# ৩

## রৈখিক সমীকরণ

গাণিতিক সমস্যা সমাধানে রৈখিক সমীকরণের ধারণা অপরিহার্য। মূল্য ও চাহিদা, মূল্য ও যোগান, ব্যয় ও পরিমাণ ইত্যাদি স্বাধীন ও নির্ভরশীল চলকদ্বয়ের মধ্যবর্তী সম্পর্কের যে সমীকরণ আছে, সেগুলোকে লেখচিত্রে উপস্থাপন করে চাহিদা রেখা, যোগান রেখা, ব্যয় রেখা ইত্যাদি পাওয়া যায়।
এই ইউনিটের প্রথম পাঠে গাণিতিক সম্পর্ক উপস্থাপনে লেখচিত্রের ব্যবহার, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পাঠের যথাক্রমে একমাত্রিক, দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত এবং আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক ও অধিবৃত্তের ধারণা ও অর্থনৈতিক ব্যবহার, চতুর্থ পাঠে অপেক্ষকের ঢাল ও ছেদক এবং পঞ্চম পাঠে চাহিদা ও যোগান রেখা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

# পাঠ-৩.১

## গাণিতিক সম্পর্ক উপস্থাপনে লেখচিত্রের ব্যবহার

এ পাঠ শেষে আপনি-

- লেখচিত্রের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- অপেক্ষকের লেখচিত্র সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- চতুর্থাংকের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।

**লেখচিত্র (Graph) ঃ**

স্বাধীন চলকের সাথে নির্ভরশীল চলকের যে সম্পর্ক তা যখন চিত্রে রূপ দেওয়া হয়; তখন তাকে লেখচিত্র (Graph) বলে। যেমন ঃ $y = f(x)$ অপেক্ষকটিতে $x$ হচ্ছে স্বাধীন চলক (Independent Variable) এবং $y$ হচ্ছে নির্ভরশীল চলক (Dependent Variable)। এখানে $x$ ও $y$ এর বিভিন্ন মান যখন একই চিত্রে উপস্থাপন করা হয় তখন তাকে লেখচিত্র বলে।

$y = f(x)$ এর ক্ষেত্রে $x$ এর প্রতিটি মানে একটি করে $y$ এর মান পাওয়া যাবে। এই $x$, $y$-এর জোড়া মানসমূহ যদি ছক কাগজে উপস্থাপন করা হয়, তাহলে বেশ কিছু বিন্দু $(x, y)$ পাওয়া যাবে। এ বিন্দুগুলো যোগ করে যে রেখা পাওয়া যায়, তাকেই লেখচিত্র বলে।

**অপেক্ষকের লেখচিত্র (Graph of a function)ঃ**

কোন সমতলে (in a plane) কোন অপেক্ষকের স্বাধীন ও অধীন চলকের যুগ্ম মানসমূহ (Co-ordinates) ছক কাগজে (graph paper) স্থাপন করে সেগুলো সংযুক্ত করে কোন রেখা অংকন করলে তাকে অপেক্ষকের লেখচিত্র বলে।

**চতুর্থাংক (Quadrant) ঃ**

ছক কাগজে (graph paper)$x$ অক্ষ (Horizontal Axis) এবং $y$ অক্ষ (Vertical axis) পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে মূল বিন্দু (o) বা কেন্দ্র বলা যায়। একে কেন্দ্র করে $X$ এবং $Y$ অক্ষ কোন সমতলকে (plane) চারটি সমকোন ভাগ করে। এদের প্রতিটিকে এক একটি চতুর্থাংক বলা হয়।

চিত্র-৩.১.১ ঃ চতুর্থাংক

চিত্রের YOX, YOX′, Y′OX′ এবং Y′OX এলাকা যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ চতুর্থাংক নির্দেশ করে। প্রতিটি চতুর্থাংকে স্বাধীন চলক X এবং অধীন চলক Y এর স্থানীয় মান কেমন হবে তা প্রতীকের সাহায্যে দেখানো হয়েছে। যেমন X এবং Y চলকের মান ধনাত্মক হলে প্রথম চতুর্থাংকে স্থাপন করতে হবে। যদি Y এর মান ধনাত্মক অথচ X এর ঋণাত্মক হয় তবে এদের স্থানাংক/যুগ্ম মানের (Ordered Pair) বিন্দু দ্বিতীয় চতুর্থাংকে পড়বে ইত্যাদি।

যদি কোন অপেক্ষকে X এর মান শূন্য এবং Y এর মানও শূন্য পাওয়া যায় তবে এই স্থানাংক/ যুগ্ম বিন্দু (০, ০) মূল বিন্দুতে স্থাপন করতে হবে।

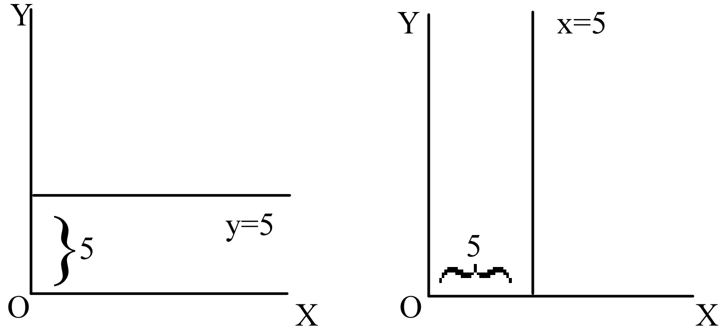
**অপেক্ষকের লেখচিত্র অংকন ঃ**

এখন X O X′ এবং Y O Y′ অক্ষ ছক কাগজে পরস্পর ছেদ বিন্দুকে মূল বিন্দু ধরলে প্রদত্ত অপেক্ষকের স্বাধীন চলক X এর মান বসালে অধীন চলক Yএর মান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ X এবং Y এর যুগ্ম বিন্দু বা জোড়া মান পাওয়া যাবে। এই মান সমূহের চিহ্ন দেখে (অর্থাৎ শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) সমতলের সংশ্লিষ্ট চতুর্থাংকে স্থাপন করতে হবে। এরপর উক্ত বিন্দুসমূহ রেখা দ্বারা সংযুক্ত করলে প্রদত্ত অপেক্ষকের লেখচিত্র পাওয়া যাবে।

**কতিপয় অপেক্ষকের লেখ চিত্র (Graphical Representation of some Functions) :**

**ক. স্থির অপেক্ষক বা ধ্রুবক অপেক্ষক (Constant function) ঃ** যে অপেক্ষকের বিস্তার একটি বাস্তব সংখ্যা হয়ে থাকে, তাকে স্থির অপেক্ষক বলে। যেমন : $y = f(x) = 5$ এক্ষেত্রে x এর মান যাই হোক না কেন, y-এর মান সব সময় স্থির থাকবে। এরূপ ক্ষেত্রে অপেক্ষকটি নির্দিষ্ট স্থির মানের ব্যবধানে x-এর সমান্তরাল হবে। অপরপক্ষে $x = f(y) = 5$ ও একটি স্থির অপেক্ষকের উদাহরণ। এই ক্ষেত্রে y-এর মান যাই হোক না কেন, x-এর মান সব সময় স্থির মানের ব্যবধানে y অক্ষের সমান্তরাল হবে।

স্থির অপেক্ষকের চিত্ররূপ (Graph of Constant function) ঃ




চিত্র-৩.১.২ ঃ স্থির অপেক্ষকের লেখচিত্র

স্থির অপেক্ষকের অর্থনৈতিক ব্যবহার ঃ নিম্নোক্ত ক্ষেত্রসমূহে স্থির অপেক্ষকের অর্থনৈতিক ব্যবহার রয়েছে ঃ

১. শূন্য স্থিতিস্থাপকতা এবং অসীম স্থিতিস্থাপকতা সম্পন্ন চাহিদা রেখা স্থির অপেক্ষকের উদাহরণ।

২. মোট স্থির খরচ অপেক্ষক (TFC)-এর ক্ষেত্রে স্থির অপেক্ষক ব্যবহৃত হয়।

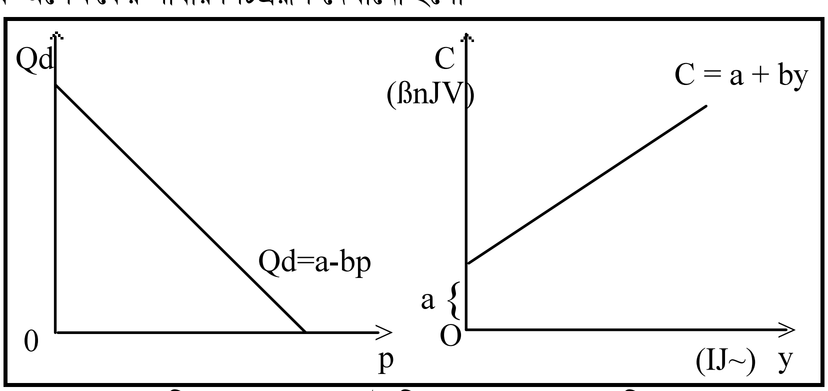
**খ. সরল রৈখিক অপেক্ষক (Linear function) ঃ** যে সব অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের সর্বোচ্চ ঘাত বা শক্তি এক (১) এরূপ অপেক্ষককে সরল রৈখিক বা লিনিয়ার অপেক্ষক বলে। যেমন ঃ

$y = ax + b$
$y = a + bx$
$Qd = a - bp$
$Qs = -c + dp$
$C = a + by$
$S = -a + (1 - b)y$

উপরের অপেক্ষকগুলো সরল রৈখিক বা Linear অপেক্ষক।

Linear অপেক্ষকের প্রধান বৈশিষ্ট্য হচ্ছে এদের যে লেখচিত্র পাওয়া যায় তা সরলাকৃতির (ডানদিকে উর্ধ্বগামী কিংবা নিম্নগামী) হয়। অর্থনীতিতে সাধারণত চাহিদা রেখা, যোগান রেখা, ভোগ রেখা, সঞ্চয় রেখা, বিনিয়োগ রেখা এবং একচেটিয়া কারবারীর গড় আয় (AR) ও প্রান্তিক আয় (MR) রেখা ইত্যাদি সরল রৈখিক অপেক্ষকের উদাহরণ।

