২

অর্থনৈতিক মডেলসমূহ

অর্থনীতিতে গণিতের ব্যবহার ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাচ্ছে, যার ভিত্তিই হচ্ছে অর্থনৈতিক মডেলসমূহ। গাণিতিক অর্থনীতি পাঠে উক্ত বিষয়ে স্পষ্ট ধারণার গুরুত্ব অপরিসীম। এই ইউনিটের বিভিন্ন পাঠে তাই গাণিতিক অর্থনীতির সর্বপেক্ষা মৌলিক ভিত্তিসমূহ, যেমন অর্থনৈতিক মডেলের উপাদান, বাস্তব সংখ্যা ক্রম, সেট, গাণিতিক সম্পর্ক ও অপেক্ষক সাধারণতার ধারণা, বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষক নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

- পাঠ ২.১: অর্থনৈতিক মডেলের উপাদান
- পাঠ ২.২: বাস্তব সংখ্যা ক্রম
- পাঠ ২.৩: সেট এর ধারণা
- পাঠ ২.৪: গাণিতিক সম্পর্ক ও অপেক্ষক সাধারণতার ধারণা
- পাঠ ২.৫: বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষক

পাঠ-২.১

অর্থনৈতিক মডেলের উপাদান

এ পাঠ শেষে আপনি -

- অর্থনৈতিক মডেলের বিভিন্ন উপাদান সম্পর্কে জানতে পারবেন।

একটি অর্থনৈতিক ব্যবস্থায় বেশ কিছু চলক (Variable) একসঙ্গে কাজ করে। এসব চলকের মাধ্যমে ফার্ম, পরিবার, বাজার, সরকার এবং অর্থনীতির অপরাপর খাতের অর্থনৈতিক কর্মকান্ড প্রতিফলিত হয়। এই জটিল প্রক্রিয়ায় দুটো বৈশিষ্ট্য নিয়ে অর্থনীতিবিদরা সাধারণত: পর্যালোচনা করেন। যেমনঃ

১. অর্থনীতিতে কার্যরত বিভিন্ন চলকের মধ্যে সম্পর্ক পর্যালোচনা করে তার ভিত্তিতে অর্থনৈতিক সিদ্ধান্তে পৌঁছার প্রয়োজনীয়তার ব্যাখ্যা প্রদানের চেষ্টা করা হয়।

২. বিবেচনাধীন চলকসমূহের অতীত এবং বর্তমান আচরণ পর্যবেক্ষণ এবং পর্যালোচনা করে এদের ভবিষ্যৎ আচরণ সম্পর্কে পূর্বাভাস প্রদানের চেষ্টা করা হয়।

যেমন; পূর্ণ প্রতিযোগীতামূলক বাজার মডেলে চাহিদা ও যোগানের ঘাত প্রতিঘাতে কিভাবে দ্রব্যমূল্য নির্ধারিত হয় তা দেখানো হয়। আবার জাতীয় আয় মডেলে কিভাবে একটি সামাজিক-অর্থনৈতিক ভারসাম্য আয় স্তর পাওয়া যায় তা দেখানো হয়।

অর্থনীতির জটিল তত্ত্ব ও তথ্যকে সহজ উপায়ে প্রকাশ করার জন্য কোন্ কোন্ বৈশিষ্ট্য/দিক বেশি গুরুত্বপূর্ণ তা চিহ্নিত করে চলকসমূহের মধ্যে সাধারণ সম্পর্ক বিবেচনা করা প্রয়োজন হতে পারে। এভাবে বাস্তব জগতের গুরুত্বপূর্ণ দিকের আংশিক অথবা সামগ্রিক দিক বিবেচনা করে এর আওতাধীন বিভিন্ন চলকের পারস্পরিক সম্পর্ক পর্যালোচনার মাধ্যমে কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার পন্থাই অর্থনৈতিক মডেল দ্বারা নির্ধারিত হয়।

অর্থনৈতিক মডেল বাস্তব জগত থেকে নেয়া বিভিন্ন জটিল অর্থনৈতিক ঘটনার মধ্যে সম্পর্ক সহজ আকারে প্রকাশ করে। এই মডেলের উদ্দেশ্য হচ্ছে মানুষের অর্থনৈতিক কর্মকান্ড এবং আচরণ প্রতিফলিত করার পাশাপাশি যতটা সম্ভব নির্ভুল পূর্বাভাষ প্রদান করা। অর্থনৈতিক মডেল গঠনের কয়েকটি উপাদান রয়েছে। নিচে এই উপাদানগুলোর ব্যবহারিক দিক নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা দেয়া হল-

অর্থনৈতিক মডেল গঠনের উপাদানসমূহ:

১. চলক (Variable): যে রাশি পর্যবেক্ষণকালে বিভিন্ন মান গ্রহণ করে তাকে চলক বলা হয়। সাধারণত: চলকের জন্য x,y,z,t,...........ইত্যাদি প্রতীক ব্যবহার করা হয়। অর্থনীতিতে মূল্য (P), ভোগ ব্যয় (C), আয় (Y), সঞ্চয় (S), বিনিয়োগ (I), চাহিদা (D), যোগান (S), ইত্যাদি চলকের ব্যবহার উদাহরণ হিসাবে উল্লেখ করা যায়। চলক আবার বিভিন্ন রকম হতে পারে। যেমন:- অভ্যন্তরীণ ও বাহ্যিক চলক এবং স্বাধীন চলকও অধীন চলক।

ক. অভ্যন্তরীণ চলক (Endogeneous Variable)ঃ যে সব চলকের মান কোন মডেলের মাধ্যমে বীজগাণিতিক প্রক্রিয়ায় সমাধান করে নির্ণয় করা যায়, সেগুলোকে অভ্যন্তরীণ চলক বলে।

খ. বাহ্যিক চলক (Exogeneous Variable): যে সব চলকের মান মডেলের বাইরের শক্তি দিয়ে নির্ধারিত হয়, সেগুলোকে বাহ্যিক চলক বলে। আরও সহজভাবে বলা যায়, যে সকল চলকের মান পূর্বেই দেওয়া থাকে অথবা পূর্ব নির্ধারিত থাকে সেগুলোকে বাহ্যিক চলক বলে।

২. ধ্রুবক (Constant): যার মান সবসময় স্থির থাকে তাকে ধ্রুবক বলে। যেমন, $\pi=\frac{22}{7}=3.1415$ এবং সূচক $e=2.71828$ ইত্যাদি হলো ধ্রুবকের উদাহরণ। সাধারণতঃ ইংরেজী বর্ণ a, b,c,d ইত্যাদি এবং গ্রীক বর্ণ α, β, γ ইত্যাদি যথাক্রমে ধ্রবক ও সহগ নির্দেশের জন্য ব্যবহৃত হয়।

৩. পরামিতি (Parameter): কোন অর্থনৈতিক মডেল তৈরি করতে কতগুলো রাশিকে স্থির ধরা হয় কিন্তু অন্য কোন মডেলে সে রাশিগুলোর স্থির থাকার নিশ্চয়তা নেই। এই রাশিগুলো হলো পরামিতি। ইংরেজীতে Parameter শব্দটির সাধারণ অর্থ কোন কিছুর তুলনা করা বা কোন কিছুর সাহায্যে অন্য কিছুকে পরিমাপ করা। স্বাভাবিকভাবে k,l,m,n,p,q অথবা গ্রীক বর্ণমালা λ, μ, σ, এবং ρ দ্বারা পরামিতি নির্দেশ করা হয়, উদাহরণস্বরূপ, বাজার মডেলে a, b, c, d এই চারটি হলো পরামিতি। a হলো চাহিদা রেখার ছেদক, b হলো চাহিদা রেখার ঢাল, c হলো যোগান রেখার ছেদক এবং d হলো যোগান রেখার ঢাল। জাতীয় আয় মডেলে a ও b হলো পরামিতি যেখানে a হলো স্বয়ম্ভুত ভোগ এবং b হলো প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা। [C=a + bY, যেখানে C হলো ভোগ ব্যয় এবং Y হলো জাতীয় আয়]

৪. সমীকরণ (Equation): সমতা চিহ্ন দ্বারা যুক্ত দুটি বীজগাণিতিক রাশির মধ্যে যে গাণিতিক সম্পর্ক তৈরি হয়, তা যদি চলকের এক বা একাধিক সীমিত মানের জন্য সত্য হয়, তবে তাকে সমীকরণ বলে।
সমীকরণ তিন প্রকার হতে পারে। যথা:-
(ক) সংজ্ঞাবাচক সমীকরণঃ যে সমীকরণের সাহায্যে সংজ্ঞা প্রকাশ পায়, তাকে সংজ্ঞাবাচক সমীকরণ বলে। যথাঃ মুনাফা সমীকরণ, Π=R-C অর্থাৎ মুনাফা (Π) = মোট আয় (R)-মোট ব্যয় (C)।
(খ) ব্যবহারবাচক সমীকরণঃ চাহিদা সমীকরণ, যোগান সমীকরণ, ভোগ সমীকরণ ইত্যাদি ব্যবহারবাচক সমীকরণের আওতাভুক্ত।

যেমন- $Qd = a-bp$ $\quad [a>o, b>o]$
$Qs = -c+dp$ $\quad [c>o, d>o]$
$C = a+bY$ $\quad [a>o, o<b<I]$

(গ) স্থিতিবাচক শর্ত ঃ Qd = Qs এটি হচ্ছে বাজার ভারসাম্যের জন্য স্থিতিবাচক শর্তের সমীকরণ।

৫. অভেদ (Identity)ঃ সমতা চিহ্ন দ্বারা প্রকাশিত দুটি বীজগাণিতিক রাশি দ্বারা যে গাণিতিক সম্পর্ক তৈরি করা হয়, তা যদি চলকের যে কোন মানের জন্য সত্য হয়, তবে তাকে অভেদ বলে। উদাহরণ স্বরূপ সে (Say)-এর সূত্র অনুযায়ী সামগ্রিক সরবরাহ = সামগ্রিক চাহিদা; কেইনসের জাতীয় আয় সম্পর্কিত অভেদ Y + C+I অথবা Y + C+S, ইত্যাদি।
তবে সমীকরণ এবং অভেদের মধ্যে পার্থক্য আছে। কোন গাণিতিক বাক্যের বামপক্ষ এবং ডানপক্ষ সমীকরণের বেলায় চলকের সীমিত মানের জন্য সত্য। অভেদের বেলায় চলকের যে কোন মানের জন্যই সেটি সত্য।

অর্থনীতিক মডেল গঠনের কয়েকটি পদক্ষেপ রয়েছে। মডেলের আকার মূলতঃ বিবেচনাধীন চলকের সংখ্যা এবং তথ্য প্রাপ্তির উপর নির্ভর করে। এর গঠনের প্রক্রিয়া/পদক্ষেপসমূহ নিচে ব্যাখ্যা করা হলো:-

