ইউনিট ১০

গতীয় অর্থনীতি এবং সমাকলন
(Dynamic Economics and Integration)

অন্তরকলণের বিপরীত প্রক্রিয়াকে সমাকলন বলে। অর্থাৎ ডেরিভেটিভের মাধ্যমে প্রাপ্ত ফলাফল থেকে মূল ফাংশন নির্ণয় করা হয় সমাকলণের মাধ্যমে। সমাকলন মৌলিকভাবে পদার্থবিজ্ঞানের ক্ষেত্রে অধিকভাবে প্রযোজ্য। তবে অর্থনীতিতে এর ভূমিকা ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাচ্ছে। অর্থনীতির বিভিন্ন প্রান্তিক ধারণাসমূহ যেমন প্রান্তিক আয়, প্রান্তিক ব্যয় ইত্যাদি সমূহ থেকে মোট ধারণা যেমন মোট আয়, মোট ব্যয় ইত্যাদি নির্ণয় করা যায় সমাকলণের মাধ্যমে। এছাড়াও উৎপাদকের উদ্বৃত্ত নির্ণয়, ভোক্তার উদ্বৃত্ত নির্ণয় এবং অন্যান্য অর্থনৈতিক সিদ্ধান্ত গ্রহণ সহজতর হয় সমাকলনের দ্বারা।
এই ইউনিটে সমাকলনের আলোচনায় সমাকলনের ধারণা, সমাকলনের মৌল নিয়মসমূহ, আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন নির্ণয়- এসব বিষয় অন্তর্ভূক্ত করা হয়েছে। এছাড়াও অর্থনীতির বিভিন্ন ধারণার সমাকলনের প্রয়োগ দেখানো হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

- পাঠ-১ : সমাকলন
- পাঠ-২ : সমাকলনের মৌল নিয়মসমূহ
- পাঠ-৩ : আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন
- পাঠ-৪ : সুনির্দিষ্ট সমাকলন
- পাঠ-৫ : অর্থনীতির বিভিন্ন ধারণায় সমাকলনের ব্যবহার

পাঠ-১০.১

সমাকলন
(Integration)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সমাকলনের সংজ্ঞা বলতে ও লিখতে পারবেন।
- সমাকলনের অর্থনৈতিক ব্যবহার সম্পর্কে বলতে ও লিখতে পারবেন।
- সুনির্দিষ্ট ও অনির্দিষ্ট সমাকলনের সংজ্ঞা বলতে ও লিখতে পারবেন।
- সুনির্দিষ্ট ও অনির্দিষ্ট সমাকলনের মধ্যে পার্থক্য বলতে ও লিখতে পারবেন।

সমাকলনের সংজ্ঞা (Definition of Integration)

চলক x এর কোন ফাংশনের যোজিত ফল (Integral) নির্ণয় করার প্রক্রিয়াকে সমাকলন বলা হয় এবং এই প্রক্রিয়ায় প্রতীক হিসাবে ঐ ফাংশনের পূর্বে $\int$ চিহ্ন ও ফাংশনের পরে dx ব্যবহার করা হয়। এখানে dx দ্বারা বোঝানো হয় সমাকলনের ক্ষেত্রে চলক হচ্ছে x। পক্ষান্তরে যে ফাংশন যোগীকৃত (Integrated) হয় তাকে সমাকলনীয় রাশি বলে।

যেমন $\frac{d}{dx}\{F(x)\}=f(x)$ হলে $\int f(x)dx = F(x)+c$ হবে।

এক্ষেত্রে $\int$ সমাকলনের প্রতীক। এখানে x কে পরিবর্তনশীল ধরে $\int f(x)dx$ কে f(x)-এর অনির্দিষ্ট যোজিত ফল (Indefinite integral) বলে এবং f(x) কে সমাকলনীয় রাশি (Integrand) বলে। সুতরাং দেখা যায় $\frac{d}{dx}$ এবং $\int dx$ পরস্পর বিপরীত ক্রিয়ার প্রতীক।

অন্যদিকে x কে পরিবর্তনশীল ধরে, কোন ফাংশন f(x) এর যোজিত ফল F(x) এবং x-এর দুটি মান a ও b হলে x এর মান a থেকে b-তে পরিবর্তনের ফলে F(x)-এর মানের পরিবর্তনকে a ও b সীমার মধ্যে f(x) এর নির্দিষ্ট যোজিত ফল (definite integral) বলে।

এটিকে $\int_a^b f(x)\,dx$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অনির্দিষ্ট যোজিত ফলের ক্ষেত্রে আমরা যে ধ্রুব বা নিশ্চল রাশি C যোগ করি তাকে সমাকলনের ধ্রুবক বলে। অন্যকথায় কোন ফাংশন f(x) এর অনির্দিষ্ট যোজিত ফলের সাথে ইচ্ছানুযায়ী যে কোন ধ্রুবক (any arbitrary constant) যোগ করা যায়। কেননা C একটি ধ্রুবক বলে F(x)এবং F(x)+C এর অন্তরক একই হবে।

সমাকলনের অর্থনৈতিক ব্যবহার:

অর্থনীতির বিশ্লেষনের ধারা যতই প্রসারিত হচ্ছে ততই অর্থনীতিতে গণিত শাস্ত্রের ব্যবহার বৃদ্ধি পাচ্ছে। বিশেষ করে Integral Calculas যেহেতু Differential Calculas-এর বিপরীত প্রক্রিয়া সেহেতু Differentiation-এর মত Integration -এর ব্যবহারও যথেষ্ট । নিন্মে অর্থনীতিতে Integration-এর উল্লেখযোগ্য ব্যবহারগুলো বর্ণনা করা হলো।

