ইউনিট ৪

অর্থনীতিতে ভারসাম্যের বিশ্লেষণ
(Equilibrium Analysis in Economics)

অর্থনীতিতে প্রতিনিয়ত বিভিন্ন প্রকার উপাদান বা চলকের পারস্পরিক ক্রিয়-প্রতিক্রিয়া লক্ষ্য করা যায়। একটি নির্দিষ্ট সময়ে অর্থনৈতিক চলকগুলো পারস্পরিক ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া দ্বারা একটি স্থিতাবস্থায় পৌঁছাতে পারে। উক্ত স্থিতাবস্থাকেই ভারসাম্যবস্থা বলা হয়ে থাকে।
এই ইউনিটে বাজার ভারসাম্য, অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নমান এবং বাধা শর্ত সাপেক্ষে সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিম্নকরণ - পাঠগুলো বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

- পাঠ-৪.১ ঃ বাজার ভারসাম্য
- পাঠ-৪.২ ঃ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্নমান
- পাঠ-৪.৩ ঃ বাধা শর্ত সাপেক্ষে সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিম্নকরণ

পাঠ-৪.১

বাজার ভারসাম্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বাজার ভারসাম্য কিভাবে নির্ধারিত হয় তা জানতে পারবেন।
- বাজার ভারসাম্যে করের প্রতিক্রিয়া সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- বাজার ভারসাম্যে ভর্তুকির প্রতিক্রিয়া সম্পর্কে জানতে পারবেন।

অর্থনীতিতে চাহিদা ও যোগানের মধ্যে সম্পর্ক পরস্পর বিপরীত ধর্মী। এই দুয়ের ঘাত-প্রতিঘাতের ফলে প্রতিষ্ঠিত চাহিদা ও যোগানের সমতাস্থলে বাজার ভারসাম্য নির্ধারিত হয় । ভারসাম্য অবস্থায় একটি নির্দিষ্ট দামে দ্রব্যটির চাহিদা ও যোগানের পরিমাণ সমান হয়ে থাকে। এই নির্দিষ্ট দামকে ভারসাম্য দাম (Equilibrium price) এবং এই ভারসাম্য দামে চাহিদা ও যোগানের পরিমাণকে বলা হয় ভারসাম্য পরিমাণ (Equilibrium quantity)। অর্থনীতির একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো 'বাজার ভারসাম্য'। বাজার ভারসাম্য দু'ধরনের হয়ে থাকে। যথা-

(১) আংশিক বাজার ভারসাম্য (Equilibrium in Partial Market)

(২) সামগ্রিক বাজার ভারসাম্য (Equilibrium in General Market)

(১) আংশিক বাজার ভারসাম্য ঃ

চাহিদা বিধি বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে চাহিদা অপেক্ষক ধারণাটি একটি গুরুত্বপূর্ণ ধারণা হিসেবে অভিহিত। অর্থনীতিতে চাহিদা অপেক্ষক বলতে দামের সাথে চাহিদার যে নির্ভরশীলতা তথা কার্যকারণগত সম্পর্ক বিদ্যমান তাকে বুঝিয়ে থাকে। যেমন, $Q = f(P)$, এখানে P = দাম, Q = দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণ, f =অপেক্ষক। আমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়ে জেনেছি চাহিদা বিধিতে শুধুমাত্র দামকে পরিবর্তনশীল ধরে চাহিদার উপর প্রভাব বিস্তারকারী অন্যান্য উপাদান, যেমন ভোক্তার আয় (Y), রুচি-পছন্দ (T), সম্পর্কিত দ্রব্যের দাম (Pr) তথা পরিপূরক দ্রব্যের দাম ও পরিবর্তক দ্রব্যের দাম ইত্যাদিকে স্থির ধরে নেয়া হয়। কিন্তু বাস্তবে এসব উপাদান পরিবর্তনশীল এবং চাহিদার উপর এগুলো যথেষ্ট প্রভাব বিস্তার করে থাকে। এজন্য চাহিদা অপেক্ষককে এভাবেও প্রকাশ করা যায়-

$Q =f(P, Y, T, Pr)$।

অন্যান্য উপাদানগুলোর চেয়ে দ্রব্যের দামের উপর দ্রব্যের চাহিদা সবচেয়ে বেশি প্রভাবিত হয় বলে অন্যান্য উপাদানকে স্থির ধরে শুধুমাত্র দামকে পরিবর্তনশীল বলে ধরে নেয়া হয়।

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা জেনেছি যে, দামের সাথে যোগানের সরাসরি বা ধনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যমান। অর্থাৎ দাম বাড়লে যোগান বাড়ে এবং দাম কমলে যোগান কমে। যোগান অপেক্ষকে মূলত দামের সাথে যোগানের কার্যকারণগত সম্পর্ক প্রকাশ পায়।

যোগান অপেক্ষক হচ্ছে; $S=f(P)$,

এখানে P = দাম, S = যোগানের পরিমাণ, f = অপেক্ষক।

এবার আমরা একটি উদাহরণের সাহায্যে ভারসাম্য দাম ও দ্রব্যের পরিমাণ নির্ণয় করব।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, একটি পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক বাজারে চাহিদা অপেক্ষক ও যোগান অপেক্ষক যথাক্রমে $Q_d = 200\text{-}3P$ এবং $Q_s = 4P\text{-} 80$ । ভারসাম্য দাম ও দ্রব্যের পরিমাণ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ আমরা জানি, ভারসাম্য অবস্থায় চাহিদা ও যোগান পরস্পর সমান হয়। ফলে এক্ষেত্রে $Q_d =Q_s$ হবে।

সুতরাং $200-3p = 4p-80$

বা, $-7p = -80-200$

বা, $-7p = -280$

বা, $P = 40$

সুতরাং ভারসাম্য দাম $(P) = 40$ টাকা

এখন $P= 40$ চাহিদা বা যোগান অপেক্ষকের যে কোন একটিতে বসিয়ে ভারসাম্য দ্রব্যের পরিমাণ নির্ণয় করা যায়। যেমন,

$Q_d = 200-3P$

বা, $Q_d = 200 -(3 \times 40)$

$Q_d = 200-120$

$\therefore Q_d = 80$

$Qs = 4p-80$

বা, $Qs = 4 \times 40 -80$

$= 160-80$

$\therefore Qs = 80$

উপরের উদাহরণ থেকে বোঝা যায় যে, বাজারে 40 টাকা দাম ধার্য হলে ভারসাম্য প্রতিষ্ঠিত হবে। এই দামের বেশি বা কম দামে ভারসাম্য অর্জিত হবে না। কেননা এক্ষেত্রে চাহিদা ও যোগানের মধ্যে সমতা আসবে না। যেমন, দাম যদি 45 টাকা হয় তবে চাহিদার পরিমাণ;

$Q_d = 200- 3 \times 45$

$= 200 - 135$

$Q_d = 65$

কিন্তু এই দামে যোগান,

$Q_s = 4 \times 45 - 80$

$= 180 - 80$

$= 100$

$Q_s = 100$

এক্ষেত্রে যোগান, চাহিদার চেয়ে বেশি। ফলে এই 45 টাকা দাম ধার্য হলে অনেক দ্রব্য অবিক্রিত অবস্থায় পড়ে থাকবে। এক সময় দাম কমে 40 টাকা হলে ভারসাম্য অর্জিত হবে।

আবার, দাম যদি 35 টাকা হয় তবে চাহিদার পরিমাণ হয়;

$Q_d = 200- 3 \times 35$

$= 200 - 105$

$= 95$

$Q_d = 95$

এই দামে যোগানের পরিমাণ;

$Qs = 4 \times 35 - 80$

$= 140 - 80$

$= 60$

$Qs = 60$

এক্ষেত্রে যোগানের চেয়ে চাহিদার পরিমাণ বেশি। ফলে দ্রব্যটি পাওয়ার জন্য ক্রেতাদের মধ্যে প্রতিযোগিতা বাড়বে এবং এক সময় দাম বৃদ্ধি পেয়ে 40 টাকা হবে। সুতরাং 40 টাকা হলো বাজার ভারসাম্য দাম।

চিত্রের সাহায্যেও ভারসাম্য দাম ও পরিমাণ দেখানো যায়।

চিত্র-৪.১.১ ঃ বাজার ভারসাম্য

চিত্রানুযায়ী D ও S রেখা পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। ফলে E বিন্দুতে ভারসাম্য অর্জিত হয়েছে। চিত্র থেকে লক্ষ্যণীয় যে, ভারসাম্য দাম 40 টাকা এবং ভারসাম্য দ্রব্যের পরিমাণ 80।

বাজার ভারসাম্যে কর (Tax) -এর প্রতিক্রিয়া

অনেক সময় সরকার দ্রব্যের উপর কর আরোপ করে থাকে। সাধারণত ঃ এই কর দুই প্রকার হতে পারে। যেমন - (ক) নির্দিষ্ট কর, (খ) বিক্রয় মূল্যের উপর কর বা বিক্রয় কর।

(ক) নির্দিষ্ট কর (Specific tax) ঃ দ্রব্যের মূল্য যাই হোক না কেন দ্রব্যের একক প্রতি যে করারোপ করা হয় তাকে নির্দিষ্ট কর (Specific tax) বলে। যেমন, প্রতি ডজন কলমে ২ টাকা করে কর ধার্য করা হলো। এটি নির্দিষ্ট কর।