নিম্নে সরল রৈখিক অপেক্ষকের সাধারণ চিত্ররূপ দেখানো হলো-




চিত্র-৩.১.৩ ঃ সরল রৈখিক অপেক্ষকের লেখচিত্র

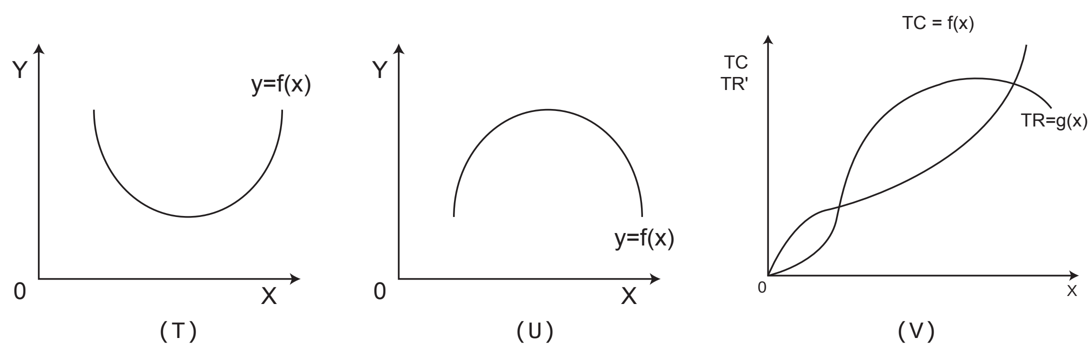
**গ. অরৈখিক (Non-Linear) অপেক্ষক ঃ**

যে সব অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের সর্বোচ্চ ঘাত বা শক্তি এক (1) নয় অর্থাৎ একের অধিক, এরূপ অপেক্ষককে অরৈখিক বা নন-লিনিয়ার অপেক্ষক বলে। যেমন ঃ

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$Qd = 8 - p^2$$
$$C = Q^3 - 12x^2 + 60x$$
$$y = x^3$$

উপরের অপেক্ষকগুলো নন-লিনিয়ার অপেক্ষকের উদাহরণ।

স্বাধীন চলকের সর্বোচ্চ ঘাত অনুযায়ী অরৈখিক অপেক্ষককে দ্বিঘাত (Quadratic) ও ত্রিঘাত (Cubic) এই দুইভাগে ভাগ করা যায়। নিম্নে অরৈখিক অপেক্ষকের সাধারণ চিত্ররূপ দেখানো হলো ঃ




চিত্র-৩.১.৪ ঃ অ-সরল রৈখিক অপেক্ষকের লেখ চিত্র

| |
|---|
| ***সারাংশ ঃ*** *সাধারন কথায়, লেখচিত্র হচ্ছে স্বাধীন চলকের সাথে নির্ভরশীল চলকের সম্পর্ককে চিত্রের মাধ্যেমে প্রকাশ।* |

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.১**

**সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ**

১। X ও Y চলকের মান ধনাত্মক হলে দ্বিতীয় চতুর্থাংকে স্থাপন করতে হবে।

২। Y = a X + b - একটি সরল রৈখিক অপেক্ষক।

# পাঠ-৩.২

## একমাত্রিক, দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত অপেক্ষকের ধারণা এবং অর্থনৈতিক ব্যবহার

এ পাঠ শেষে আপনি-

- একমাত্রিক, দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত অপেক্ষকের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- একমাত্রিক, দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত অপেক্ষকের লেখচিত্র অংকন প্রণালী জানতে পারবেন।
- একমাত্রিক, দ্বিঘাত ও ত্রিঘাত অপেক্ষকের অর্থনৈতিক ব্যবহার জানতে পারবেন।

### (ক) একমাত্রিক বা সরল রৈখিক অপেক্ষকের (Linear function) ধারণাঃ

**একমাত্রিক অপেক্ষক ঃ**

যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের ঘাত এক হয় তাকে সরল রৈখিক বা একমাত্রিক অপেক্ষক বলে। একমাত্রিক অপেক্ষকের সাধারণ রূপ হচ্ছে, $y = a_0 x^0 + a_1 x^1$

একমাত্রিক অপেক্ষকে আবার এক ডিগ্রীর পলিনমিয়েল (Polynomial of degree 1) অপেক্ষক বলে। নিম্নে কয়েকটি একমাত্রিক অপেক্ষকের নমুনা দেওয়া হলো ঃ

$y = x + 7$ $\qquad$ $Qd = 100 - 2p$

$y = x - 2$ $\qquad$ $Qs = -10 + 5p$

$y = ax + b$ $\qquad$ $Qs = p$

**একমাত্রিক অপেক্ষকের লেখচিত্র (Graphs of Linear Functions) :**

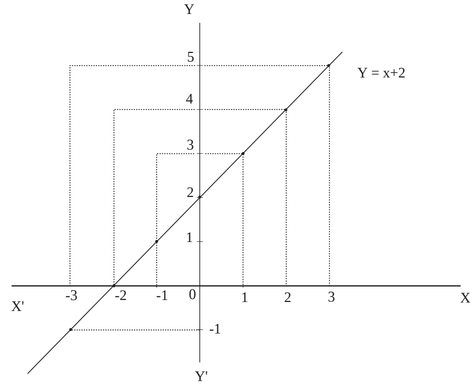
উদাহরণ ঃ $y = x + 2$ এর লেখচিত্র অংকন করুন।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $y = x + 2$

এখন x এর বিভিন্ন মান গ্রহণ করে y এর যে বিভিন্ন মান পাওয়া যায় তাকে সূচি আকারে সাজাই,

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | -2 | -1 | x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| -1 | 0 | 1 | y | 2 | 3 | 4 | 5 |

নিম্নে সূচির ভিত্তিতে লেখচিত্র অংকন করে দেখানো হলো ঃ

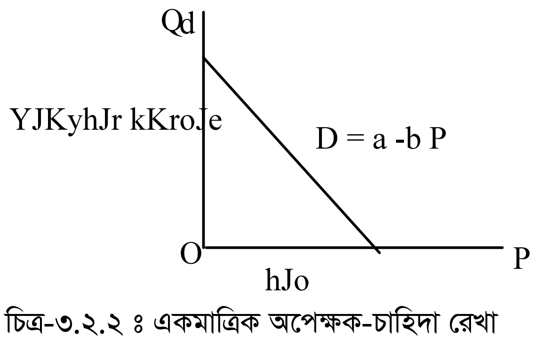



চিত্র-৩.২.১ ঃ একমাত্রিক অপেক্ষকের লেখচিত্র অংকন প্রণালী

**একমাত্রিক অপেক্ষকের অর্থনৈতিক ব্যবহার (Economic application of linear function) ঃ**

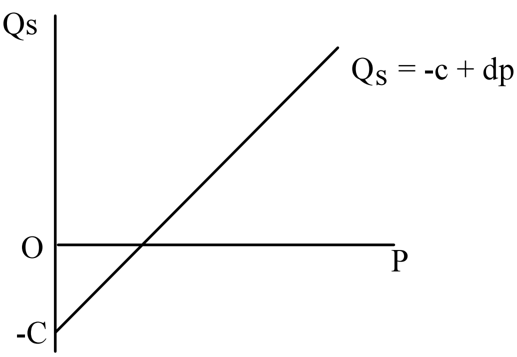
অর্থশাস্ত্রে সরলরৈখিক একমাত্রিক অপেক্ষকের প্রচুর প্রয়োগ রয়েছে। নিম্নে একমাত্রিক অপেক্ষকের অর্থনৈতিক ব্যবহার উল্লেখ করা হলো ঃ

১. সরলরৈখিক চাহিদা অপেক্ষক D এর ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। যেমন:



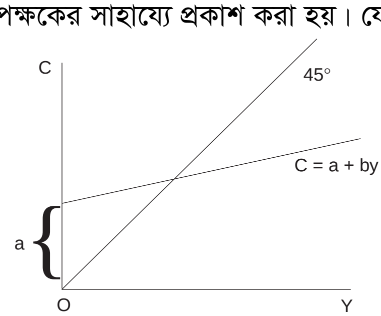

চিত্র-৩.২.২ ঃ একমাত্রিক অপেক্ষক-চাহিদা রেখা

২. সরলরৈখিক যোগান অপেক্ষক S-এর ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। যেমন ঃ



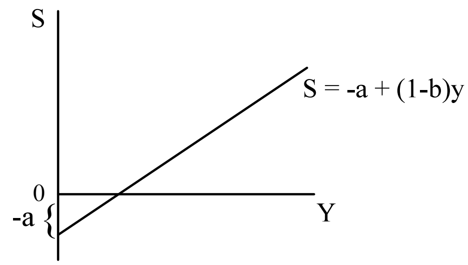

চিত্র-৩.২.৩ ঃ একমাত্রিক যোগান অপেক্ষক

৩. অপেক্ষক C -কে সরলরৈখিক অপেক্ষকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। যেমন ঃ



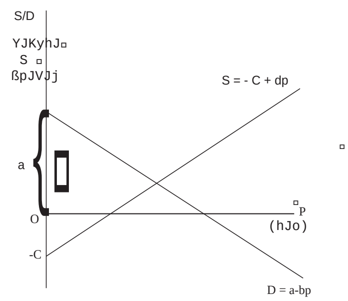

চিত্র-৩.২.৪ ঃ একমাত্রিক ভোগ অপেক্ষক

৪. সঞ্চয় অপেক্ষক S কে সরল রৈখিক অপেক্ষক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। যেমনঃ




চিত্র-৩.২.৫ ঃ একমাত্রিক সঞ্চয় অপেক্ষক

৫. একদ্রব্য বিশিষ্ট বাজার মডেলের ভারসাম্য দাম ও পরিমাণ নির্ধারণের ক্ষেত্রে সরলরৈখিক বা একমাত্রিক চাহিদা ও যোগান অপেক্ষক ব্যবহৃত হয়। যেমন:




চিত্র- ৩.২.৬ ঃ কোন দ্রব্যের বাজার ভারসাম্য

এভাবে অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে সরলরৈখিক বা একমাত্র অপেক্ষকের ব্যবহার হয়।

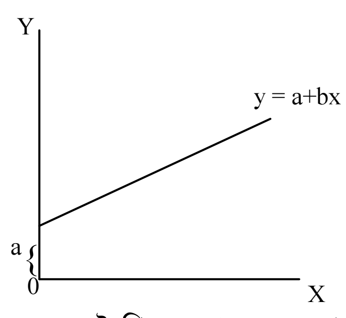
**সরলরৈখিক অপেক্ষকের উর্ধ্বগামীতা ও নিম্নগামীতা ঃ**

সরলরৈখিক অপেক্ষকের ঢাল যখন ধনাত্মক (+ve) হয় তখন রেখাটি হবে উর্ধ্বগামী।

যেমন ঃ $y = a + bx$

এক্ষেত্রে প্রদত্ত অপেক্ষকের ঢাল $\frac{dy}{dx} = (+ve)$

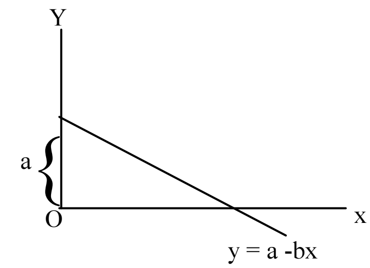
অর্থাৎ ঢাল ধনাত্মক, কাজেই রেখাটি হবে উর্ধ্বগামী। যেমন ঃ




চিত্র-৩.২.৭ ঃ সরল রৈখিক অপেক্ষকের ধনাত্মক ঢাল

যদি সরলরৈখিক অপেক্ষকের ঢাল ঋণাত্মক হয়, তবে রেখাটি হবে নিম্নগামী।

যেমন ঃ $y = a-bx$ (নিম্নগামী সরলরেখা)

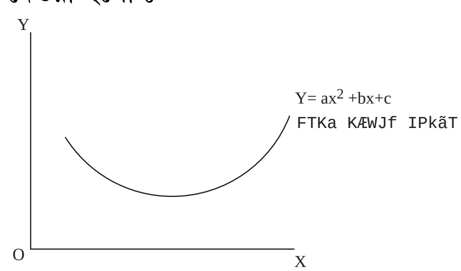



চিত্র- ৩.২.৮ ঃ সরল রৈখিক অপেক্ষকের ঋনাত্মক ঢাল

**(খ) দ্বিঘাত অপেক্ষকের (Quadratic Function) ধারণা ঃ**

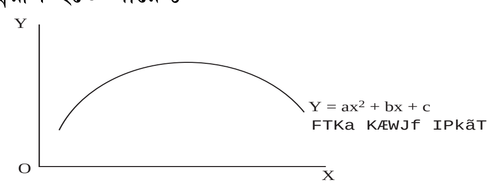
**দ্বিঘাত অপেক্ষক (Quadratic function):**

যে পলিনমিয়েল অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের সর্বোচ্চ ঘাত দুই (২) থাকে, তাকে দ্বিঘাত অপেক্ষক বলে। যেমন ঃ $y = ax^2 + bx + c$। এটা একটি দ্বিঘাত অপেক্ষক, কারণ এক্ষেত্রে চলক $x$ এর সর্বোচ্চ ঘাত দুই। নিম্নে একটি দ্বিঘাত অপেক্ষকের সাধারণ চিত্ররূপ দেওয়া হলো ঃ




চিত্র- ৩.২.৯ ঃ দ্বিঘাত অপেক্ষকের উত্তল চিত্ররূপ

আবার দ্বিঘাত অপেক্ষকের চিত্র নিম্নরূপ হতে পারে ঃ




চিত্র-৩.২.১০ ঃ দ্বিঘাত অপেক্ষকের অবতল চিত্ররূপ

সুতরাং চিত্ররূপ দেখে বলা যায় যে, দ্বিঘাত অপেক্ষকের চিত্ররূপ ইংরেজী “◡” আকৃতির অথবা উল্টা “◠” এর মত যেমন “◠” হয়। এর সাধারণ নাম অধিবৃত্ত বা পরাবৃত্ত। চিত্র-৩.২.৯-তে দ্বিঘাত অপেক্ষকের উত্তল (Convex) চিত্ররূপ এবং চিত্র ৩.২.১০-তে দ্বিঘাত অপেক্ষকের অবতল (Concave) চিত্ররূপ দেখানো হয়েছে।

**দ্বিঘাত সমীকরণের গাণিতিক সমস্যা ও সমাধান :**

**দ্বিঘাত সমীকরণের নির্ণায়ক (Discriminant)ঃ**

দ্বিঘাত সমীকরণের পদ্ধতিগুলোকে এককথায় বলা হয় দ্বিঘাত সমীকরণের নির্ণায়ক (Discriminant).

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের তিনটি পদ্ধতি। যথা ঃ
(১) সূত্রের সাহায্যে (By using formula)
(২) উৎপাদকের সাহায্যে (By factoring)
(৩) বর্গমূলের সাহায্যে (By taking Square root)
উপরের তিনটি পদ্ধতিকে দ্বিঘাত সমীকরণের নির্ণায়ক বলে।
নিম্নে তিনটি পদ্ধতিতে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান দেখানো হলো ঃ

ধরি, $ax^2 + bx + c = 0$ (একটা দ্বিঘাত সমীকরণ)

(i) সূত্রের সাহায্যে ঃ

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq o)$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এই সমীকরণের সমাধানের ক্ষেত্রে x-এর দুটো মান পাওয়া যাবে। একটা হলো ধনাত্মক (+ve) মান এবং অন্যটি হলো ঋনাত্মক (-ve) মান।
নিম্নে একটি সংখ্যা সূচক উদাহরণের সাহায্যে দেখানো হলো ঃ

ধরি, $3x^2 - 5x = 2$ [ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ]

বা $3x^2 - 5x - 2 = 0$

এক্ষেত্রে, $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$
আমরা জানি, দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের সূত্র ঃ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.3(-2)}}{2.3}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6}$$

$$= \frac{5 \pm 7}{6}$$

এক্ষেত্রে, $x = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$ [ 7 কে (+) মান হিসেবে ধরে]

আবার, $x = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$ [ 7 কে (-) মান হিসেবে ধরে]

প্রসঙ্গত উল্লেখ্য যে, অর্থশাস্ত্রে ঋনাত্মক মান প্রায়শই গ্রহণযোগ্য নয়। শুধুমাত্র ধনাত্মক মানই গ্রহণ করা হয়।

(ii) উৎপাদকের সাহায্যে (By factoring) ঃ

$x^2 - x - 12 = 0$

বা $x^2 - 4x + 3x - 12 = 0$

বা $x(x-4) + 3(x-4) = 0$

বা $(x-4)(x+3) = 0$

এখানে, $(x-4) = 0$

$\therefore x = 4$

অর্থাৎ $x = 4$

আবার, $(x+3) = 0$

$\therefore x = -3$

অর্থাৎ $x = -3$

(iii) বর্গমূলের সাহায্যে (By taking Square Root):

$x^2 = 9$

বা $x = \pm\sqrt{9}$

বা $x = \pm 3$

অর্থাৎ $x = 3$ অথবা $x = -3$

এভাবে, দ্বিঘাত সমীকরণগুলোকে উপরের তিনটি পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়।

**দ্বিঘাত অপেক্ষকের লেখচিত্র অংকনঃ**

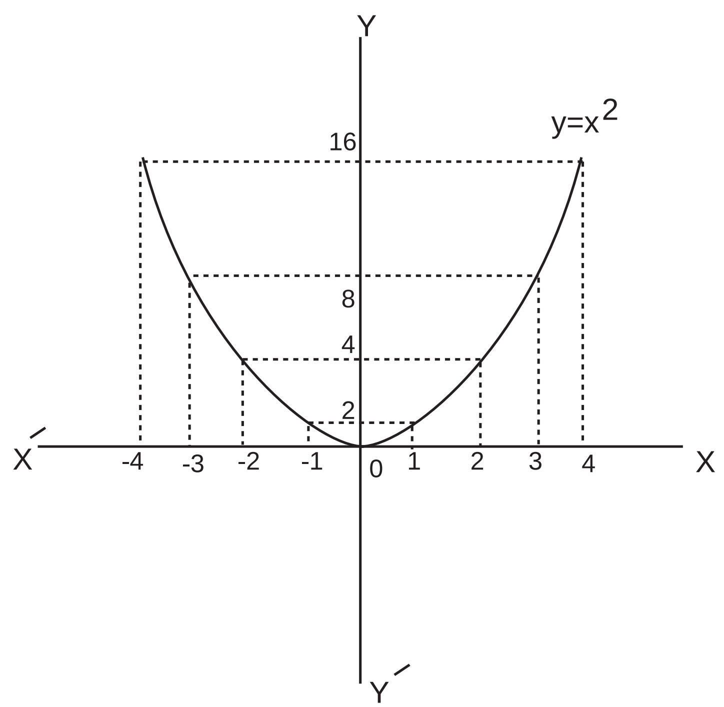
উদাহরণ ঃ $y = x^2$-এর লেখচিত্র অংকন করে মন্তব্য করুন।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, $y = x^2$ [ একটি দ্বিঘাত অপেক্ষক]

এখন স্বাধীন চলক x এর বিভিন্ন মান গ্রহন করে অধীন চলক y-এর বিভিন্ন মান পেতে পারি এবং সে মানগুলো সংখ্যাসূচক একটি তালিকায় প্রকাশ করি ঃ

$y = x^2$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -4 | -3 | -2 | -1 | x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 16 | 9 | 4 | 1 | y | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |



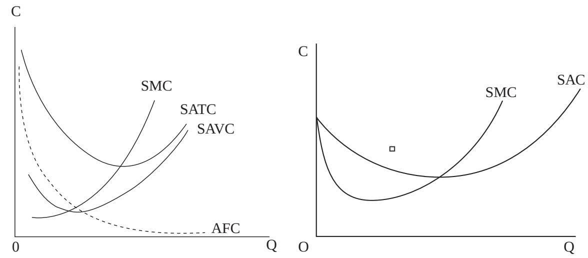

চিত্র -৩.২.১১ ঃ দ্বিঘাত অপেক্ষকের লেখচিত্র অংকন

উপরের, লেখচিত্রটি একটি দ্বিঘাত অপেক্ষকের চিত্ররূপ এবং এটি ইংরেজী “≈” আকৃতির। সুতরাং উপরোক্ত চিত্রের মাধ্যমে সিদ্ধান্ত নিতে পারি যে, দ্বিঘাত অপেক্ষকের চিত্ররূপ ইংরেজী “≈” আকৃতির এবং অধিবৃত্ত (parabolla) হয়। এই ধরনের চিত্ররূপ গণিতের পরিভাষায় উত্তল (Convex) অপেক্ষক বলেও অভিহিত করা হয়।

**দ্বিঘাত অপেক্ষকের অর্থনৈতিক ব্যবহার ঃ**

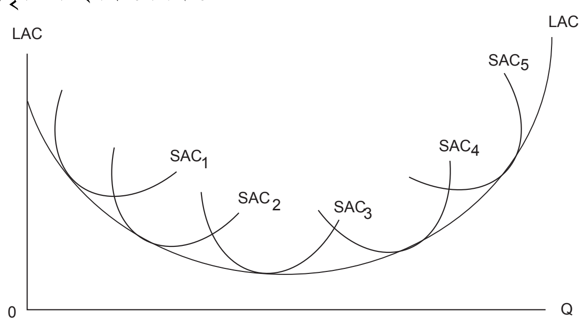
অর্থনৈতিক ক্ষেত্রে দ্বিঘাত অপেক্ষকের প্রচুর প্রয়োগ রয়েছে। নিম্নে সেগুলো উল্লেখ করা হল-

(i) স্বল্পকালীন গড় খরচ (SAC) অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দ্বিঘাত অপেক্ষক ব্যবহৃত হয়। কারণ SAC "≈" আকৃতির হয়। যেমন ঃ




চিত্র-৩.২.১২ ঃ স্বল্পকালীন গড় খরচ রেখাসমূহের চিত্ররূপ

(ii) দীর্ঘকালীন গড় খরচ অপেক্ষক (LAC)-এর ক্ষেত্রে দ্বিঘাত অপেক্ষক ব্যবহৃত হয়। কেননা, দীর্ঘকালীন গড় খরচ (LAC) রেখা "∪" আকৃতির হয়। যেমন ঃ



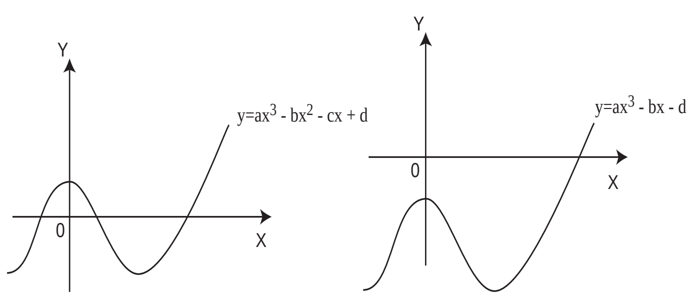

চিত্র-৩.২.১৩ ঃ দীর্ঘকালীন গড় খরচ অপেক্ষক রেখা

**(গ) ত্রিঘাত অপেক্ষকের (Cubic Function) ধারণা ঃ**

**ত্রিঘাত অপেক্ষক (Cubic Function) ঃ** যে পলিনমিয়েল অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের সর্বোচ্চ ঘাত তিন থাকে, তাকে ত্রিঘাত অপেক্ষক বলে। ত্রিঘাত অপেক্ষকের সাধারণ রূপ হচ্ছে ঃ

$$y = ax^3 - bx^2 - cx + d$$

নিম্নে ত্রিঘাত অপেক্ষকের সাধারণ চিত্ররূপ দেওয়া হলো ঃ




চিত্র-৩.২.১৪ ঃ ত্রিঘাত অপেক্ষকের সাধারন চিত্র রূপ

**ত্রিঘাত অপেক্ষকের লেখচিত্র অংকন ঃ**

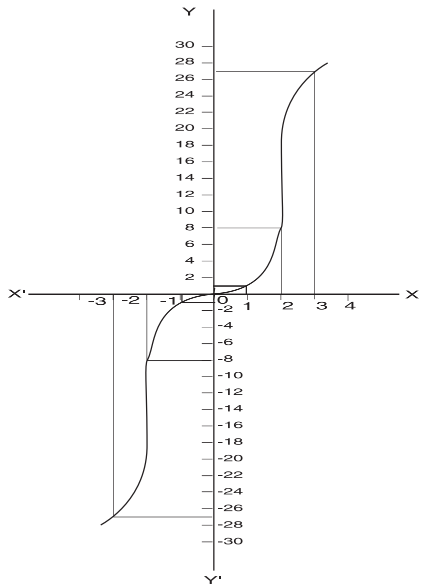
(i) $y = x^3$-এর লেখচিত্র অংকন করে দেখানো হলো।

দেওয়া আছে, $y = x^3$ [একটি ত্রিঘাত অপেক্ষক]

আমরা এখন স্বাধীন চলক x এর বিভিন্ন মান গ্রহণ করে অধীন চলক y এর যে মান পাই তাকে একটি সংখ্যাভিত্তিক সারণি আকারে প্রকাশ করতে পারি। যেমন-

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3 | -2 | -1 | x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| -27 | -8 | -1 | y | 0 | 1 | 8 | 27 |

নিম্নে গ্রাফ কাগজে সূচিভিত্তিক লেখচিত্র অংকন করে দেখানো হলো ঃ

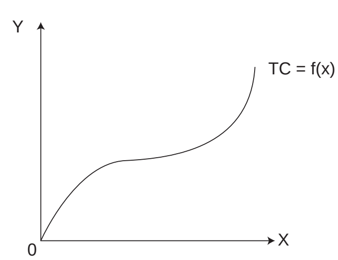



চিত্র-৩.২.১৫ ঃ ত্রিঘাত অপেক্ষকের লেখ চিত্র

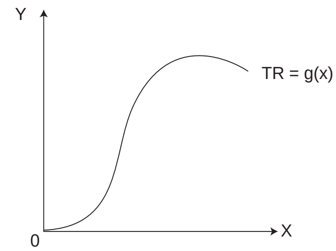
এখানে, লেখচিত্রে ত্রিঘাত অপেক্ষক $y = x^3$-এর যে চিত্র অংকন করা হয়েছে তার প্রতি লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে, চিত্রটি তিনটি ভূজ বা অংশ (Part) আছে। এ থেকে সিদ্ধান্ত নেয়া যায় যে, ত্রিঘাত অপেক্ষকের প্রতিটি চিত্রে তিনটি অংশ (Part) থাকে এবং তা অনেকটা ইংরেজী উল্টো S অক্ষরের মত হয়।

**ত্রিঘাত অপেক্ষকের অর্থনৈতিক ব্যবহার ঃ**

অর্থশাস্ত্রে ত্রিঘাত অপেক্ষকের কিছু কিছু প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। যেমন- মোট আয় (TR), মোট ব্যয় (TC) ত্রিঘাত অপেক্ষকের উদাহরণ।




চিত্র -৩.২.১৬ ঃ ত্রিঘাত অপেক্ষক-মোট ব্যয় রেখা




চিত্র- ৩.২.১৭ ঃ ত্রিঘাত অপেক্ষক -মোট আয় রেখা

***সারাংশ ঃ*** *অর্থনীতিতে একমাত্রিক ও দ্বিঘাত অপেক্ষকের প্রচুর প্রয়োগ রয়েছে। যেমন চাহিদা রেখা, যোগান রেখা, সঞ্চয় রেখা, স্বল্পকালীন খরচ রেখা, দীর্ঘকালীন খরচ রেখা ইত্যাদি। তবে ত্রিঘাত অপেক্ষকের তেমন ব্যবহার নেই। তবে মাঝে মাঝে এর কিছু প্রয়োগ দেখা যায়। যেমন মোট আয় রেখা ইত্যাদি।*

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.২**

**সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ**

১। দ্বিঘাত অপেক্ষক $Y = a X^2 + bX+C$ - এ চলক X এর সর্বোচ্চ ঘাত ২।

২। দীর্ঘকালীন গড় খরচ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে দ্বিঘাত অপেক্ষক ব্যবহৃত হয়।

**পাঠ-৩.৩**

## আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক ও অধিবৃত্তের ধারণা এবং অর্থনৈতিক ব্যবহার

এ পাঠ শেষে আপনি-

- আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক ও অধিবৃত্তের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক ও অধিবৃত্তের অর্থনৈতিক ব্যবহার জানতে পারবেন।
- আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক ও অধিবৃত্তের লেখচিত্র অংকন প্রণালী জানতে পারবেন।

### (ক) আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষকের ধারণা ঃ

**আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক ঃ**

যে অপেক্ষকের স্বাধীন চলক এবং অধীন চলকের গুণফল ধ্রুবক (Constant) হয়, তাকে আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক বলে।

যেমন ঃ $xy = k$ (ধ্রুবক)

$\therefore y = (\frac{k}{x})$ আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক।

আবার, $xy = 100$ (100= ধ্রুবক)