১. একটি ফার্মের দৈনন্দিন কাজের প্রান্তিক অপেক্ষক বা প্রান্তিক মূল্য অপেক্ষক জানা থাকলে তা থেকে ফার্মের মোট অপেক্ষক বের করা যায় সমাকলনের (Integration) সাহায্যে।
২. সমাকলন আমাদেরকে ভোক্তার উদ্বৃত্ত (Consumer's Surplus) বের করতে সাহায্য করে।
৩. উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত (Producer's Surplus) নির্ণয় করতে সমাকলনের সাহায্য নিতে হয়।
৪. মূলধনের সময় পথ (Time Path of Capital) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে Integral Calculas ব্যবহৃত হয়।

৫. নীট বিনিয়োগ বা মূলধন গঠন (Capital formation) বের করার জন্য Integration-এর সাহায্য নিতে হয়।
৬. Present Value of Cash Flow জানার জন্য আমরা Integration-এর ব্যবহার করতে পারি।
৭. কোন আয় বা মূলধন প্রবাহের ক্যাপিটাল ভ্যালু (Capital Value) নির্ণয়ে সমকলনের ব্যবহার করা হয়।

অনির্দিষ্ট সমাকলনের সংজ্ঞা (Definition of Indefinite Integral) :

ধরি g(x) একটি অপেক্ষক এবং এর অন্তরক f(x) দ্বারা প্রকাশ পায়। অর্থাৎ

$$\frac{d}{dx}[g(x)] = f(x)$$

এ অবস্থায় x এর প্রেক্ষিতে f(x) এর অনির্দিষ্ট সমাকলনকে g(x)+C বলা যায়। প্রতীকের সাহায্যে এটি নিম্নোক্তভাবে নির্দেশ করা হয় ঃ

$\int f(x)dx = g(x)+C$

এক্ষেত্রে f(x) = সমাকলনীয় অপেক্ষক (integrand)

C = সমাকলনের স্থির রাশি।

x = সমাকলনের জন্য বিবেচনাধীন চলক।

$\int$ = ইংরেজী বর্ণমালা S এর দীর্ঘায়িত রূপ (elongated form) যা সমষ্টি (Sum) নির্দেশের জন্য ব্যবহৃত।

লেখচিত্রে প্রকাশ করলে কোন অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকলন মূলতঃ স্বাধীন চলকের অপেক্ষকের উপর নির্ভরশীল হয়। ধরি f(x) একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক এবং এর ডোমেইন (domain) x =a এবং x=b এর মধ্যে রয়েছে। এই পরিধির মধ্যে চলক x যে কোন মান গ্রহণ করতে পারে।

চিত্র- ১০.১.১ ঃ অনির্দিষ্ট সমাকলন

এখন a এবং b পরিধির মধ্যে y = f(x) রেখার অধীনের এলাকা পরিমাপ করলে তাকে সুনির্দিষ্ট যোজিত ফল বলা যায়। মনে করি b=x তাহলে বলা যায় ঃ

$$g(x) = \int_a^x f(x)dx$$

লেখচিত্রানুযায়ী a এবং x পরিধিতে f(x) রেখার অধীনে যে এলাকা পাওয়া যাবে তাই g(x) দ্বারা প্রকাশ পাবে। এক্ষেত্রে a বিন্দুটি স্থির অথচ x বিন্দুর মান অজ্ঞাত। ফলে x এর মানের পরিবর্তন করলে অর্থাৎ x এর মান ভূমি অক্ষে বৃদ্ধি করলে f(x) রেখাটির অধীনের এলাকাও পরিবর্তন হবে। এক্ষেত্রে x এর বিভিন্ন মানে g(x) বিবেচনাধীন রেখার অধীনে বিভিন্ন এলাকা নির্দেশ করবে।

সঠিক/সুনির্দিষ্ট সমাকলন (Definite Integration) ঃ

যখন কোন অন্তরকলনযোগ্য ফাংশনকে নির্দিষ্ট পরিসীমার মাধ্যমে সমাকলন করা হয়, তখন তাকে সুনির্দিষ্ট বা সঠিক সমাকলন বলে।

যেমন- $\int_a^b fx\, dx$

যেখানে, a = সমাকলনের নিুসীমা

b = সমাকলনের উচ্চসীমা

$\int$ = সমাকলনের চিহ্ন

$f(x)$ = সমাকলিত (Integrand) ফাংশন।

উল্লেখ্য যে, সুনির্দিষ্ট সমাকলনের ক্ষেত্রে কোন ধ্রুবক (C) বসে না।

চিত্রের সাহায্যে নিম্নে definite Integral প্রকাশ করা হলো চিত্র (১০.১.২):

চিত্র ১০.১.২ ঃ সুনির্দিষ্ট সমাকলন

সুনির্দিষ্ট ও অনির্দিষ্ট সমাকলনের মধ্যকার পার্থক্য (Difference between Definite and Indefinite Integration) :

ধরি $f(x)$ একটি প্রদত্ত অপেক্ষক যা $g(x)$ অপেক্ষকের অন্তরক।

$$\frac{d}{dx}\, g(x) = f(x)$$

তাহলে $g(x)+C$ কে x এর প্রেক্ষিতে $f(x)$ অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকলন বলা যায়। প্রতীকের সাহায্যে এটি নিম্নোক্তভাবে নির্দেশ করা যায়।

$$\int f(x)dx = g(x) + C$$

যেখানে C= সমাকলনের স্থির রাশি এবং $C \gtreqless 0$ হতে পারে।

এবং $\int f(x)dx = x$ এর প্রেক্ষিতে $f(x)$ এর যোজিত ফল।

অন্যদিকে যদি $x=a$ এবং $x=b$ পরিধি অর্থাৎ x এর উচ্চ সীমা b এবং নিু সীমা a বিবেচনা করা হয় তবে $\int_a^b f(x)dx$ কে x এর সম্পর্কে $f(x)$ এর সুনির্দিষ্ট সমাকলন বলা হয়। প্রতীকের সাহায্যে বলা যায়:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = [g(x)]_a^b$$