(খ) বিক্রয় কর (Sales tax) ঃ দ্রব্যের মূল্যের উপর যে কর ধার্য করা হয়, তাকে বিক্রয় কর (Sales tax) বলে। যেমন, কলমের মূল্যের উপর ২% হারে কর ধার্য করা হলে তাকে বিক্রয় কর বলে। এখানে দ্রব্যের একক প্রতি কর ধার্য না করে দ্রব্যের মূল্যের উপর শতকরা হারে কর ধার্য করা হয়।

ক. নির্দিষ্ট করের প্রতিক্রিয়া

মনে করি, প্রাথমিক চাহিদা রেখা $Q_d = 200 - 3P$ এবং যোগান রেখা, $Qs = 4P - 80$। এক্ষেত্রে সমাধান করে ভারসাম্য দাম হয় 40 টাকা এবং ভারসাম্য দ্রব্যের পরিমাণ 80 একক। ধরি সরকার বিক্রেতার উপর দ্রব্যের একক প্রতি 5 টাকা করে নির্দিষ্ট কর ধার্য করল। এ অবস্থায় বিক্রেতা দ্রব্যটি যদি 25 টাকায় বিক্রি করে তবে সে পাবে তথা তার অবশিষ্ট থাকবে (25-5)=20 টাকা। আবার বিক্রেতা যদি দ্রব্যটি 60 টাকায় বিক্রি করে তবে সে পায় (60-5)=55 টাকা। ফলে বিক্রেতার নতুন যোগান হবে

$$Q'_s = 4(p-5)-80$$
$$= 4p-20-80$$
$$= 4p-100$$

এখানে নতুন ভারসাম্য অবস্থায়

$Qd = Q'_s$

বা, $200-3p = 4p-100$

বা, $-7p = -300$

বা, $p = \frac{300}{7} = 42.86$

$\therefore$ $p = 42.86$

সুতরাং কর ধার্যের ফলে নতুন ভারসাম্য দাম হবে 42.86 টাকা। কিন্তু কর ধার্যের পূর্বে ভারসাম্য দাম ছিল 40 টাকা। ফলে একক প্রতি কর ধার্যের পরিমাণ 5 টাকা হলেও দ্রব্যের দাম বৃদ্ধি পায় একক প্রতি (42.86-40) =2.86 টাকা। এই 2.86 টাকা ভোক্তা এবং বাকি (5 - 2.86) = 2.14 টাকা বিক্রেতাকে বহন করতে হবে। যেহেতু বিক্রেতার উপর কর ধার্য হয়েছে, তাই দ্রব্যটি 42.86 টাকা বিক্রয় করলেও কর দেওয়ার পর সে পাবে (42.86-5) = 37.86 টাকা।

কর ধার্যের আগে ভারসাম্য বিক্রির পরিমাণ ছিল 80 একক। কিন্তু কর ধার্যের পর ভারসাম্য বিক্রির পরিমাণ দাঁড়ায়, 200- (3 x 42.86) = 200 - 128.58 = 71.42 একক। সুতরাং একক প্রতি 5 টাকা করে কর ধার্যের ফলে সরকারের আয় হবে, 5 x 71.42 = 357.10 টাকা, কিন্তু 5 x 80 = 400 টাকা নয়। কারণ কর ধার্য হলে দ্রব্যের ক্রয়-বিক্রয়ের পরিমাণ কমে যায় এবং বিক্রেতা ভারসাম্য দাম হতে একক প্রতি 2.14 টাকা কম পায় এবং ক্রেতা ভারসাম্য দাম হতে একক প্রতি 2.86 টাকা বেশী প্রদান করে। এখানে উল্লেখ্য যে, করের বোঝা বন্টন কি পরিমাণ হবে তা সম্পূর্ণভাবে নির্ভর করবে বাজার চাহিদা ও যোগানের নমনীয়তার উপর।

ক্রেতার উপর করের প্রতিক্রিয়া

কর ধার্যের পর ক্রেতার নতুন চাহিদা রেখা হবে ঃ-

$$Qd = 200- 3 (P+5)$$
$$= 200 - 3P - 15$$
$$= 185 - 3p$$

ফলে নতুন ভারসাম্য দাম নির্ধারিত হবে

$185 - 3p = 4p - 80$

বা, $-7p = -265$

বা, $P = 37.86$

সুতরাং বাজারে দ্রব্যটির মূল্য হবে 37.86 টাকা যা বিক্রেতা দ্রব্য বিক্রি করে পাবে। যেহেতু ভোক্তার উপর একক প্রতি 5 টাকা করে কর ধার্য হয়েছে তাই করসহ ভোক্তাদের প্রতি একক দ্রব্যের জন্য ব্যয় হবে- (37.86 + 5) = 42.86 টাকা। কিন্তু কর ধার্যের পূর্বে ভোক্তাদেরকে 40 টাকা দিতে হতো। ফলে এখন ভোক্তাদেরকে পূর্বের তুলনায় (42.86 - 40) = 2.86 টাকা বেশি দিতে হবে। আর বিক্রেতাকে (5-2.86)=2.14 টাকা বহন করতে হবে। এক্ষেত্রে দ্রব্যের পরিমাণ হবে 71.42 একক। সুতরাং দেখা যায় যে, নির্দিষ্ট কর ক্রেতা বা বিক্রেতা যার উপরই ধার্য করা হোক না কেন ফলাফল একই থাকে।

বিক্রেতার উপর কর ধার্য হলে যোগান রেখা কার্যকরী হবে এবং করের পরিমাণ দাম থেকে বাদ দিয়ে নতুন যোগান রেখা তৈরী করতে হবে। অন্যদিকে ক্রেতার উপর কর ধার্য হলে চাহিদা রেখা কার্যকরী হবে এবং দামের সাথে করের পরিমাণ যোগ করে নতুন চাহিদা রেখা তৈরী করতে হবে।

খ. বিক্রয় করের প্রতিক্রিয়া

এই কর দ্রব্যের একক প্রতি আরোপ না করে দ্রব্যের মূল্যের উপর শতকরা হারে আরোপ করা হয়।

মনে করি, প্রাথমিক চাহিদা ও যোগান রেখা যথাক্রমে Qd = 200- 3P এবং Qs = 4P- 80। বিক্রেতার উপর শতকরা 5 টাকা হারে বিক্রয় কর ধার্য করা হয়েছে। এর ফলে বিক্রেতা কোন দ্রব্য 60 টাকা বিক্রয় করলে কর দেয়ার পর অবশিষ্ট থাকে, 60- (.05∞60) = 60-37 = 57 এবং 50 টাকা বিক্রি করলে কর দেয়ার পর অবশিষ্ট থাকে 50 - (.05 ∞ 50) = 50-2.5 = 47.50 টকা।

শতকরা 5 টাকা বিক্রেতার উপর কর ধার্যের ফলে নতুন যোগান রেখা হবে,

$$Q'_S = 4(P- 0.05P) - 80$$

$$= 4P - 0.20p - 80$$
$$= P(4 - 0.20) - 80$$
$$Q'_S = 3.80P - 80$$

নতুন ভারসাম্য অবস্থায়,

$$Q_d = Q'_s$$

বা, $200 - 3p = 3.80P - 80$

বা, $-3P - 3.80P = -280$

বা, $-P(3 + 3.80) = -280$

বা, $6.80P = 280$

বা, $P = \frac{280}{6.80}$

$= 41.18$ টাকা

সুতরাং 5% বিক্রয় কর আরোপ করার ফলে দ্রব্যমূল্য 40 থেকে বেড়ে 41.18 টাকা হবে। অর্থাৎ দাম বৃদ্ধি পেয়েছে (41.18 - 40) = 1.18 টাকা যা ক্রেতা বহন করবে। যেহেতু বিক্রেতার উপর কর ধার্য হয়েছে তাই বিক্রেতাকে বিক্রয় মূল্য 41.18-এর উপর 5% হারে মোট .05 x 41.18 = 2.06 টাকা কর সরকারকে দিতে হবে। এর মধ্যে ক্রেতা বহন করেছে 1.18 টাকা, বাকী 2.06-1.18 = 0.88 টাকা বহন করতে হবে বিক্রেতাকে। এখন 41.18 দামে বিক্রির পরিমাণ হবে, 200 - 3 x 41.18 = 76.46 একক। ফলে সরকারের রাজস্ব (আয়) প্রাপ্তি হবে; 2.06 x 76.46 = 157.51 টাকা।

বিক্রেতার পরিবর্তে ক্রেতার উপর কর আরোপ ঃ

ক্রেতার উপর 5% কর আরোপ হলে ক্রেতা পূর্বে যে দ্রব্য ক্রয় করতো 60 টাকায় এখন তাকে সেই দ্রব্য ক্রয় করতে হবে, 60+0.05 x 60 = 63.00 টাকায়।

এক্ষেত্রে ক্রেতার নতুন চাহিদা রেখা রেখা হবে :-

$$Q'd = 200 - 3\,(P+0.05P)$$

বা, $Q'd = 200 - 3P - .15P$

এখন নতুন ভারসাম্য অবস্থায়

$$Q'd = Q's$$

$200 - 3p - 15P = 4P - 80$

বা, $-7.15P = -280$

বা, $P = \frac{280}{7.15}$

বা, $P = 39.16$

দ্রব্যটির বাজার মূল্য হবে 39.16 টাকা। কিন্তু যেহেতু ক্রেতার উপর কর আরোপ করা হয়েছে তাই ক্রেতাকে কর হিসেবে আরও 39.16 x .05 = 1.96 টাকা অতিরিক্ত দিতে হবে।