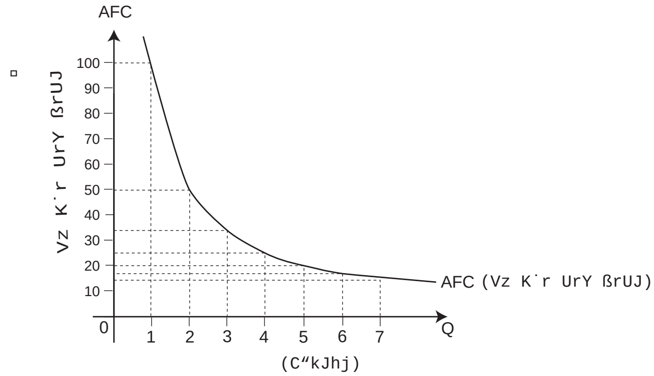
$\therefore y = (\frac{100}{x})$ এটি একটি আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক।

**অর্থনৈতিক ব্যবহার ঃ**

অর্থশাস্ত্রে আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষকের যে সকল অর্থনৈতিক প্রয়োগ রয়েছে সেগুলো নিুরূপ ঃ
১. গড় স্থির খরচ অপেক্ষক (AFC)একটি আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক।
২. একক স্থিতিস্থাপকতা সম্পন্ন চাহিদা অপেক্ষক ($PQ = k$)একটি আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক।
৩. নিরপেক্ষ রেখার বা সমউৎপাদন রেখার সাধারন চিত্রকেও পরাবৃত্ত অপেক্ষক হিসেবে চিহ্নিত করা হয়।
নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষকের অর্থনৈতিক ব্যবহার দেখানো হলো ঃ

| উৎপাদন (Q) | মোট স্থির খরচ (TFC) | গড় স্থির খরচ (AFC) = $\frac{TFC}{Q}$ |
|---|---|---|
| 0 | 100 | $\propto$ (অসীম) |
| 1 | 100 | 100 |
| 2 | 100 | 50 |
| 3 | 100 | 33.33 |
| 4 | 100 | 25 |
| 5 | 100 | 20 |
| 6 | 100 | 16.67 |
| 7 | 100 | 14.28 |

সূচিভিত্তিক গড় স্থির খরচ রেখা নিম্নে মুক্ত হস্তে অংকন করে দেখানো হলো ঃ




চিত্র-৩.৩.১ ঃ আয়ত পরাবৃত্তের লেখচিত্র

চিত্রে গড় স্থির খরচ রেখা একটি আয়ত পরাবৃত্ত রেখা।

**আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য ঃ** আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষকের সংজ্ঞা, উদাহরণ ও চিত্ররূপ প্রত্যক্ষ করলে নিম্নোক্ত বৈশিষ্ট্যগুলো ধরা পড়ে ঃ

১. আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষকের স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের গুনফল একটি ধ্রুবক।

২. আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক থেকে প্রাপ্ত চিত্র ভূমি অথবা উলম্ব কোন অক্ষকেই স্পর্শ করে না।

৩. আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষকের চিত্রের প্রতিটি বিন্দুতে সৃষ্ট আয়তক্ষেত্রগুলো পরস্পর সমান।

**উদাহরন ঃ** (i) $xy = 100$ লেখচিত্র অংকন করুন।

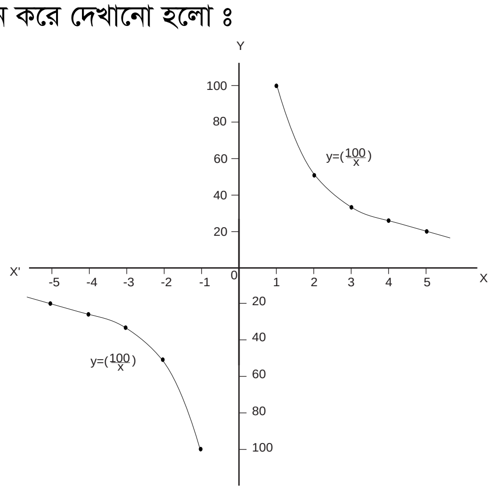
সমাধান: দেওয়া আছে, $xy = 100$

$$\therefore\ y = \frac{100}{x}$$ [ একটি আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক]

এখন x এর বিভিন্ন মানের প্রেক্ষিতে y এর প্রাপ্ত মানগুলোকে নিম্নে সূচি আকারে সাজানো হলো ঃ

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| -20 | 25 | -33.33 | -50 | -100 | y | $\alpha$ (Infinity) | 100 | 50 | 33.33 | 25 | 20 |

নিম্নে সূচিভিত্তিক লেখচিত্র অংকন করে দেখানো হলো ঃ

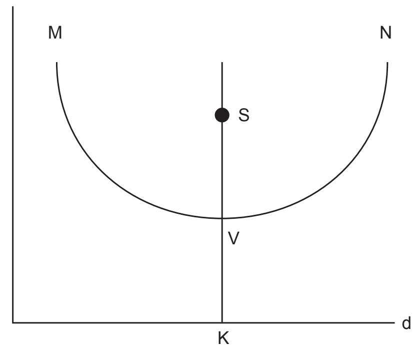



চিত্র-৩.৩.২ ঃ $y = \left(\frac{100}{x}\right)$ এবং $y = -\left(\frac{100}{x}\right)$ অপেক্ষকের লেখচিত্র

**(খ) অধিবৃত্তের (Parabola) ধারণা ঃ**

**অধিবৃত্ত (Parabola) ঃ**

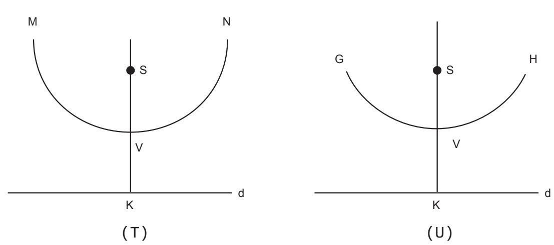
সমতলে একটি প্রদত্ত রেখা d এবং একটি বিন্দু S বিবেচনা করি। এখন এই রেখা এবং বিন্দু থেকে সমান দূরত্ব দিয়ে কোন রেখার বিন্দু অগ্রসর হলে সেটিকে অধিবৃত্ত (Parabola) বলা যায়।




চিত্র - ৩.৩.৩ ঃ অধিবৃত্ত

চিত্রের MN রেখাটি একটি অধিবৃত্ত। এক্ষেত্রে S বিন্দুকে অধিবৃত্তের ফোকাস (focus) বলা হয়। পক্ষান্তরে d রেখাকে directives এবং S থেকে d রেখার উপর অঙ্কিত KS লম্বকে প্যারাবোলার অক্ষ (axis) বলা হয়। এখন d থেকে S বিন্দুর দূরত্ব হচ্ছে SK যা $2\alpha$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে $\alpha$ একটি স্থির রাশি। সংজ্ঞানুযায়ী তাই প্যারাবোলার ক্ষেত্রে SV = VK হবে। প্যারাবোলা অক্ষের প্রেক্ষিতে সুষম (Symmetrical) হলে এর vertex মধ্যবিন্দু দিয়ে অগ্রসর হয়। যেমন চিত্রানুসারী MN প্যারাবোলাটি KS অক্ষের প্রেক্ষিতে সুষম। এই কারণে KS-এর মধ্যবিন্দু V দিয়ে এটি অগ্রসর হয়েছে। এক্ষেত্রে Vকে প্যারাবোলাটির vertex বলা যায়।

সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ (যেখানে $a \neq 0$)-এর লেখচিত্র অঙ্কন করলে প্যারাবোলা আকৃতির হয়। সমতলের প্রদত্ত রেখা d এবং focus বিন্দু S-এর অবস্থান পরিবর্তন করলে একাধিক প্যারাবোলা অঙ্কন করা সম্ভব। তবে সব ধরনের প্যারাবোলার সাধারণ অবয়ব/আকৃতি (Shape) অনুরূপ হলেও কোন একটি প্যারাবোলার নির্দিষ্ট অবস্থান এবং আকৃতি S এবং d-এর অবস্থানের উপর নির্ভর করবে। তবে d থেকে S-এর দূরত্ব $\alpha$ -এর ভিত্তিতে বিভিন্ন প্যারাবোলার মধ্যে পার্থক্য টানা যায়। যদি পরামিতি $\alpha$–এর মান ক্ষুদ্র হয় তবে S বিন্দু d রেখার কাছাকাছি হবে যা নিচের (ক) চিত্রে দেখানো হয়েছে।

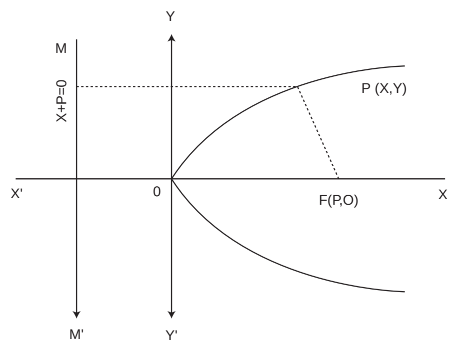



চিত্র -৩.৩.৪ ঃ অধিবৃত্ত

এক্ষেত্রে MN প্যারাবোলা আপেক্ষিকভাবে খাড়া হয়। পক্ষান্তরে $\alpha$ এর মান বড় হলে S বিন্দু d রেখা থেকে বেশি দূরত্বে অবস্থান করবে। এক্ষেত্রে প্যারাবোলা আপেক্ষিকভাবে বিস্তৃত হবে যা (খ) চিত্রের GH প্যারাবোলা দ্বারা প্রকাশ পায়।

**প্যারাবোলা/অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়**

মনে করি অধিবৃত্তের ফোকাস F এবং directive প্রতীক d দ্বারা নির্দেশিত। ধরি কোন সমতলে একটি রেখা M এবং একটি বিন্দু F প্রদত্ত আছে। এখন F ফোকাস এবং directives M-এর প্রেক্ষিতে প্যারাবোলা এমন সব বিন্দুর সঞ্চার পথ নির্দেশ করে যাদের প্রতিটি P এবং M থেকে সম দূরত্বে অবস্থান করবে।