এই দুই ধরণের সমাকলনের মধ্যে নিম্নোক্ত পার্থক্য করা যায় ঃ

(i) অনির্দিষ্ট সমাকলনের বেলায় চলক x এর উপর সীমা সুনির্দিষ্ট থাকে না। পক্ষান্তরে সুনির্দিষ্ট সমাকলনের ক্ষেত্রে এই সীমা উল্লেখ করা থাকে।

চিত্র-১০.১.৩ ঃ f(x) অপেক্ষকের নির্দিষ্ট সমাকলিত এলাকা।

চিত্রানুযায়ী বলা যায়

$$\int_a^x f(x)dx = -\int_a^{a1} f(x)dx + \int_{a1}^x f(x)dx$$

এক্ষেত্রে, $\int_a^{a1} f(x)dx$ = সুনির্দিষ্ট যোজিত ফল (definite integral)

ধরি, $\int_a^x f(x)dx = g(x)$ এবং $\int_{a1}^x f(x)dx = F(x)$

তাহলে বলা যায় ঃ $g(x) = F(x)+C$

এই অর্থে বলা যায় সুনির্দিষ্ট সমাকলন অনির্দিষ্ট সমাকলনের একটি অংশ মাত্র যেখানে স্বাধীন চলক x এর উচ্চ এবং নিম্নসীমা দ্বারা যোজিত ফলাফল আবদ্ধ করে দেয়া হয়।

(ii) অনির্দিষ্ট সমাকলনের ক্ষেত্রে C রাশি থাকায় তার মধ্যে অযৌক্তিকতা (arbitraryness) থাকে যা সুনির্দিষ্ট সমাকলনের বেলায় পরিলক্ষিত হয় না।

(iii) প্রতিটি সুনির্দিষ্ট সমাকলনের নির্দিষ্ট মান থাকে। স্থির রাশির মান জানা না থাকলে অনির্দিষ্ট সমাকলনের মান অনির্ধারিত থাকে।

(iv) অনির্দিষ্ট সমাকলনের দ্বারা অর্থনীতিতে ব্যবহৃত অপেক্ষকগুলির Marginal form থেকে Total form বের করা যায়।

ক. MR হতে TR পাওয়া যায়।

খ. MC হতে TC পাওয়া যায়।

গ. MPC হতে TC এবং MPS হতে TS পাওয়া যায়।

পক্ষান্তরে, সুনির্দিষ্ট সমাধানের দ্বারা:

ক. ভোক্তার উদ্বৃত্ত (Consumer's surplus)

খ. উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত (Producer's surplus)

গ. মূলধনের সময়পথ (Time path of capital)

ঘ. অর্থ প্রবাহের বর্তমান মূল্য (Present value of cash flow) ইত্যাদি, নির্ণয় করা যায়।

(v) যদি f(x) একটি অপেক্ষকের অন্তরকলন হয়, তবে এর অনির্দিষ্ট সমাকলন হবে: $\int f(x)dx=f(x)+C$ কিন্তু f(x)এর সুনির্দিষ্ট সমাকলন যদি F(x) এবং $x=a$ থেকে $x=b$ তে পরিবর্তিত হয় তবে সুনির্দিষ্ট সমাকলন হবে; $\int_a^b f(x).dx=f(b)-f(a)$

সারাংশ *ঃ চলক x-এর কোন অপেক্ষকের যোজিত ফল (Integral) নির্ণয় করার প্রক্রিয়াকে সমাকলন বলা হয়। অর্থনীতিতে সমাকলনের ব্যবহার উত্তরোত্তর বৃদ্ধি পাচ্ছে। যেমন, ভোক্তার উদ্বৃত্ত, উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত, মূলধনের সময় পথ, নীট বিনিয়োগ, ইত্যাদি নির্ধারণ করতে সমাকলন ব্যবহার করা হয়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.১

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। ধ্রুবক 'C' যোগ করা হয়,
(ক) অনির্দিষ্ট যোজিত ফলের ক্ষেত্রে (খ) নির্দিষ্ট যোজিত ফলের ক্ষেত্রে
(গ) অন্তরকলনের ক্ষেত্রে (ঘ) নির্ণায়কের ক্ষেত্রে

২। প্রান্তিক অপেক্ষক থেকে মোট অপেক্ষক বের করা যায় ;
(ক) অন্তরকলনের সাহায্যে (খ) সমাকলনের সাহায্যে
(গ) ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে (ঘ) নির্ণায়কের সাহায্যে

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

৩। $\frac{d}{dx}$ এবং $\int dx$ পরস্পর বিপরীত ক্রিয়ার প্রতীক।

পাঠ-১০.২

সমাকলনের মৌল নিয়মসমূহ
(Fundamental Rules of Integration)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সমাকলনের মৌল নিয়মসমূহ সম্পর্কে বলতে ও লিখতে পারবেন।

কোন অপেক্ষকের অন্তরক বের করার জন্য যেমন কতিপয় নিয়ম আছে তেমনি কোন অপেক্ষকের যোজিত ফল নির্ণয়ের জন্য কতিপয় মৌল নিয়ম অনুসরন করা হয়। কতিপয় নিয়ম নীচে দেয়া হল।

১. ঘাতের নিয়ম (Power Rule)

(a) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}(x^{n+1}) + C$ (যেখানে $n \neq -1$)

