ইউনিট ৫

রৈখিক মডেল এবং ম্যাট্রিক্স বীজগণিত ঃ১
(Linear Model and Matrix Algebra :1)

গাণিতিক অর্থনীতিতে ম্যাট্রিক্স একটি গুরুত্বপূর্ণ হাতিয়ার হিসাবে বিবেচিত। একাধিক একমাত্রিক সমীকরণে বহুসংখ্যক চলক বর্তমান থাকলে তার সমাধান অনেক সময় জটিল হয়ে পড়ে। এরূপ একমাত্রিক সহ-সমীকরণ সমূহের (Linear Simultaneous Equation) সমাধান ম্যাট্রিক্স বীজগণিত এবং নির্ণায়কের সাহয্যে করা যেতে পারে। এই ইউনিটের পাঠসমূহকে যথাক্রমে ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে ধারনা, ম্যাট্রিক্সের শ্রেণীবিন্যাস, ম্যাট্রিক্সের যোগকরণ, বিয়োগকরণ ও গুণন এবং সবশেষে নির্ণায়ক-এভাবে সাজানো হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

পাঠ-৫.১

ম্যাট্রিক্সের ধারণা ও এর সংজ্ঞা
(The Concept and Definition of a Matrix)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- ম্যাট্রিক্সের ক্রম জানতে পারবেন।
- ম্যাট্রিক্সের শর্তাবলী জানতে পারবেন।

ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা (Definition of a Matrix)ঃ

সাধারণ কথায় যখন কোন সংখ্যাশ্রেণী বা প্যারামিটার বা চলকের সহগসমূহ শ্রেণীবদ্ধভাবে (array) সারি (row) এবং কলামে (Column) সাজানো হয়, তখন তাকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়। সংখ্যাশ্রেণীকে দুটি বন্ধনীর (pair of brackets) সাহায্যে সীমিত করে রাখা হয়।

মনে করি, $a_1x + b_1y = o$ এবং $a_2x + b_2y = o$ দুটি রৈখিক সহ-সমীকরণ। এখন প্রথম সমীকরণকে b_2 ও দ্বিতীয় সমীকরণকে b_1 দ্বারা গুণ করে বিয়োগ করে ও বিয়োগফলকে x দ্বারা ভাগ করলে আমরা পাই ঃ $a_1b_2 - a_2b_1 = o$। একে সমীকরণ দুটির অপসারণ ফল (eliminant) বলে। এর বামপক্ষকে অনেক সময় $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ আকারে লিখা হয় এবং এটি একটি ম্যাট্রিক্স। এক্ষেত্রে চলরাশি x এবং y-এর a_1, b_1, a_2, b_2 সহগ বা পদগুলিকে ম্যাটিক্সের উপাদান (element) বলে। এখন n-সংখ্যক চলক দ্বারা গঠিত m-সংখ্যক একটি সহ-সমীকরণ বিবেচনা করি।

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = c_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = c_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = c_m
\end{aligned}
$$

উপরের সহ-সমীকরণের ক্ষেত্রে a_{11}, a_{12} ....ইত্যাদি x_1, x_2...... চলরাশির সহগ (Co-efficients) এবং c_1, c_2.........বিভিন্ন সমীকরণের প্যারামিটার। এদেরকে স্থির রাশি (Constants) হিসাবে মনে করা যায়।

উপরোক্ত সহ-সমীকরণে তিন ধরনের উপাদান আছে। প্রথম উপাদান a_{11}, a_{12}.......... সহগসমূহ। দ্বিতীয় উপাদান x_1, x_2 চলরাশিসমূহ এবং শেষোক্ত উপাদান c_1, c_2......স্থির রাশিসমূহ।

উপরোক্ত তিন ধরনের উপাদান যদি শ্রেণীবদ্ধভাবে যথাক্রমে A, X এবং C প্রতীকের সাহায্যে দেখানো হয়, তাহলে প্রত্যেকের ম্যাট্রিক্স রূপ হবে ঃ

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots\dots a_{3n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots\dots a_{mn} \end{bmatrix}; \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_m \end{bmatrix}
$$

এদের প্রত্যেকটি একটি ম্যাট্রিক্স। এক্ষেত্রে A ম্যাট্রিক্সটিকে খুব সংক্ষিপ্তভাবে প্রতীকের সাহায্যে দেখানোর জন্য আমরা $A = [a_{ij}]$ ব্যবহার করতে পারি যেখানে $i = 1,2......m$ এবং $j = 1,2....n$। এখানে উপর থেকে নিচের সংখ্যাগুলোকে তথা খাড়া সংখ্যাগুলোকে কলাম (Column) বলা হয়।
যেমন ,

আবার বাম দিক থেকে ডান দিকে সাজানো সংখ্যা তথা শোয়ানো অবস্থায় সাজানো সংখ্যাগুলোকে সারি (Row) বলা হয়। যেমন-

$\boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \rightarrow$ ১ম সারি

$\boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23}} \rightarrow$ ২য় সারি

$\boxed{a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33}} \rightarrow$ ৩য় সারি ইত্যাদি।

উল্লেখ্য যে, যদি ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$, তাহলে মনে রাখতে হবে, প্রথম সাবস্ক্রিপ্ট i, A ম্যাট্রিক্সের সারি (row) নির্দেশ করে এবং সাবস্ক্রিপ্ট j, A ম্যাট্রিক্সের কলাম (Column) নির্দেশ করে। $i = 1, 2,.......m$ এবং $j = 1, 2, ..., n$ হলে, A ম্যাট্রিক্সে $(m><n)$ ক্রমের (অর্ডারের) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ঃ মনে করি, x_1, x_2 এবং x_3 এই তিনটি চলকের সমম্বয়ে গঠিত একটি সহ-সমীকরণ নিম্নরূপঃ

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 22$$
$$x_1 + 4x_2 - x_3 = 12$$
$$4x_1 - x_2 + 7x_3 = 10$$

এখানে

$a_{11} = 6$	$a_{12} = 3$	$a_{13} = 2$	$c_1 = 22$
$a_{21} = 1$	$a_{22} = 4$	$a_{23} = -1$	$c_2 = 12$
$a_{31} = 4$	$a_{32} = -1$	$a_{33} = 7$	$c_3 = 10$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি;

$$A = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}}$$

$$X = \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}$$

$$C = \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}}$$

এক্ষেত্রে A, X এবং C প্রত্যেকটি এক একটি ম্যাট্রিক্স। ম্যাট্রিক্স এর প্রতীক হিসাবে সাধারণতঃ [ ] অথবা ( ) বন্ধনী চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order of Matrix)ঃ