১. চলক এবং পরামিতি সমূহ নির্বাচনঃ
অর্থনীতির যে অংশ/দিক নিয়ে মডেল গঠন করা হবে তা প্রথমে চিহ্নিত করতে হবে। এরপর কতগুলো অর্থনৈতিক চলক মডেল দ্বারা নির্ধারিত হবে সে সম্পর্কে সিদ্ধান্ত নিতে হবে। যে সব রাশির মান অজ্ঞাত অথচ মানের পরিধি আছে সেগুলোকে চলক বলা যায়। সাধারণতঃ সমীকরণের সমান সংখ্যক চলক নিয়ে মডেল গঠন করা হয়।

সারাংশ ঃ *অর্থনীতিক মডেল বাস্তব জগত থেকে নেয়া বিভিন্ন অর্থনৈতিক ঘটনার মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে। এই মডেলের উদ্দেশ্য হচ্ছে মানুষের অর্থনৈতিক কর্মকান্ড এবং আচরণ প্রতিফলিত করার পাশাপাশি যতটা সম্ভব নির্ভুল পূর্বাভাষ প্রদান করা। চলক, ধ্রুবক, পরামিতি, সমীকরণ, অভেদ ইত্যাদি উপাদানের সমন্বয়ে অর্থনীতিক মডেল গঠন করা হয়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। চলক সাধারণতঃ বিভিন্ন রকম হয় না।

২। জাতীয় আয় মডেলে a ও b হলো পরামিতি, যেখানে a হলো স্বয়ম্ভুত ভোগ এবং b হলো প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা।

পাঠ-২.২

বাস্তব সংখ্যা ক্রম

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সংখ্যার শ্রেণীবিন্যাস সম্পর্কে বলতে পারবেন।

অর্থনীতিক মডেলে প্রায় সব ক্ষেত্রে পূর্ণ সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। কারণ, কিছু ক্ষেত্রে ভগ্নসংখ্যা ব্যবহার করা যায় না। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, শ্রম-সংখ্যা পরিমাপের বেলায় আমরা ভগ্নসংখ্যা ব্যবহার করতে পারি না। যেমন, ২.৫ জন শ্রমিক এ কথা বলতে পারি না। আবার ঋণাত্মক সংখ্যা দ্রব্যমূল্য (P), চাহিদা (D) ও যোগানের (S) পরিমাণ, উৎপাদন (Q), ব্যয় (C) ইত্যাদি পরিমাপের ক্ষেত্রে গ্রহণযোগ্য নয়। অথচ কোন ব্যবসাক্ষেত্রে লোকসান হলে তার মুনাফা (Π) ঋণাত্মক বলা যায়। এক্ষেত্রে মুনাফা ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা নির্দেশ করা হয়।
সংখ্যার অর্থ গণনালব্ধ ধারণা। ক্রম এবং প্রতিসঙ্গ ধারণার উপর ভিত্তি করে সংখ্যার ধারণা গড়ে উঠেছে।

ক. প্রাকৃতিক সংখ্যা (Natural numbers)ঃ গণনা থেকে সংখ্যার ধারণার উৎপত্তি। গণনার জন্য বস্তুর যে সংখ্যা শৈলী স্থির করে নেয়া হয়, তা প্রাকৃতিক সংখ্যার সেট। এর প্রতীক N দ্বারা প্রকাশ করা যায়। N =1, 2, 3, 4, 5, 6........ ইত্যাদি।
প্রাকৃতিক সংখ্যার অন্যতম বৈশিষ্ট্য হচ্ছে এরূপ দুটি সংখ্যা যোগ অথবা পূরণ করলেও প্রাকৃতিক সংখ্যা হবে: যেমন, 3+5 = 8; 3∞4 = 12, এখানে 8 ও 12 প্রাকৃতিক সংখ্যা। উল্লেখ্য দৈনন্দিন জীবনে অনেক সময় ভগ্ন এবং ঋণাত্মক সংখ্যা ব্যবহার করি। কিন্তু সেগুলো প্রাকৃতিক সংখ্যার অন্তর্ভুক্ত নয়। যেমন, 3-8=-5 এবং 4/3=1.33...... ইত্যাদি প্রাকৃতিক সংখ্যায় অন্তর্ভুক্ত নয়। সুতরাং বলা যায়, একটি প্রাকৃতিক সংখ্যাকে অন্য একটি প্রাকৃতিক সংখ্যা থেকে বিয়োগ অথবা তা দ্বারা ভাগ করলে সব সময় একটি প্রাকৃতিক সংখ্যা পাওয়া সম্ভব নয়।

খ. পূর্ণ সংখ্যা (Integers)ঃ দুটি প্রাকৃতিক সংখ্যার বিয়োগফল সংখ্যার জগতে স্থান দেয়ার জন্য শূন্য (০) এবং ঋণাত্মক (-) সংখ্যার ধারণা প্রাকৃতিক সংখ্যার ধারণার সাথে যোগ করলে পূর্ণসংখ্যার ধারণা পাই। 1, 2, 3, 4, 5 ইত্যাদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। -1, -2, -3..... ইত্যাদি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। পক্ষান্তরে, ০ সংখ্যাটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক নয়, এদের সম্মেলনে যে সংখ্যা সেট পাওয়া যায় তা পূর্ণ সংখ্যার একটি পূর্ণাঙ্গ সেট।
......-4, -3, -2, -1, 0, 1,2,3.......... পূর্ণসংখ্যার একটি পূর্ণাঙ্গ সেট।
তবে কোন পূর্ণসংখ্যাকে অপর একটি পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে সব সময় একটি পূর্ণ সংখ্যা পাওয়া যায় না। যেমন 8/2 = 4 একটি পূর্ণ সংখ্যা, কিন্তু 9/2 = 4.5 একটি পূর্ণ সংখ্যা নয়। কেননা 4.5 একটি ভগ্ন সংখ্যা।
পূর্ণ সংখ্যার মাধ্যমে আমরা কোন সংখ্যা শ্রেণীর ক্রম বা বিকাশ দেখাতে পারি। এটিকে গণনার সাংখ্যিক পরিমাপের ধারণা (Cardinal Aspects of Counting) বলা যায়। যেমন- কাপড়ের দোকানে অনেক সময় সর্বোৎকৃষ্ট, উৎকৃষ্ট ইত্যাদিভাবে কাপড়কে সাজিয়ে রাখা হয়। সর্বোৎকৃষ্টের জন্য যদি আমরা পূর্ণ সংখ্যা 1 এবং উৎকৃষ্টের জন্য 2 এবং তারপর মূল্য অনুযায়ী বিভিন্ন মানসম্পন্ন (grade) কাপড় ক্রমশ পূর্ণ সংখ্যার মাধ্যমে প্রকাশ করি তবে বিভিন্ন ধরণের কাপড় গুণগত মান অনুযায়ী পূর্ণ সংখ্যার সাহায্য শ্রেণী বিন্যাস করা সম্ভব।
নিরপেক্ষ রেখা পর্যালোচনার সময় আমরা পূর্ণ সংখ্যার সাহায্যে নিরপেক্ষ রেখাসমূহকে মোট উপযোগের ক্রম অনুসারে সাজাতে পারি। তবে এই সংখ্যা কোন ক্রমে নিরপেক্ষ রেখা কিরূপ উপযোগ নির্দেশ করে তা প্রকাশের জন্য ব্যবহার করা চলে না। শুধু বিভিন্ন নিরপেক্ষ রেখাকে উপযোগ অনুসারে দেখানোর জন্য পূর্ণ সংখ্যা ব্যবহার

করা যেতে পারে। অন্যদিকে এরূপ সংখ্যা সাধারণতঃ সাংখ্যিক (Cardinal) পরিমাপের ক্ষেত্রে ব্যবহার করা যায়। মার্শাল এবং অন্যান্য অর্থনীতিবিদ Cardinal সংখ্যার সাহায্যে উপযোগ পরিমাপের চেষ্টা করেছেন।

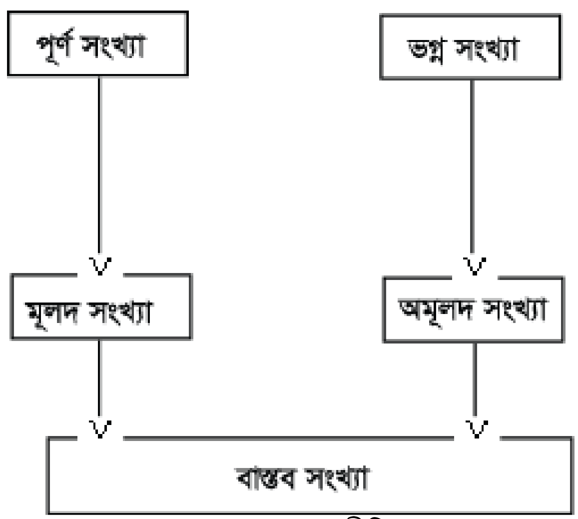
গ. মূলদ সংখ্যা (Rational number): দুটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাতের ধারণা থেকে মূলদ সংখ্যার সূত্রপাত। একটি সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা হিসাবে বলা যায় যদি তা অন্য একটি সংখ্যার বিশেষ কোন অনুপাত হয়। ভগ্ন সংখ্যা এবং পূর্ণ সংখ্যার সমন্বয়ে মূলদ সংখ্যার উদ্ভব হয়। মূলদ সংখ্যাকে অসীম ঘনত্ব অনুসারে সাজানো যায়। এরূপ ঘনত্ব পূর্ণ সংখ্যার বেলায় দেখানো যায় না।

1.00, 1.01, 1.026............2.00, 2.01............মূলদ সংখ্যার বেলায় লিখা যায়। 1, 2, 3,............ইত্যাদি পূর্ণ সংখ্যার ক্ষেত্রে লিখা যায়।

ঘ. অমূলদ সংখ্যা (Irrational Number): যে সংখ্যাকে দুটো পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা যায় না তাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। স্বাভাবিকভাবে অমূলদ সংখ্যা ঐসব সংখ্যার বর্গমূল যেগুলোর বর্গমূল পূর্ণ সংখ্যা নয়। $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$ ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যার উদাহরণ। যেমন, $\sqrt{2}$ কে দুটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত হিসাবে ব্যক্ত করা যায় না। অতএব $\sqrt{2}$ একটি অমূলদ সংখ্যা।

ঙ. বাস্তব সংখ্যা (Real number): পূর্ণ মূলদ, অমূলদ ইত্যাদি সংখ্যার সমন্বয়ে যে বৃহত্তর সংখ্যা শ্রেণী গঠিত হয়, তাকে বাস্তব সংখ্যা বলা যায়। বাস্তব সংখ্যা ছোট থেকে বড় এবং বড় থেকে ছোট-এই উভয় দিক থেকে অসীম ঘনত্বাকারে লিখা যায়।

পূর্ণ সংখ্যা থেকে প্রকৃত সংখ্যা পর্যন্ত সংখ্যার শ্রেণী বিন্যাস নিম্নের ছক-১ এর সাহায্যে দেখানো হল:-