এর ফলে ক্রেতার একক প্রতি মোট ব্যয় হবে 39.16+1.96 = 41.12 টাকা। কর ধার্যের আগে ক্রেতাকে দিতে হতো 40 টাকা। ফলে ক্রেতা কর বাবদ বেশি দিচ্ছে নিট 41.12-40 = 1.12 টাকা। করের অবশিষ্ট 1.96 - 1.12 = 0.84 টাকা বিক্রেতাকে দিতে হবে। বিক্রেতা কর আরোপের পূর্বে দ্রব্য বিক্রি করতো 40 টাকায়, এখন বিক্রি করে 39.16 টাকায়। এই টাকায় বিক্রির পরিমাণ 4 (39.16)-80 = 156.64 - 80.80 = 76.64 একক। ফলে সরকারি আয় হবে 76.64 x 1.96 = 150.21 টাকা।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে এটা স্পষ্ট যে, বিক্রেতার উপর 5% বিক্রয় কর ধার্য করলে দ্রব্য মূল্য হয় 41.18 টাকা। এক্ষেত্রে সরকারি আয় প্রাপ্তি হচ্ছে 157.51 টাকা। অপর দিকে ক্রেতার উপর 5% বিক্রয় কর ধার্য হলে দ্রব্যমূল্য হয় 39.16 টাকা। এ অবস্থায় সরকারী আয় প্রাপ্তি 150.21 টাকা।

বাজার ভারসাম্যে ভর্তুকির (Subsidy) প্রতিক্রিয়া

যোগান অপেক্ষকে ভর্তুকির হার যোগ করতে হয়। কেননা ভর্তুকির ফলে উৎপাদনকারীর ব্যয় হ্রাস পায়।
মনে করি প্রাথমিক অবস্থায় চাহিদা ও যোগান অপেক্ষক

$Qd = 200 - 3P$...........(1)

$Qs = 4p - 80$ .....(2)

যদি s হারে ভর্তুকি প্রদান করা হয়, তবে নতুন যোগান অপেক্ষক দাঁড়াবে

$Q's = 4(p+s)-80$

এখন $s = 1$ হলে, $Q's = 4(p+1)-80$

$= 4p + 4-80$

$= 4p - 76$ ....(3)

নতুন ভারসাম্য, $Qd = Q's$

অর্থাৎ, $200-3p = 4p-76$ [(1) ও (3) থেকে]

বা, $7p = 276$

বা, $p = \frac{276}{7}$

বা, $p = 39.43$

$\therefore P = 39.43$

(1) নং সমীকরণে P এর মান বসিয়ে পাই,

$Qd = 200-3(39.43)$

$= 200-118.29$

$= 81.71$

$\therefore Qd = 81.71$

সুতরাং এক্ষেত্রে মোট ভর্তুকি বা সরকারের ব্যয় হবে, $s = 1 \times 81.71 = 81.71$ টাকা

(২) সামগ্রিক বাজার ভারসাম্য ঃ

কোন দ্রব্যের চাহিদা ও যোগান শুধু সেই দ্রব্যের দামের উপরই নির্ভর করে না, অন্যান্য সংশ্লিষ্ট দ্রব্য যেমন- বিকল্প বা পরিপূরক দ্রব্যের দামের উপরও নির্ভর করে।

মনে করি, বাজারে দুটি দ্রব্য আছে এবং দ্রব্য দুটির পৃথক পৃথক চাহিদা ও যোগান রেখা আছে যা শুধু সেই দ্রব্যের উপরই নির্ভর করে না বরং অপর দ্রব্যের দামের উপরও নির্ভরশীল। এক্ষেত্রে ভারসাম্য হতে হলে প্রত্যেকটি দ্রব্যের চাহিদা ও যোগান সমান হতে হবে।

ধরা যাক, দুটি পরস্পর সম্পর্কিত বাজারের সমীকরণ হচ্ছে :-

(i) $Qd_1 = 10 - 2P_1 + P_2$

$Qs_1 = -2 + 3P_1$

(ii) $Qd_2 = 15 - P_1 - P_2$

$Qd_2 = -1 + 2P_2$

সুতরাং Q_1 দ্রব্যের চাহিদা = যোগান হলে,

$Qd_1 = Qs_1$

বা, $10 - 2P_1 + P_2 = -2 + 3P_1$

বা, $-5P_1 + P_2 = -12$

বা, $5P_1 - P_2 = 12$ (1)

Q_2 দ্রব্যের চাহিদা = যোগান হলে,

$Qd_2 = Q_{s2}$

$15 - P_1 - P_2 = -1 + 2P_2$

বা, $-P_1 - 3P_2 = -16$

বা, $P_1 + 3P_2 = 16$ (2)

(1) ও (2) কে সমাধান করে,

(1) x 3 এবং (2) x 1 করে,

$15P_1 - 3P_2 = 36$

$P_1 + 3P_2 = 16$

$16P_1 = 52$

বা, $P_1 = 3.25$

(1)-এ P_1-এর মান বসিয়ে

$5P_1 - P_2 = 12$

বা, $P_2 = -12 + 5P_1$

$= -12 + 5\ (3.25)$

$= -12 + 16.25$

$\therefore \quad P_2 = 4.25$

সুতরাং Q_1 দ্রব্যের পরিমাণ হবে :-

$Qs_1 = -2 + 3P_1$

$= -2 + 3\ (3.25)$

$= -2 + 9.75$

$Qs_1 = 7.75$

Q_2 দ্রব্যের পরিমাণ হবে :-

$Qs_2 = -1 + 2P_2$

$= -1 + 2\ (4.25)$

$= -1 + 8.50$

$Qs_2 = 7.50$

দুটি দ্রব্যের উপর কর আরোপ করলে বা ভর্তুকি প্রদান করলে তার প্রতিক্রিয়া

দুটি দ্রব্য X ও Y -এর চাহিদা অপেক্ষক যথাক্রমে $X_d = 5\text{-}P_x + P_y$ ও $Y_d = 10\text{-}P_x\text{-}P_y$ এবং যোগান অপেক্ষকদ্বয় যথাক্রমে, $X_s = -5+P_x + P_y$ এবং $Y_s = -2\text{-}Px + 2P_y$। x দ্রব্যের উপর 0.50 টাকা কর ধার্য এবং y দ্রব্যের উপর 0.50 টাকা ভর্তুকি প্রদান করা হলে ভারসাম্য দাম, দ্রব্যের পরিমাণ এবং নিট সরকারি রাজস্বের পরিমাণ কি হবে?

কর ও ভর্তুকি প্রদানের ফলে X ও Y দ্রব্যের নতুন যোগান অপেক্ষক হবে,

$X's = -5 + (P_x - 0.50) + (P_y + 0.50)$

বা, $X's = -5 + P_x - 0.50 + P_y + 0.50$

বা, $X's = -5 + P_x + P_y$

$Y's = -2 - (P_x - 0.50) + 2(P_y + 0.50)$

$= -2 - P_x + 0.50 + 2P_y + 1$

$= -2 - P_x + 1.50 + 2Py$

$Y's = -0.50 - P_x + 2P_y$

X দ্রব্যের নতুন ভারসাম্য ঃ

$X_d = X's$

$\therefore \quad 5 - P_x + P_y = -5 + P_x + P_y$

বা, $-2P_x = -10$

$\therefore \quad P_x = 5$

Y দ্রব্যের নতুন ভারসাম্য ঃ

$Yd = Y's$

বা, $10 - Px - Py = -.50 - P_X + 2P_y$

বা, $-3Py = -10.50$

বা, $Py = \frac{10.50}{3}$

$\therefore\ Py = 3.50$

এখন চাহিদা অপেক্ষকে P_X ও P_y -এর মান বসিয়ে,

$X_d = 5 - P_X + P_y$

বা, $Xd = 5 - 5 + 3.50$ [$Px = 5$ বসিয়ে]

$\therefore\ Xd = 3.50$

আবার, $Yd = 10 - Px - Py$

$= 10 - 5 - 3.50$ [$Px = 5$ এবং $P_y = 3.50$ বসিয়ে]

$= 10 - 8.50$

$\therefore\ Yd = 1.50$

প্রতি একক X দ্রব্যের উপর 0.50 টাকা কর ধার্য হওয়ায় সরকারের মোট রাজস্ব প্রাপ্তি ঃ-

= x দ্রব্যের পরিমাণ ∞ 0.50

$= 3.50 \infty 0.50$

= 1.75 টাকা

প্রতি একক Y দ্রব্যের উপর 0.50 টাকা ভর্তুকি প্রদানের ফলে সরকারি মোট ব্যয় ঃ

= Y দ্রব্যের পরিমান ∞ 0.50

$= 1.5 \times 0.50$

$= 0.75$

সুতরাং সরকারি নিট রাজস্ব প্রাপ্তি = $1.75 - 0.75 = 1$ টাকা

সারমর্ম ঃ *অন্যান্য বিষয়গুলোর প্রভাব স্থির বিবেচনা করে শুধুমাত্র একটি চলক এর প্রেক্ষিতে যখন ভারসাম্য নির্ণয় করা হয় তখন তাকে আংশিক বাজার ভারসাম্য বলা হয়। পক্ষান্তরে দ্রব্যের উপর প্রভাব বিস্তারকারী অন্যান্য সব বিবেচনায় এনে যখন ভারসাম্য নির্ণয় করা হয়, তাকে সামগ্রিক বাজার ভারসাম্য বলে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। ভর্তুকির ফলে উৎপাদনকারীর ব্যয় বৃদ্ধি পায়।