কোন ম্যাট্রিক্সের অনুভূমিক সারির (rows) সংখ্যা এবং লম্ব সারির (Columns) সংখ্যা দ্বারা উক্ত ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order) নির্দেশ করা হয়ে থাকে। তবে কোন ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা Order বলতে প্রথমে সারির সংখ্যা এবং তারপর কলামের সংখ্যা গুন করতে হয়। কখনই কলামের সংখ্যা আগে উল্লেখ করা যাবে না। ম্যাট্রিক্সের ক্রম (Order) নিম্মোক্তভাবে প্রকাশ করা হয় ঃ

ম্যাট্রিক্স এর ক্রম ঃ ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা ∞ কলামের সংখ্যা

উদাহরণ-১ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\infty 2}$

উদাহরণ-২ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\infty 3}$

(১) নং ম্যাট্রিক্সে 2 টি সারি এবং 2 টি কলাম রয়েছে। ফলে এই ম্যাট্রিক্সের ক্রম হলে $2\infty 2$। অপর দিকে (২) নং ম্যাট্রিক্সে 2টি সারি এবং 3 টি কলাম রয়েছে। ফলে এই (২) নং ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে $2\infty 3$। এর উচ্চারণ করা হয় 2 by 3। এভাবে কোন ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা 5 টি এবং কলামের সংখ্যা 6 টি হলে তাকে $5\infty 6$ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

ম্যাট্রিক্সের শর্তসমূহ (Properties of Matrices) ঃ

১। নির্ণয় শর্ত (Deteminative Property) ঃ $A \neq B$ তা স্পষ্ট করে যে কোন দুটি ম্যাট্রিক্স সমান না অসমান তা স্পষ্ট করে বলা যায়। যেমনঃ A ও B দুটি ম্যাট্রিক্স $A= B$ যা বলা যাবে।

২। নমনীয় শর্ত (Reflexive Property) ঃ প্রত্যেক ম্যাট্রিক্স তার নিজ ম্যাট্রিক্সের সমান হয়ে থাকে। অর্থাৎ $A = A$ এবং $B = B$ এবং $C = C$ হবে।

৩। সমতার শর্ত (Symmetric Property) ঃ কোন প্রথম ম্যাট্রিক্স (Lead) যদি দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স (Log) এর সমান হয় তবে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সও প্রথম ম্যাট্রিক্সের সমান হবে। যেমন $A = B$ হলে $B = A$ হবেই।

৪। অবস্থানান্তর শর্ত (Transitivity Property) ঃ প্রথম ম্যাট্রিক্স যদি দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সমান হয় এবং দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স যদি তৃতীয় ম্যাট্রিক্সের সমান হয় তাহলে তৃতীয় ম্যাট্রিক্সটি অবশ্যই প্রথম ম্যাট্রিক্সের সমান হবে। অর্থাৎ $A = B$ হলে এবং $B = C$ হলে অবশ্যই $C = A$ বা $A= C$ হবে।

সারাংশ ঃ যখন কোন সংখ্যাশ্রেণী (Parameter) বা চলকের সহগসমূহ শ্রেণীবদ্ধভাবে সাজানো হয়, তাকে ম্যাট্রিক্স বলে। ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের বিভিন্ন শর্ত আছে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.১
সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। ম্যাট্রিক্সে সংখ্যাশ্রেণীকে দুটি বন্ধনীর সাহায্যে সীমিত করে রাখা হয়।

২। কোন ম্যাট্রিক্সের ক্রম (order) বলতে প্রথমে কলামের সংখ্যা এবং তারপর সারির সংখ্যা গুণ করতে হয়।

পাঠ-৫.২

ম্যাট্রিক্সের শ্রেণীবিন্যাস
(Classification of Matrices)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন ধরণের ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে জানতে পারবেন।

ম্যাট্রিক্সের শ্রেণীবিন্যাস (Classification of Matrices)

১. সারি ও কলাম ম্যাট্রিক্স (Row and Column Matrix) ঃ

যদি কোন ম্যাট্রিক্সে সারি বা কলামের সংখ্যা একটি মাত্র থাকে, তবে তাকে ভেক্টর বলা হয়। প্রথমোক্ত ম্যাট্রিক্সকে সারি ভেক্টর এবং দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সকে কলাম ভেক্টর বলা হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $\underset{(1 \text{ X } 3)}{[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]} = \underset{(1 \text{ X } 3)}{[18 \quad 4 \quad 7]}$

উদাহরণ ২ ঃ $\underset{(3 \text{ X } 1)}{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}} = \underset{(3 \text{ X } 1)}{\begin{bmatrix} 18 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}}$ ইত্যাদি

২. বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্স (Square Matrix) :

যদি কোন ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান হয়, তবে তাকে বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $A = \underset{(3 \text{ X } 3)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} = \underset{(3 \text{ X } 3)}{\begin{bmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 11 \end{bmatrix}}$

উদাহরণ ২ ঃ $X = \underset{(2 \text{ X } 2)}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{21} & x_{31} \end{bmatrix}} = \underset{(2 \text{ X } 2)}{\begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}}$

বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নরূপ ঃ

(i) যে কোন বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের রূপান্তর (Transpose) করলে তা বর্গাকৃতির হবে।

(ii) দুটি একই ক্রমের বর্গাকৃতির ম্যাট্রিক্স গুণ করলে অন্য একটি একই ক্রমের বর্গাকৃতির ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়।

(iii) বর্গাকৃতির ম্যাট্রিক্স যদি অভেদ ম্যাট্রিক্স হয় (identity Matrix) তবে উহা প্রতিসম (Symmetric) এবং আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স (Idempotent matrix) হতে পারে।

৩. একক/অভেদ ম্যাট্রিক্স (Identity Matrix) ঃ

যদি কোন বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের ডায়গোনাল (diagonal) উপাদান 1 হয় এবং অন্যান্য উপাদান শূন্য হয়, তবে ঐ ম্যাট্রিক্সকে অভেদ ম্যাট্রিক্স বলা হয়। এই ধরণের ম্যাট্রিক্সকে I প্রতীকের সাহায্যে চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $A=\underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}$ ম্যাট্রিক্সটিকে অভেদ ম্যাট্রিক্স বলা যায়।

যখন $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ এবং $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে

$I = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ হচ্ছে একটি (3 X 3) অভেদ ম্যাট্রিক্স।

এই ম্যাট্রিক্সের অন্যতম বিশেষত্ব হচ্ছে যে অন্য কোন ম্যাট্রিক্সকে এই ম্যাট্রিক্স দ্বারা গুণ করলে তা অপরিবর্তিত থাকে। যদি A একটি গুণের যোগ্য ম্যাট্রিক্স হয় তবে IA = AI = A হবে। যদি A নিজেই একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স হয়, তবে এক্ষেত্রে দাঁড়াবে ঃ

$(I)^2 = I$ অর্থাৎ কোন অভেদ ম্যাট্রিক্সকে যতবার গুণ করা হোক না কেন তা অপরিবর্তিত থাকে। অন্য কথায় $(I)^n = I$ (যেখানে n = 1,2,3.....)

