0.20$, $a_{31} = 10/200 = 0.05$; $a_{01} = 10/200 = 0.05$ হবে। পক্ষান্তরে $a_{12} = 100/300=0.33$; $a_{22} = 20/300 = 0.07$; $a_{32} = 60/300 = 0.20$; $a_{o2} = 30/300 = 0.10$ হবে।

অন্য দিকে $a_{13} = 50/400 = 0.13$; $a_{23} = 100/400 = 0.25$; $a_{33} = 20/400 = 0.05$; $a_{03} = 40/400 = 0.10$ হবে।

এখন এই সহগগুলোর সাহায্যে প্রাপ্ত উপাদান টেবিল হবে নিম্নরূপ

বিক্রয়ের ক্ষেত্রসমূহ	কয়লা (x_1)	ইস্পাত	লৌহ	চূড়ান্ত চাহিদা (d)	মোট উৎপাদন
কয়লা x_1 ইস্পাত x_2 লৌহ x_3	0.13 0.20 0.05	0.33 0.07 0.20	0.13 0.25 0.05	80 90 1000	200 300 400
প্রাথমিক উপকরণ	0.05	0.10	0.10		

উপাদান-উৎপন্ন বিশ্লেষণে ব্যবহৃত ম্যাট্রিক্সের ধারণা (Concept of Matrix used in Input-output Analysis) ঃ

উপাদান-উৎপন্ন বিশ্লেষণে মূলত ঃ আমরা উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স (Input-Coefficient Matrix) এবং লিওনটিয়েফ ম্যাট্রিক্স (Leontief Matrix) এর সম্মুখীন হই।

ক. উপাদান-সহগ ম্যাট্রিক্স (Input - Coefficient Matrix) ঃ

উপাদান-উৎপন্ন টেবিলে বিভিন্ন শিল্প এক একক পণ্য উৎপাদনের জন্য অপরাপর শিল্প থেকে যে পরিমাণ মাধ্যমিক পণ্য ক্রয় করে তাদের উপাদান সহগ বলে। বিভিন্ন শিল্পের এসব উপাদান সহগ নিয়ে যে ম্যাট্রিক্স গঠন করা যায় তাকে উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স বলে।

উদাহরণ ঃ

তিনটি শিল্পের উপাদান সহগ

	x_1	x_2	x_3
x_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

উপাদান-সহগ ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

খ. লিওনটিয়েফ ম্যাট্রিক্স (Leontief Matrix)ঃ

W. Leontief উপাদান-উৎপন্ন পদ্ধতির সমাধানের লক্ষ্যে যে ম্যাট্রিক্স তৈরী করেন তা লিওনটিফ ম্যাট্রিক্স নামে পরিচিত। অভেদ ম্যাট্রিক্স থেকে উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স বিয়োগ করলে এই ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় । এর প্রতীক (I-A) দ্বারা প্রকাশ পায়।

উদাহরণ ঃ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & (1-a_{33}) \end{bmatrix}$$

উল্লেখ্য যে, উপাদান-সহগ ম্যাট্রিক্স যত ক্রমের (Order) অভেদ ম্যাট্রিক্স (identity matrix) তত ক্রমের নিয়ে দ্বিতীয়টি থেকে প্রথমটি বিয়োগ করে লিওনটিয়েফ ম্যাট্রিক্স বের করতে হয়।

সারাংশ ঃ *বিভিন্ন শিল্পের উপাদান-উৎপন্ন অথবা উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স এবং চূড়ান্ত চাহিদা জানা থাকলে বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে শিল্পসমূহের মোট উৎপাদন নির্ণয় করা সম্ভব। মাধ্যমিক দ্রব্যের যে প্রবাহ বিভিন্ন শিল্পের মধ্যে দেখা যায় তা টেবিল বা সহ-সমীকরণ পদ্ধতির সাহায্যে উপস্থাপন করা হলে তাকে উপাদান-উৎপন্ন টেবিল মডেল বলা হয়। বর্তমান কালে বহুলভাবে ব্যবহৃত উপাদান-উৎপন্ন বিশ্লেষণ পদ্ধতি হারভার্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক লিওনটিয়েফ তার লেখায় তুলে ধরেন।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৫

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। উপাদান-উৎপন্ন বিশ্লেষন পদ্ধতি হারভার্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক W. Leontief তার লেখায় তুলে ধরেন।