কেননা $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right) = \frac{1}{1+n} \cdot \frac{d}{dx}(x^{n+1})$

$$= \frac{1}{n+1}(n+1)\,x^n$$

$$= x^n$$

(b) যদি $n=-1$ হয় তা হলে বলা যায়:

$$\int x^n\, dx = \int x^{-1}\, dx = \int x^{-1}\, dx = \log x + C$$

কেননা $\frac{d}{dx}(\log x + C) = \frac{1}{x}$

উদাহরণ ১. $\int x^{\frac{1}{3}}\, dx$ বের করুন।

এক্ষেত্রে $n=\frac{1}{3}$ ফলে ঘাতের নিয়ম অনুসরণ করে আমরা সমাকলন বের করতে পারি।

$$\int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\, x^{\frac{4}{3}} + C$$

উদাহরণ ২. $\int x^3\, dx$ বের করুন।

এক্ষেত্রে $n=3$

$$\int x^3\, dx = \frac{1}{3+1}\, x^{3+1} + C$$

$$= \frac{1}{4}\, x^4 + C$$

উদাহরণ ৩. $\int \sqrt{x^3}\, dx$ বের করুন।

যেহেতু $\int \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ সেহেতু এক্ষেত্রে $n = \frac{3}{2}$

$$\int \sqrt{x^3}\; dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

উদাহরণ ৪. $\int \frac{1}{x^4}\; dx$ নির্ণয় করুন।

এক্ষেত্রে $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$

এখন n=-4 সুতরাং $\int \frac{1}{x^4}\; dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C$

$$= \frac{x^{-3}}{-3} + C$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + C$$

২. সূচকের নিয়ম (Exponential Rule)

(i) $\int e^x dx = e^x + C$

(ii) $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$ যেখানে k = স্থির রাশি।

কেননা $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{kx}}{k} + C\right) = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{dx}(e^{kx}) = \frac{1}{k} \cdot ke^{kx} = e^{kx}$

(iii) $\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k\log a} + C$ যেখানে a এবং k স্থির রাশি।

কেননা $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^{kx}}{k\log a}\right) = \frac{1}{k\log a}\frac{d}{dx}(a^{kx}) = \frac{1}{k\log a}\, a^{kx} . k\log a = a^{kx}$

(iv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ যেখানে k =1

উদাহরণ ঃ ১ $\int e^{x+3} dx$

$= \int e^x e^3 dx$

$= e^3 \int e^x dx$

$= e^3 e^x + C$

$= e^{x+3} + C$ [যেখানে e^3 =স্থির রাশি]

উদাহরণ ঃ ২ $\int (3^x+e^x)dx$

$= \int 3^x dx + \int e^x dx$

এক্ষেত্রে k =1 সুতরাং প্রদত্ত অপেক্ষকের সমাকলন দাঁড়াবে নিম্নরূপ ঃ

$= \frac{3^x}{\log 3} + e^x + C$

উদাহরণ ঃ ৩ $\int e^{2x}dx$

এক্ষেত্রে k = 2 সুতরাং উপরের সূত্রানুযায়ী অপেক্ষকের সমাকলন হবে ঃ

$\int e^{2x}dx$

$= \frac{e^{2x}}{2} + C$

৩. লগারিদমের নিয়ম (Logarithmic Rule)

$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$ [যেখানে x>o]

যেহেতু x এর মান শূন্য অথবা ঋণাত্মক হলে উহার লগারিদম থাকে না, সেহেতু আমরা x-এর মানের জন্য শর্ত আরোপ করেছি। উল্লেখ্য যে অনেক সময় $\int \frac{1}{x} dx$-কে $\int \frac{dx}{x}$ হিসাবেও প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ ১ $\int \frac{5}{x} dx$

এক্ষেত্রে $\int \frac{5}{x} dx = 5\int \frac{1}{x} dx$ লেখা যায়। এখন লগের সূত্রানুযায়ী অপেক্ষকের সমাকলন হবে নিম্নরূপ ঃ

$5\int \frac{1}{x} dx$

$= 5\log x + C$

উদাহরণ ঃ ২ $\int (e^{8x} - 3x^{-1})dx$

$= \int e^{8x}dx - \int 3x^{-1}dx$

$= \int e^{8x}dx - \int \frac{3}{x} dx$

$= \frac{e^{8x}}{8} - 3\log x + C$

উদাহরণ ঃ ৩ $\int (e^{3a\log x} + e^{3x\log a})dx$

এক্ষেত্রে $e^{3a\log x} = x^{3a}$ এবং $e^{3a\log a} = a^{3x}$ কেননা

আমরা জানি, $e^{\log x} = x$ এখন আমরা প্রদত্ত ফাংশনের সমাকলন বের করতে পারি ঃ-

$\int (e^{3a\log x} + e^{3x\log a})dx$

$= \int x^{3a}dx + \int a^{3x}d^x$

$= \frac{x^{3a+1}}{3a+1} + \frac{a^{3x}}{3\log a} + C$

৪. যোগের নিয়ম (Sum Rule)

সসীম সংখ্যক যোগোত্তর অপেক্ষকের যোজিত ফল উহাদের পৃথক পৃথক যোজিত ফলের সমান। যেমন দুটি অপেক্ষকের ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি ঃ

$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

উদাহরণঃ ১ $\int (x^3+x+1)dx$ বের করুন।

আমাদের এক্ষেত্রে উপরের নিয়মানুসারে লিখা যায় ঃ

$$\int(x^3+x+1)dx = \int x^3dx + \int xdx+\int 1dx$$
$$= \frac{x^4}{4} + C_1+\frac{x^2}{2} + C_2+ x+C_3$$
$$= \frac{x^4}{4} +\frac{x^2}{2} + x+C \text{ [যেখানে } C = C_1+C_2+C_3]$$

উদাহরণঃ ২ $\int (e^x+x^{-3/2})dx$

$$= \int (e^x dx + \int x^{-3/2})dx$$
$$= e^x+ \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C$$
$$= e^x-2x^{-1/2}+C$$