৪. শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null Matrix)ঃ

যদি কোন ম্যাট্রিক্সের সমস্ত উপাদান শূন্য হয় তবে তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলা হয়। 0-এই প্রতীকের সাহায্যে একে চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $0 = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

উদাহরণ ২ ঃ $0 = \underset{(2 \times 3)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ ইত্যাদি

এই ম্যাট্রিক্সের সাথে অভেদ ম্যাট্রিক্সের অন্যতম পার্থক্য হচ্ছে এই যে অভেদ ম্যাট্রিক্সের মত এই ম্যাট্রিক্স বর্গাকৃতি ধরণের হতে হবে-এমন কোন কথা নেই। শূন্য ম্যাট্রিক্স অন্য কোন ম্যাট্রিক্সের সাথে যোগ করলে শেষোক্ত ম্যাট্রিক্স অপরিবর্তিত থাকে। পক্ষান্তরে শূন্য ম্যাট্রিক্স দ্বারা অন্য কোন ম্যাট্রিক্স গুণ করলে তা অপর একটি শূন্য ম্যাট্রিক্সে পরিণত হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $A+0 = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} + \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} = A$

উদাহরণ ২ ঃ $A \infty 0 = \underset{(2 \times 3)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}} \infty \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 1)}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = 0$

৫. প্রতিসম/সুষম ম্যাট্রিক্স (Symmetric Matrix) ঃ

যদি কোন ম্যাটিক্সের সারিকে কলামে রূপান্তরিত করা হয় বা কলামকে সারিতে রূপান্তরিত করা হয় অথচ ম্যাট্রিক্সের উপাদানসমূহের কোন স্থানগত পরিবর্তন না হয়, তবে উহাকে সুষম ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $A=\underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}}$

এখানে A ম্যাট্রিক্সটি সুষম ধরণের কেননা এক্ষেত্রে:

$a_{11} = 1$; $a_{12} = a_{21} = 2$; $a_{13}=a_{31} = 3$ $a_{22} = 4$; $a_{23} = a_{32} =5$; $a_{33} = 6$

প্রতীকের সাহায্যে আমরা বলতে পারি, যদি A একটি ম্যাট্রিক্স হয় এবং A' যদি এর রূপান্তর হয় তবে A ম্যাট্রিক্সকে সুষম বলা যাবে যদি $A=A'$ হয়। আবার $(A')' = A$ হয়।

৬। স্কিউড সুষম/প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Skewed Symmetric Matrix):-

যদি A একটি বর্গাকৃতির ম্যাট্রিক্স হয় এবং যদি $A' = -A$ হয় তবে A-কে স্কিউড প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা যায়। অন্যকথায় ধরি

A = [aij] একটি বর্গাকৃতির ম্যাটিক্স,

যেখানে i = 1, 2.................n

j = 1,2..................n

এখানে যদি aij = - aij হয় তবে A-কে স্কিউড প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা যাবে।

উদাহরণ ১ ঃ $A = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}$ এক্ষেত্রে $A' = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}}$

এখন $A' = - A$ হওয়ায় A হবে স্কিউড প্রতিসম ম্যাট্রিক্স।

উদাহরণ ২ ঃ $B = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}}$ $B'= \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}}$

এক্ষেত্রে $B' = - B$ বলে B কে স্কিউড প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা যায়।

৭. কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix) ঃ

যদি কোন বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপাদানগুলি স্থির রাশি হয় এবং অপরাপর উপাদান শূন্য হয় তবে তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলে। অর্থাৎ একটি বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্স A = [aij] কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা যায় যদি i□j অবস্থায় aij = 0 হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $A= \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$

৮। স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix):

যে বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের প্রধান বর্ণের উপাদানগুলো কোন নির্দিষ্ট স্থির রাশি এবং অপরাপর উপাদান সমূহ শূন্য হয় তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অর্থাৎ A = (aij) কে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা যায় যদি aij = aji যেখানে i=j এবং i≠j aij=o হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $A=\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ (3×3) $B' = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$ (2×2)

স্কেলার এবং কর্ণ ম্যাট্রিক্সের মধ্যে মূল পার্থক্য হচ্ছে প্রথমটির বেলায় ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপাদানসমূহ নির্দিষ্ট স্থির রাশি হয়। দ্বিতীয়টির বেলায় কর্ণের উপাদানসমূহ স্থির রাশি হয়। এজন্য স্কেলার ম্যাট্রিক্স অবশ্যই কর্ণ ম্যাট্রিক্স, তবে যে কোন কর্ণ ম্যাট্রিক্স স্কেলার নাও হতে পারে।

৯. ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্স (Triangular Matrix):

কোন বর্গাকৃতি (Square) ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপরের অথবা নিচের সব উপাদান শূন্য হলে তাকে ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্স বলে। প্রধান কর্ণের উপরের উপাদানসমূহ শূন্য হলে তাকে নিু ত্রিভুজাকৃতির (Lower triangular) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। নিচের উপাদানসমূহ শূন্য হলে তাকে উর্ধ্ব ত্রিভুজাকৃতির (Upper triangular) ম্যাট্রিক্স বলে। এক কথায় A = [aij] কে উর্ধ্ব ত্রিভুজকৃতির বলা যায় যদি i>j অবস্থায় aij=0 হয়। নিু ত্রিভুজাকৃতির বলা যায় যে ক্ষেত্রে i<j অবস্থায় aij=0 হয়।

উর্ধ্ব ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্স
(Upper triangular matrix)

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ (3×3)

(ii) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (3×3)

নিু ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্স
(Lower triangular matrix)

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (3×3)

(ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ (3×3)

১০. বিভক্তিকৃত ম্যাট্রিক্স (Partitioned Matrix):

কোন ম্যাট্রিক্সকে সমান্তরাল এবং লম্ব রেখার (horizontal and vertical lines) ভিত্তিতে কতিপয় অধঃ ম্যাট্রিক্সে (Sub-matrix) বিভক্ত করে দেখানো হলে তাকে বিভক্তিকৃত ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

উদাহরণ ১ ঃ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ (3×3)

এক্ষেত্রে আমরা চারটি অধঃ ম্যাট্রিক্স পাই

$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (2×2) $A_{12}=\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$ (2×1)

$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$ $A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} \end{bmatrix}$

(1 X 2) (1 X 1)

এখন A ম্যাট্রিক্সটিকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(2 X 2)

সঠিকভাবে বিভক্তিকরণ সম্ভব হলে বিভক্তিকৃত ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের যোগ, রূপান্তর এবং গুণের নিয়ম প্রযোজ্য হতে পারে।

১১. সহগ এবং অগমেন্টেড ম্যাট্রিক্স (Coefficient and Augmented matrix):