২। কর ধার্যের ফলে দ্রব্যের ক্রয়-বিক্রয়ের পরিমাণ বেড়ে যায়।

পাঠ-৪.২

অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- অনমনীয় বিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন।

অর্থনীতির একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হলো সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিম্নকরণ সমস্যার সমাধান করা যা অর্থনীতিতে কাম্যকরণ (Optimization) বলে অভিহিত করা হয়।

কোন অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কন করলে সরল রেখা বা বক্র রেখা পাওয়া যায়। বক্র রেখাসমূহ নিচের দিক থেকে উত্তল (Convex downward) '$\cup$' আকৃতির বা নিচের দিকে অবতল (Concave downward) '$\cap$' আকৃতির অথবা একই রেখা নির্দিষ্ট এলাকায় (domain) উত্তল এবং নির্দিষ্ট এলাকায় অবতল হতে পারে।

কোন অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কন করলে যদি এর উপরিস্থ কোন বিন্দুতে অপরাপর বিন্দু অপেক্ষা এর মান বেশি হয় তবে তাকে উক্ত অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান (Maxima) বলা হয়। লেখচিত্র অঙ্কন না করে গাণিতিক উপায়ে অপেক্ষকের এরূপ মান নির্ণয় পদ্ধতিকে সর্বোচ্চকরণ পদ্ধতি (Maximisation) বলা হয়।

অপরদিকে লেখ চিত্র অঙ্কন করলে যদি এর উপরিস্থ কোন বিন্দুতে অপরাপর বিন্দু অপেক্ষা এর মান কম হয় তবে তাকে উক্ত অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মান (Minima) বলে। গাণিতিক উপায়ে অপেক্ষকের এরূপ মান নির্ণয়ের পদ্ধতিকে সর্বনিম্নকরণ পদ্ধতি (Minimisation) বলা হয়।

উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক (Objective Function) ঃ

যে অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা হয় তাকে উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক বলা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক সর্বদা অএকমাত্রিক (Non-linear) হবে। কারণ একমাত্রিক (linear) অপেক্ষকের কোন সর্বোচ্চ মান বা সর্বনিম্ন মান নেই।

সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিম্নকরণের শর্ত নির্ধারণ ঃ

আমরা প্রথমে একটি মাত্র স্বাধীন চলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে [অর্থাৎ $y = f(x)$] কিভাবে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বের করা হয় এবং তার শর্ত কি তা আলোচনা করব।

সর্বোচ্চকরণের শর্ত ঃ

মনে করি, $y = f(x)$ একটি অপেক্ষক। সর্বোচ্চকরণের ক্ষেত্রে এই অপেক্ষকের চিত্ররূপ হবে নিচের দিকে অবতল (Concave downward) আকৃতির।

চিত্র-৪.২.১ ঃ সর্বোচ্চকরণ

উপরোক্ত চিত্র থেকে দেখা যায় যে, T বিন্দু হচ্ছে সর্বোচ্চ বিন্দু অর্থাৎ $y=f(x)$ অপেক্ষকটি x_0 মানে y-এর সর্বোচ্চ মান নির্দেশ করে।

শর্ত ঃ সর্বোচ্চকরণের ক্ষেত্রে দুটি শর্ত পালন করতে হয়। যথা-(১) প্রাথমিক শর্ত ও (২) পর্যাপ্ত শর্ত।

(১) প্রাথমিক শর্ত (Primary Condition) ঃ এক্ষেত্রে প্রথম পর্যায়ের অন্তরকরণের মান (first order derivative) শূন্য হবে। অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$ হতে হবে। এটাকে অর্থনীতির ভাষায় অত্যাবশ্যকীয় বা প্রয়োজনীয় শর্ত (Necessary Condition) বলা হয়। এটাকে অনেক সময় ১ম পর্যায়ের শর্ত (First order Condition) ও বলা হয়ে থাকে। এই শর্তে বলা হয় যে, অপেক্ষকটির যে বিন্দুতে ঢাল (Slope) শূন্য হয় সেখানে সর্বোচ্চকরণের প্রাথমিক শর্ত পালিত হয়।

(২) পর্যাপ্ত শর্ত (Sufficient Condition) ঃ প্রাথমিক শর্ত পালিত হলেই সর্বোচ্চকরণ নিশ্চিত হয় না। এই নিশ্চয়তার জন্য যে শর্তটি পালিত হতে হয় তার নাম পর্যাপ্ত শর্ত। এই শর্তে বলা হয় যে, দ্বিতীয় পর্যায়ের অন্তরকরণের মান (Second order derivative) শূন্যের চেয়ে কম হতে হবে। অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হবে। এর দ্বারা প্রকাশ পায় যে, ঢালের পরিবর্তনের হার ঋণাত্মক হতে হবে। এই শর্তটিকে দ্বিতীয় পর্যায়ের শর্তও (Second order Condition) বলা হয়ে থাকে।

কোন অপেক্ষকের ঢালের পরিবর্তনের হার ঋণাত্মক হলে অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হলে অপেক্ষকটি হয় অবতলাকৃতি। সুতরাং রেখাটি অবতল হলে সর্বোচ্চ বিন্দু পাওয়া সম্ভব।

একটি অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মানের প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্তের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ঃ

মনে করি, একটি আয় অপেক্ষক, $y = f(x)$। এখানে y = উৎপাদন এবং x = উৎপাদনের উপকরণের পরিমাণ যেমন-শ্রমের পরিমাণ। $y = f(x)$ এর ক্ষেত্রে y অধীন চলক এবং x স্বাধীন চলক। আমাদের লক্ষ্য হচ্ছে উৎপাদন (y) কে সর্বোচ্চকরন। এর জন্য উৎপাদনের উপাদানের পরিমাণকে (x) এমন পর্যায়ে নির্ধারণ করতে হবে যাতে y সর্বোচ্চ হয়।
ox অক্ষে উপকরণের পরিমাণ (x) এবং oy অক্ষে উৎপাদনের (y) পরিমাপ দেখানো হয়েছে।

চিত্র-৪.২.২ ঃ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মানের প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্তের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

$y = f(x)$ রেখাটি অবতলাকৃতি একটি রেখা, যায় উপর A, M ও B তিনটি বিন্দু। A বিন্দুতে $P_1 P_1$, M বিন্দুতে $P_2 P_2$ এবং B বিন্দুতে $P_3 P_3$ তিনটি স্পর্শক আঁকা হয়েছে। চিত্রানুসারে M বিন্দু হচ্ছে রেখাটির সর্বোচ্চ বিন্দু। কেননা M বিন্দুতে প্রাপ্ত y-এর মান অন্যান্য বিন্দু যেমন, A ও B বিন্দুর তুলনায় বেশি। M বিন্দুতে $P_2 P_2$ একটি স্পর্শক অংকন করা হয়েছে যা ভূমি অক্ষ (OX) এর সমান্তরাল। ফলে M বিন্দুতে ফাংশনটির ঢাল শূন্য। অর্থাৎ এই M বিন্দুতে x-এর পরিবর্তনে y-এর পরিবর্তনের পরিমাণ শূন্য। সুতরাং ফাংশনটির ঢাল $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে। এটাই সর্বোচ্চকরণের প্রাথমিক শর্ত নির্দেশ করছে। এই শর্তের দ্বারা উপকরণের একটি স্তর পাওয়া যায়, যেমন, চিত্র থেকে $x = a$ যার দ্বারা উৎপাদন সর্বোচ্চ হতে পারে। এখন উপকরনের পরিমাণ a^2 পর্যন্ত বৃদ্ধি করা হলো যা চিত্রে B বিন্দু প্রকাশ করছে। চিত্রানুসারে B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক (tangent) ডানদিকে নিম্নগামী। অর্থাৎ এর ঢাল (Slope) ঋণাত্মক। এর থেকে প্রকাশ পায় যে, উপকরণের পরিমাণ সামান্য বৃদ্ধির ফলে $y = f(x)$ রেখার ঢালের পরিবর্তনের হার ঋণাত্মক হবে। আমরা জানি, ঢালের পরিবর্তনের হার হচ্ছে

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ । ফলে $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ হবে। এটা সর্বোচ্চকরণের পর্যাপ্ত শর্ত নির্দেশ করছে।

সুতরাং অপেক্ষকটির M বিন্দু সর্বোচ্চ উৎপাদন প্রকাশ করছে।

অতএব, সর্বোচ্চকরনের প্রাথমিক শর্ত ঃ $\frac{dy}{dx} = 0$ বা $f'(x) = 0$ এবং

পর্যাপ্ত শর্ত ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ বা $f''(x) < 0$।

সর্বনিম্নকরণের শর্ত ঃ

মনে করি, $y = f(x)$ একটি অপেক্ষক। সর্বনিম্নকরণের ক্ষেত্রে এই অপেক্ষকের চিত্ররূপ হবে নিচের দিক থেকে উত্তল (Convex downward) আকৃতির।
চিত্রানুসারে L হচ্ছে সর্বনিম্ন বিন্দু।