ছক-১ ঃ সংখ্যার শ্রেণীবিন্যাস

সারাংশ *ঃ অর্থশাস্ত্রের বিভিন্ন মডেলে পূর্ণ সংখ্যা ব্যবহার করা হলেও ভগ্নসংখ্যা ব্যবহার করা যায় না। এক্ষেত্রে বাস্তব সংখ্যার বিশেষ ভূমিকা রয়েছে। পূর্ণ, মূলদ, অমূলদ ইত্যাদি সংখ্যার সমন্বয়ে যে বৃহত্তর শ্রেণী গঠিত হয়, তাকে বাস্তব সংখ্যা বলে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.২

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। গণনা থেকে সংখ্যার ধারণার উৎপত্তি।

২। কোন পূর্ণ সংখ্যাকে অপর একটি পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে সব সময় একটি পূর্ণ সংখ্যা পাওয়া যায়।

৩। মার্শাল এবং অন্যান্য অর্থনীতিবিদ Cardinal সংখ্যার সাহায্যে উপযোগ পরিমাপের চেষ্টা করেছেন।

৪। বাস্তব সংখ্যা ছোট থেকে বড় এবং বড় থেকে ছোট -এ উভয় দিক থেকে অসীম ঘনত্বাকারে লেখা যায় না।

পাঠ-২.৩

সেট এর ধারণা

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সেটের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- সেটের ধরণ জানতে পারবেন।
- সেটের কার্যাবলী জানতে পারবেন।
- সেটের নিয়মসমূহ জানতে পারবেন।

অর্থনীতির বিভিন্ন শাখায় বিভিন্ন তত্ত্ব বিশ্লেষণে সেটের ব্যবহার ক্রমেই বৃদ্ধি পাচ্ছে। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর সর্বপ্রথম সেটের ব্যাখ্যা দেন। তার প্রদত্ত ব্যাখ্যা পরবর্তীতে সেট তত্ত্ব হিসাবে পরিচিতি লাভ করে।
দৈনন্দিন জীবনে আমরা দল বা গুচ্ছ বোঝাতে সেট শব্দ ব্যবহার করে থাকি। বিভিন্ন বস্তুর সুনির্ধারিত সংগ্রহকে সেট বলে। সেটে কি অর্ন্তভুক্ত আর কি অর্ন্তভুক্ত নয়-তা সুনির্দিষ্টভাবে নির্ধারণ করতে হবে। অন্তর্ভুক্ত বস্তসমূহকে ঐ সেটের উপাদান বা সদস্য বলা হয়ে থাকে।

উদাহরণ ঃ

১। প্রথম বর্ষ অর্থনীতি (সম্মান) বিষয়ে অধ্যায়নরত ছাত্র-ছাত্রীর সেট
২। বাংলাদেশের সকল জেলার সেট
৩। ৫ টি স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।
৪। বাংলাদেশের পোশাক শিল্পের অন্তর্গত ফার্মগুলোর সেট।

সেটকে প্রকাশ করার জন্য কতগুলো চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। নিম্নে তা উল্লেখ করা হল ঃ

(১)	$\in$	অন্তর্ভুক্ত বোঝায় (Belongs to; an element of)
(২)	$\notin$	অন্তর্ভুক্ত নয় (Does not belong to; is not an element of)
(৩)	$\Rightarrow$	বোঝায় যে (Implies that)
(৪)	$\Leftarrow$	যদি এবং কেবলমাত্র যদি (If and only if)
(৫)	$\cup$	সংযোগ (Union)
(৬)	$\cap$	ছেদক (Intersection)
(৭)	$A^1, A^c, \tilde{A}$	পরিপূরক (Complement)
(৮)	$\subseteq$	উপসেটের প্রতীক (Symbol of Subset)
(৯)	$\subset_+$	প্রকৃত উপসেট (Proper subset)
(১০)	$\{\ \}$	বা ϕ শূন্য সেট (Null set)

সেটের প্রকাশ (Representation of Sets)ঃ

সেট প্রকাশ করার দুটি পদ্ধতি আছে ঃ

১. তালিকা পদ্ধতি (Tabular Method): এই পদ্ধতিতে সেটের উপাদানগুলোকে বন্ধনীর মাধ্যমে আবদ্ধ করা হয় এবং দুটি উপাদানের মাঝখানে কমা ব্যবহার করা হয়। যেমন ঃ-

A= {0, 1, 3, 9}
B= {c, d, e}

২. সেট গঠন পদ্ধতি (Set Builder Method) ঃ এই পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ণয়ের নিয়ম উল্লেখ করে সংক্ষিপ্ত আকারে সেটকে লেখা হয়। যেমন ঃ

A= {x : x স্বাভাবিক সংখ্যা }

এই পদ্ধতিতে ‘ঃ’ চিহ্নকে ‘যেন’ পড়া হয়।

সেটের ধরণ (Types of Sets) ঃ

(১) সসীম সেট (Finite Set) ঃ যে সেটের সদস্য সংখ্যা সীমিত বা গণনা করা যায়, তাকে সসীম সেট বলে। যেমন ঃ-

A = {1, 2, 3 }

এখানে সেটের তিনটি উপাদান। সুতরাং A সেটটি একটি সসীম সেট।

(২) অসীম সেট (Infinite set) ঃ যে সেটের সদস্য সংখ্যা সীমিত নয় বা অগনিত, তাকে অসীম সেট বলে। যেমন ঃ-

S = {1, 2, 3 ....α}

(৩) অভেদ সেট (Identical set) বা সমসেট (Equal set) ঃ দুটি সেটের উপাদানসমূহ সমান সংখ্যক ও অভিন্ন হলে অর্থাৎ অভেদ ধরণের হলে, সেট দুটিকে সমসেট বা অভেদ সেট বলে। যেমন, S_1 = {2, 5, 8 } এবং S_2 = {5, 2, 8 } সেট দুটিতে উপাদান সংখ্যা সমান এবং অভিন্ন। যদিও সেট দুটিতে উপাদানের সমাবেশের পার্থক্য আছে, যা অভেদ সেট বা সমসেট বিবেচনার ক্ষেত্রে বিবেচ্য বিষয় নয়। সুতরাং সেট S_1 = সেট S_2

(৪) উপসেট (Subset) ঃ একটি সেট অপর একটি সেটের উপসেট হতে পারে। যেমন - A= {1, 3, 5, 7, 9} এবং B= {3, 7}, এক্ষেত্রে B সেট, A সেটের একটি উপসেট। কারণ B সেটের উপাদানগুলো A সেটের অন্তর্ভুক্ত। একে এভাবে লেখা হয় ঃ- A $\wp$ B

(৫) শূন্য সেট (Null Set) ঃ যদি কোন সেটে একটি উপাদানও না থাকে, তাকে শূন্য সেট (Null Set) বলা হয়। এটাকে { } বা ϕ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন ঃ {x □ n : 13 < x < 1 7 } এবং x একটি মৌলিক সংখ্যা। এখানে দেখা যাচ্ছে যে, 13 এবং 17-এর মধ্যে কোন মৌলিক সংখ্যা নেই।

(৬) একক সেট (Unite Set) ঃ যদি কোন সেটে মাত্র একটিই উপাদান থাকে, তবে তাকে একক সেট বলে। যেমন; A= {5}

(৭) সার্বিক সেট (Universal Set) ঃ আলোচ্য বিষয়ের সম্ভাব্য সব বিষয়বস্তর সমন্বয়ে যখন একটি সেট গঠন করা হয়, তখন ঐ সেটকে সার্বিক সেট (Universal Set) বলে। যেমন, U = {a, b, c, d...............z} যেমন, ইংরেজী বর্ণমালার সকল বর্ণের সমন্বয়ে গঠিত সেটকে সার্বিক সেট (Universal Set) বলে।

(৮) শক্তি সেট (Power Set) ঃ একটি সেটের যতগুলো উপসেট হয় তাদের সেটকে ঐ সেটের শক্তি সেট (Power Set) বলে। মনে করি,

A = {2, 3, 4 } তবে A সেটের শক্তি সেট হবে,

P(A) = {ϕ, {২}, {৩}, {৪}, {২, ৩}, {২, ৪}, {৩, ৪}, {২, ৩, ৪}

যদি A সেটের উপাদান সংখ্যা n হয় তবে P(A) এর উপাদান হবে ২^{n}।

সেটের কার্যাবলী ঃ

(১) সংযোগ সেট (Union of Set) ঃ দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট (Union of Set) বলে এবং একে -U' চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়। মনে করি,

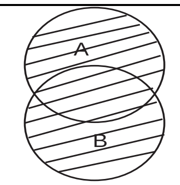
$A = \{3, 5, 7\}$

$B = \{2, 3, 4, 8\}$

এই দুটি সেট মিলে একটি নতুন সেট হবে, যার মধ্যে A বা B এর উপাদানসমূহ বা উভয়ের উপাদানসমূহ বর্তমান থাকবে। এটাকে প্রতীক আকারে লেখা যায়;-

$AUB = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

সেটের সংযোগ (Union) কার্যক্রমকে চিত্রের সাহায্যে (Venn Diagram) ব্যাখ্যা করা যায়।



চিত্র-২.৩.১ ঃ সংযোগ সেট

A ও B সেটের সংযোগ যে নতুন সেট তৈরী হয়, তা Shaded area দিয়ে দেখানো হয়েছে।

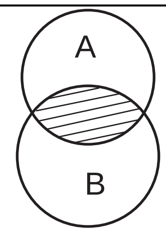
(২) ছেদ সেট (Intersection of sets) ঃ দুই বা দুই-এর অধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট (Intersection of sets) বলা হয় এবং একে '$\cap$' চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। মনে করি,

$A = \{3, 5, 7\}$

$B = \{3, 2, 4, 8\}$

এদের মধ্যে বিয়োগের ফলে একটি নতুন সেট তৈরী হবে। যার মধ্যে শুধুমাত্র A ও B-এর সাধারণ উপাদানসমূহ বর্তমান থাকবে। এদের ছেদকে প্রতীক আকারে লেখা যায়।

$A \cap B = \{3\}$;



চিত্র-২.৩.২: ছেদ সেট

A ও B সেট দুটির ছেদনে যে নতুন সেট তৈরী হয় তা শুধুমাত্র বৃত্ত দুটির সাধারণ অংশ, যা চিত্রে Shaded area দিয়ে দেখানো হয়েছে।

(৩) সংযোগহীন সেট (Disjoint of Sets) ঃ দুই বা ততোধিক সেটের ছেদ বের করার সময় যদি কোন সাধারণ উপাদান না থাকে তবে ঐ সেটকে সংযোগহীন সেট (Disjoint of sets) বলে। মনে করি, $A = \{1, 3, 7\}$