কোন সহ-সমীকরণ পদ্ধতিতে বিবেচনাধীন চলকসমূহ সহগ নিয়ে যে ম্যাট্রিক্স গঠন করা যায় তাকে সহগ ম্যাট্রিক্স বলে। সাধারণত প্রতীক A দ্বারা এরূপ ম্যাট্রিক্স চিহ্নিত করা হয়।
পক্ষান্তরে সহগ ম্যাট্রিক্স এবং সহ-সমীকরণের ডানদিকের স্থির রাশির সমন্বয়ে ম্যাট্রিক্স গঠন করা হলে তাকে অগমেন্টেড ম্যাট্রিক্স বলা হয়। একটি সহ-সমীকরণ পদ্ধতি বিবেচনা করি।

$$2x + 6y - 1 = 0$$
$$4x - y + 3 = 0$$

এক্ষেত্রে x এবং y এর সহগ নিয়ে A ম্যাট্রিক্স গঠন করি ঃ

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ এক্ষেত্রে A হচ্ছে সহগ ম্যাট্রিক্স।

পক্ষান্তরে x এবং y এর সহগ এবং স্থির রাশিগুলির সমন্বয়ে অন্য একটি ম্যাট্রিক্স B গঠন করি।

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ এক্ষেত্রে B -কে অগমেন্টেড ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

১২. ম্যাট্রিক্সের ট্রেস (Trace of a matrix)

কোন বর্গাকৃতির ম্যাট্রিক্সের প্রধান কর্ণের উপাদানসমূহের বর্গের (Square) সমষ্টি বা যোগফলকে ঐ ম্যাট্রিক্সের ট্রেস বলা হয়। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় যদি A একটি বর্গাকৃতির ম্যাট্রিক্স হয় তবে এর ট্রেসকে প্রতীক tr(A) দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ ধরি, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ $X' = \begin{bmatrix} x_1 \; x_2 .... x_n \end{bmatrix}$

এখন $(XX') = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 ...... x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 ...... x_2x_n \\ \multicolumn{2}{c}{..........................} \\ x_nx_1 & x_nx_2 ..... x_n^2 \end{bmatrix}$

এক্ষেত্রে $tr\,(XX) = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$

$$= \sum_{i=i}^{n} x_i^2$$

উদাহরণ ২ ঃ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
(3 X 3)

এক্ষেত্রে $tr(A) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}^2$

১৩. রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স (Transposed Matrix) ঃ

কোন ম্যাট্রিক্সের সারি (Row) কে কলামে (Column) বা কলামকে (Column) সারিতে (Row) রূপান্তরিত করলে যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন-

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ হলে A^T বা $A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$
(3 X 3) (3 X 3)

এখানে A^T বা A' হলো A ম্যাট্রিক্সের রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স।

১৪. একাত্ববোধক এবং অ-একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স (Singular and Non-singular Matrix):

যে ম্যাটিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্যের সমান হয় তাকে একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স বলা হয়।
যেমন-

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

তাহলে নির্ণায়কের মান &A& = 6-6 = 0

আবার, যে ম্যাট্রিক্সের বেলায় নির্ণায়কের মান শূন্যের সমান হয় না তাকে অ-একাত্ববোধক ম্যাট্রিক্স বলা হয়।
যেমন-

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore$ &A&= 10-9 $\neq$ 0

সারাংশ ঃ ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন প্রকারভেদ আছে। যেমন, সারি ও কলাম ম্যাট্রিক্স, বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্স, অভেদ ম্যাট্রিক্স, শূন্য ম্যাট্রিক্স, কর্ণ ম্যাট্রিক্স, স্কেলার ম্যাট্রিক্স, সহগ ও অগমেন্টেড ম্যাট্রিক্স ইত্যাদি। তবে গাণিতিক অর্থনীতিতে সকল ম্যাট্রিক্স একইভাবে ব্যবহৃত হয় না।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন- ৫.২

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। $\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ এই ম্যাট্রিক্সটিকে বলা হয়-

(ক) অভেদ ম্যাট্রিক্স (খ) সুষম ম্যাট্রিক্স
(গ) শূন্য ম্যাট্রিক্স (গ) স্কেলার ম্যাট্রিক্সও

২। যদি কোন বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের ডায়গোনাল উপাদান ১ হয় এবং অন্যান্য উপাদান শূন্য হয়, তবে ঐ ম্যাট্রিক্সকে বলে-

(ক) অভেদ ম্যাট্রিক্স (খ) সুষম ম্যাট্রিক্স

(ঘ) শূন্য (ঘ) স্কেলার ম্যাট্রিক্স

পাঠ-৫.৩

ম্যাট্রিক্সের যোগকরণ, বিয়োগকরণ এবং গুণন
(Addition, Subtraction and Multiplication of Matrices)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগ করতে পারবেন।
- দুটি ম্যাট্রিক্সের বিয়োগ করতে পারবেন।
- দুটি ম্যাট্রিক্সের গুণ করতে পারবেন।

ম্যাট্রিক্সের যোগকরণ এবং বিয়োগকরণ (Addition and subtraction of Matrices) ঃ

দুটি ম্যাট্রিক্সকে যোগ করলে অনেক সময় অন্য একটি ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায়। তবে যোগ বা বিয়োগের শর্ত হচ্ছে ম্যাট্রিক্স দুটির পরিধি সমান হতে হবে। অর্থাৎ দুটি ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান হতে হবে। যোগের সময় আমরা একটি ম্যাট্রিক্সের একটি উপাদানকে অপর ম্যাট্রিক্সের প্রাতিষঙ্গিক (Corresponding) উপাদানের সাথে যোগ করি। একটি ম্যাট্রিক্স থেকে অপর একটি ম্যাট্রিক্স বিয়োগের সময় অনুরূপভাবে একটি উপাদান থেকে অপর উপাদান বিয়োগ করি।

উদাহরন ১ ঃ $A=\underset{(3 X 3)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}}$ এবং $B=\underset{(3 X 3)}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}}$

$$\therefore \; A+B = \underset{(3 X 3)}{\begin{bmatrix} 1+0 & 2+3 & 3+4 \\ 2+1 & 4+2 & 5+3 \\ 10+5 & 11+6 & 12+7 \end{bmatrix}} = \underset{(3 X 3)}{\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \\ 15 & 17 & 19 \end{bmatrix}}$$

এবং $A-B = \underset{(3 X 3)}{\begin{bmatrix} 1-0 & 2-3 & 3-4 \\ 2-1 & 4-2 & 5-3 \\ 10-5 & 11-6 & 12-7 \end{bmatrix}} = \underset{(3 X 3)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}}$