চিত্র-৪.২.৩ ঃ সর্বনিম্নকরণ

সর্বনিম্নকরণের ক্ষেত্রে দুটি শর্ত পালন করতে হয়। যথা ঃ- (১) প্রাথমিক শর্ত ও (২) পর্যাপ্ত শর্ত।

(১) প্রাথমিক শর্ত ঃ প্রাথমিক শর্ত হচ্ছে, প্রথম পর্যায়ের অন্তরকরণের মান শূন্য হবে। অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = 0$।
এটাকে অর্থনীতির ভাষায় সর্বনিম্নকরণের প্রয়োজনীয় বা অত্যাবশ্যকীয় শর্ত (Necessary Condition) বলা হয়। এটাকে অনেক সময় **১**ম পর্যায়ের শর্তও বলা হয়। এই শর্তে বলা হয় যে, অপেক্ষকটির যে বিন্দুতে ঢাল (Slope) শূন্য হয় সেখানে সর্বনিম্নকরণের প্রাথমিক শর্ত পালিত হয়।

(২) পর্যাপ্ত শর্ত ঃ সর্বনিম্নকরণের জন্য অপর একটি শর্ত পালিত হয়, যা সর্বনিম্নকরণের জন্য একটি পর্যাপ্ত শর্ত। এই শর্তে বলা হয় যে, দ্বিতীয় পর্যায়ের অন্তরকরণের মান (Second Order Derivative) শূন্যের চেয়ে বেশি হতে হবে। অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হবে। এই শর্তটিকে দ্বিতীয় পর্যায়ের শর্ত (Second Order Condition)–ও বলা হয়ে থাকে।
কোন অপেক্ষকের ঢালের পরিবর্তনের হার ধণাত্মক হলে অপেক্ষকটি হয় উত্তলাকৃতি। সুতরাং রেখাটি উত্তল হলে সর্বনিম্ন বিন্দু পাওয়া সম্ভব।

একটি অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মানের প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্তের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

মনে করি, গড় ব্যয় অপেক্ষক $y = f(x)$। এখানে y = গড় ব্যয় (AC) এবং X = উৎপাদনের পরিমাণ। এই অপেক্ষকে x স্বাধীন চলক ও y অধীন চলক। অর্থাৎ এক্ষেত্রে x-এর উপর y-এর নির্ভরশীলতা প্রকাশ পায়। আমাদের উদ্দেশ্য হচ্ছে গড় ব্যয় (AC) সর্বনিম্ন করা। সুতরাং x-এর পরিমাণকে এমন এক পর্যায়ে নির্ধারণ করা উচিত যাতে গড় ব্যয় (AC) সর্বনিম্ন হয়। অপেক্ষকটিকে চিত্ররূপ দেয়া হলো ঃ-
OX অক্ষে উৎপাদনের পরিমাণ (x) এবং oy অক্ষে গড় ব্যয় (y) পরিমাপ করা হয়েছে।

চিত্র-৪.২.৪ ঃ অপেক্ষকের সর্বনিম্নমানের প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্তের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

চিত্রানুযায়ী N বিন্দু হচ্ছে $y = f(x)$ রেখার সর্বনিম্ন বিন্দু। কেননা এই রেখার অন্যান্য বিন্দু যেমন A ও B-এর চেয়ে N বিন্দুতে AC-এর মান কম। N বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক P_2P_2 ভূমি অক্ষের সমান্তরাল। ফলে N বিন্দুতে এই রেখার ঢাল (Slope) শূন্য হবে। অর্থাৎ N বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = 0$ হবে। এটাই সর্বনিম্নকরণ সমস্যার প্রাথমিক শর্ত প্রকাশ করে। এই শর্ত থেকে x এর এমন একটি মান পাওয়া যায় যাতে AC সর্বনিম্ন হতে পারে। চিত্রানুসারে এক্ষেত্রে তা $x = a$ দ্বারা নির্দেশিত। এখন উৎপাদনের পরিমাণ a_2 পরিমাণে সামান্য বৃদ্ধি করা হলো যা চিত্রে B বিন্দু নির্দেশ করছে। এই B বিন্দুতে অঙ্কিত $P_3\ P_3$ স্পর্শক ডানদিকে উর্ধ্বগামী। এর দ্বারা প্রকাশ পায় যে, x-এর মানের পরিবর্তনে y -এর মানের পরিবর্তনের হার ধণাত্মক অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ হবে। এটা সর্বনিম্নকরণের পর্যাপ্ত শর্ত নির্দেশ করছে। সুতরাং অপেক্ষকটির N বিন্দুতে গড় ব্যয় সর্বনিম্ন তা প্রকাশ পায়।

অতএব, সর্বনিম্নকরণের প্রাথমিক শর্ত ঃ $\frac{dy}{dx} = 0$ বা, $f'(x) = 0$ এবং

পর্যাপ্ত শর্ত ঃ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ বা $f''(x) > 0$

উদাহরণ-১ ঃ প্রদত্ত $y = 5x^2 - 10x$, অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্দেশ করুন।

সমাধান ঃ অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয়ের প্রাথমিক পর্যায়ের শর্ত (First Order Condition),

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^2 - 10x) = 0$$

বা, $10x - 10 = 0$

বা, $x = 1$

এখন, $x=1$ মানের জন্য y এর মান সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন হবে তা নির্দেশ করার জন্য দ্বিতীয় পর্যায়ের শর্তটি পরীক্ষা করতে হয়।

সুতরাং দ্বিতীয় পর্যায়ের শর্ত (Second Order Condition),

$$f\delta(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(10x - 10) = 10(\text{ধণাত্মক})$$

সুতরাং দ্বিতীয় অন্তরকলনের মান (+ve) ধণাত্মক বলে অপেক্ষকটির সর্বনিম্নমান পাওয়া যায় যখন $x=1$। y অপেক্ষকে $x=1$ মান বসিয়ে, $y = 5(1)^2 - 10(1) = 5 - 10 = -5$

$\therefore$ $x = 1$ হলে, y এর সর্বনিম্নমান (Minimum value) = -5

উদাহরণ-২ ঃ কোন উৎপাদকের মুনাফা অপেক্ষক $\pi = 400 + 1000q - q^2$ দেওয়া আছে। কি পরিমাণ উৎপাদনে তার মুনাফা সর্বাধিক হবে ?

সমাধান ঃ এ ক্ষেত্রে উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকটি হচ্ছে, $\pi = 400 + 1000q - q^2$

এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের প্রাথমিক পর্যায়ের শর্ত,

$$f(q) = \frac{d(\pi)}{dq} = 1000 - 2q = 0$$

বা, $2q = 1000$

বা, $q = 500$

উৎপাদনের পরিমাণ $q = 500$ হলে, মুনাফা সর্বোচ্চ হবে কি না, তা সঠিকভাবে বলতে হলে দ্বিতীয় পর্যায়ের শর্তটি পরীক্ষা করা দরকার।

$$f\delta(q) = \frac{d^2\pi}{dq^2} = -2 \text{ (ঋণাত্মক)}$$

সুতরাং দ্বিতীয় শর্তের মান ঋণাত্মক (-ve) বলে, মুনাফা সর্বাদিক হবে।
অর্থাৎ উৎপাদনের পরিমান $q = 500$ হলে মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ হবে।

নিরঙ্কুশ ও আপেক্ষিক সর্বোচ্চ মান (Absolute and Relative Maxima)

চিত্র-৪.২.৫ ঃ নিরঙ্কুশ ও আপেক্ষিক সর্বোচ্চ মান

চিত্রানুসারে A ও B বিন্দু উভয়ই সর্বোচ্চ বিন্দু। কেননা এই A ও B বিন্দু সর্বোচ্চকরণের প্রাথমিক ও পর্যাপ্ত শর্ত পালন করে থাকে। একটি নির্দিষ্ট সীমার (Interval) মধ্যে যদি একাধিক বিন্দু সর্বোচ্চ মানের দুটি শর্তই পূরণ করে তবে সংজ্ঞা অনুসারে সবগুলো বিন্দুই সর্বোচ্চ বিন্দু। এই সর্বোচ্চ বিন্দুগুলোর মধ্যে যে বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান সবচেয়ে বেশি সেই বিন্দুকে নিরঙ্কুশ সর্বোচ্চ (absolute maximum বা global maximum) বিন্দু বলা হয়। বাকি অন্যান্য অপেক্ষাকৃত কম সর্বোচ্চ বিন্দুগুলোকে আপেক্ষিক সর্বোচ্চ (Relative maximum বা Local maximum) বিন্দু বলা হয়। উপরের চিত্রে A বিন্দু হচ্ছে নিরঙ্কুশ সর্বোচ্চ বিন্দু এবং B অপেক্ষিক সর্বোচ্চ বিন্দু। একটি অপেক্ষকে নিরঙ্কুশ ও আপেক্ষিক উভয় সর্বোচ্চ বিন্দুই থাকবে এমন কোন কথা নেই। তবে নিরঙ্কুশ সর্বোচ্চ বিন্দু একটি এবং মাত্র একটিই থাকবে কিন্তু আপেক্ষিক বিন্দু এক বা একাধিক হতে পারে আবার নাও হতে পারে।

নিরঙ্কুশ ও আপেক্ষিক সর্বনিম্ন মান (Absolute and relative minima)