$B = \{2, 4\}$

এই দুই সেটের মধ্যে কোন সাধারণ উপাদান নেই। এই সেটকে প্রতীক আকারে লেখা যায় ঃ-

$A \cap B = \{\varphi\}$

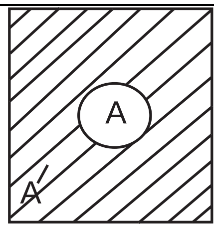
(৪) পূরক সেট (Complement of sets) ঃ একটি সার্বিক সেটের যে কোন সংখ্যা উপাদান নিয়ে একটি সেট তৈরী করলে অবশিষ্ট উপাদানগুলো নিয়ে যদি আরো একটি সেট তৈরী করা যায়, তবে পরবর্তী সেটকে প্রথম সেটের পূরক সেট (Complement of sets) বলে। যেমন ঃ

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{0, 1, 3, 5, 7\}$

$\therefore \quad A' = \{2, 4, 6, 8, 9\}$

এখানে U একটি সার্বিক সেট এবং A অপর একটি সেট। সুতরাং A' হলো A এর পূরক সেট। পূরক সেট A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



চিত্র-২.৩.৩ ঃ পূরক সেট

পাশের চিত্রে আয়তক্ষেত্রটি একটি সার্বিক সেট নির্দেশ করে এবং বৃত্তটির মাঝের স্থান A সেট নির্দেশ করে। এখন বৃত্তটির মধ্যস্থ স্থান বাদ দিয়ে আয়তক্ষেত্রের অন্যান্য স্থান একটি পূরক সেট A'(Complement of sets) তৈরী হয়, যা চিত্রে Shaded area দিয়ে দেখানো হয়েছে।

কার্তেসিয় গুণফল (Cartesian Product) ঃ

যদি A ও B দুটি সেট হয় তবে তাদের গুণফল $A \infty B$ দ্বারা সূচিত হয় যার প্রতিটি উপাদান ক্রমজোড় (a,b) যেখানে $a \in A$ এবং $b \in B$ এভাবে প্রাপ্ত সেটকে A ও B সেটের কার্তেসিয় গুণফল (Cartesian product) সেট বলে। মনে করি

$A= \{1, 2\}$

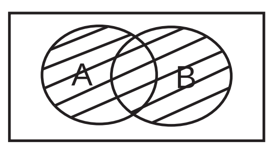
$B = \{3, 4, 5\}$

তবে, $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1,5), (2,3),(2,4), (2,5)\}$ হবে।

সেটের নিয়মসমূহ (Laws of Set Operation) ঃ

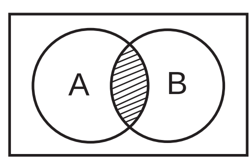
(১) বিনিময় নিয়ম (Commutative law) ঃ দুটি সেটের সংযোগ বা ছেদক পৃথকভাবে দেখানোর নিয়মকে বিনিময় নিয়ম বলে।

ক) $A \cup B = B \cup A$



চিত্র-ক ঃ $A \cup B = B \cup A$

খ) $A \cap B = B \cap A$



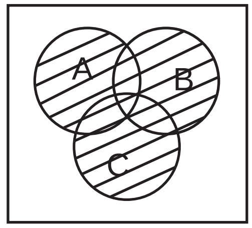
চিত্র-খ ঃ $A \cap B = B \cap A$

চিত্র ২.৩.৪ ঃ সেটের বিনিময় নিয়ম

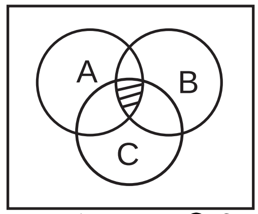
(২) সহযোগী নিয়ম (Associative Law): তিনটি সেটের সংযোগ অথবা ছেদক দ্বারা এই নিয়মটি দেখানো যায়।

$A \cup B \cup C$

চিত্রের Shaded area



$A \cap B \cap C$



চিত্র-২.৩.৫ ঃ সেটের সহযোগী নিয়ম

উপরোক্ত ফলাফলসমূহকে সূত্রাকারে প্রকাশ করা যায়।

ক) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

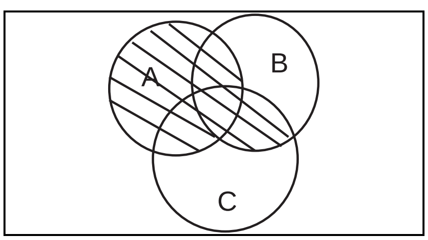
খ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(৩) বন্টন নিয়ম (Distributive Law) ঃ সেটের যে কার্যক্রমে সংযোগ (Union) ও ছেদন (intersection) একত্রে ব্যবহৃত হয়, সেক্ষেত্রে Distributive law প্রয়োগ করা হয়। যেমন-

ক) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup (A \cap C)$

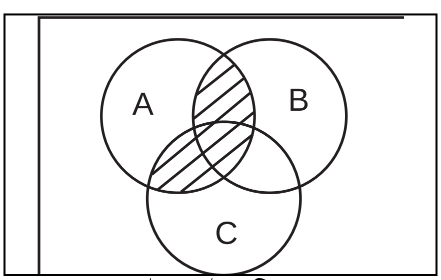
খ) $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

ক)



$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

খ)



$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

চিত্র- ২.৩.৬ ঃ সেটের বন্টন নিয়ম

সেটের কিছু সমস্যার সমাধান ঃ

১। একটি শ্রেণীতে 30 জন ছাত্র-ছাত্রী আছে। যাদের মধ্যে 15 জন অর্থনীতি পছন্দ করে; 10 জন অর্থনীতি পছন্দ করে কিন্তু সমাজ বিজ্ঞান নয়। (i) অর্থনীতি এবং সমাজ বিজ্ঞান পছন্দ করে কতজন ছাত্র-ছাত্রী এবং (ii) কত জন ছাত্র-ছাত্রী সমাজ বিজ্ঞান পছন্দ করে কিন্তু অর্থনীতি নয় ?

সমাধান ঃ মোট ছাত্র-ছাত্রীর সেট = U

পছন্দকারী ছাত্র-ছাত্রীর সেট = A

এবং সমাজবিজ্ঞান পছন্দকারী ছাত্র-ছাত্রীর সেট = B

এখন $n(U) = 30 = n(A \cup B)$

$n(A) = 15$

$n(A \cap B') = 10$

আমাদের নির্ণয় করতে হবে, $n(A \cap B)$ এবং $n(A \cap B')$

(i) আমরা জানি, $n(A) = n(A \cap B') + n(A \cap B)$

বা, $15 = 10 + n(A \cap B)$

বা, $n(A \cap B) = 15 - 10 = 5$

অর্থাৎ অর্থনীতি ও সমাজবিজ্ঞান পছন্দ করে 5 জন।

(ii) আমরা জানি, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

বা, $30 = 15 + n(B) - 5$

বা, $n(B) = 30 - 15 + 5 = 20$

আবার, $n(B) = n(A' \cap B) + 5$

বা, $n(A' \cap B) = 20 - 5 = 15$

অর্থাৎ সমাজ বিজ্ঞান পছন্দ করে কিন্তু অর্থনীতি পছন্দ করে না, এরূপ ছাত্র-ছাত্রীদের সংখ্যা 15 জন।

২। একটি স্কুলে 880 জন বালকের মধ্যে 224 জন ক্রিকেট খেলে, 240 জন হকি খেলে এবং 336 জন বাস্কেট বল খেলে। মোটের মধ্যে ৬৪ জন বাস্কেট বল ও হকি খেলে; 80 জন ক্রিকেট ও বাস্কেট বল খেলে এবং 40 জন ক্রিকেট ও হকি খেলে; 24 জন তিন ধরনের খেলাই খেলে। কত জন বালক কোন খেলাই খেলে না এবং কত জন শুধু মাত্র একটি খেলা খেলে ?

সমাধান ঃ মনে করি সকল বালকের স্কুলের সেট = U

ক্রিকেট খেলা বালকের সেট = C

হকি খেলা বালকের সেট = H

বাস্কেট খেলা বালকের সেট = B

আমাদের দেওয়া আছে

$n(U) = 880; n(H \cap B) = 64$

$n(C) = 224; n(C \cap B) = 80$

$n(H) = 240; n(C \cap H) = 40$

$n(B) = 336; n(C \cap H \cap B) = 24$

আমাদের নির্ণয় করতে হবে-

(i) কত জন বালক কোন খেলাই খেলে না অর্থাৎ $n(C \cup H \cup B)'$

(ii) কত জন শুধু মাত্র একটি খেলা খেলে অর্থাৎ $n(C \cap H' \cap B') + n(H \cap B' \cap C') + n(B \cap H' \cap C')$

(i) আমরা জানি,

$$n(C \cup A \cup B) = n(C) + n(H) + n(B) - n(C \cap H) - n(H \cap B) - n(B \cap C) + n(C \cap H \cap B)$$
$$= 224 + 240 + 336 - 80 - 64 - 40 + 24$$
$$= 640$$

আবার,

$n(C \cup H \cup B)' = n(U) - n(C \cup H \cup B)$

$= 880 - 640$
$= 240$ জন

অর্থাৎ কোন খেলে খেলে না এমন বালকের সংখ্যা 240 জন।

(ii) আমরা জানি,

$n(C \cap H' \cap B') = n(C) - n(C \cap H \cap B) - n(B \cap C) + n(C \cap H \cap B)$
$= 224 - 40 - 80 + 24$
$= 128$ জন

$n(H \cap B' \cap C') = n(H) - n(H \cap B) - n(C \cap H) + n(C \cap H \cap B)$
$= 240 - 64 - 40 + 24$
$= 160$ জন

$n(B \cap C' \cap H') = n(B) - n(B \cap C) - n(H \cap B) + n(C \cap H \cap B)$
$= 336 - 80 - 64 + 24$
$= 216$ জন

অতএব, শুধুমাত্র একটি খেলা খেলে এমন বালকের সংখ্যা,

$= n(C \cap H' \cap B') + n(H \cap B' \cap C') + n(B \cap C' \cap H')$
$= 128 + 160 + 216$
$= 504$

৩। একটি কারখানার 600 জন শ্রমিকের উপর জরিপ চালানো হয় এবং জরিপে দেখা যায় যে 410 জনের নিজস্ব বাড়ি আছে, 500 জনের গাড়ি আছে, 550 জনের রঙিন টিভি আছে। 410 জনের গাড়ি ও রঙিন টিভি আছে, 340 জনের গাড়ি ও বাড়ি আছে; 370 জনের বাড়ি ও রঙিন টিভি আছে এবং 300 জনের তিনটিই আছে; জরিপটি কি ঠিক আছে ?