ম্যাট্রিক্সের যোগকরণ পদ্ধতিতে পরিবর্তনশীলতা (Commutative)এবং সহযোগ (associative) নীতি মেনে চলা হয়। এজন্য দুটি ম্যাট্রিক্সকে যখন আমরা যোগ করি, তখন তাদের প্রাতিষঙ্গিক উপাদান যোগ করাকেই বোঝায় মাত্র।

ক. পরিবর্তনশীলতা নীতি (Commutative law): এই নীতি অনুযায়ী যদি A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্স হয়, তবে আমরা লিখতে পারিঃ $A+B = B+A$

উদাহরণ -১ $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}6 & 3\\4 & 7\end{bmatrix}$

খ. সহযোগ নীতি (Associative law): এই নীতির অর্থ হচ্ছে যদি A,B এবং C এই তিনটি ম্যাট্রিক্স থাকে তবে বলা যায় (A+B) + C = A + (B+C)

উদাহরণ ১ ঃ $A = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}4 & 5 & 7\\2 & 1 & 3\\5 & 4 & 6\end{bmatrix}}$ $B = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\5 & 3 & 8\\1 & 4 & 2\end{bmatrix}}$ $C = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}15 & 4 & 2\\1 & 5 & 3\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}}$

$$\therefore\ (A+B) + C = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}4 & 7 & 8\\7 & 4 & 11\\6 & 8 & 8\end{bmatrix}} + \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}15 & 4 & 2\\1 & 5 & 3\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}19 & 11 & 10\\8 & 9 & 14\\6 & 11 & 10\end{bmatrix}}$$

এবং $$A+(B+C) = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}4 & 5 & 7\\2 & 1 & 3\\5 & 4 & 6\end{bmatrix}} + \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}15 & 6 & 3\\6 & 8 & 11\\1 & 7 & 4\end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}19 & 11 & 10\\8 & 9 & 14\\6 & 11 & 10\end{bmatrix}}$$

সুতরাং দেখা যায় $(A+B)+C= A+(B+C) = \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix}19 & 11 & 10\\8 & 9 & 14\\6 & 11 & 10\end{bmatrix}}$

ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণন (Scalar Multiplication of Matrix)ঃ

কোন স্কেলার দ্বারা কোন ম্যাট্রিক্সকে গুণ করা হলে এর প্রতিটি উপাদানকে ঐ স্কেলার দ্বারা গুণ করা বোঝায়। একেই ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণন বলা হয়। মনে করি k একটি স্কেলার বা স্থির রাশি (k এর মান 2, 3, -6 ইত্যাদি হতে পারে) এবং A একটি ম্যাট্রিক্স যার উপাদানসমূহ [aij] দ্বারা প্রকাশ করা যায়। তাহলে A এবং k এর গুণন হবে নিম্নরূপ ঃ

$$kA = [ka_{ij}]$$

উদাহরণ-১ ঃ $A=\underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}}$ $kA = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ka_{21} & ka_{22}\end{bmatrix}}$

উদাহরণ-২ ঃ $B = \begin{bmatrix}5 & 7 & 9\\10 & 11 & 4\end{bmatrix}$

এখন k = 3 হলে লেখা যায় ঃ-

$$3B = 3\begin{bmatrix}5 & 7 & 9\\10 & 11 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15 & 21 & 27\\30 & 33 & 12\end{bmatrix}$$

স্কেলার কোন ঋণাত্মক সংখ্যা হতে পারে।

যেমন $x = -3$ হলে লেখা যায় ঃ

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$kB = -3\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -6 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

যদি k এবং g দুটি স্কেলার এবং A ও B দুটি ম্যাট্রিক হয় তবে ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণনের বেলায় নিম্নোক্ত সমূহ প্রযোজ্য হবে ঃ

(i) $k(A+B) = ka + kB$

(ii) $(k+g)A = kA + gA$

ম্যাট্রিক্সের গুণন (Matrix Multiplication):

অনেক সময় দুটি ম্যাট্রিক্স গুণ করলে আমরা একটি ম্যাট্রিক্স পাই। দুটি ম্যট্রিক্স গুণের যোগ্য কিনা তা আগে জানা আবশ্যক।

যদি A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্স থাকে এবং আমরা যদি $A\infty B=AB$ পেতে চাই; তবে প্রথম ম্যাট্রিক্স (Lead Matrix) A-এর কলামের সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স (Lag Matrix) -B-এর সারির সমান হতে হবে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়

যদি $\underset{1 X 2}{A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}}$ এবং $\underset{(2 X 3)}{B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}}$

হয় তবে AB এই গুণোত্তর ম্যাট্রিক্স পাওয়া সম্ভব। কেননা এক্ষেত্রে A ম্যাট্রিক্সের কলাম 2 এবং B ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যাও 2। ফলে AB সংজ্ঞায়িত করা সম্ভব। অথচ একই নীতি অনুসরন করলে আমরা BA-কে সংজ্ঞায়িত করতে পারি না। কারণ এক্ষেত্রে B এর তিনটি কলাম অথচ A এর একটি মাত্র সারি আছে। ফলে BA বের করা যাবে না। সাধারণ অবস্থায় তাই বলা যায়, যদি দুটি ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান হয় তবে যেদিক থেকেই বিচার করা হোক না কেন তারা গুণনের যোগ্য। অর্থাৎ যদি A ম্যাট্রিক্স $m\infty n$ ক্রমের (Order) এবং B ম্যাট্রিক্স $n\infty m$ ক্রমের হয়, তবে AB এবং BA-এই উভয়কে সংজ্ঞায়িত করা সম্ভব। সেক্ষেত্রে AB ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে $(n\infty n)$ এবং BA ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে $(m\infty m)$।

এখন দেখা যাক কিভাবে উপরের দুটি ম্যাট্রিক্স গুন করা যায়। A হচ্ছে 1 X 2 ক্রমের একটি ম্যাট্রিক্স এবং B একটি 2 X 3 ক্রমের ম্যাট্রিক্স। তাই AB হবে 1 X 3 ক্রমের অপর একটি ম্যাট্রিক্স। অর্থাৎ গুণফলের পর আমরা যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাব তার সারির সংখ্যা ১ টি এবং কলামের সংখ্যা হবে ৩ টি।

গুণ করার নিয়ম ঃ

(i) A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির সাথে B ম্যাট্রিক্সের প্রথম কলাম ;

(ii) A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির সাথে B ম্যাট্রিক্সের দ্বিতীয় কলাম;

(iii) A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির সাথে B ম্যাট্রিক্সের তৃতীয় কলাম ইত্যাদি।

উদাহরণ-১ ঃ $\underset{2 X 2}{A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}}$ এবং $\underset{2 X 2}{B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}}$

$$AB = \underset{2 X 2}{\begin{bmatrix} 3(-1)+5(4) & 3(0)+5(7) \\ 4(-1)+6(4) & 4(0)+6(7) \end{bmatrix}} = \underset{2 X 2}{\begin{bmatrix} 17 & 35 \\ 20 & 42 \end{bmatrix}}$$