কোন অপেক্ষকে একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে যদি একাধিক বিন্দু সর্বনিম্নকরণের সকল শর্ত পূরণ করে তবে এই বিন্দুগুলোর মধ্যে যে বিন্দুতে অপেক্ষকটির মান সবচেয়ে কম তাকে নিরঙ্কুশ সর্বনিম্ন (absolute minimum) বলা হয়। আর বাকি অপেক্ষাকৃত কম সর্বনিম্ন বিন্দুগুলোকে আপেক্ষিক সর্বনিম্ন (relative minimum) বিন্দু বলা হয়। তবে নিরঙ্কুশ সর্বনিম্ন বিন্দু সর্বদা একটিই থাকে, আপেক্ষিক সর্বনিম্ন বিন্দু একাধিক থাকতে পারে আবার নাও থাকতে পারে। আবার সব অপেক্ষকে নিরঙ্কুশ ও আপেক্ষিক বিন্দু পাওয়া যাবে তা কিন্তু নয়। চিত্রে C ও D দুটি বিন্দুই সর্বনিম্নকরণের সকল শর্ত পূরণ করে। ফলে সংজ্ঞানুযায়ী C ও D উভয় বিন্দুই সর্বনিম্ন বিন্দু। কিন্তু চিত্র

থেকে সহজেই লক্ষনীয় যে, C বিন্দু, D বিন্দুর চেয়ে অধিকতর সর্বনিম্ন। ফলে C বিন্দু হচ্ছে নিরঙ্কুশ সর্বনিম্ন বিন্দু এবং D হচ্ছে আপেক্ষিক সর্বনিম্ন বিন্দু।

অনমনীয় বিন্দু (Point of inflection)

এমন অনেক অপেক্ষক আছে যেগুলোর রেখাচিত্র শুধুমাত্র উত্তল বা শুধুমাত্র অবতল হয় না। যখন একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের রেখা যে বিন্দুতে উত্তলতার (Convexity) পর্যায় থেকে অবতলতার (Concavity) পর্যায়ে মোড় নেয় অথবা অবতলতার পর্যায় থেকে উত্তলতার পর্যায়ে মোড় নেয় সেই বিন্দুকে অনমনীয় বিন্দু (Point of inflection) বলা হয়। এই বিন্দুকে পরিবর্তনসূচক বিন্দু বা হার বিপরীতকরণ বিন্দুও বলা হয়ে থাকে।
এই অনমনীয় বিন্দুতে একটি স্পর্শক ভূমির সমান্তরাল করে টানলে এটা প্রদত্ত অপেক্ষক থেকে প্রাপ্ত রেখাকে এমনভাবে অতিক্রম করে যে স্পর্শকের উপরের অংশে রেখাটি উত্তল বা অবতল হবে এবং নিচের অংশে যথাক্রমে অবতল বা উত্তল হবে।

চিত্র-৪.২.৬ ঃ অনমনীয় বিন্দু

(ক) ও (খ) চিত্রে E ও F বিন্দু দুটি অনমনীয় বিন্দু। (ক) চিত্রে রেখাটি E বিন্দুতে অবতলতা থেকে উত্তলাকৃতি হয়েছে এবং (খ) চিত্রে রেখাটি F বিন্দুতে উত্তলতা থেকে অবতলাকৃতি হয়েছে। আমরা অর্থনীতিতে মোট উৎপাদন রেখা (TP)-র ক্ষেত্রে অনমনীয় বিন্দু লক্ষ্য করে থাকি। বিষয়টি নিম্নে আলোচনা করা হলো ঃ

চিত্র-৪.২.৭ ঃ মোট উৎপাদন রেখা

চিত্রে TP মোট উৎপাদন রেখা। চিত্র থেকে সহজেই লক্ষণীয় যে, পরিবর্তনীয় উপাদান (L) বাড়তে থাকলে মোট উৎপাদন প্রথম দিকে ক্রমবর্ধমান হারে (increasing rate) বাড়তে থাকে বলে মোট উৎপাদন রেখা (TP) প্রথমে নিচের দিক থেকে উত্তল (Convex) হয়। কিন্তু M বিন্দুর পরে মোট উৎপাদন ক্রমহ্রাসমান হারে (decreasing rate) বাড়তে থাকে বলে TP রেখা M বিন্দুর পরে অবতলাকৃতি (Concave) হয়। এই M বিন্দু হচ্ছে ক্রমবর্ধমান হারে মোট উৎপাদন বৃদ্ধির শেষ অবস্থা। এই M **বিন্দুর** পর মোট উৎপাদন ক্রমহ্রাসমান হারে বাড়তে থাকে। সুতরাং M বিন্দু হচ্ছে অনমনীয় বিন্দু (Point of inflection)।

অনমনীয় বিন্দু নির্ণয়ের শর্তাবলী

যদি $y = f(x)$ একটি অদ্বিতীয় মানের বা একক মানের অপেক্ষক (function) হয় তবে অনমনীয় বিন্দু তথা Point of Inflection নির্ণয়ের জন্য দুটি শর্ত পালন করতে হয়। এদের একটি প্রয়োজনীয় শর্ত (Necessary Condition) এবং অন্যটি পর্যাপ্ত শর্ত (Sufficient Condition) নামে পরিচিত।

প্রয়োজনীয় শর্ত (Necessary Condition)

এ শর্তে বলা হয় যে, অপেক্ষকটির দ্বিতীয় অন্তরকলনের মান (Second Order Derivative) শূন্য হবে। অর্থাৎ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ হবে। এটাকে এভাবেও লেখা যায়, $f''(x) = 0$ হবে। এখান থেকে সমাধান করে x-এর মান নির্ণয় করতে হয়।

পর্যাপ্ত শর্ত (Sufficient Condition)

এ শর্তে বলা হয় যে, অপেক্ষকটির তৃতীয় অন্তরকলনের মান (Third Order Derivative) অশূন্য মানের হবে। সুতরাং এখানে $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ হবে। অর্থাৎ $\frac{d^3y}{dx^3}$ –এর মান 0-এর কম বা বেশি হতে হবে।

(ক) যদি $\frac{d^3y}{dx^3} > 0$ হয়, তবে সেক্ষেত্রে রেখাটির আকৃতি অবতল (Concave) থেকে উত্তল (Convex) হবে।

(খ) যদি $\frac{d^3y}{dx^3} < 0$ হয়, তবে সেক্ষেত্রে রেখাটির আকৃতি উত্তল (Convex) থেকে অবতল (Concave) হবে।

কোন অব্যাহত (Smooth) রেখার অনমনীয় বিন্দুতে প্রথম অন্তরকলনের মান উক্ত বিন্দুতে (x=a) শূন্য হয়। কিন্তু অনেক অপেক্ষকে অনমনীয় বিন্দুতে প্রথম অন্তরকলনের মান শূন্য নাও হতে পারে। সংজ্ঞানুসারে অনমনীয় বিন্দু বলতে সেই বিন্দুটিই নির্দেশিত, যে বিন্দুতে কোন রেখা উর্ধ্বদিকে অবতল অবস্থা থেকে নিম্নদিকে অবতল বা বিপরীতভাবে উল্টো অবস্থা আকৃতির হলেও প্রতিক্ষেত্রে অবশ্যই দ্বিতীয় অন্তরকলনের মান শূন্য হবে। কোন $y = f(x)$ অপেক্ষকের অনমনীয় বিন্দু নির্দেশের ক্ষেত্রে দুটো শর্ত পরীক্ষা করতে হয়, $x = a$ অবস্থায় $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা $f''(x) = 0$ এবং $\frac{d^3y}{dx^3}$ বা $f'''(x) \neq 0$ এ শর্ত পালিত হলে বলা যায় যে, $x=a$ অবস্থায় $y = f(x)$ অপেক্ষকের একটি অনমনীয় বিন্দু আছে।

দ্বিচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান (Maxima and Minima of functions of two variables)

মনে করি, $Z=f(x, y)$ একটি দ্বিচলক বিশিষ্ট অপেক্ষক। আংশিক অন্তরকলনের (Partial differentiation) মাধ্যমে এ ধরণের অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নকরণের শর্ত নির্ণয় করা যায়।

সর্বোচ্চকরণের শর্ত ঃ

প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ $f_x = 0, f_y = 0$

পর্যাপ্ত শর্ত ঃ (i) $f_{xx} < 0, fyy < 0$

ঃ (ii) $f_{xx} . f_{yy} - (fxy)^2 > 0$ অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} fxx fxy \\ fyx \quad fyy \end{vmatrix} > 0$$

সর্বনিম্নকরণের শর্ত ঃ

প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ $f_x = 0, f_y = 0$

পর্যাপ্ত শর্ত ঃ (i) $f_{xx} > 0, f_{y\,y} > 0$

ঃ (ii) $f_{xx}. f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} fxy fxy \\ fyx \quad fyy \end{vmatrix} > 0$$

দ্বিচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের চরম মান তথা সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আরেকটি নতুন ধারণার জন্ম হয়।

সেডেল বিন্দু এবং অনমনীয় বিন্দু নির্ণয়ের শর্ত ঃ

প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ $f(x) = fy = 0$

পর্যাপ্ত শর্ত ঃ (i) $f_{xx} \gtreqless 0, f_{yy} \gtreqless 0$ এবং

(ii) $fxx . fyy - (fxy)^2 < 0$ হতে হবে।

আবার কোন ক্ষেত্রে যদি $fxx. fyy - (fxy)^2 = 0$ হয়, তথা $\begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fyx & fyy \end{vmatrix} = 0$ হয় তবে সর্বোচ্চ, সর্বনিম্ন বা সেডেল বিন্দুর কোনটিই নির্দেশিত হবে না।

সারাংশ ঃ সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিম্নকরণকে অর্থনীতিতে কাম্যকরণ বলে অভিহিত করা হয়। সর্বোচ্চকরণের প্রাথমিক শর্ত, $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং পর্যাপ্ত শর্ত, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ । অন্যদিকে, সর্বনিম্নকরণের প্রাথমিক শর্ত হচ্ছে, $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং পর্যাপ্ত শর্ত $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.২

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। কোন ধরণের অপেক্ষকের কোনো সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নেই ?