সমাধান ঃ এখানে বলা হয়েছে, জরিপ চালানো হয়েছে 600 জনের উপর।

সুতরাং জরিপ কৃত মোট লোক সংখ্যা যদি 600 হয় তবে বলা যাবে জরিপটি ঠিক আছে। কিন্তু 600-এর কম বা বেশী হলে উক্ত জরিপটি ঠিক নেই বলতে হবে।

এখানে মোট শ্রমিকের সংখ্যা $n(U) = 600$ জন

বাড়ি আছে এমন লোকের সেট $= A$

গাড়ি আছে এমন লোকের সেট $= B$

রঙিন টিভি আছে এমন লোকের সেট $= C$

এখানে,

$n(A) = 410$
$n(B) = 500$
$n(C) = 550$
$n(A \cap B) = 340$
$n(B \cap C) = 410$
$n(A \cap C) = 370$
$n(A \cap B \cap C) = 300$

মাট শ্রমিক/লোক সংখ্যাঃ $n(A \cup B \cup C) = n(U) = 600$ হওয়া উচিত।

আমরা জানি,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
$= 410 + 500 + 550 - 340 - 410 - 370 + 300$
$= 1760 - 1120$
$= 640$

যেহেতু 640 □ n(U) □ 600

$\therefore$ জরিপটি সঠিক হয়নি।

৪। বি এস এস পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী 1000 ছাত্রের 750 জন ইংরেজীতে, 600 জন বাংলায় এবং 600 জন অর্থনীতিতে অকৃতকার্য হয়। ইংরেজী ও বাংলায় উভয় বিষয়ে অকৃতকার্য হয় 450 জন। ইংরেজী ও অর্থনীতিতে অকৃতকার্য হয় 450 জন। ইংরেজী ও অর্থনীতিতে অকৃতকার্য হয় 400 জন এবং বাংলায় ও অর্থনীতিতে অকৃতকার্য হয় 150 জন। তিনটি বিষয়ের সবরকমটিতে অকৃতকার্য ছাত্রের সংখ্যা 75 হলে, প্রমাণ কর যে, প্রদত্ত তথ্য সঠিক নহে।

সমাধান ঃ মনে করি,

বিএসএস পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী ছাত্রের সেট = U

ইংরেজীতে অকৃতকার্য ছাত্রের সেট = A

বাংলায় অকৃতকার্য ছাত্রের সেট = B

অর্থনীতিতে অকৃতকার্য ছাত্রের সেট = C

অতএব,

$n(U) = 1000$,

$n(A) = 750$,

$n(B) = 600$

$n(C) = 600$,

$n(A\cap B) = 450$,

$n(A\cap C) = 400$

$n(B\cap C) = 150$,

$n(A\cap B \cap C) = 75$

আমরা জানি,

$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(B\cap C) - n(A\cap C) + n(A\cap B\cap C)$

$= 750 + 600 + 600 - 450 - 400 - 150 + 75$

$= 1025$ জন যা পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী ছাত্রসংখ্যা অপেক্ষা অধিক।

সুতরাং প্রদত্ত তথ্য সঠিক নয়।

সারাংশ ঃ দৈনন্দিন জীবনে দল বা গুচ্ছ বোঝাতে আমরা সেট শব্দটি ব্যবহার করে থাকি। বিভিন্ন বস্তুর সুনির্ধারিত সংগ্রহকে সেট বলে। সেটকে প্রকাশের জন্য কতগুলো চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন -২.৩

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। সেটে $\cup$ চিহ্নটি বলতে বোঝায়-

(ক) অর্ন্তভুক্ত হওয়া (খ) সংযোগ

(গ) ছেদক (ঘ) পরিপূরক

২। শূন্য সেটকে প্রকাশ করা হয় নিম্লোক্ত কোন চিহ্ন দ্বারা ?

(ক) φ (খ) $\in$

(গ) $\not\in$ (ঘ) $\Leftrightarrow$

৩। দুটি সেটের সংযোগ বা ছেদক পৃথকভাবে দেখানোর নিয়মকে বলে-

(ক) বিনিময় নিয়ম (খ) সহযোগী নিয়ম

(গ) বন্টন নিয়ম (ঘ) উপরের কোনটিই নয়।

পাঠ-২.৪

গাণিতিক সম্পর্ক ও অপেক্ষক সাধারণতার ধারণা

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অপেক্ষকের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- সম্পর্ক ও অপেক্ষকের পার্থক্য জানতে পারবেন।
- অপেক্ষকের ব্যপ্তি ও বিস্তার সম্পর্কে বলতে পারবেন।

অপেক্ষকের সংজ্ঞা ঃ

যদি কোন নির্দিষ্ট এলাকার মধ্যে অবিচ্ছিন্ন কোন চলক x-এর প্রতিটি মানের জন্য y-এর একটি করে মান পাওয়া যায়, তবে y কে x-এর অপেক্ষক বলা হয়। অন্য কথায় যদি-M সেটের প্রতিটি উপাদান x- এর সাথে একটি সেট N-এর একটি মাত্র উপাদান y সর্বত্র এক সাথে সম্পর্কযুক্ত হয়, তবে দুই সম্পর্ককে প্রথম সেটের উপাদানের অপেক্ষক বলে। দুই সেট রাশির এই সম্পর্ককে সাধারণতঃ $y = f(x)$ বা $y = g(x)$ বা $y = \psi(x)$ ইত্যাদি প্রতীক চিহ্ন দ্বারা ব্যক্ত করা হয়। এক্ষেত্রে y হচ্ছে অধীন চলক, x হচ্ছে স্বাধীন চলক এবং $f{:}x \varnothing y$ অপেক্ষক। x-এর সকল গ্রহণযোগ্য মানকে অপেক্ষকের ডোমেন (Domain) এবং ডোমেনের y প্রতিচ্ছবিকে (Image) অপেক্ষকের রেঞ্জ (Range) বলা হয়। এভাবে ডোমেন স্বাধীন চলকের বেলায় ও রেঞ্জ পরাধীন চলকের বেলায় ব্যবহৃত হয়।
অর্থনীতিতে নিরপেক্ষ রেখা পদ্ধতি বিশ্লেষণ করার সময় আমরা বলি অপরাপর বিষয় স্থির অবস্থায় (Ceteris Peribus) ক্রেতার উপযোগ বিভিন্ন দ্রব্যের ক্রয়ের উপর নির্ভরশীল। যে দুই বা ততোধিক দ্রব্য ক্রেতা ক্রয় করেন, তাদের পরিমাণের উপর তার মোট উপযোগ নির্ভর করে।
চাহিদা বিধি অনুযায়ী দামের উপর চাহিদার নির্ভরতা প্রকাশ পায়। এজন্য চাহিদা অপেক্ষক হবেঃ $D = f(p)$। আবার যোগান বিধি অনুযায়ী দামের উপর যোগান নির্ভরশীল। সুতরাং যোগান অপেক্ষক হবে $S = f(p)$। অনুরূপভাবে কোন উৎপাদকের ব্যয়ের পরিমাণকে ‘C' এবং উৎপাদনের পরিমাণকে ‘q' দ্বারা নির্দেশ করলে ব্যয় অপেক্ষককে নিচের সংকেত আকারে প্রকাশ করা যায়ঃ-

$$C = f(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d$$

এখানে q ও c উভয়ই চলক এবং a, b, c ও d ধ্রুবক সহগ (Parameters)।

চলক:

যে বিষয় বা রাশি পরিবর্তনশীল এবং যার মান ভিন্ন ভিন্ন অবস্থায় ভিন্ন ভিন্ন হয় তাকে চলক বলে। অর্থনীতিতে ব্যবহৃত চলকসমূহ হচ্ছে দাম (p), মুনাফা (□), জাতীয় আয় (Y), মোট ভোগ ব্যয় (C), বিনিয়োগ (I), মূলধন (K), অর্থনীতিতে প্রায় ক্ষেত্রেই শব্দের আদ্যক্ষর দ্বারা চলক প্রকাশ করা হয়। যেহেতু চলক যে কোন মান গ্রহণ করতে পারে সেহেতু এটা কোন প্রাকৃতিক সংখ্যা (1, 2, 3......) দ্বারা নির্দেশ না করে বরং প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। আবার চলকের গতির ভিন্নতায় দুই শ্রেণীর চলকের পার্থক্য অর্থনীতিতে করা হয়। যেমন, বিনিয়োগ (I) একটি প্রবহমান চলক (Flow-variable) আর মূলধন (K) হলো মজুদ-চলক (Stock Variable)। কিন্তু দাম (P) প্রকাশের ক্ষেত্রে এরূপ ভিন্নতা অপ্রয়োজনীয়।

সম্পর্ক ও অপেক্ষকের মধ্যে পার্থক্যঃ

মনে করি, x এবং y দুটি চলক এবং x-এক বা একাধিক মানের জন্য y এর একটি মান পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে y চলক X চলকের অপেক্ষক। পক্ষান্তরে ধরি X-এর প্রতিটি মানের জন্য y এর একাধিক মান পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে x-এবং y চলকের মধ্যে সম্পর্ক আছে বলা যায়। এ জন্য পূর্বে যাকে অদ্বিতীয় মানের অপেক্ষক বলা হত, বর্তমানে তাকে অপেক্ষক বলা হয় এবং যা একাধিক মানের ফাংশন হিসাবে বিবেচিত হত তা বর্তমানকালে সম্পর্ক বলে ধরা হয়। অপেক্ষক চলকসমূহের মধ্যে সম্পর্ক দেখায়। তবে সম্পর্ক থাকলে অপেক্ষক হবে এমন কোন কথা নেই। এজন্য সম্পর্কের ধারণার মধ্যে অপেক্ষকের ধারণা আছে। অপেক্ষক চলকসমূহের মধ্যে বিশেষ ধরণের সম্পর্ক দেখায়।

অপেক্ষক এবং সম্পর্কের পার্থক্য সেটের সাহায্যে করা যায়। মনে করি যুগ্ম উপাদানের সাহায্যে গঠিত একটি সেট হচ্ছে ঃ $\{(x,y)/y = 2x\}$, এখানে যুগ্ম উপাদান (0,0), (1,2), (-1,-2) ইত্যাদি। এক্ষেত্রে x এবং y এর মধ্যে সম্পর্ক আছে। এই সম্পর্ক থেকে আমরা বলতে পারি y চলকের অপেক্ষক ঃ $y=f(x)$। কেননা এক্ষেত্রে x-এর প্রতিটি মানের জন্য y-এর একটি করে মান আছে। কিন্তু অনেক ক্ষেত্রে x এবং y চলকের মধ্যে সম্পর্ক থাকলেও x-এর প্রতিটি মানের জন্য y-এর একটি করে মান পাওয়া সম্ভব নয়। ধরি, যুগ্ম উপাদান (1,0) (1,1) (1,-4) ইত্যাদির সাহায্যে একটি সেট গঠন করা হল।

$\{(x,y)/y \leq x\}$ এক্ষেত্রে y এবং x-এর সম্পর্ক আছে। কিন্তু x-এর একটি মানের জন্য (যেমন $x = 1$) y এর একাধিক মান (যেমন y =0, 1 বা -4) মান আছে। সুতরাং y এক্ষেত্রে x চলকের অপেক্ষক নয়। তাদের মধ্যে সম্পর্ক আছে মাত্র।