উদাহরণ-২ ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$

3 X 2 2 X 1

$$AB = \begin{bmatrix} 1(5)+3(9) \\ 2(5)+8(9) \\ 4(5)+0(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}$$

3 X 1 3 X 1

উদাহরণ-৩ ঃ $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

3 X 3 3 X 1

$$\therefore AX = \begin{bmatrix} 6x_1+3x_2+x_3 \\ x_1+4x_2+2x_3 \\ 4x_1+x_2+5x_3 \end{bmatrix}$$

3 X 1

উল্লেখ্য যে, দুটি ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ বা গুণ করা যায় বটে, তবে একটি ম্যাট্রিক্স অপর একটি ম্যাট্রিক্স দ্বারা ভাগ করা সম্ভব নয়। অর্থাৎ আমরা A/B- লিখতে বা সংজ্ঞায়িত করতে পারি না। আমরা উপরে একটি ম্যাট্রিক্সকে আর একটি ম্যাট্রিক্স দ্বারা গুণ করেছি, তবে কোন ম্যাট্রিক্সকে বিশেষ সংখ্যা দ্বারা গুণ করা সম্ভব। এরূপ গুণের সময় ঐ নির্দিষ্ট সংখ্যা দ্বারা ম্যাট্রিক্সটির প্রতিটি উপাদানকে গুণ করা হয়।

দুটি সংখ্যার ক্ষেত্রে অবশ্য একটি সংখ্যাকে অপর সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা যায়। যেমন A এবং B যদি দুটি সংখ্যা হয় এবং B এর মান শূন্য না হয় তবে আমরা A/B সংজ্ঞায়িত করতে পারি। A/B কে আমরা বিকল্পভাবে AB^{-1} (সূচক সূত্রাবলী প্রয়োগ করে) বা B/A কে BA^{-1} হিসাবে লিখতে পারি। এক্ষেত্রে আমরা $AB^{-1} = BA^{-1}$ লিখতে পারি। ম্যাট্রিক্সের ব্যাপার আলাদা। যেমন B যদি একটি ম্যাট্রিক্স হয় তবে এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে (Inverse matrix of B) আমরা B^{-1} হিসাবে লিখতে পারি কোন কোন ক্ষেত্রে। কিন্তু গুণের নীতি অনুযায়ী BA^{-1} কে আমরা সংজ্ঞায়িত করতে পারলেও AB^{-1} আমরা সংজ্ঞায়িত করতে পারব কিনা তা নিশ্চিত করে বলা সম্ভব নয়। আবার কোন কোন ক্ষেত্রে AB^{-1} এবং BA^{-1} সংজ্ঞায়িত করা সম্ভব হলেও তাদের ফল এক নাও হতে পারে। সুতরাং ম্যাট্রিক্সের বেলায় আমরা $AB^{-1} = BA^{-1}$ এরূপ সমতা সাধারণত লিখতে পারি না।

ম্যাট্রিক্সের গুণনের নীতি (Principles of Matrix Multiplication):

ম্যাট্রিক্সের গুণের বেলায় পরিবর্তনশীলতা নীতি (Commutative law) এবং সহযোগ নীতি (associative law) প্রযোজ্য। অনেক ক্ষেত্রে বন্টনের নিয়ম (distributive law) প্রযোজ্য।

ক. ম্যট্রিক্সের গুণনের পরিবর্তনশীলতা নীতি (Commutative law of Multiplication) ঃ

দুটি ম্যট্রিক্সের গুণন প্রক্রিয়া সব সময় তাদের পরিবর্তনশীল গুণের সাথে সঙ্গতিপূর্ণ নাও হতে পারে। অর্থাৎ যদি A এবং B দুটি ম্যাট্রিক্স হয় তবে আমরা বলতে পারি সব সময় $AB \neq BA$। অনেক সময় AB সংজ্ঞায়িতকরণ সম্ভব, অথচ BA-কে নয়। এমন কি যদি AB এবং BA উভয়কে সংজ্ঞায়িত করা সম্ভব হয়, তা হলেও অধিকাংশ ক্ষেত্রে দেখা যায় $AB \neq BA$।

উদাহরণ-১ ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

2 X 2 2 X 2

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 25 \end{bmatrix}$$

2 X 2 2 X 2 2 X 2

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 27 & 40 \end{bmatrix}$$

2 X 2 2 X 2 2 X 2

এক্ষেত্রে $AB \neq BA$।

যদি A এবং B ম্যাট্রিক্স এর মধ্যে যে কোন অভেদ ম্যাট্রিক্স হয় তখন AB = BA হয়।

উদাহরণ-১ ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3 X 3) (3 X 3)

$$AB = AI = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(3 X 3) (3 X 3) (3 X 3)

$$BA = IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(3 X 3) (3 X 3) (3 X 3)

সুতরাং এক্ষেত্রে AB = BA অর্থাৎ IA = AI = A

খ. গুণের সহযোগ নীতি (Associative law) ঃ

যদি A,B এবং C এই তিনটি ম্যাট্রিক্স থাকে তবে উপরোক্ত নীতি অনুযায়ী আমরা লিখতে পারি ঃ

$$AB(C) = A\,(BC) = ABC$$

এক্ষেত্রে AB এবং BC এই গুণোত্তর ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে অবশ্য গুণের নীতি পূরণ হতে হবে। A যদি m∞n এবং C যদি P∞q ক্রমের ম্যাট্রিক্স হয় তবে গুণের প্রক্রিয়া প্রয়োগ করতে হলে B ম্যাট্রিক্স অবশ্যই n∞p ক্রমের হতে হবে। এক্ষেত্রে ABC দ্বারা গঠিত যে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে, তা (m∞n∞p∞q) এবং n=p, কাজেই ABC ম্যাট্রিক্স অবশ্যই m X q ক্রমের হবে।

উদাহরণ-১ ঃ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(2 X 2) (2 X 3) (3 X 2)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 7 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(2 X 2) (2 X 3) (2 X 3)

$$AB(C) = \begin{bmatrix} -4 & 9 & 7 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & 17 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

(2 X 3) (3 X 2) (2 X 2)

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}$$

(2 X 3) (3 X 2) (2 X 2)

$$A(BC) = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 44 & 17 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}}$$

সুতরাং AB(C) = A (BC) (প্রমানিত)

গ. ম্যাট্রিক্সের গুণনের ক্ষেত্রে বন্টনের নীতি (Distributive law) ঃ

এই নীতি অনুযায়ী আমরা লিখতে পারি ঃ

$$A\,(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)\,A = BA + CA$$

এক্ষেত্রে গুণের এবং যোগের শর্ত পূরণ হতে হবে।

উদাহরণ-১ ঃ $A = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}$ $B = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}$ $C = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