(ক) অ-একমাত্রিক অপেক্ষকের (খ) একমাত্রিক অপেক্ষকের

(গ) উভয়েরই (খ) উপরের কোনটিই নয়।

২। সর্বোচ্চকরণের ক্ষেত্রে অপেক্ষকের চিত্ররূপ হবে-
(ক) নিচের দিকে অবতল আকৃতির (খ) নিচের দিকে উত্তল আকৃতির
(গ) উপরের দিকে অবতল আকৃতির (ঘ) উপরের দিকে উত্তল আকৃতির

৩। সর্বনিম্নকরনের ক্ষেত্রে অপেক্ষকের চিত্ররূপ হবে-
(ক) নিচের দিকে অবতল আকৃতির (খ) নিচের দিকে উত্তল আকৃতির
(গ) উপরের দিকে অবতল আকৃতির (ঘ) উপরের দিকে উত্তল আকৃতির

৪। অর্থনীতিতে অনমনীয় বিন্দু (Inflecation Point) লক্ষ্যনীয়-
(ক) মোট চাহিদার ক্ষেত্রে (খ) মোট যোগানের ক্ষেত্রে
(গ) বাজার ভারসাম্যের ক্ষেত্রে (ঘ) মোট উৎপাদন রেখার ক্ষেত্রে

পাঠ-৪.৩

বাধা শর্ত সাপেক্ষে সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিম্নকরণ
(Maxima and Minima with Constraint)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বাধাশর্ত সাপেক্ষে অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করতে পারবেন।
- বাধাশর্ত সাপেক্ষে অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করতে পারবেন।

যখন কোন অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয়ের বেলায় বাধা বা শর্তসমূহ আরোপ করা হয়ে থাকে তখন তাকে ঐ বাধা বা সীমাবদ্ধতার সাপেক্ষে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করতে হয়। এই পদ্ধতিকে বাধা শর্ত আরোপিত সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান নির্ণয় (Constrained maxima and minima) পদ্ধতি বলা হয়।

অর্থনীতিতে প্রায় অধিকাংশ সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্নকরণ সমস্যার ক্ষেত্রে এক বা একাধিক বাধা বা শর্ত আরোপ করা থাকে, যেমন -ভোগকারীর ভারসাম্য অবস্থা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আয়ের সীমাবদ্ধতা একটি বিশেষ শর্ত। তাই নিরপেক্ষ রেখার সাহায্যে ভোগকারীর ভারসাম্য অবস্থা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আয়ের সীমাবদ্ধতা তথা বাজেট রেখা বা আয় রেখা সাপেক্ষে সর্বোচ্চ উপযোগ প্রাপ্তির অবস্থা নির্দেশ করা হয়। গাণিতিক উপায়ে কোন বাজেট সমীকরণ দেয়া অবস্থায় কোন উপযোগ অপেক্ষককে সর্বোচ্চকরণ করলে সর্বাধিক উপযোগ নির্দেশক দ্রব্যের পরিমাণ নির্ণয় করা যায়। এখানে একটি বিষয় উল্লেখ্য যে, যদি কোন সর্বনিম্নকরণ বা সর্বোচ্চকরণ সমস্যার ক্ষেত্রে অধিক সংখ্যক বাধা শর্ত থাকে তাহলে সে ক্ষেত্রে একমাত্রিক কার্যক্রম (Linear Programming) - এর সাহায্যেও সমাধান করা সম্ভব হয়।

বাধা শর্ত সাপেক্ষে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয়ে বিভিন্ন পদ্ধতি ঃ

প্রতিস্থাপন বা অপসারন বা পরিবর্তক পদ্ধতি (Method of Substitution or Elimination) :

শর্তারোপিত কোন অপেক্ষকের সর্বোচ্চমান বা সর্বনিম্নমান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে একটি চলকের ভিত্তিতে অপর একটি চলককে (One variable in terms of other) প্রকাশ করার উদ্দেশ্যে শর্তটিকে ব্যবহার করা হয় যাতে উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকটি শুধু মাত্র একটি চলকের অপেক্ষক হয়। কোন চরম মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে বাধা শর্তটি যদি সহজ রূপ হয় অর্থাৎ যদি বাধা শর্তটি একটি চলকের এমন রূপে প্রকাশ করা যায় যাতে অপর চলকের অব্যক্ত অপেক্ষক হয় তবে সে ক্ষেত্রে চরম মান নির্ণয়ের জন্য প্রতিস্থাপন বা পরিবর্তক পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ ঃ একটি উপযোগ অপেক্ষক, $U = x_1x_2 + 2x_1$

এবং বাজেট শর্ত, $5x_1 + 10x_2 = 10$

এক্ষেত্রে বাজেট শর্তটিকে x_2 চলকের এমন রূপে প্রকাশ করা যায় যা x_1 চলকের ব্যক্ত (Explicit) অপেক্ষক হয়। অর্থাৎ $10x_2 = 100 - 5x_1$

$$\text{বা, } x_2 = \frac{100 - 5x_1}{10}$$

$$\text{বা, } x_2 = 10 - \frac{x_1}{2} \quad \text{..................................(1)}$$

এখন x_2 -এর মান উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকটিতে বসিয়ে

$$U = x_1\left(10 - \frac{x_1}{2}\right) + 2x_1$$

$$\therefore \quad U = 12x_1 - \frac{x_1^2}{2}$$

চরম মান নির্ণয়ের প্রাথমিক শর্তানুসারে,

$$\frac{dU}{dx1} = 12 - x_1 = 0$$

$$\therefore \quad x_1 = 12$$

এবার $x_1 = 12$, সমীকরণ (1) -এ বসিয়ে,

$$x_2 = 10-\frac{12}{2} = 10-6$$

$$\therefore \quad x_2 = 4$$

সুতরাং $x_1 = 12$ এবং $x_2 = 4$ এককের জন্য উপযোগ সর্বোচ্চ হতে পারে।

পর্যাপ্ত শর্তানুসারে.

$\frac{d^2u}{dx_1^2}$ -1 < 0, যা সর্বোচ্চকরণের শর্তকে পালন করে। অতএব x_1 ==12 এবং x_2= 4 একক ভোগের উপযোগ সর্বোচ্চ হবে। এখন উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকে x_1 ও x_2- এর মান বসিয়ে ঃ-

$$U = x_1x_2 + 2x_1$$
$$= 12 \infty 4 + 2 \infty 12$$
$$= 48 + 24$$
$$U = 72 \text{ একক।}$$

অতএব, মোট সর্বোচ্চ উপযোগ U = 72 একক।

ল্যাগরেঞ্জ গুণক পদ্ধতি (Lagrange multiplier method)

যদি কোন চরম মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে বাধা শর্তটি সহজ না হয়ে জটিল হয় অর্থাৎ যদি বাধা শর্তটি একটি চলকের এমনরূপে প্রকাশ করা যায় যা অপর চলকের ব্যক্ত ফাংশন না হয়ে বরং অব্যক্ত ফাংশন হয় তবে সেক্ষেত্রে চরম মান নির্ণয়ে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি প্রয়োগ করা সম্ভব হয় না । কারণ এতে বিশেষ জটিলতা দেখা দিয়ে থাকে। এ অবস্থায় ল্যাগরেঞ্জ গুণন পদ্ধতি ব্যবহার করা বেশ সুবিধাজনক।

এই পদ্ধতিতে বাধা শর্তটিকে একটি ল্যাগরেঞ্জ গুণকের মাধ্যমে উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকের সাথে সমন্বয় করে ল্যাগরেঞ্জ অপেক্ষক তৈরি করতে হয়। তবে প্রথমেই বাধা শর্তটিকে অব্যক্ত অপেক্ষকে রূপান্তর করতে হয়। অর্থাৎ বাধা শর্তটির ডানপক্ষ 0 (শূন্য) রূপান্তর করতে হবে। এ বাধা শর্তসাপেক্ষে উপযোগ সর্বোচ্চকরণের জন্য আমরা বাধা শর্তটিকে ল্যাগরেঞ্জ গুণক λ (The greek letter Lambda)-এর সাহায্যে উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকের সাথে সমন্বিত করব। প্রতীক λ একটি অনির্ণেয় (Undetermind) সংখ্যা নির্দেশ করে। আর তাই λ - কে Lagrange Multiplier বলা হয়।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, উপযোগ অপেক্ষক, $U = x^2 + 2y^2$