উদাহরণঃ ৩ $\int 4x^3+\frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}$

$$= \int 4x^3dx+\int \frac{6}{x} dx-\int \frac{1}{x^2} dx$$
$$= 4\int x^3dx+6\int \frac{1}{x} dx-\int x^{-2}dx$$
$$= 4\int \frac{x^{3+1}}{3+1} +6.(\log x) -\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$
$$= \frac{4x^4}{4} + 6\log x+x^{-1}+ C$$
$$= x^4 + 6\log x + x^{-1}+ C$$

৫. গুণের নিয়ম (Multiplication Rule)

$$\int kf(x)dx= k\int f(x)\, dx$$

উদাহরণঃ ১. $\int 2x^2\, dx$

এক্ষেত্রে উপরোক্ত নিয়মানুসারে আমরা লিখতে পারি ঃ

$$\int 2x^2\, dx$$
$$= 2\int x^2\, dx$$
$$= 2\frac{x^3}{3} +C$$
$$= \frac{2}{3}x^3+C$$

৬. পরিবর্তক নিয়ম (Substitution Rule)

$$\int f(u)\frac{du}{dx} dx = \int f(u)\, du = F(u)+C$$

এক্ষেত্রে $\int du$ কে $\int dx$ এর জন্য পরিবর্তক করা হয়েছে।

উদাহরণ ঃ ১ $\int 6x^2 (x^3+2)^9dx$

ধরি, $u = x^3+2$ তাহলে, $\frac{du}{dx} = 3x^2$

ফলে আমরা লিখতে পারি ঃ

$$6x^2(x^3+2)^9dx=\int 2\frac{du}{dx}\ u^9dx$$
$$=\int 2u^9du$$
$$=2\int u^9du$$
$$=2\frac{u^{10}}{10}\ +C$$
$$=\frac{2}{10}u^{10}+C$$
$$=\frac{1}{5}(x^3+2)^{10}+C$$

উদাহরণ ঃ ২ $\int\frac{2x^3+1}{x^4+2x}\ dx$

ধরি, $x^4+2x=u$

বা, $\frac{du}{dx}=2(2x^3+1)$

এখন আমরা লিখতে পারি ঃ

$$\int\frac{2x^3+1}{x^4+2x}\ dx=\int\frac{1}{2}\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{u}\ dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}$$
$$=\frac{1}{2}\ \ln|u|+C$$
$$=\frac{1}{2}\ \ln|x^4+2x|+C$$

উদাহরণ ঃ ৩ $\int(ax+b)^3dx$

ধরি, $u=ax+b$ তবে $\frac{du}{dx}=a$ হবে।

আবার $du=adx+xda+db=adx$

সুতরাং বলা যায় $dx=\frac{1}{a}du$

এখন আমরা অপেক্ষকের সমাকলন বের করতে পারি ঃ

$$\int(ax+b)^3dx=\int u^3\frac{1}{a}\ du$$
$$=\int\frac{u^3}{a}du$$
$$=\frac{1}{a}\int u^3du$$
$$=\frac{1}{a}\left\{\frac{u^{3+1}}{3+1}\right\}+C$$
$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{u^4}{4}$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^4}{4}+C$$

উদাহরণ ঃ ৪ $\int a^{2x}dx$

ধরি, $u=2x$ তাহলে $du=2dx$ সুতরাং $dx=\frac{1}{2}du$

এখন $\int a^{2x}du=\int a^u\frac{1}{2}du$

$$=\frac{1}{2}\int a^u du$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a^u}{\log_e a}+C$$

$$=\frac{a^{2u}}{2\log_e a}+C$$

৭. ভাগের নিয়ম (Quotient Rule)

(a) যদি $\frac{f(x)}{f(x)}$ অপেক্ষক থাকে তবে $\int\frac{f'(x)}{(x)}$ বের করার নিয়ম হবে নিম্নরূপ ঃ

ধরি, $v=f(x)$ তবে $dv=f'(x)dx$ হবে

এখন, $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{dv}{v}=\log v+C=\log f(x)+C$

(b) যদি $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$ থাকে তবে $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$ বের করার নিয়ম হবে নিম্নরূপ ঃ

ধরি, $v=f(x)$ ফলে $dv=f'(x)dx$ হবে।

এখন $\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int\frac{dv}{\sqrt{v}}$

$$=\int(v^{-1/2}dv)$$

$$=\frac{v^{1/2}}{1/2}+C$$

$$=2v^{1/2}+C$$

$$=2\sqrt{f(x)}+C$$

$$=\frac{1}{2}\int v^{-1/2}dv$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{v^{1/2}}{1/2}\right)+C$$

$$=v^{1/2}+C$$

$=\sqrt{x^2+5}+C$ [$v=x^2+5$ বসিয়ে]

উদাহরণ ঃ ১ $\int\frac{10}{x^3}dx$

$$=10\int\frac{1}{x^3}dx$$

$$=10\int x^{-3}dx$$

$$= 10\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C$$

$$= -10 \infty \frac{1}{2} \infty \frac{1}{x^2} + C$$

$$= -\frac{5}{x^2} + C$$

উদাহরণ ঃ ২ $\int \frac{2x}{x^2+9} dx$

ধরি, $v = x^2+9$

$\frac{dv}{dx} = 2x$

বা $dv=2xdx$

এক্ষেত্রে $\int \frac{2x}{x^2+9} dx = \int \frac{dv}{v}$

$= \log v + C$

$= \log(x^2+9) + C$

উদাহরণ ঃ ৩ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$

ধরি $v=x^2+5$

বা, $\frac{dv}{dx} = 2x$

বা, $dv=2xdx$

$\therefore xdx=\frac{1}{2} dv$

এক্ষেত্রে $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$

$= \int \frac{{}^1/_2 dv}{\sqrt{v}}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^{1/2}}$