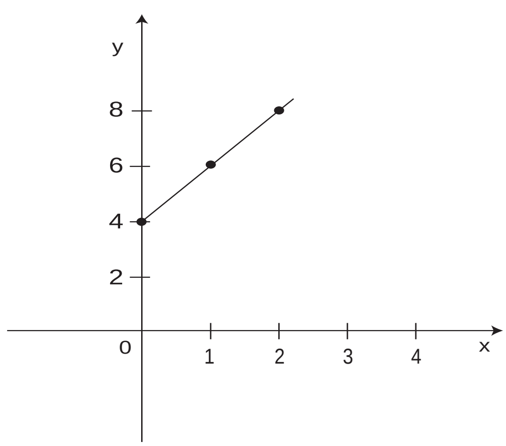
অপেক্ষক ও সম্পর্কের মধ্যে পার্থক্য নীচের সমীকরণ এবং লেখচিত্র থেকে বোঝা যাবে।

অপেক্ষক ঃ $y = 4+2x$

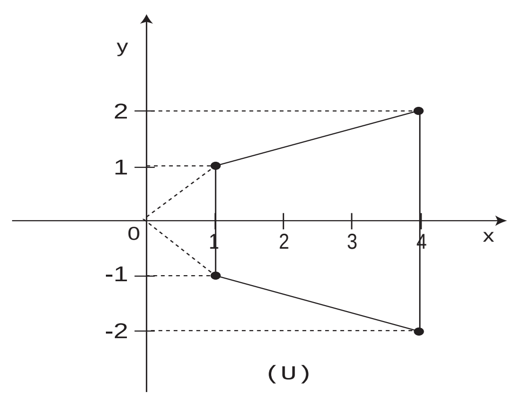
x	o	1	2
y	4	6	8

সম্পর্ক ঃ $y = \sqrt{x}$

x	1	4
y	1,-1	2,-2



(T)



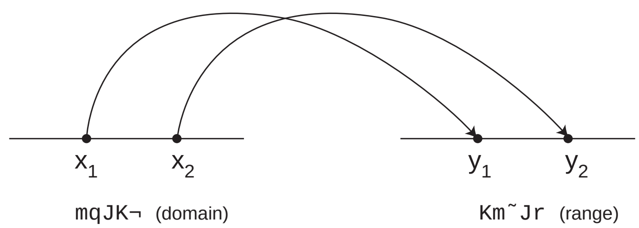
(U)

চিত্র-২.৪.১ ঃ (ক) অপেক্ষক

চিত্র ২.৪.১ (খ) সম্পর্ক

অপেক্ষকের ব্যাপ্তি এবং বিস্তার (Domain and range of a function):

অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের গ্রহণযোগ্য মানসমূহ দ্বারা যে সেট গঠন করা যায় তাকে অপেক্ষকের ব্যাপ্তি (Domain) বলা হয়। অন্যদিকে অধীন চলকের গ্রহণযোগ্য মানসমূহ দ্বারা গঠিত সেটকে বিস্তার (Range) বলা হয়। যেমন $y = f(x) = 5x$ ধরা যাক, স্বাধীন চলক x-এর মান 2 থেকে 6 পর্যন্ত সীমাবদ্ধ রাখা হলো যা $2 \leq x \leq 6$ প্রতীক দিয়ে প্রকাশ করা যায়। এক্ষেত্রে $2 \leq x \leq 6$ হচ্ছে অপেক্ষকটির ব্যাপ্তি।
এখন $x = 2$ হলে $y = 5x$ অপেক্ষক অনুযায়ী $y = 10$ পাওয়া যাবে। অনুরূপভাবে $x = 6$ হলে $y = (5 \infty 6) = 30$ হবে। ফলে স্বাধীন চলক x- এর মানের পরিধি $x \leq x \leq 6$ হলে অধীন চলক y-এর মানের পরিধি $10 \leq y \leq 30$ বলা যায়। এক্ষেত্রে $10 \leq y \leq 30$ কে অপেক্ষকের বিস্তার বলা যায়।



চিত্র -২.৪.২ ঃ অপেক্ষকের ব্যাপ্তি ও বিস্তার

সাধারণতঃ অপেক্ষকের ব্যাপ্তির ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত মানসমূহ বিবেচনা করা যায় নাঃ
(ক) কোন অনুপাত অপেক্ষকের (Quotient function) ক্ষেত্রে স্বাধীন চলকের এমন মান বিবেচনা করা হয় না যাতে এর Denominator এর মান শূন্য হয়। যেমন, $y = 1/(3x-9)$ এই অপেক্ষকটি $x = 3$ মানের জন্য সংজ্ঞায়িত করা যায় না। কারন $x =3$ ধরলে $y = 1/0$ হয় যার কোন সংখ্যাগত তাৎপর্য নেই।
খ) স্বাধীন চলকের এমন কোন মান গ্রহণযোগ্য নয় যা অপেক্ষকের প্রকৃত বর্গমূল প্রদানে অক্ষম। যেমন, $y= \sqrt{x}$ অপেক্ষকটিকে x-এর কোন ঋণাত্মক মানের জন্য সংজ্ঞায়িত করা যায় না। কারণ ঋণাত্মক সংখ্যার কোন বাস্তব বা প্রকৃত বর্গমূল নেই।

সারাংশ ঃ *অপেক্ষক বিভিন্ন চলকের মধ্যে সম্পর্ক প্রকাশ করে। অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের গ্রহণযোগ্য মানসমূহ দিয়ে যে সেট গঠন করা যায় তাকে অপেক্ষকের ব্যাপ্তি বলে। অন্যদিকে অধীন চলকের গ্রহণযোগ্য মানসমূহ দিয়ে গঠিত সেটকে বিস্তার বলে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৪

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন

১। $y = f(x)$ উদাহরণে x অধীন চলক এবং y স্বাধীন চলক
২। অপেক্ষক ও সম্পর্কের পার্থক্য সেটের সাহায্যে করা যায়।
৩। অধীন চলকের গ্রহণযোগ্য মানসমূহ দ্বারা গঠিত সেটকে বিস্তার বলে।

পাঠ-২.৫

বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষক
(Different Types of Function)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষক সম্পর্কে জানতে পারবেন।

গণিতের ক্ষেত্রে অপেক্ষক একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ধারণা। অর্থনীতিতেও বর্তমানে গণিতের ব্যবহার লক্ষ্যনীয়ভাবে বৃদ্ধি পেয়েছে। এই অপেক্ষকের বিভিন্ন ধরন রয়েছে। নিচে অপেক্ষকের বিভিন্ন ধরন নিয়ে আলোচনা করা হলোঃ

১. স্থির অপেক্ষক (Constant Function): যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের যে কোন মানে (শূন্য ও অসীম মান বাদে) নির্ভরশীল চলকের একটি মাত্র মান পাওয়া যায় তাকে স্থির অপেক্ষক বলে। এভাবেও বলা যায় যে, যে অপেক্ষকের বিস্তৃতি বা পরিসর (Range) শুধুমাত্র একটি উপাদান দ্বারা গঠিত তাকে স্থির অপেক্ষক বলা হয়। যেমন:-

$y = f(x)$

বা, $y = f(x) = 5x^0$ [যেহেতু $x^0 = 1$]

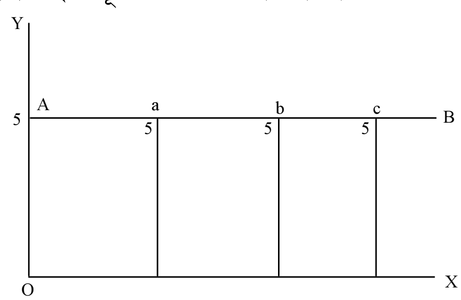
এখানে, x-এর ধনাত্মক যে কোন মানে $y = 5$ পাওয়া যায়।

যেমনঃ- $x = 1,\quad y = 5\quad [f(x) = 5\,(1)^0 = 5$

$x = 2,\quad y = 5\quad f\,(x) = (2)^0 = 5$

$x = 3,\quad y = 5\quad f\,(x) = 5(3)^0 = 5]$

ফলে এই ধরনের অপেক্ষকের চিত্ররূপ হবে ভূমি অক্ষের সমান্তরাল। বিষয়টি চিত্রে দেখানো হলোঃ-



চিত্র-২.৫.১ ঃ স্থির অপেক্ষক

(২) বহুপদী অপেক্ষক (Polynomial function) : যে অপেক্ষকের বহুপদ থাকে তাকে বহুপদী বা পলিনোমিয়াল অপেক্ষক বলা হয়। প্রকৃতপক্ষে স্থির অপেক্ষক হলো বহুপদী অপেক্ষকের একটি বিচ্ছিন্ন রূপ। যেমন:- $y = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ...+ a_nx^n$

এখানে প্রতিটি পদের একটি করে স্থির সহগ রয়েছে।

(৩) একক ও বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক (Single and Multivalued Function): যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের একটি মানের জন্য অধীন চলকের একটি এবং কেবল মাত্র একটি মানই পাওয়া যায় তাকে একক মান বিশিষ্ট অপেক্ষক বলে। যেমন:-

$y = f(x) = x^2 - 5x + 4$

এক্ষেত্রে $x = 0$ হলে, $y = 4$; $x = +1$ হলে $y = 0$, $x = +2$ হলে $y = -2$ এবং $x = 3$ হলে $y = -2$ ইত্যাদি হয়। যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের একটি মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের একাধিক মান পওয়া যায় তাকে বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক বলে। যেমন, $y^2 = x$ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $x = 4$ হলে y- এর দুটি মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ $y = \sqrt{x} = \sqrt{4} = \pm 2$। সুতরাং x-এর একটি মানের জন্য y-এর দুটি মান পাওয়া যায়। এভাবে $y^2 + 25 - x^2$, $\therefore y = \pm\sqrt{25-x^2}$ এক্ষেত্রে স্বাধীন চলকের একটি মানের জন্য নির্ভরশীল চলক y- এর দুটি মান পাওয়া যায়। এভাবে $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ একটি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক।

(৪) ক্রমমান অপেক্ষক (Monotonic Function): একক মান বিশিষ্ট কোন অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের মান বৃদ্ধির ফলে অধীন চলকের মানও বৃদ্ধি পায়। এক্ষেত্রে অপেক্ষককে বর্ধমান অপেক্ষক বলা হয়। যেমন, $y = f(x)$ একটি একক মান বিশিষ্ট অপেক্ষক হয় এবং যদি x -এর মান বৃদ্ধির ফলে y - এর মানও বৃদ্ধি পায়, তবে x- এর জন্য y কে বর্ধমান অপেক্ষক বলা হয়। অনুরূপভাবে যদি x মানের বৃদ্ধির ফলে y - এর মান হ্রাস পায়, তবে x-এর জন্য y - কে হ্রাসমান অপেক্ষক বলা হয়। এভাবে ক্রমবর্ধমান এবং ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষককে একত্রে ক্রমমান অপেক্ষক বলা হয়।