বাধা শর্তটি, $2x + y = 3$, U -এর সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য পরীক্ষা করতে হবে। বাধা শর্তটি $2x + y = 3$ কে অব্যক্ত অপেক্ষকে রূপান্তর করে ঃ-

$$3-2x-y = 0$$

এবার এই রূপান্তরিত বাধা শর্তটিকে λ ল্যাগরেঞ্জ গুণকের সাহায্যে উপযোগ অপেক্ষকের সাথে সমন্বয় করে নতুন একটি অপেক্ষক তৈরি করি ঃ-

$$U^* = x^2 + 2y^2 + \lambda\ (3-2x-y) \text{ ....(1)}$$

এখন (1) থেকে চরম মান নির্ণয়ের প্রাথমিক শর্তানুসারে, x, y, λ– এর সাপেক্ষে আংশিক অন্তরকলন করে তার মান শূন্যের সমান ধরি,

$$f_x = \frac{\delta U^*}{\delta x} = 2x - 2\lambda = 0 \text{..................(2)}$$

$$f_y = \frac{\delta U^*}{\delta y} = 4y - \lambda = 0 \text{.......................(3)}$$

$$f_\lambda = \frac{\delta U^*}{\delta \lambda} = 3-2x-y = 0 \text{ ....(4)}$$

এবার (2) ও (3) কে সমতায় এনে সমাধান করতে হবে ঃ-

[(2) কে (3) দ্বারা ভাগ করে]

$$\frac{2x}{4y} = \frac{-2\lambda}{-\lambda}$$

বা, $\frac{2x}{4y} = 2$

বা, $2x = 8y$

বা, $x = 4y$ ....(5)

এখন (4) -এ x-এর মান বসিয়ে,

$3 - 2(4y) - y = 0$

বা, $3 - 8y - y = 0$

বা, $3 - 9y = 0$

বা, $9y = 3$

বা, $\bar{y} = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad \bar{y} = \frac{1}{3}$

সুতরাং (5) থেকে;

$x = 4y$

বা, $x = 4\infty\frac{1}{3}$

বা, $\bar{x} = \frac{4}{3}$

সুতরাং এর থেকে বলা যায় যে, $\bar{x} = \frac{4}{3}$ এবং $\bar{y} = \frac{1}{3}$ এককের জন্য প্রদত্ত উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষকে একটি সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান পাওয়া যেতে পারে।

সীমায়িত হেসিয়ান নির্ণায়কের পদ্ধতি ঃ

শর্তহীন কোন অপেক্ষকের ন্যায় শর্তানুসারে কোন অপেক্ষকের চরম মান নির্ণয়ের পর্যাপ্ত শর্ত নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সীমায়িত হেসিয়ান নির্ণায়ক পদ্ধতি গুরুত্বপূর্ণ পদ্ধতি। ল্যাগরেঞ্জ-গুণক পদ্ধতিতে চরম মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে পর্যাপ্ত শর্ত যাচাইয়ের ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিরই ব্যবহার হয়।

এক্ষেত্রে ব্যবহৃত নির্ণায়কের শর্ত হচ্ছে যদি উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক $U = f(x_1, x_2)$ হয় তবে

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} f_{\lambda\lambda} & f_{\lambda 1} & f_{\lambda 2} \\ f_{\lambda 1} & f_{11} & f_{12} \\ f_{\lambda 2} & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

যদি $\bar{H} > 0$ হয় তবে সর্বোচ্চকরণের শর্ত পালন করবে এবং $\bar{H} < 0$ হয় তবে তা সর্বনিম্নকরণের শর্তকে পালন করবে।

যদি উদ্দেশ্যমূলক অপেক্ষক $U = f(x,y)$ হয়, তবে

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} f_{\lambda\lambda} & f_{\lambda x} & f_{\lambda y} \\ f_{\lambda x} & f_{xx} & f_{xy} \\ f_{\lambda y} & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \text{ হবে।}$$

উদাহরন-১ ঃ ধরা যাক, $U = 2xy + 2$;

নির্ধারিত শর্ত ঃ $x + y = 1$-এর থেকে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান ঃ $U= 2xy + 2$ .... (1)

$x + y = 1$

অব্যক্ত অপেক্ষকরূপে প্রকাশ করে,

$1-x-y = 0$ .... (2)

এবার λ ল্যাগরেঞ্জ গুণকের সাহায্যে (1) ও (2) কে সমন্বয় সাধন করে নতুন একটি অপেক্ষক তৈরি করি।

$U = 2xy + 2 + \lambda\ (1-x-y)$ .... (3)

এখন চরম মান নির্ণয়ের প্রাথমিক শর্তানুসারে (3) থেকে x, y, ও λ সাপেক্ষে আংশিক অন্তরকলন করে তার মান শূন্য ধরি।

$$f_x = \frac{\delta U}{\delta x} = 2y - \lambda = 0 \text{ ....(4)}$$

$$f_y = \frac{\delta U}{\delta y} = 2x - \lambda = 0 \text{ ....(5)}$$

$$f_\lambda = \frac{\delta U}{\delta \lambda} = 1- x - y = 0 \text{ ....(6)}$$

(4) থেকে $2y = + \lambda$

(5) থেকে $2x = \lambda$

$\therefore\ 2y = 2x$

$\therefore\ y = x$

y এর মান (6)-এ বসিয়ে,

$1- x - y = 0$

বা, $-2x\ - 1$

বা, $\bar{x} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \bar{y} = \frac{1}{2}$

সুতরাং $\bar{x} = \frac{1}{2}$ এবং $\bar{y} = \frac{1}{2}$ মানের জন্য অপেক্ষকটিতে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান থাকতে পারে।

পর্যাপ্ত শর্তানুসারে,

Bordered Hessian Determinant-এর সাহায্যে

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} f_{\lambda\lambda} & f_{\lambda x} & f_{\lambda y} \\ f_{\lambda x} & f_{xx} & f_{xy} \\ f_{\lambda y} & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 2+2$

$= 4 >0,$

যা সর্বোচ্চ করনের পর্যাপ্ত শর্তকে পূরণ করে। সুতরাং $\bar{x} = \frac{1}{2}$ এবং $\bar{y} = \frac{1}{2}$ মানের জন্য প্রদত্ত অপেক্ষক (1)-এর মান সর্বোচ্চ পাওয়া যাবে।

__সারমর্ম__ ঃ যখন কোন অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্নয়ের বেলায় বাধা বা শর্ত আরোপ করা হয়ে থাকে তখন তাকে ঐ বাধার সাপেক্ষ সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করতে হয়। এই পদ্ধতিকে বাধা শর্ত আরোপিত সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান নির্ণয় পদ্ধতি বলা হয়। এক্ষেত্রে প্রতিস্থাপন বা অপসারন পদ্ধতি, ল্যাগরেঞ্জ গুণক পদ্ধতি এবং সীমায়িত হেসিয়ান নির্ণায়কের পদ্ধতি, ইত্যাদির সাহায্যে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৩

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। ভোগকারীর ভারসাম্য অবস্থা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সমব্যয় রেখা একটি বিশেষ শর্ত।

২। ল্যাগরেঞ্জ গুণক পদ্ধতিতে চরম মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে পর্যাপ্ত শর্ত যাচাইয়ের ক্ষেত্রে সীমায়িত হেসিয়ান নির্ণায়কের পদ্ধতির ব্যবহার হয়।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-ইউনিট ৪

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। সামগ্রিক বাজার ভারসাম্যবস্থায় দুটি দ্রব্যের উপর কর আরোপ বা ভর্তুকি প্রদান করলে, ভারসাম্যে তার প্রতিক্রিয়া কি হবে ব্যাখ্যা করুন।

২। দেয়া আছে, চাহিদা ও যোগান অপেক্ষক যথাক্রমে $Q_d = 150\text{-}3P$ এবং $Q_s = -40 + 4P$

(i) ভারসাম্য দাম ও পরিমান নির্ণয় করুন।

(ii) যদি একক প্রতি 4 টাকা কর আরোপ করা হয় তাহলে নতুন ভারসাম্য দাম ও পরিমাণ কত হবে ?

(iii) করের কোন অংশ ভোক্তাকে বহন করতে হবে কিনা? বহন করতে হলে কত টাকা ভোক্তা বহন করবে?

(iv) বিক্রেতাকে করের কোন অংশ বহন করতে হবে কি না? বহন করতে হলে কত টাকা বিক্রেতা বহন করবে ?

(v) আলোচ্য দ্রব্য থেকে কর বাবদ সরকারের কত টাকা আয় হবে ?

৩। দ্রব্যের উৎপাদন গড় ব্যয় $AC = 60 - 12x+2x^2$ হলে, কি পরিমাণ উৎপাদনে গড় ব্যয় সর্বনিম্ন হবে ?

৪। নিম্নোক্ত অপেক্ষকটির প্রদত্ত শর্ত সাপেক্ষে চরম মান নির্ণয় করুন। $z = xy$; নির্ধারিত শর্ত $2z+y = 6$

৫। ল্যাগরেঞ্জ গুণক পদ্ধতিতে চরম মান নির্ণয় করুন-

$z = x(y+4)$; শর্ত সাপেক্ষে $x+y = 8$

৬। একটি অপেক্ষকের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানের জন্য প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্তসমূহ লিখুন।

৭। Saddle Point এর শর্তসমূহ উল্লেখ করুন।

৮। Point of Inflaction কি ?

উত্তরমালা ইউনিট-৪

পাঠ-১ ঃ	(১) খ	(২) ক	(৩) খ	(৪) খ
পাঠ-২ ঃ	(১) খ	(২) ক	(৩) খ	(৪) ঘ
পাঠ-৩ ঃ	(১) মিথ্যা	(২) সত্য		