২। চূড়ান্ত দ্রব্যের যে প্রবাহ বিভিন্ন শিল্প ও পারিবারিক প্রতিষ্ঠানের মধ্যে দেখা যায় তা টেবিলের সাহায্যে উপস্থাপন করা হলে তাকে উপাদান-উৎপন্ন টেবিল বলে।

৩। উপাদান-উৎপন্ন টেবিলে বিভিন্ন শিল্প এক একক পণ্য উৎপাদনের জন্য অপরাপর শিল্প থেকে যে পরিমাণ মাধ্যমিক পণ্য ক্রয় করে তাদের উপাদান সহগ বলে।

পাঠ-৬.৬

উৎপাদন স্তর নির্ধারণের শর্ত
(Condition for Determination of Output Level)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- জাতীয় আয় মডেল বিশ্লেষণ বিপরীত ম্যাট্রিক্স ও ক্রেমারের নিয়ম ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

উৎপাদন স্তর নির্ধারণের শর্ত (Condition for Determination of Output Level) ঃ

পণ্যের চুড়ান্ত চাহিদা প্রদত্ত অবস্থায় একটি উন্মুক্ত (Open) উপাদান-উৎপন্ন মডেল থেকে বিভিন্ন শিল্পের মোট উৎপাদন নির্ণয় করা যায়। আমাদের পূর্বে উল্লেখিত উন্মুক্ত মডেলের দ্বিতীয় সারণী বিবেচনা করি। এই সারণী থেকে নিম্নোক্ত ব্যালেন্স সমীকরণ পাওয়া যায়।

$$
\begin{array}{l}
x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n + d_1 \\
x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n + d_2 \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots + a_{nn}x_n + d_n
\end{array}
$$

বা,
$$
\begin{array}{l}
(1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \dots\dots - a_{1n}x_n = d_1 \\
- a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \dots\dots - a_{2n}x_n = d_2 \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
- a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \dots\dots + (1- a_{nn})x_n = d_n
\end{array}
$$

ম্যাট্রিক্সের আকারে সাজালে আমরা লিখতে পারি-

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12}\ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22})\ldots\ldots & a_{2n} \\ -an_1 & -a_{n2}\ldots\ldots & (1-a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ . \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$(1\text{-}A) \qquad\qquad x \qquad\qquad d$$

বা $(1\text{-}A)x = d$

যেখানে $(I\text{-}A)$ = লিওনটিয়েফ ম্যাট্রিক্স।

এক্ষেত্রে $I = n\infty n$ ক্রমের অভেদ ম্যাট্রিক্স এবং $A= n\infty n$ ক্রমের উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স (Co-efficient Matrix); x = উৎপাদন ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ বিভিন্ন শিল্পের উৎপাদন স্তর এই ম্যাট্রিক্স দ্বারা প্রকাশ পায়।

এখন উপরের সমীকরণের উভয় দিকে $(1\text{-}A)^{-1}$ দ্বারা গুণ করলে পাই:

$(I\text{-}A)^{-1}\ (I\text{-}A)x = (I\text{-}A)^{-1}d$

বা $Ix = (1\text{-}A)^{-1}d$

(যেহেতু কোন ম্যাট্রিক্সেকে অভেদ ম্যাট্রিক্স দ্বারা গুণ করলে তা অপরিবর্তিত থাকে)

বা, $x = (I\text{-}A)^{-1}d$

শেষোক্ত সমীকরণ থেকে বোঝা যায় লিওনটিয়েফ ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করে তার সাথে চুড়ান্ত ভোগ ম্যাট্রিক্স গুণ করলে বিভিন্ন শিল্পের উৎপাদন স্তর বের করা যায়।

উদাহরণ ঃ প্রদত্ত প্রযুক্তি ম্যাট্রিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

এবং x_1, x_2 এবং x_3 দ্রব্যের চুড়ান্ত চাহিদা যথাক্রমে F_1, F_2 এবং F_3 থেকে

(a) মডেলের সাথে সংগতিপূর্ণ উৎপাদনের পরিমাণ বের করুন।

(b) $F_1 = 20$, $F_2 = 0$ এবং $F_3 = 100$ হলে উৎপাদনের পরিমাণ কত?