(৫) ব্যক্ত ও অব্যক্ত অপেক্ষক (Explicit and Implicit Function): যে অপেক্ষককে দুটি চলকের সম্পর্ক এবং কোনটি অন্য চলকের উপর নির্ভরশীল তা সরাসরি ব্যক্ত করা থাকে, তাকে ব্যক্ত অপেক্ষক বলা হয়। যেমন, $y = 2x^2 + 5x + 9$, $y = 3x - 5$ এগুলো ব্যক্ত অপেক্ষকের উদাহরণ। এখানে y সরাসরি x -এর অপেক্ষক। x মানের ভিত্তিতে y-এর মান নির্ণয় করা যায়, কিন্তু y-এর মান দ্বারা x - এর মান নির্ণীত হয় না। অপরদিকে যে অপেক্ষকে চলকগুলোর পরস্পর নির্ভরশীলতা স্পষ্ট নয়, তাকে অব্যক্ত অপেক্ষক বলে। এখানে নির্ভরশীল চলককে সরাসরি স্বাধীন চলকের অপেক্ষক হিসাবে না দেখিয়ে পরোক্ষভাবে দেখানো হয়ে থাকে। যেমন, $2x^2 - xy + y^2 = 0$, $x + y - 9 = 0$, ইত্যাদি অব্যক্ত অপেক্ষকের উদাহরণ। অনেক সময় অব্যক্ত অপেক্ষককে ব্যক্ত অপেক্ষকে প্রকাশ করা যায়।

(৬) বিপরীত অপেক্ষক (Inverse Function): যদি কোন অপেক্ষক থেকে অপর একটি অপেক্ষকের সমাধান বের করা যায় তবে দ্বিতীয় অপেক্ষককে প্রথম অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক বলা হয়। এভাবেও বলা যায়, প্রদত্ত কোন অপেক্ষকমূলক সম্পর্ক $y=f(x)$ হতে যদি এমন কোন সম্পর্ক $x=f^{-1}(y)$ /f^{-1} নির্ণয় করা যায় সেক্ষেত্রে এর y - এর যে কোন এবং প্রতিটি মানের জন্য x - এর নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায় তবে $x = f(y)$ - কে $f(x)$ এর বিপরীত অপেক্ষক (Inverse function) বলা হয়।

মনে করি, একটি ফাংশন $y = f(x)$ দেয়া আছে, এখানে স্বাধীন চলক x এবং নির্ভরশীল চলক y। যদি অপেক্ষকটিতে y-কে স্বাধীন চলক এবং x-কে নির্ভরশীল চলকে রূপান্তরিত করা হয়, অর্থাৎ যদি $x = f(y)$ হিসাবে অপেক্ষকটির প্রকাশ করা হয় তবে দ্বিতীয় অপেক্ষকটিকে প্রথম অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক বলা হয়। যেমন -

$q = 20 - 5p$

অপেক্ষকটিকে $5p = 20-q$

বা, $p = 4-\frac{1}{5}q$ লেখা গেলে, এই অপেক্ষকটি হবে $q = 20 - 5p$ অপেক্ষকের বিপরীত অপেক্ষক।

আবার, $y = \sqrt{x}$ বা $y^2 = x$, এক্ষেত্রে $x = y^2$ হচ্ছে $y = \sqrt{x}$ এর বিপরীত অপেক্ষক।

(৭) সরল রৈখিক ও অসরল রৈখিক অপেক্ষক (Linear and Non-Linear Function):

সরল রৈখিক অপেক্ষক (Linear Function) ঃ

যে সমস্ত অপেক্ষকে নির্ভরশীল ও স্বাধীন উভয় চলকের সর্বোচ্চ মাত্রা বা শক্তি (power) “১” এর সমান হয় সেই সমস্ত অপেক্ষককে একমাত্রিক বা সরল রৈখিক অপেক্ষক বলা হয়। যেমন- $S = c + dp$, $D = a - bp$, $y = a +$

bx, $y = 3x - 6$, $2x - 5y + 6 = 0$, এখানে ব্যবহৃত চলকসমূহের মাত্রা "1"। এ সব অপেক্ষককে চিত্রে রূপ দিলে সরল রেখা পাওয়া যায়।

অসরল রৈখিক বা অ-একমাত্রিক অপেক্ষক (Non-Linear Function) ঃ

যে সমস্ত অপেক্ষকে নির্ভরশীল ও স্বাধীন উভয় চলকের সর্বোচ্চ মাত্রা বা শক্তি (power) "1" ব্যতিত অন্যকোন সংখ্যা হয় তাকে অ-একমাত্রিক অপেক্ষক বলা হয়। অর্থাৎ যে সব অপেক্ষকে চলকের ঘাত বা শক্তি (power) এক (1)-এর সমান নয়, এরূপ অপেক্ষকে অ-একমাত্রিক বা বক্ররৈখিক অপেক্ষক বলা হয়। যেমন-

i. দ্বিঘাত অপেক্ষক (Quadratic Function):

যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের উচ্চতম ঘাত দুই (২) তাকে দ্বিঘাত অপেক্ষক বলা যায়।

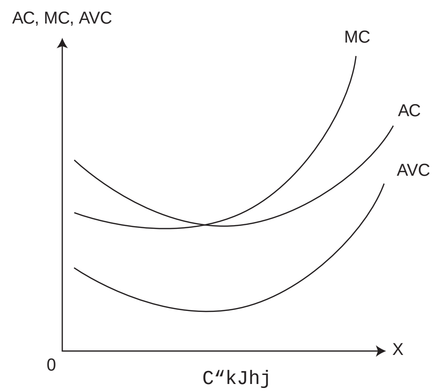
উদাহরণ ঃ

(১) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(২) $y = ax^2 + bx + c$

(৩) $y = 3x^2 + 4x + 5$ ইত্যাদি

অর্থনীতিতে প্রান্তিক ব্যয় রেখা, গড় ব্যয় রেখা, প্রান্তিক ও গড় উৎপাদন রেখা, গড় পরিবর্তনীয় ব্যয় রেখা (AVC Curve) ইত্যাদির (Corresponding) অপেক্ষক সাধারণত দ্বিঘাত ধরণের হয় (চিত্র ২.৫.২ দেখুন)।



চিত্র - ২.৫.২ ঃ দ্বিঘাত অপেক্ষক

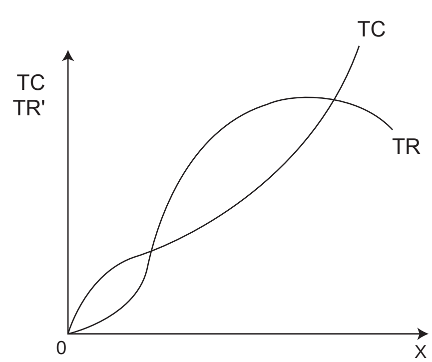
(ii) ত্রিঘাত অপেক্ষক (Cubic Function):

যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের উচ্চতম ঘাত তিন (3) হয় তাকে ত্রিঘাত অপেক্ষক বলা যায়।

উদাহরণ : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y = 5x^3 + 10x^2 + 5x + 7$ ইত্যাদি

মোট ব্যয় (total cost) অপেক্ষক এবং মোট আয় (total revenue) অপেক্ষক সাধারণত এ ধরণের হয় (চিত্র ঃ ২.৫.৩ দেখুন)।



চিত্র-২.৫.৩ ঃ ত্রিঘাত অপেক্ষক

(iii) সূচক অপেক্ষক (Exponential Function):

যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলককে সূচক হিসাবে দেখানো হয় তাকে সূচক অপেক্ষক বলে। ধরি $y = x^2$ একটি অপেক্ষক বা (algebreic Function)। এক্ষেত্রে x স্বাধীন চলক এবং 2 এর সূচক। এখন সূচককে ভিত্তি এবং x কে সূচক হিসাবে ধরে আমরা লিখতে পারিঃ $y = 2^x$ এটি একটি সূচক অপেক্ষক।

উদাহরণ ঃ (i) $y = f(x) = 3^x$

(ii) $y = a^{2x}$

(iii) $y = g(b) = 3^6$

(iv) $z = 3^{2x}$

(v) $Q = e^{ax + bx}$

(vi) $y = q^x$ ইত্যাদি

অর্থনীতিতে বিনিয়োগ অপেক্ষককে সূচক অপেক্ষকের উদাহরণ হিসাবে উল্লেখ করা যায়। মনে করি ১৯৮৬ সালের ১লা জানুয়ারী কোন কোম্পানীর বিনিয়োগের পরিমাণ 3 লক্ষ টাকা এবং প্রতি বছর তা 10% বৃদ্ধি পায়। বিনিয়োগের এই প্রবৃদ্ধি (growth of investment) সূচক অপেক্ষকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় ঃ

$$I = f(t) = 3\ (1.10)^t$$

যেখানে I = বিনিয়োগ; t = বছর/সময়, 1.10 = 10% হারে এক বছর পর 1 টাকার মান। এই ফাংশন থেকে যে কোন পরবর্তী বছরের বিনিয়োগের পরিমাণ জানা সম্ভব। যেমন ১লা জানুয়ারী ১৯৯০ সালে বিনিয়োগের পরিমাণ হবে নিম্নরূপ ঃ

$$f(4) = 3(1.10)^4 = 3(1.4641) = 4.3923 \text{ লক্ষ টাকা}$$

(iv) লগারিদমিক অপেক্ষক (Logarithmic Function):

লগারিদম একটি সূচক যা দ্বারা কোন স্থির ভিত্তিকে (Fixed base) উন্নীত (raised) করলে কোন ধণাত্মক সংখ্যা পাওয়া যায়। যেমন $2^3 = 8$ এক্ষেত্রে ভিত্তি 2-কে 3 সূচক বা শক্তিতে (power) উন্নীত করলে সংখ্যা ৪ পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে সূচক 3 হচ্ছে সংখ্যা ৪ এর লগারিদম। এটি নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায় ঃ $\text{Log}_2 8 = 3$

অনুরূপভাবে $y = b^x$ হলে b ভিত্তিক (base) y- এর লগারিদম হবে x, সুতরাং বলা যায় $x = \text{Log}_b y$ এক্ষেত্রে $y = b^x$ এবং $x = \text{Log}_b y$ একে অপরের বিপরীত। এক্ষেত্রে $x = \text{Log}_b y$ হচ্ছে লগারিদমিক অপেক্ষক (Logarithmic function) ।

উদাহরণ ঃ (i) $y = h(x) = \log_{10} x$; (ii) $y = \log_2 x$; (iii) $z = \log_3 x$; (iv) $y = \log_e (1+x)$ ইত্যাদি।

(v) বর্গমূল অপেক্ষক (Square root function):

যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের উচ্চতম ঘাত $\frac{1}{2}$ তাকে বর্গমূল অপেক্ষক (Square root function) বলে। যেমন ঃ- $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$

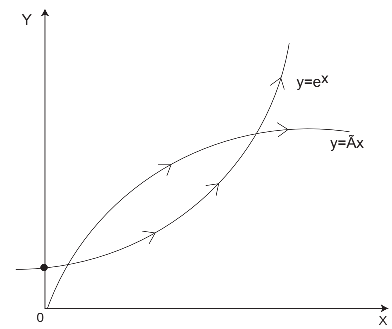
৮. অবিছিন্ন ও বিচ্ছিন্ন অপেক্ষক (Continuous and Dis-continuous Function):