৮. সখন্ড সমাকলন (Integration by Parts)

প্রথম পদ্ধতি ঃ

সমাকলনের ক্ষেত্রে দুটি অপেক্ষক গুণন আকারে উপস্থিত থাকলে এ পদ্ধতিতে উহার সমাকলিত মান নির্ণয় করা হয়। গুণনকৃত দুটো অপেক্ষকের সমাকলিত মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রটি ব্যবহার করা হয়। যদি u এবং v দুটি অপেক্ষক হয় তবে,

$$\int uvdx = u\int vdx - \int \{\frac{d}{dx}(u) \int vdx\} dx$$

অথবা, ১ম অপেক্ষক x ∫ ২য় অপেক্ষক dx-∫ {$\frac{d}{dx}$ ১ম অপেক্ষক ∞ ∫ ২য় অপেক্ষক dx}dx

উদাহরণ ঃ ১ $\int x^2 e^x dx$

সমাধান ঃ $I=x^2\int e^x dx-\int\{\frac{d}{dx}(x^2)\int e^x dx\}dx$

$= x^2e^x-\int 2x.e^x dx$

$= x^2e^x- 2[x\int e^x dx-\int \{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\}dx]$

$= x^2e^x-2[xe^x-\int e^x dx]$

$= x^2e^x-2[xe^x-e^x]+C$

$= x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

$= e^x(x^2-2x+2)+C$

উদাহরণ ঃ ২ $\int x\ln x.dx$

সমাধান ঃ $I= \int x\ln x.dx$

$= \ln x \int xdx- \int\{\frac{d}{dx}(\ln x) \int xdx\}dx$

$= \ln x (\frac{1}{2}x^2) - \int\frac{1}{x}(\frac{1}{2}x^2)\, dx$

$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4} x^2+C$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

u-এর সম্পর্কে v-এর সমাকলন পাওয়া যায়, uv হতে v এর সম্পর্ক u-এর সমাকলিত মান বিয়োগ করে। অর্থাৎ $\int vdx=uv-\int udv$

উদাহরণ ঃ ১ $\int x (x+1)^{1/3}dx$

সমাধান ঃ উল্লেখ্য যে এক্ষেত্রে প্রতিস্থাপন বা অন্য কোন নিয়মে সমাকলিত মান নির্ণয় করা যায় না। এ কারণে উপরোক্ত দ্বিতীয় পদ্ধতি অনুসারে উক্ত সমস্যাকে $\int vdu$ আকারে সাজিয়ে সখন্ড সমাকলন পদ্ধতিতে মান বের করার চেষ্টা করি।

এ উদ্দেশ্যে মনে করি v=x; ফলে dv=dx. এবং

মনে করি $u=\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}$

$du = (x+1)^{\frac{1}{3}}$ হয়। এমতাবস্থায়

$\int x (x+1)^{\frac{1}{3}} dx$

$= \int vdx$

$= uv-\int udv$

$= (\frac{3}{4}) (x+1)^{\frac{4}{3}}\, x-\int \frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}\, dx$

$= (\frac{3}{4}) (x+1)^{\frac{4}{3}}\, x-\frac{9}{28}(x+1)^{\frac{7}{3}} +C$

উদাহরণ ঃ ২ $\int xe^x dx$

সমাধান ঃ এক্ষেত্রে মনে করি $v = x$ এবং $u=e^x$ যাতে $dv=dx$ এবং $du=e^x dx$ সুতরাং

$\int xe^{x}dx$
$= \int vdx$
$= uv-\int udv$
$= e^{x}.x-\int e^{x}dx$
$= e^{x}.x- e^{x}+C$
$= e^{x}(x-1)+C$

সমাকলিত মান সঠিক হয়েছে কিনা তা যাচাই করার জন্য উক্ত ফলাফলের অন্তরকলন মান নির্ণয় করে দেখতে হবে যে উহা integrand এর সমান।

উল্লেখ্য যে, সখন্ড সমাকলন দুটি পদ্ধতিতে দেখানো হয়েছে। যে কোনটি ব্যবহার করে একই ফলাফল পাওয়া গেলেও এদের মধ্যে প্রথম পদ্ধতিটি অনেকাংশে জটিলতা মুক্ত।

সারাংশ ঃ *অন্তরক বের করার জন্য যেমন কিছু নিয়ম রয়েছে, তেমনি সমাকলন নির্ণয় করার জন্য কিছু মৌল নিয়ম রয়েছে। যেমন ঘাতের নিয়ম, যোগের নিয়ম, গুণের নিয়ম, ভাগের নিয়ম, সূচকের নিয়ম, লগারিদমের নিয়ম, ইত্যাদি।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.২

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। $\int x^2dx$ এর সমাকলন করলে পাওয়া যায়,

(ক) $2x + C$ (খ) $x^3 + C$

(গ) $\frac{1}{3}x^3 + C$ (ঘ) $\frac{1}{2}x + C$

২। $\int dx$ এর সমাকলন করলে পাওয়া যায়,

(ক) $1+ C$ (খ) 0

(গ) $x^2 + C$ (ঘ) $x + C$

পাঠ-১০.৩

আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন
(Integration by Partial Fraction)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন সম্পর্কে বলতে ও করতে পারবেন।

যখন হর উচ্চতর ক্রমের হয় এবং তার উৎপাদক নির্ণয় সম্ভব হয় তখন সাধারণত: আংশিক ভগ্নাংশ প্রয়োগ করা হয়। প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলোর প্রকৃতি বিবেচনা করে আংশিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন পদ্ধতি নিচে আলোচনা করা হলো।