সমাধান:

(a) প্রদত্ত প্রযুক্তি ম্যাট্রিক্স দ্রব্য x_1, x_2 এবং x_3 চূড়ান্ত চাহিদা F_1, F_2 এবং F_3 এর ভিত্তিতে আমরা নিম্নে লিওনটিয়েফ ম্যাট্রিক্স $(1\text{-}A)$, উৎপাদন ম্যাট্রিক্স x এবং চূড়ান্ত চাহিদা ম্যাট্রিক্স F গঠন করতে পারি।

$$(1\text{-}A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.1 \\ 0 & 0.8 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

এখন ম্যাট্রিক্সের আকারে পাই ঃ

$(1\text{-}A)x = F$

বা, $x = (1\text{-}A)^{-1}F$

এক্ষেত্রে $(1\text{-}A)^{-1}$ নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্তভাবে অগ্রসর হই

$$|(1\text{-}A)| = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 & -0.1 \\ 0 & 0.8 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{vmatrix}$$

$$= 0.9\,(0.56)$$

$$= 0.504$$

এখন (1-A) এর Cofactor Matrix গঠনের জন্য এর বিভিন্ন উপাদানের Co-factor নির্ণয় করি।

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0.8 & -0.1 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.56$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0. & 0.8 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.21$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0 & 0.7 \end{vmatrix} = 0.63$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} -0.9 & -0.3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0.8 & -0.1 \end{vmatrix} = 0.11$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} -0.9 & -0.1 \\ 0 & -0.1 \end{vmatrix} = 0.09$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.72$$

A এর Cofactor $= \begin{bmatrix} 0.56 & 0 & 0 \\ 0.21 & 0.63 & 0 \\ 0.11 & 0.09 & 0.72 \end{bmatrix}$

A এর adjoint = $\begin{bmatrix} 0.56 & 0.21 & 0.11 \\ 0 & 0.63 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0.72 \end{bmatrix}$

এখন $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{0.504} \begin{bmatrix} 0.56 & 0.21 & 0.11 \\ 0 & 0.63 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0.72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$

$$\therefore x_1 = \frac{0.56F_1+0.21F_2+0.11F_3}{0.504}$$

$$\therefore x_2 = \frac{0.63F_2+0.09F_3}{0.504}$$

$$\therefore x_3 = \frac{0.72F_3}{0.504}$$

উপরোক্ত মানসমূহ মডেলের সাথে সংগতিপূর্ণ উৎপাদন স্তর।

সমাধান (b) $F_1 = 20$, $F_2 = 0$ এবং $F_3 = 100$ এই মান সমূহ উপরে বসালে পাওয়া যায়,

$$x_1 = \frac{0.56(20)+0.21(0)+0.11(100)}{0.504} = 44.05$$

$$x2 = \frac{0.63(0)+0.09(100)}{0.504} = 17.86$$

$$x3 = \frac{.72(100)}{.504} = 142.86$$

জাতীয় আয় বিশ্লেষণে বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং ক্রেমার নিয়মের ব্যবহার

জাতীয় আয় মডেলের বিশ্লেষণে বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং ক্রেমার নিয়ম গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে থাকে। বিষয়টি নিম্নে দেখানো হলোঃ

আমরা এক্ষেত্রে বহুল পরিচিত কেইনসীয় জাতীয় আয় মডেল বিবেচনা করতে পারি। এই মডেলে দুটো সহ-সমীকরণ বিদ্যমান।

$Y= C+I_0+Go$

$C = a + by$

ধরি, $I_0 = 150$, $G_0=100$ এবং $a = 500$, $b=0.75$

উপরোক্ত মডেলটিকে নিম্নোক্তভাবে সাজানো যায়

(i) নং সমীকরণ থেকে

$Y\text{-}C = 1_0 + Go$

$Y\text{-}C = 250$

আবার (ii) থেকে

$C = 500 + 0.75Y$

$\therefore - 0.75Y + C = 500$

বামপক্ষে শুধুমাত্র অভ্যন্তরীন চলকসমূহ (endogeneous variables) এবং বাহ্যিক চলকসমূহ (exogeneous variables) বা উহাদের মান ডানপক্ষে বিবেচনা করে (iii) ও (iv) কে ম্যাট্রিক্স সারনীতে সাজালে-

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.75 & 1 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} Y \\ C \end{bmatrix}}_{=X} \underbrace{\begin{bmatrix} 250 \\ 500 \end{bmatrix}}_{=C}$$