অ-বিচ্ছিন্ন অপেক্ষক (Continuous function):

যে ফাংশনে একটি নির্দিষ্ট রেঞ্জ বা পরিধির মধ্যে স্বাধীন চলকের যে কোন মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের কোন না কোন মান পাওয়া যায় তাকে অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক বলা হয়।

যেমন- (i) $y = e^x$, (ii) $y= 5+3x$, (iii) $y = \sqrt{x}$

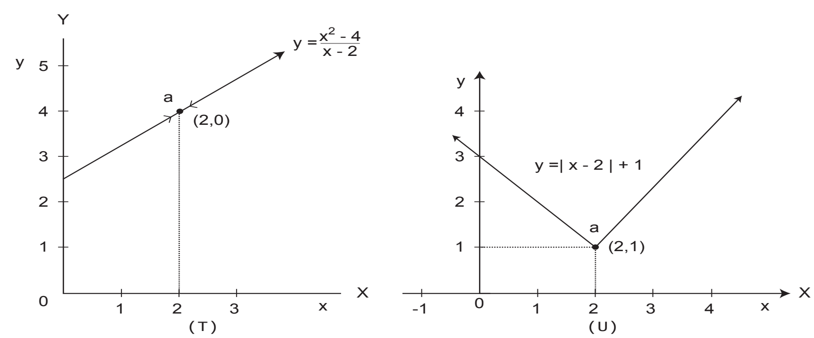
অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের লেখচিত্র অংকন করলে তা অবিরত বা ধারাবাহিক হয়। যেমন- (চিত্র ২.৫.৪-এ $y=e^x$ ও $y=\sqrt{x}$ -এর অবিচ্ছিন্ন লেখচিত্র দেখানো হলো।



চিত্র- ২.৫.৪ ঃ অ-বিচ্ছিন্ন অপেক্ষক

বিচ্ছিন্ন অপেক্ষক (Dis-continuous function):

যে অপেক্ষক একটি নির্দিষ্ট রেঞ্জ (Range) বা বিস্তারের মধ্যে স্বাধীন চলকের কমপক্ষে কোন একটির মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের কোন মান পাওয়া না যায় তাকে বিচ্ছিন্ন অপেক্ষক বলে। এভাবেও বলা যায়, অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের কোন রেঞ্জ (Range) বা বিস্তৃতির মধ্যে অন্তত একটি বিন্দুতেও যদি নির্ভরশীল চলকের কোন মান পাওয়া না যায় তবে তাকে বিচ্ছিন্ন অপেক্ষক বলা হয়। যে বিন্দুতে অপেক্ষকটির কোন মান পাওয়া যায় না সে বিন্দুকে বিচ্ছিন্নতা বলা হয়। যেমন-$y = \frac{x^2-4}{x-2}$ অপেক্ষকটি বিচ্ছিন্ন। কারণ এই অপেক্ষকে $x = 1$ হলে $y = 3$, $x = 2$ হলে $y = 0$ এবং $x = 3$ হলে $y = 5$। এখানে লক্ষনীয় যে, এই অপেক্ষকটিতে $x \neq 2$ হলে y এর মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ $x \gtrless 2$ হলে y- এর মান পাওয়া যায়। কিন্তু $x=2$ হলে $y=0$ তথ্য অপেক্ষকের কোন মান পাওয়া যায় না। ফলে $x=2$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি বিচ্ছিন্ন। চিত্রে দুটি অপেক্ষকের বিচ্ছিন্ন রূপ দেওয়া হলো :

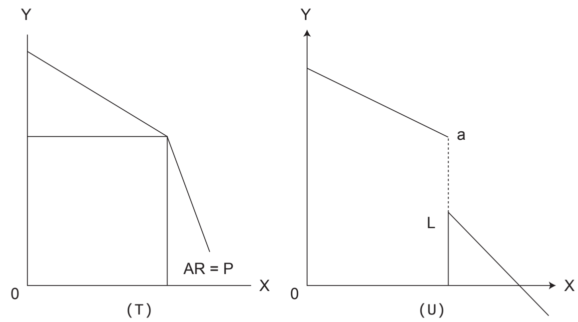


চিত্র-২.৫.৫ ঃ বিচ্ছিন্ন অপেক্ষক

(ক) চিত্রে $x = 2$ হলে a বিন্দুতে অপেক্ষকটি বিচ্ছিন্ন হয় এবং (খ) চিত্রে $x=2$ ও $y=1$ এর জন্য a বিন্দুতে অপেক্ষকটি বিচ্ছিন্ন।

অর্থনীতিতে অবিচ্ছিন্ন ও বিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের ব্যবহার ঃ

অর্থনীতিতে আমরা অনেক সময় অবিচ্ছিন্ন এবং বিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের রেখাচিত্রের সম্মুখীন হই। যেমন- ওলিগোপলি (Oligopoly) বাজারে যে কৌনিক চাহিদা রেখা মডেল (Kinked Demand Curve) বিশ্লেষণ করা হয় সেক্ষেত্রে গড় আয় (AR) রেখা অবিচ্ছিন্ন রেখা হিসাবে অভিহিত। যদিও রেখাটি মসৃণ (Smooth) নয়। প্রান্তিক আয় রেখাটি (MR) একটি বিচ্ছিন্ন অপেক্ষক।



চিত্র-২.৫.৬ ঃ (ক) অবিচ্ছিন্ন AR রেখা; (খ) বিচ্ছিন্ন MR রেখা।

(ক) চিত্র ঃ এই চিত্রে AR রেখা অবিচ্ছিন্ন। এতে কোন বিরতি নেই। তবে E একটি তীর্যক বা কৌনিক বিন্দু (Corner Point) হওয়ায় রেখাটি মসৃন নয়।

(খ) চিত্র ঃ এই চিত্রে MR রেখাটির ab অংশ ভঙ্গুর অর্থাৎ এতে ab পরিধিতে (gap) আছে। সুতরাং এটা একটি বিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের রূপ প্রকাশ করে।

সারাংশ ঃ *গাণিতিক অর্থনীতিতে বিভিন্ন ধরণের অপেক্ষক ব্যবহৃত হয়। যেমন, প্রান্তিক ব্যয় রেখা, গড় ব্যয় রেখা, প্রান্তিক উৎপাদন রেখা, গড় উৎপাদন রেখা ইত্যাদিতে দ্বিঘাত অপেক্ষক ব্যবহার করা হয়। তাছাড়া অর্থনীতিতে অনেক সময় অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক রেখাচিত্রের মাধ্যমে প্রকাশিত হয়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৫

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। যে অপেক্ষকের বিস্তৃতি বা পরিসর শুধুমাত্র একটি উপাদান দ্বারা গঠিত তাকে স্থির অপেক্ষক বলে।

২। $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ -একটি বহুমান বিশিষ্ট অপেক্ষক।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-ইউনিট ২

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। অর্থনীতিক মডেলে চলক বলতে কি বোঝায় ?
২। অভেদের সংজ্ঞা দিন।
৩। অর্থনীতিক মডেলের উপাদানসমূহ আলোচনা করুন।
৪। পূর্ণ সংখ্যা বলতে কি বোঝায় ?
৫। পূর্ণ সংখ্যার শ্রেণী বিন্যাস বিশদভাবে আলোচনা করুন।
৬। সেটের সংজ্ঞা লিখুন। সেট উপস্থাপনের পদ্ধতিগুলো ব্যাখ্যা করুন।
৭। সংজ্ঞা লিখুন : ফাঁকা সেট, পূরক সেট, উপসেট, অভেদ সেট, সার্বিক সেট।
৮। সেটের বন্টন নিয়মটি লিখুন।
৯। সেটের ইউনিয়ন বলতে কি বোঝায় ?
১০। একটি শ্রেণীর 30 জন ছাত্রের উপর এক জরিপে দেখা যায় যে, 19 জন ছাত্র অংক, 17 জন সঙ্গীত, 11 জন ছাত্র ইতিহাস, 7 জন ছাত্র অংক ও ইতিহাস, 12 জন ছাত্র অংক ও সঙ্গীত, 5 জন ছাত্র সঙ্গীত ও ইতিহাস এবং 2 জন ছাত্র তিনটি বিষয় নিয়ে লেখাপড়া করে। উপরের তথ্য থেকে দেখাও যে,
(i) কত জন ছাত্র অংক নিয়ে কিন্তু ইতিহাস বাদ দিয়ে পড়ালেখা করে?
(ii) কত জন ছাত্র ঠিক দুটি বিষয় নিয়ে পড়ালেখা করে?
১১। একটি শহরের মোট লোকসংখ্যা 40,000। তাদের মধ্যে 400 জনের নিজস্ব গাড়ি আছে; 10,000 জনের নিজস্ব সাইকেল এবং 300 জনের গাড়ি ও সাইকেল উভয়ই আছে। ঐ শহরের কতজন লোকের গাড়ি বা সাইকেল কোনটিই নেই ?
১২। একটি কোম্পানী তাদের পণ্যকে অগ্রাধিকার দেয় এমন 20,000 ভোক্তার উপর একটি সমীক্ষা চালায়, সমীক্ষায় দেখা যায় পণ্য A, B এবং C পছন্দ করে যথাক্রমে 7020, 6230 এবং 5980 জন এবং উভয় পণ্য পছন্দ করে 1500 জন; পণ্য A ও B পছন্দ করে 2580 জন, পণ্য A এবং C পছন্দ করে 1200 জন এবং পণ্য B এবং C পছন্দ করে 1950 জন। প্রমাণ করুন যে, সমীক্ষার ফলাফল সঠিক নয়।
১৩। 3000 জন ভোক্তার মধ্যে 1150 জন চা এবং 780 জন কফি পছন্দ করে। কমপক্ষে কতজন ভোক্তা চা ও কফি কোনটিই পছন্দ করে না ?
১৪। অপেক্ষকে ব্যপ্তি ও বিস্তার বলতে কি বোঝায় ?
১৫। সম্পর্ক ও অপেক্ষকের মধ্যে পার্থক্য কি ?
১৬। গাণিতিক অর্থনীতিতে অপেক্ষকের ভূমিকা আলোচনা করুন।
১৭। বিভিন্ন প্রকার অপেক্ষক আলোচনা করুন।

উত্তরমালা -ইউনিট ২

পাঠ-২.১ ঃ	১। মিথ্যা	২। সত্য		
পাঠ-২.২ ঃ	১। সত্য	২। মিথ্যা	৩। সত্য	৪। মিথ্যা
পাঠ-২.৩ ঃ	১। খ	২। ক	৩। ক	
পাঠ-২.৪ ঃ	১। মিথ্যা	২। সত্য	৩। সত্য	
পাঠ-২.৫ ঃ	১। সত্য	২। সত্য		