প্রথম পদ্ধতি ঃ
যখন হরে বাস্তব এবং একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্ত কোন উৎপাদকেরই পুনরাবৃত্তি হয় না, এই পদ্ধতিটি নিতে উদাহরণে দেখানো হলো।

উদাহরণ ঃ ১ $\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx$

সমাধান ঃ এরূপ সমস্যার ক্ষেত্রে হর অংশকে একঘাত বিশিষ্ট কয়েকটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হয়। যেমন,

$$x^3+x^2-6x$$
$$= x(x^2+x-6)$$
$$= x(x-2)(x+3)$$

মনে করি,

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

উভয় পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই

$$x^2+x-1 = A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$$

১ নং অভেদে পর্যায়ক্রমে $x=0,2,-3$ বসিয়ে পাই

$$-1=A(0-2)(0+3);\ \text{বা},\ -1= -6A;\ \text{বা},\ A=\frac{1}{6}$$

$$4+2-1=B.2(2+3);\quad \text{বা},\ 5=10B;\ \text{বা},\ B=\frac{1}{2}$$

এবং $9-3-1 = C(-3)(-3-2);$ বা $5= 15C;$ বা $C=\frac{1}{3}$

$$\therefore \frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-2)} + \frac{\frac{1}{3}}{(x+3)}$$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx \quad = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+3)}$$

$$= (\frac{1}{6})\log|x| + (\frac{1}{2})\log|x-2| + (\frac{1}{3})\log|x+3| + C$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

যখন লবের ঘাত হরের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান, তখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাতকে হরের ঘাত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করে তারপর নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে সমাকলন করতে হয়।

উদাহরণ : ১ $\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

সমাধান : $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = 1 + \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$

বা, $x^3 = (x-1)(x-2)(x-3) + A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$.....(1)

[উভয় পক্ষকে $(x-1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে]

১ নং অভেদে পর্যায়ক্রমে $x=1,2,3$ বসিয়ে পাই

$1=A(-1)(-2)$; বা, $A = \frac{1}{2}$

$8= B(1)(-1)$; বা, $B = -8$ এবং

$27= C(2)(1)$; বা, $C= \frac{27}{2}$

$$\therefore \int \frac{x^3dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)} - 8\int \frac{dx}{x-3} + \frac{27}{2}\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= x + \frac{1}{2}\log|x-1| - 8\log|x-2| + \frac{27}{2}\log|x-3| + C$$

উদাহরণ : ২ $\int \frac{x^2}{x+2}\,dx$

মনে করি $I = \int[(x-2) + \frac{4}{x+2}]dx$

$= \int(x-2)dx + \int \frac{4}{x+2}\,dx$

$= \frac{x2}{2} - 2x + 4\log(x+2) + C$

তৃতীয় পদ্ধতি ঃ

যখন হরে বাস্তব এবং একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং উহাদের মধ্যে পুনরাবৃত্তি থাকে। যেমন,

উদাহরণ ১. $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

সমাধান: মনে করি, $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$

উভয় পক্ষকে $(x-1)^2(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$..............(1)

১ নং অভেদে পর্যায়ক্রমে $x=1,-2$ বসিয়ে পাই,

$1=B(1+2)$; বা $=\frac{1}{3}$ এবং

$-2= C(-2-1)^2$; বা $C=-\frac{2}{9}$

আবার ১ নং অভেদে x^2-এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$0=A+C$ ঃ বা $A-\frac{2}{9}=0$ বা ঃ $A=\frac{2}{9}$

$$\therefore \int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx = \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{(x+2)}$$

$$=\frac{2}{9}\{\log|x-1|-\log|x+2|\}+\frac{1}{3}\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

$$=\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right| - \frac{9}{3(x-1)} + C$$

চতুর্থ পদ্ধতি ঃ

যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোন উৎপাদকেরই পুণরাবৃত্তি হয় না। যেমন,

উদাহরণ:১. $\int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$

সমাধান: মনে করি $\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)}$

উভয় পক্ষকে $(x-1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই

$x = A(x^2+4)+(Bx+C)(x-1)$ ....(১)

১ নং অভেদে $x=1$ বসিয়ে $A=\frac{1}{5}$ পাওয়া যায়।

আবার ১ নং অভেদে x^2 এবং x-এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$A+B=O$.....(২) এবং $C-B = 1$...........(৩)

২ নং $A=\frac{1}{5}$ বসিয়ে $B=-\frac{1}{5}$ এবং

৩ নং এ $B=-\frac{1}{5}$ বসিয়ে $C=\frac{4}{5}$ পাওয়া যায়।

$$\therefore \int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5}\int \frac{x-4}{x^2+4}$$

$$=\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{10}\int \frac{2xdx}{x^2+4} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{1}{10}\log|x^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

পঞ্চম পদ্ধতি ঃ

যখন হর বাস্তব এবং পুনরাবৃত্তিসহ দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে তখন নিম্নোক্ত নিয়মে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করে সমাকলন করতে হয়। যেমন,

উদাহরণ ঃ ১ $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$

সমাধানঃ $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{(Bx+C)}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

বা $2x=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2+1)+(Dx+E)(x+1)$...(১)

$= A(x^4+2x^2+1)+(Bx+C)(x^3+x^2+x+1)+(Dx^2+Dx+Ex+E)x$

$= (A+B)x^4+(B+C)x^3+(2A+B+C+D)x^2+(B+C+D+E)x+(A+C+E)$

উপরোক্ত ১ নং অভেদে $x=-1$ বসিয়ে $A=-\frac{1}{2}$ পাওয়া যায়। আবার x^4,x^3,x^2,x এর সহগ সমীকৃত করে $A+B = 0$...............(৩)

$B+C=0$.......................(৪)

$2A+B+C+D = 0$.........(৫)

$B+C+D+E= 2$............(৬)