এখানে (A) হচ্ছে সহগ ম্যাট্রিক্স, (X) চলক ভেক্টর এবং (C) স্থির পদের ভেক্টর।

বিপরীত ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির ব্যবহার ঃ

এখানে, $AX = C$

$\therefore X = A^{-1}C$

সুতরাং প্রথমেই A^{-1} নির্ণয় করতে হবে।

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.75 & -1 \end{bmatrix}$

প্রথম ধাপ ঃ

$|A|$ নির্ণয় করতে হবে।

$|A| = 1 - 0.75$

$\quad = 0.25 \neq 0$

ফলে A^{-1} নির্ণয় সম্ভব।

সারাংশ ঃ লিওনটিয়েফ ম্যাট্রিক্স-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করে তার সাথে চূড়ান্ত ভোগ ম্যাট্রিক্স গুণ করলে বিভিন্ন শিল্পের উৎপাদন স্তর বের করা যায়। জাতীয় আয় মডেল বিশ্লেষণে বিপরীত ম্যাট্রিক্স এবং ক্রেমার নিয়ম গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৬

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। লিওনটিয়েফ ম্যাট্রিক্স-এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করে তার সাথে চূড়ান্ত ভোগ ম্যাট্রিক্স গুণ করলে বিভিন্ন শিল্পের উৎপাদন স্তর বের করা যায়।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-ইউনিট ৬

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। বিপরীত ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞাসহ বৈশিস্ট্যসমূহ আলোচনা করুন।

২। নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সগুলোর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করুন।

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 5 & -2 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

৩। Cramers Rule এর সাহায্যে x,y ও z-এর মান বের করুন ঃ

(i) $x-4y-z = -10$
$6x+3y+2z = 18$
$3x+y-3z = -4$

(ii) $x+2y+3z = 22$
$2x-y+4z = 26$
$3x+4y-5z = 6$

৪। নিম্নে প্রদত্ত বাজার মডেলগুলো Cramer's Rule প্রয়োগ করে সমাধান করুন।

(a) $Qd = 51-3p$
$Qs = 6p -10$

(b) $Qd = 30-2p$
$Qs = -6+5p$

৫। নিম্নোক্ত বাজারসমূহে ভারসাম্য দাম ও পরিমাণ Cramer's Rule -এ নির্ণয় করুন।

(a) $Qs = -20+3p$
$Qd = 220 -5p$

(b) $Qs = -45 + 8p$

$Qd = 125-2p$

(c) $Qs - 32 - 7p = 0$

$Qd - 128 + 9p = 0$

(d) $13 - Qs = 27$

$Qd + 4p - 24 = 0$

৬। তিনটি শিল্পের উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স

$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$ এবং শিল্প তিনটির উৎপাদিত দ্রব্যের চূড়ান্ত চাহিদা $d = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ হলে উৎপাদনের পরিমাণ বের করুন।

৭। কোন অর্থনীতিতে যে পরিমাণ X দ্রব্য উৎপাদিত হয় তার একাংশ 1 নং 2 নং এবং 3 নং শিল্পে উপাদান হিসেবে ব্যবহৃত হয়। এরই ভিত্তিতে শিল্পের উপাদান সহগ ম্যাট্রিক্স A এবং শিল্প তিনটির উৎপাদিত দ্রব্যের চূড়ান্ত চাহিদা d দেয়া আছে যথাক্রমে-

(i) $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$ এবং $d = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix}$

কোন্ শিল্পে কতটুকু X দ্রব্য চাহিদা করে তা নির্ণয় করুন।

৮। একটি জাতীয় আয় মডেল দেয়া আছে-

$y = C + I_0 + G_0$

$C = a + b(y - T)$

$T = d + ty$

যখন y = জাতীয় আয়

C = ভোগ

I_0 = বিনিয়োগ ব্যয়

G_0 = সরকারি ব্যয়

T = করের পরিমাণ

(a) অভ্যন্তরীন (Endogeneous) ও বহিঃস্থ (Exogeneous) চলকগুলো সনাক্ত করুন।

(b) ক্রেমার পদ্ধতি ব্যবহার করে মডেলটির সমাধান বের করুন।

(c) একটি সমাধান বের করার জন্য পরামিতির উপর কি কি শর্ত আরোপ করা প্রয়োজন ?

উত্তরমালা - ইউনিট ৬

পাঠ-১ ঃ (১) সত্য (২) সত্য

পাঠ-২ ঃ (১) মিথ্যা (২) সত্য

পাঠ-৩ ঃ (১) মিথ্যা (২) সত্য

পাঠ-৪ ঃ (১) সত্য

পাঠ-৫ ঃ (১) সত্য (২) মিথ্যা (৩) সত্য

পাঠ-৬ ঃ (১) সত্য