চিত্র - ৩.৩.৫ ঃ অধিবৃত্ত

মনে করি সমতলে oxy পরাবৃত্তাকার (rectangular) অক্ষ যাতে oy রেখা M রেখার সমান্তরাল। এখন ox অক্ষে প্যারাবোলার ফোকাস F রয়েছে যার স্থানাংক (P,o) দ্বারা প্রকাশ পায়। এখন P>o হলে M রেখার সমীকরণ x+p = o হবে।

মনে করি P(x,y) হচ্ছে প্যারাবোলাটির উপরের একটি বিন্দু। ফলে লেখা যায় ঃ

$PF = \sqrt{(x-p)^2} + y^2$

$d(p, M) = |x+a|$

যেহেতু P বিন্দু প্যারাবোলাটির উপরে রয়েছে তাই বলা যায় ঃ

$PF = d(P, M)$

বা, $\sqrt{(x-p)^2} + y^2 = |x + p|$

বা, $(x-p)^2 + y^2 = (x + p)^2$

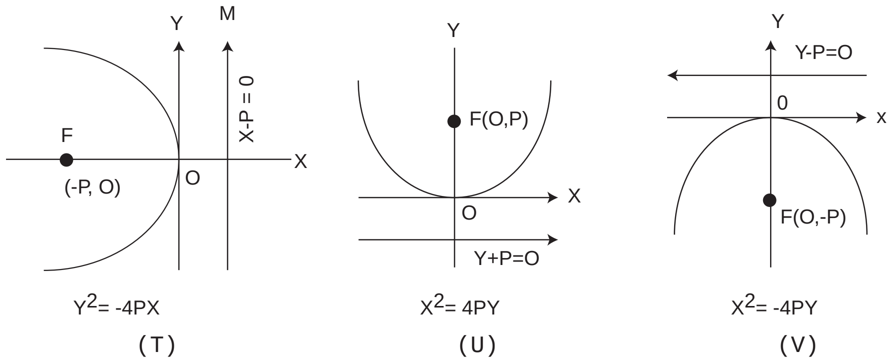
বা, $x^2-2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$

বা, $y^2 = 4Px$

সুতরাং বলা যায় ফোকাস F(P, O) এবং directives, x + P = 0-এর প্রেক্ষিতে প্যারাবোলার সমীকরণ ঃ

$y^2 = 4px$, যেখানে $x>0$

এক্ষেত্রে X অক্ষ হচ্ছে অধিবৃত্তের অক্ষ (Axis)। পক্ষান্তরে y -অক্ষ মূল বিন্দুতে প্যারাবোলাটির স্পর্শক বলা যায়। আবার মূল বিন্দুতে xx´ এবং yy´ অক্ষ পরস্পর ছেদ করায় এটিকে প্যারাবোলার vertex বলা যায়।
প্যারাবোলার বিভিন্ন অবস্থানের ফোকাস এবং directives-এর উপর নির্ভর করে। ফলে প্যারাবোলার সমীকরণও বিভিন্ন ধরনের হবে। নিচে তিনটি প্যারাবোলার অবস্থান এবং সমীকরণ দেখানো হলো।




চিত্র -৩.৩.৬ ঃ অধিবৃত্তের অবস্থান

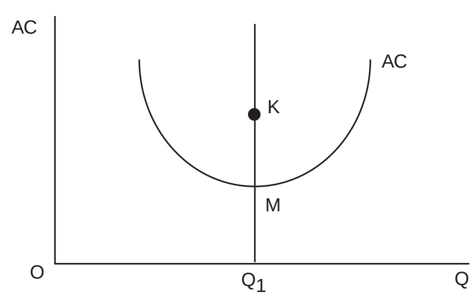
যদি প্যারাবোলার vertex v হয় এবং -এর স্থানাংক v (h,k) হয়, এবং যদি এর অক্ষ এবং directives স্থানাঙ্ক অক্ষসমূহের (Co-Ordinate axis) সমান্তরাল হয় তবে উপরে আলোচিত প্যারাবোলার চার অবস্থানের বেলায় নিম্নোক্ত অবস্থা পরিলক্ষিত হবে ঃ

| সমীকরণ | Directives | ফোকাস (focus) |
|---|---|---|
| (i) $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ | $x = h - p$ | (h+p; k) |
| (ii) $(y-k)^2 = - 4p(x-h)$ | $x = h + p$ | (h-p; k) |
| (iii) $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ | $y = k - p$ | (h, k+p) |
| (iv) $(x-h)^2 = - 4p(y-k)$ | $y = k + p$ | (h, k-p) |

**অর্থনীতিতে অধিবৃত্তের ব্যবহার (Use of Parabola in Economics)**

অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে আমরা প্যারাবোলার ব্যবহার করি। নিচে প্যারাবোলার কিছু উদাহরণ এবং ব্যবহার দেখানো হলো।

**ক. ব্যয় তত্ত্বে ব্যবহার (Use in Cost Theory)** ঃ অর্থনীতিতে বেশিরভাগ ক্ষেত্রে মোট ব্যয় অপেক্ষক ত্রিঘাত ধরণের হয়। এ অবস্থায় গড় ব্যয় অপেক্ষক দ্বিঘাত বিশিষ্ট হয়। অর্থাৎ গড় ব্যয় রেখা U আকৃতির হয় যা একটি প্যারাবোলা হতে পারে। গড় ব্যয় রেখার vertex তাই ন্যুনতম গড় ব্যয় (Minimum average cost) নির্দেশ করে।

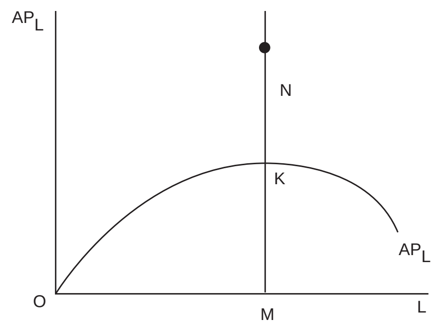



চিত্র-৩.৩.৭ ঃ অধিবৃত্ত-গড় ব্যয় রেখা

চিত্রে গড় ব্যয় রেখা AC একটি প্যারাবোলা। কারণ Q রেখাটি এর directives এবং K থেকে Q রেখার উপর অঙ্কিত $KQ_1$ লম্ব হচ্ছে এর অক্ষ (axis)। এখন Q থেকে K বিন্দুর দূরত্ব $KQ_1$ দ্বারা প্রকাশ পায়। AC রেখা

সুষম বলে KM = $MQ_1$ হবে। অর্থাৎ $KQ_1$ এর মধ্যবিন্দু দিয়ে AC রেখা অগ্রসর হয়েছে। ফলে M প্যারাবোলার Vertex বলে এই বিন্দুতে গড় ব্যয় (AC) ন্যূনতম হবে বলা যায়।

**খ. উৎপাদন তত্ত্বে ব্যবহার (Use in Production theory) ঃ** উৎপাদন অপেক্ষক সাধারণত ঃ ত্রিঘাত সম্পন্ন ধরা হয়। এ অবস্থায় গড় উৎপাদন রেখা দ্বিঘাত ধরনের (quadratic type) হবে। এক্ষেত্রে এরূপ রেখা প্যারাবোলার উদাহরণ হিসাবে চিহ্নিত করা যায়।

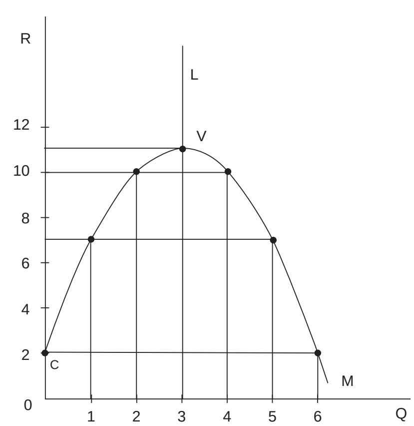



চিত্র- ৩.৩.৮ ঃ অধিবৃত্ত-গড় উৎপাদন রেখা

চিত্রের ভূমি অক্ষে শ্রমের পরিমাণ (L) এবং লম্ব অক্ষে শ্রমের গড় উৎপাদন ($AP_L$) পরিমাপকৃত। $AP_L$ রেখাটি নিচ থেকে অবতল। এটিও একটি প্যারাবোলার উদাহরণ। রেখাটির K বিন্দুকে এর Vertex বলা যায়। L রেখার প্রেক্ষিতে অঙ্কিত লম্ব NM এর অর্ধেক হচ্ছে KM। অর্থাৎ KM = NM বলা যায়। ফলে K বিন্দুতে গড় উৎপাদন ($AP_L$) সর্বোচ্চ হবে বলা যায়।

**গ. মোট আয় রেখার ক্ষেত্রে ব্যবহার (Use in Total Revenue Curve) ঃ** মোট আয় বিক্রয় স্তরের উপর নির্ভর করে। কোন নির্দিষ্ট উৎপাদন স্তরে মোট আয় (TR) সর্বোচ্চ হয়।
উৎপাদনের একটি স্তরেই আয় সর্বোচ্চ হতে পারে। ঐ উৎপাদন অপেক্ষা কম এবং বেশি স্তরে মোট আয় কম হবে বলা যায়। এজন্য মোট আয় রেখাকে প্যারাবোলার উদাহরণ হিসাবে উল্লেখ করা যায়। ধরি একচেটিয়া বাজারে (in monopoly market) একজন বিক্রেতার মোট আয় অপেক্ষক এবং পণ্য বিক্রয়ের (Q) প্রেক্ষিতে মোট আয় তালিকা নিম্নরূপ ঃ- আয় অপেক্ষক ঃ $R = -Q^2+6Q+2$

| Q | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | 2 | 7 | 10 | 11 | 10 | 7 | 2 |




চিত্র-৩.৩.৯ ঃ অধিবৃত্ত-মোট আয় রেখা

চিত্রে CM রেখা একজন একচেটিয়া কারবারীর মোট আয় রেখা। এক্ষেত্রে V রেখাটির Vertex নির্দেশ করে। অর্থাৎ $Q = 3$ হলে $R = 11$ পাওয়া যায় V বিন্দুতে। ফলে V বিন্দুতে উৎপাদকের মোট আয় সর্বোচ্চ হবে বলা যায়।