এক্ষেত্রে $(B+C) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\therefore A\,(B+C) = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 14 & -11 \end{bmatrix}}$$

$$AB = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}}$$

$$AC = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$AB+AC = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}} + \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 14 & -11 \end{bmatrix}}$$

সুতরাং A (B+C) = AB + AC প্রমানিত হলো।

অনুরূপভাবে (B+C)A = BA+CA প্রমান করা যাবে।

সারাংশ ঃ দুটি ম্যাট্রিক্সকে যোগ, বিয়োগ ও গুণ করা যায়। এক্ষেত্রে কিছু নিয়মাবলী আছে। তবে একটি ম্যাট্রিক্সকে অপর একটি ম্যাট্রিক্স দ্বারা ভাগ করা যায় না। ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে লক্ষ্যনীয় কিছু বিষয় আছে। যেমন, B যদি একটি ম্যাট্রিক্স হয় তবে এর বিপরীত ম্যাট্রিক্সকে কোন কোন ক্ষেত্রে B^{-1} লিখতে পারি।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৩

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। একটি ম্যাট্রিক্স থেকে অপর একটি ম্যাট্রিক্স বিয়োগের সময় আমরা একটি উপাদান থেকে অপর উপাদান বিয়োগ করি।

২। যদি A এবং B ম্যাট্রিক্সের মধ্যে যে কোন একটি অভেদ ম্যাট্রিক্স হয় তবে AB=BA হয়।

পাঠ-৫.৪

নির্ণায়ক

(Determinant)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়ক সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- নির্ণায়কের বৈশিষ্ট্য জানতে পারবেন।
- নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের মধ্যে পার্থক্য জানতে পারবেন।

ম্যাট্রিক্সের নিজস্ব কোন মান নেই। তবে প্রতিটি বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের একটি করে মান থাকে। ঐ মানকে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বলা হয়। ধরি A একটি বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্স। এর নির্ণায়ককে আমরা $|A|$ এই প্রতীকের সাহায্যে চিহ্নিত করি।

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ হয় তবে এর নির্ণায়ক $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এই প্রতীকের সাহায্যে চিহ্নিত করা হয়। এর মান হচ্ছে $(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})$ যা প্রধান ডায়গোনাল (principal diagonal) এর দুটি উপাদান a_{11} এবং a_{22} এর গুণফল এবং তা থেকে অপর দুটি উপাদান a_{12} এবং a_{21} এর গুণফল বিয়োগ করে প্রাপ্ত।

ম্যাট্রিক্সের মত নির্ণায়কও বিভিন্ন ক্রমের হতে পারে। যেহেতু বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্স ব্যতীত কোন ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক থাকতে পারে না, তাই নির্ণায়কের সারি বা কলামের সংখ্যা থেকে তার ক্রম বোঝা যায়।

দ্বিতীয় ক্রমের নির্ণায়ক (Second Order Determinant)

উদাহরণ ঃ ১ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

উদাহরণ ঃ ২ $\begin{vmatrix} x^2 & 2xy \\ 2xy & y^2 \end{vmatrix} = x^2y^2 - 4x^2y^2 = -3x^2y^2$

উদাহরণ ঃ ৩ $\begin{vmatrix} \frac{\delta u}{\delta x} & \frac{\delta u}{\delta y} \\ \frac{\delta v}{\delta x} & \frac{\delta v}{\delta y} \end{vmatrix} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta x} \cdot \frac{\delta u}{\delta y}$

শেষোক্ত নির্ণায়ককে অনেক সময় x এবং y এর সম্পর্কে যথাক্রমে u এবং v এর “Jacobian" বলা হয় এবং কোন কোন সময় একে নিম্নোক্ত প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়।

$$\frac{\delta(uv)}{\delta(xy)}$$

তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক (Third Order Determinant)ঃ

তৃতীয় ক্রমের নির্ণায়ক সংজ্ঞায়িত করার সময় আমরা দ্বিতীয় ক্রমের নির্ণায়কের সাহায্যে নিয়ে থাকি।

উদাহরণ: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} +3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(0 - 5) -5 (-4 + 20) + 3 (2 - 0)$
$= -5 + 20 -100 + 6$
$= 26 - 105$
$= -79$

N-তম ক্রমের নির্ণায়ক (Nth Order Determinant) ঃ

একটি N-তম ক্রমের নির্ণায়ককে আমরা (N-1) তম ক্রমের নির্ণায়কের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত করতে পারি।

উদাহরণ ঃ $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & an3. \cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$

সহগুণক সম্প্রসারণ পদ্ধতি (Co-factor Expansion Method) ঃ

নির্ণায়ক নিরূপণের এ পদ্ধতি অত্যন্ত জটিল। এ পদ্ধতি যে কোন আয়তনের বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক নিরূপণে ব্যবহার করা যায়। ম্যাট্রিক্সের যে কোন সারি কিংবা কলামের সহগুণকের মাধ্যমে নির্ণয়ক বের করা যায়। সহগুণককে এর সহগ দ্বারা গুণ করে নির্ণায়ক বের করা হয়। একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের একটি নির্দিষ্ট উপাদানের সহগুণক হচ্ছে উপাদান বরাবর সারি ও কলামের উপাদান বাদ দিলে যে উপ ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় এর নির্ণায়ক। নিম্নে সহগুণক সম্প্রসারণ পদ্ধতির মাধ্যমে একটি (3∞3) ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বের করে দেখানো হলো:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ প্রথম সারির উপাদান ব্যবহার করে সহগুণকের মাধ্যমে নির্ণায়ক নিরূপণ করে দেখানো হলো।

A_{11} কিংবা 2-এর সহগুণক $= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10$

A_{12} কিংবা 3-এর সহগুণক $= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -15$

A_{13} কিংবা 4-এর সহগুণক $= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

সুতরাং A এর নির্ণায়ক

|A&= 2(10)+3 (-15) +4(5)
= 20-45+20
∴ |A&=-5

নির্ণায়কের বৈশিষ্ট্য (Properties of Determinant)ঃ

নিম্নে নির্ণায়কের কতিপয় বৈশিষ্ট্য উদাহরণসহ আলোচনা করা হলোঃ

(i) সারিকে কলামে এবং কলামকে সারিতে রূপান্তর করলে অর্থাৎ ম্যাট্রিক্সের রূপান্তর করলে নির্ণায়ক অপরিবর্তনীয় থাকবে। যেমন-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ |A&= |A′&

(ii) যদি কোন দুটি সারি (কিংবা কলাম)-কে পরস্পর বিনিময় করে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক নিরূপণ করা হয়, তবে এটা মূল নির্ণায়কের ঋণাত্মক হবে। যেমন-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ [প্রথম ও দ্বিতীয় সারি পরস্পর বিনিময় করা হয়েছে]

(iii) ম্যাট্রিক্সের দুটি সারি কিংবা কলাম একই হলে ঐ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক শূন্য হবে।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \therefore$$ |A&= 0

(iv) ম্যাট্রিক্সের কোন সারি (কিংবা কলাম) এর উপাদানকে অন্য কোন সারি (কিংবা কলাম) এর উপাদান হতে k বার যোগ (বা বিয়োগ) করলে নির্ণায়কের পরিবর্তন হয় না। যেমন-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{11} - ma_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{21} - ma_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{31} - ma_{32} \end{bmatrix}$$

(v) ম্যাট্রিক্সের কোন একটি সারি (বা কলাম) কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে যে নির্ণায়ক পাওয়া যাবে তা মূল ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ককে ঐ সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে যে গুণফল হবে উহার সমান। যেমন-

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(vi) ম্যাট্রিক্সের যে কোন সারি কিংবা কলাম যদি দুই বা ততোধিক উপাদানের সমষ্টি (বা অন্তর) হয়, তবে নির্ণায়ক দুই বা ততোধিক নির্ণায়কের সমষ্টি (বা অন্তর হবে)। যেমন-

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের মধ্যে পার্থক্য (Difference between Matrix and Determinant) ঃ

সাধারন দৃষ্টিতে ম্যাটিক্স এবং নির্ণায়ক একই রকম দেখতে হলেও এদের মধ্যে নিম্নোক্ত পার্থক্য টানা যায়।

প্রথমতঃ ম্যাট্রিক্সের ক্রম যে কোন ধরনের হতে পারে অর্থাৎ ম্যাট্রিক্স বর্গাকৃতির বা অ-বর্গাকৃতির (Non-Square) হতে পারে। কিন্তু নির্ণায়ক সবসময়ই বর্গাকৃতির হয়। অর্থাৎ এর সারি ও কলাম পরস্পর সমান হবে। এজন্য কেবলমাত্র বর্গাকৃতির ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক পাওয়া যায়। এক কথায় সব নির্ণায়কের প্রতিষঙ্গিক (Corresponding) ম্যাট্রিক্স আছে, তবে যে কোন ম্যাট্রিক্সের প্রতিষঙ্গিক নির্ণায়ক নেই। এই অর্থে নির্ণায়কের চেয়ে ম্যাট্রিক্সের ধারণা বৃহত্তর বলা যায়।

দ্বিতীয়তঃ ম্যাট্রিক্সের মান অনির্ধারিত থাকে। অর্থাৎ এর কোন সংখ্যাগত মান বের করা যায় না। অন্যদিকে যে কোন নির্ণায়কের মান বের করা সম্ভব। যেমন-

$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ এই ম্যাট্রিক্সের মান বের করা যাবে না তবে

$|A\&= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1$

তৃতীয়ত : কোন স্থির রাশি অথবা স্কেলার (Scalar) দিয়ে নির্ণায়ককে গুণ করলে এর মানের সাথে ঐ স্থির গুণ করলেই চলে। কিন্তু স্কেলার দ্বারা কোন ম্যাট্রিক্সকে গুণ করলে সব উপাদানের সাথে গুণ করা বোঝায়।

$A= \begin{vmatrix} 2 & 4k \\ 5 & 7k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ লেখা যায়।

কিন্তু $k\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & 4k \\ 5k & 7k \end{bmatrix}$ লিখতে হবে।

চর্তুথত ঃ ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে কোন সহ-সমীকরণ পদ্ধতি প্রকাশ করা সম্ভব।

$2x + 5y = 10$

$x + y = 3$

এই সহ-সমীকরণ পদ্ধতিকে নিম্নে ম্যাট্রিক্স এর সাহায্যে নির্দেশ করা সম্ভব।

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

কিন্তু নির্ণায়কের সাহায্যে কোন সহ-সমীকরণ পদ্ধতি প্রকাশ করা যায় না।

সবশেষে বলা যায় নির্ণায়ক প্রকাশের জন্য আমরা | | প্রতীক ব্যবহার করি। কিন্তু ম্যাট্রিক্স নির্দেশের জন্য [ ] অথবা ( ) প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

সারাংশ ঃ প্রতিটি বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের একটি করে মান থাকে। ঐ মানকে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বলে। ম্যাট্রিক্সের মত নির্ণায়কও বিভিন্ন রকমের হয়ে থাকে। নির্ণায়কের কিছু বিশেষ বৈশিষ্ট্য আছে, যেগুলোর মাধ্যমে নির্ণায়ক ও ম্যাট্রিক্সের মধ্যে পার্থক্য নির্ধারণ করা যায়।

পঠোত্তর মূল্যায়ন - ৫.৪

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। প্রতিটি বর্গাকৃতি ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের একটি করে মান থাকে।

২। ম্যাট্রিক্স্যের দুটি সারি কিংবা কলাম একই হলে ঐ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক এক (১) হবে।

৩। নির্ণায়ক প্রকাশের জন্য আমরা [ ] প্রতীক ব্যবহার করি।

৪। নির্ণায়ক |A&= $\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}$ = 14 হবে।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন - ইউনিট ৫

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। ম্যাট্রিক্সের শর্তসমূহ কি ?

২। উদাহরণসহ ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা ও শর্তসমূহ আলোচনা করুন।

৩। বর্গাকৃতি, শূন্য, স্কেলার এবং রূপান্তরিত ম্যাট্রিক্স উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

৪। ম্যাট্রিক্সের বিনিময়, সংযোগ ও বন্টন সূত্রগুলো আলোচনা করুন।

৫। নির্ণায়কের সংজ্ঞাসহ বৈশিষ্ট্যসমূহ আলোচনা করুন।

৬। ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়কের মধ্যে পার্থক্য কি ?

৭। নিম্নোক্ত ম্যাট্রিক্সগুলোর যোগফল ও বিয়োগফল নির্ণয় করুন।

(i) |A&= $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ হবে।

(ii) $A = \begin{bmatrix}2 & -3 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}-4 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$

৮। নিম্নোক্ত ম্যাট্রিক্সগুলোর গুণফল নির্ণয় করুন।

(i) $A = [1 \quad 2 \quad 3]$ এবং $B = \begin{bmatrix}4 & 8\\ 6 & 2\\ 7 & 3\end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

৯। নিম্নোক্ত নির্ণায়কগুলোর মান নির্ণয় করুন।

(i) $|A| = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

(ii) $|A| = \begin{bmatrix}6 & 2 & 6\\ 2 & 8 & 4\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$

উত্তরমালা ইউনিট-৫

পাঠ-১ ঃ (১) সত্য (২) মিথ্যা

পাঠ-২ ঃ (১) গ (২) ক

পাঠ-৩ ঃ (১) সত্য (২) সত্য

পাঠ-৪ ঃ (১) সত্য (২) মিথ্যা (৩) মিথ্যা (৪) সত্য