***সারাংশ ঃ*** *যে অপেক্ষকের স্বাধীন চলক এবং অধীন চলকের গুণফল ধ্রুবক, তাকে আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক বলে। গড় স্থির খরচ রেখা আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক লেখচিত্রের একটি উদাহরণ। এই রেখা ভূমি বা উলম্ব কোন অক্ষকেই স্পর্শ করে না। অন্যদিকে অধিবৃত্ত (Hyperbola) হচ্ছে এমন একটি বিন্দুর সঞ্চারণপথ যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে যার দূরত্ব সর্বদা সমান।*

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৩**

**সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ**

১। গড় স্থির খরচ অপেক্ষক একটি আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক।

২। আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষক থেকে প্রাপ্ত চিত্র ভূমি বা উলম্ব সকল অক্ষকে স্পর্শ করে।

**পাঠ-৩.৪**

## অপেক্ষকের ঢাল ও ছেদক
## (Slope and intercept of a function)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অপেক্ষকের ঢাল সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- অপেক্ষকের ছেদক সম্পর্কে জানতে পারবেন।

**ক. অপেক্ষকের ঢাল (Slope of a function) ঃ**

সাধারণত কোন অপেক্ষক $y = f(x)$ এর লেখচিত্র অংকনের সময় আমরা x কে ভূমি অক্ষে (Horizontal Axis) এবং y কে লম্ব অক্ষে (Vertical Axis) দেখাই বা পরিমাপ করি। এক্ষেত্রে x স্বাধীন এবং y হচ্ছে অধীন চলক। কোন অপেক্ষকের ঢাল বলতে সাধারণ কথায় অধীন চলকের পরিবর্তন $\Delta y$ কে স্বাধীন চলকের পরিবর্তন $\Delta x$ দ্বারা ভাগ করা বোঝায়। অর্থাৎ $\Delta y/\Delta x$ এই অনুপাত দ্বারা অপেক্ষকের ঢাল নির্দেশ করা যায়। তবে এটি সরল রৈখিক অপেক্ষকের বেলায় প্রযোজ্য। অসরল রৈখিক অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সীমার ধারণা নিয়ে অপেক্ষকের ঢাল নির্ণয় করতে হয়। লেখচিত্রে কোন স্পর্শক অংকন করলে তার ঢাল অপেক্ষকের ঢাল নির্দেশ করে। ধরি,

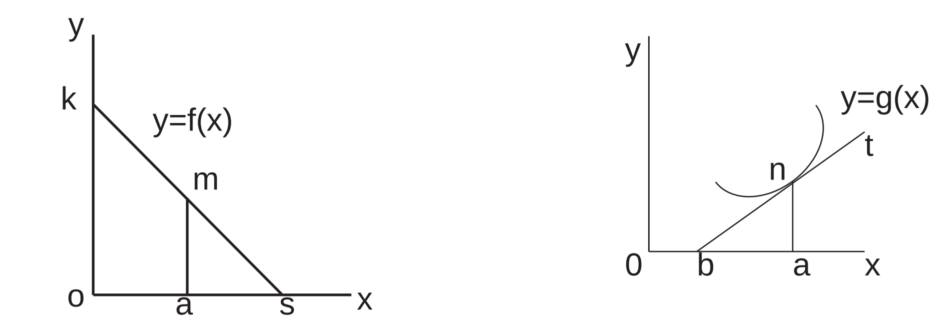
$y = f(x)$, একটি রৈখিক অপেক্ষক।

ঢাল $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

$y = g(x)$, একটি অসরল রৈখিক অপেক্ষক।

ঢাল $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ = স্পর্শকের ঢাল

$\text{Lim } \Delta x \rightarrow o$



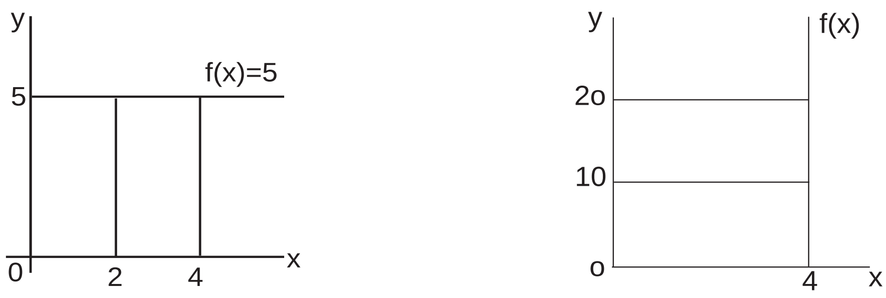

(ক) (খ)

চিত্র -৩.৪.১ ঃ সরল রৈখিক অপেক্ষক ও অসরল রৈখিক অপেক্ষকের ঢাল নির্ণয়

(ক) চিত্রের KS একটি রৈখিক অপেক্ষক। এর m বিন্দুতে ঢাল $= \Delta y/\Delta x = ma/as = OK/OS$ বলা যায়।

(খ) চিত্রের g(x) অপেক্ষক নন-লিনিয়ার অর্থাৎ বক্রাকৃত্রির। এর n বিন্দুতে ঢাল $dy/dx$ = bt স্পর্শকের ঢাল = an/ab বলা যায়।

কতিপয় অপেক্ষকের/রেখার ঢাল সংজ্ঞায়িত করা যায় না। যেমন লম্ব রেখার (Vertical line) বেলায় $\Delta x = O$ ধরলে $\Delta y/\Delta x$ সংজ্ঞায়িত করা যায় না। কারণ কোন বিন্দুতে O দ্বারা ভাগ করলে তার কোন সংখ্যাগত তাৎপর্য নেই। আবার ভূমি অক্ষের সমান্তরাল কোন রেখার বেলায় $\Delta y = O$ হবে। এক্ষেত্রে ঢাল $= \Delta y/\Delta x = O$ হবে।




(ক) (খ)

চিত্র -৩.৪.২ ঃ সমান্তরাল রেখা ও লম্ব রেখার ঢাল

$\Delta x = 4\text{-}2 = 2$

অথচ $\Delta y = 0$

সুতরাং $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{2} = 0$

$\Delta x = 0$

$\Delta y = 20\text{-}10 = 10$

$\Delta y/\Delta y = {}^{10}/_{0} = \alpha =$ অসীম

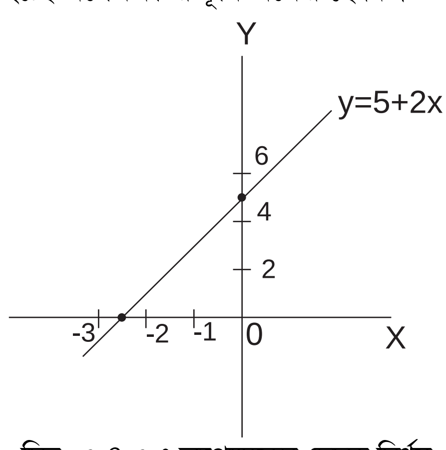
(কোন সংখ্যাগত মান নেই)

**খ. অপেক্ষকের ছেদক (Intercept of a Function) ঃ**

অপেক্ষকের ছেদক বলতে এমন বিন্দু বোঝায় যেখানে লেখচিত্র y অথবা x অক্ষ ছেদ (Cross) করে। y অক্ষের যে বিন্দুতে লেখচিত্র ছেদ করে তাকে y বা লম্ব অক্ষের ছেদক (Vertical intercept) এবং x অক্ষের যে বিন্দুতে লেখচিত্র ছেদ করে তাকে ভূমি অক্ষের ছেদক (Horizontal intercept) বলে। $y = f(x)$ অপেক্ষকের বেলায় $x = o$ ধরলে লম্ব অক্ষের ছেদক এবং $y = o$ ধরলে ভূমি অক্ষের ছেদক পাওয়া যায়।

উদাহরণ ঃ $y = 5 + 2x$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করি।

এক্ষেত্রে $x = o$ ধরলে $y = 5$ পাওয়া যায়। সুতরাং 5 হচ্ছে ফাংশনটির লম্ব অক্ষের ছেদক। আবার $y = o$ ধরলে $x = -5/2$ পাওয়া যায়। সুতরাং -5/2 হচ্ছে অপেক্ষকটির ভূমি অক্ষের ছেদক।




চিত্র- ৩.৪.৩ ঃ অপেক্ষকের ছেদক নির্ণয়

চিত্রের A বিন্দু y অক্ষের ছেদক এবং B বিন্দু x অক্ষের ছেদক প্রকাশ করে।

এক্ষেত্রে অপেক্ষকটির ঢাল হবে নিম্নরূপ ঃ

$y = 5 + 2x$

$\therefore$ ঢাল, $\frac{dy}{dx} = 2$

***সারাংশ ঃ*** *কোন অপেক্ষকের ঢাল বলতে সাধারন কথায় অধীন চলকের পরিবর্তনকে স্বাধীন চলকের পরিবর্তন দ্বারা ভাগ করা বোঝায়। তবে এটি শুধুমাত্র সরল রৈখিক অপেক্ষকের বেলায় প্রযোজ্য। অন্যদিকে অপেক্ষকের ছেদক বলতে এমন বিন্দু বোঝায় যেখানে লেখচিত্র* $Y$ *বা* $X$ *অক্ষ ছেদ করে।*

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন -৩.৪**

**সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ**

১। ভূমি অক্ষের সমান্তরাল কোন রেখার বেলায় $\Delta y = 0$ হবে।

২। সাধারণতঃ কোন অপেক্ষকের লেখচিত্রের জন্য x-কে লম্ব অক্ষে দেখানো হয়।

## পাঠ-৩.৫

### চাহিদা ও যোগান রেখা নির্ণয়

এ পাঠ শেষে আপনি-

- চাহিদা অপেক্ষক সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- যোগান অপেক্ষক সম্পর্কে জানতে পারবেন।

ভারসাম্যবস্থায় চাহিদা ও যোগান রেখা দ্বারা এমন একটি দাম ও পরিমাণ নির্ণয় করা যায় যেখানে পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক বাজারে ঐ দ্রব্যের চাহিদা ও যোগান সমান হয়। ঐ দ্রব্যের দাম ও পরিমাণকে ভারসাম্যমূলক দাম ও পরিমাণ বলে।
এককথায় বলা যায়, যে দামে চাহিদা ও যোগান সমান হয়, তাকে ভারসাম্য দাম এবং ঐ দামে যে পরিমাণ ক্রয় বিক্রয় হয় তাকে ভারসাম্য পরিমাণ বলে।

**চাহিদা ও যোগান অপেক্ষক পরিচিতি ঃ**

নিম্নের কোনটি চাহিদা অপেক্ষক এবং কোনটি যোগান অপেক্ষক ব্যাখ্যা করুন।

(ক) $10q-100-400p=0$

(খ) $2Q = 2400-2p^2$

(গ) $2Q = 310-50p$

(ঘ) $2Q = 100p$

সমাধান ঃ

(ক) দেওয়া আছে,

$10q-100-400p=0$

বা $10q = 100 + 400p$

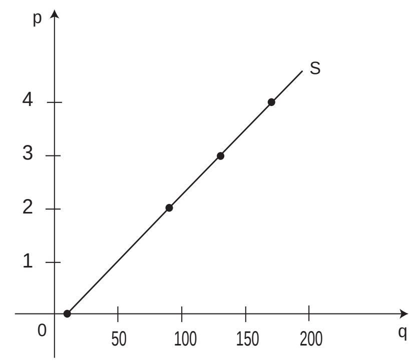
বা $q = \dfrac{10(10+40p)}{10}$

$\therefore q = 10 + 40p$

এখন p-এর বিভিন্ন মানের প্রেক্ষিতে q-এর যে সকল মান পাওয়া যায় তার ভিত্তিতে সূচি নিম্নরূপ ঃ

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| p | 0 | 2 | 3 | 4 |
| q | 10 | 90 | 130 | 170 |

এক্ষেত্রে যতই দাম (p) বৃদ্ধি পাচ্ছে ততই পরিমাণ (q) এর মান বৃদ্ধি পাচ্ছে। অর্থাৎ p ও q এর মধ্যে ধণাত্মক বা প্রত্যক্ষ সম্পর্ক। কাজেই উপরের অপেক্ষকটি একটি যোগান অপেক্ষক।




চিত্র ৩.৫.১ ঃ যোগান রেখা

(খ) দেওয়া আছে,

$2Q = 2400 - 2p2$

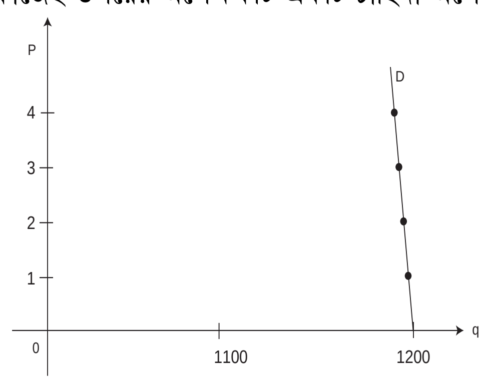
বা $Q = \frac{2(1200 - p^2)}{2}$

$\therefore Q = 1200 - p^2$

P ও Q এর বিভিন্ন মানের প্রেক্ষিতে সূচি নিম্নরূপ ঃ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Q | 1200 | 1199 | 1196 | 1191 | 1184 |

এক্ষেত্রে যতই দাম (p) বৃদ্ধি পাচ্ছে ততই পরিমাণ (Q) হ্রাস পাচ্ছে। অর্থাৎ দাম (p) এর সাথে পরিমাণ (Q)-এর ঋণাত্মক বা বিপরীত সম্পর্ক। কাজেই উপরের অপেক্ষকটি একটি চাহিদা অপেক্ষক।




চিত্র ৩.৫.২ ঃ চাহিদা রেখা

(গ) দেওয়া আছে,

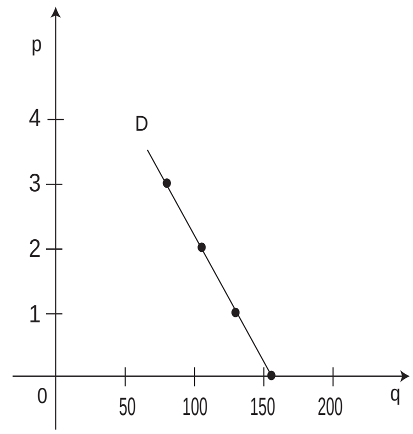
$2Q = 310 - 50p$

বা, $Q = \frac{2(155 - 25p)}{2}$

$\therefore Q = 155 - 25p$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| p | 0 | 1 | 2 | 3 |
| Q | 155 | 130 | 105 | 80 |

এক্ষেত্রে দাম (p) এর মান যতই বৃদ্ধি পাচ্ছে পরিমাণ এর মান ততই হ্রাস পাচ্ছে। অর্থাৎ দাম (p) এর পরিমাণ (Q) এর বিপরীত বা ঋণাত্মক সম্পর্ক। কাজেই উপরের অপেক্ষকটি চাহিদা অপেক্ষক।




চিত্র ৩.৫.৩ ঃ চাহিদা রেখা

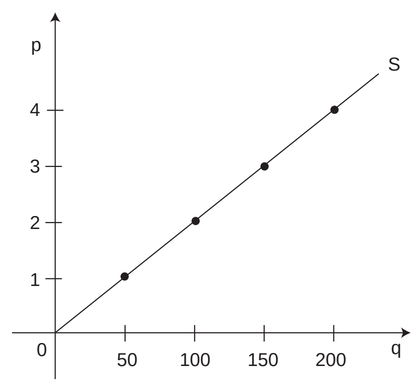
(ঘ) দেওয়া আছে,

2Q = 100p

বা Q = 50p

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Q | 0 | 50 | 100 | 150 | 200 |

এক্ষেত্রে দাম (p) যতই বৃদ্ধি পাচ্ছে পরিমাণ (Q) ততই বৃদ্ধি পাচ্ছে। অর্থাৎ দাম (p)-এর সাথে পরিমাণ (Q)-এর ধণাত্মক (+) বা প্রত্যক্ষ সম্পর্ক। কাজেই উপরের অপেক্ষকটি একটি মুলবিন্দগামী যোগান অপেক্ষক।




চিত্র ৩.৫.৪ ঃ যোগান রেখা

***সারাংশ ঃ*** *যে অপেক্ষকে দাম (P) ও পরিমান (q) -এর মধ্যে ধনাত্মক বা প্রত্যক্ষ সম্পর্ক বিদ্যমান, তাকে যোগান অপেক্ষক বলে। অন্যদিকে দাম (P)-এর সাথে পরিমান (q)-এর ঋনাত্মক বা বিপরীত সম্পর্ক থাকলে তাকে চাহিদা অপেক্ষক বলে।*

**পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৫**

**সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুনঃ**

১। যোগান অপেক্ষকে P ও q -এর মধ্যে ধনাত্মক সম্পর্ক রয়েছে।

**চূড়ান্ত মূল্যায়ন- ইউনিট ৩**

**সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ**

১। স্থির অপেক্ষক কি ? অর্থনীতির কোন কোন ক্ষেত্রে এটি ব্যবহৃত হয় ?
২। অর্থনীতিতে সরল রৈখিক একমাত্রিক অপেক্ষক কোথায় ব্যবহৃত হয় ?
৩। বিভিন্ন অপেক্ষকের লেখচিত্র প্রকাশ ও অর্থনৈতিক ব্যবহার আলোচনা করুন।
৪। অর্থনীতিতে দ্বিঘাত অপেক্ষক কোন কোন ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয় ?
৫। অর্থশাস্ত্রে দ্বিঘাত অপেক্ষকের গাণিতিক সমস্যা ও সমাধান লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।
৬। অর্থশাস্ত্রে ত্রিঘাত অপেক্ষকের গাণিতিক সমস্যা ও সমাধান লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।
৭। আয়ত পরাবৃত্ত অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য কি কি ?
৮। অধিবৃত্তের সংজ্ঞা দিন। অধিবৃত্তের সাথে সম্পৃক্ত উপাদান কি কি ? চাহিদা অপেক্ষক, $P = \alpha - \beta q$, যেখানে $P$ = দাম, $q$ = দ্রব্যের পরিমাণ, $\alpha, \beta$ = ধনাত্মক ধ্রুবক।
প্রমান করুন, মোট আয় অপেক্ষক একটি অধিবৃত্ত।
৯। $PQ = 30$ লেখচিত্র অংকন করে মন্তব্য করুন।
১০। ঢাল বলতে কি বোঝায় ?
১১। অর্থনীতিতে কোন অপেক্ষকের ঢাল ও ছেদক লেখচিত্রের মাধ্যমে আলোচনা করুন।
১২। যদি প্রতি কেজি চিনির বিক্রয় মূল্য P টাকা এবং কোন পরিবারের মাসিক চাহিদা (Q) কেজিতে নিম্নরূপ হয় ;

$$P = \frac{300}{q+10} - 5$$

চিনির চাহিদা রেখার একটি লেখচিত্র অংকন করুন।
দাম কত হলে চিনির চাহিদার পরিমান শূন্য হবে ?

**উত্তরমালা-ইউনিট ৩**

| | | |
|---|---|---|
| **পাঠ-১ ঃ** | ১। মিথ্যা | ২। সত্য |
| **পাঠ-২ ঃ** | ১। সত্য | ২। সত্য |
| **পাঠ-৩ ঃ** | ১। সত্য | ২। মিথ্যা |
| **পাঠ-৪ ঃ** | ১। সত্য | ২। মিথ্যা |
| **পাঠ-৫ ঃ** | ১। সত্য | |