৩ নং এ $A = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে, $B = \frac{1}{2}$ ৪ নং এ $B=\frac{1}{2}$ বসিয়ে $C = \frac{1}{2}$ ৫ নং এ $A = -\frac{1}{2}$; $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$ বসিয়ে $D=1$ এবং ৬ নং এ $B=\frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D=1$ বসিয়ে $E=1$ পাওয়া যায়।

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{(x^2+1)} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \int\frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x+1| + 1/4\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C$$

$$= \frac{1}{4}\log\frac{(x^2+1)}{(x+1)^2} + \frac{(x-1)}{2(x^2+1)} + C$$

সমাকলনের অন্যান্য পদ্ধতি ঃ

১. হর দ্বিঘাত হলেও যদি রৈখিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না যায়। যেমন, দ্বিঘাত পদ্ধতি x^2+x+1 এবং x^2+1 এর ক্ষেত্রে x পদ থাকলেও পূর্বের উদাহরণ সমূহের সাহায্যে উহাদের কোন সমাধান পাওয়া সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে বর্গ পূরণ (Completing the Square) পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হয়। এরূপ সমাকলনের সমাধান করার ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত আদর্শ ফলাফলসমূহ স্মরণ রাখতে হবে।

1. $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}$
2. $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x}$
3. $\int\frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(x/a)$

২. যদি হর অবাস্তব এবং দ্বিঘাত হয় তখন নিম্নোক্ত আদর্শ ফলাফল প্রয়োগ করতে হয়।

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\{x+\sqrt{x^2-a^2}\}$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\{x+\sqrt{x^2+a^2}\}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{Sin}^{-1}(x/a)$

সারাংশ ঃ যখন হর উচ্চতর ক্রমের হয় এবং তার উৎপাদক নির্ণয় সম্ভব হয় তখন সাধারণত: আংশিক ভগ্নাংশ প্রয়োগ করা হয়। প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলোর প্রকৃতি বিবেচনা করে বিভিন্ন পদ্ধতিতে আংশিক ভগ্নাংশ নির্ধারণ করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৩

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলোর প্রকৃতি বিবেচনা করে বিভিন্ন পদ্ধতিতে আংশিক ভগ্নাংশ নির্ধারণ করা যায়।

২। যখন লবের ঘাত হরের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান, তখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাতকে হরের ঘাত অপেক্ষক ক্ষুদ্রতর করে সমাকলন করতে হয়।

পাঠ-১০.৪

সুনির্দিষ্ট সমাকলন
(Definite Integral)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সুনির্দিষ্ট সমাকলনের সংজ্ঞা জানতে পারবেন।
- সুনির্দিষ্ট সমাকলনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা জানতে পারবেন।
- সুনির্দিষ্ট সমাকলনের বৈশিষ্ট্য জানতে পারবেন।
- সুনির্দিষ্ট সমাকলনের বের করার পদ্ধতি জানতে পারবেন।
- সঙ্গতিবিহীন যোজিত ফল সম্পর্কে জানতে পারবেন।

সুনির্দিষ্ট সমাকলন বা সঠিক যোজিত ফল (Definite Integral)

মনে করি x একটি পরিবর্তনশীল চলমান রাশি। একটি ফাংশন $f(x)$-এর অনির্দিষ্ট যোজিত ফল $F(x)$ এবং x এর দুইটি মান $x = a$ এবং $x=b$; তা হলে x-এর মান a থেকে b তে পরিবর্তনের ফলে $F(x)$ এর মানের যে পরিবর্তন হয়, তাকে অর্থাৎ $F(b)-F(a)$ রাশিকে a এবং b সীমার মধ্যে $f(x)$ এর সঠিক যোজিত ফল (Definite Integral) বলে, এবং একে $\int_a^b f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। সাধারণত একে a হতে b পর্যন্ত $f(x)$-এর সমাকলিত মান বলে। 'a' কে নিম্নসীমা (lower বা Inferior limit) এবং 'b' কে উর্ধ্বসীমা (Upper বা Superior limit) বলে।

সঠিক যোজিত ফল আমরা নিম্নরূপে নির্ণয় করি।

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

সুনির্দিষ্ট যোজিত ফলের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা (Geometric Interpretation of Definite Integral)

সঠিক যোজিত ফলের নির্দিষ্ট মান থাকে। জ্যামিতিক ভাবে এই মানকে কোন রেখার আওতাধীনের একটি নির্দিষ্ট এলাকা হিসাবে দেখানো যায়। ধরি $y = f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক যার লেখচিত্র (চিত্র ১০.৪.১) নিম্নরূপ ঃ

চিত্র- ১০.৪.১ ঃ সুনির্দিষ্ট যোজিত ফল নির্ণয়ের জ্যামিতিক চিত্ররূপ

এক্ষেত্রে x এর মানের পরিধি ধরা যাক a এবং b দ্বারা প্রকাশ পায়। অর্থাৎ x এর সর্বোচ্চ সীমা b এবং নিু সীমা a নির্দেশ করে। ধরি x=A এবং x=B বিন্দুতে AP এবং BQ হচ্ছে দুটি লম্ব যা x-অক্ষে অংকিত।
এখন আমরা x এর ব্যাপ্তি (Interval) a ও b কে n সংখ্যক ভাগে বিভক্ত করতে পারি। লেখচিত্রে এই ব্যাপ্তিকে আট ভাগে বিভক্ত করা হয়েছে। যেমন এই ব্যাপ্তির মধ্যে CD হচ্ছে একটি মাত্র অংশ। ab পরিধির মধ্যে রেখাটির মোট এলাকার মধ্যে তাই এই অংশের অবদান (CD∞RC) হবে।
অনুরূপভাবে ab ব্যাপ্তির AN অংশে রেখাটির যে অংশ পাওয়া যাবে তা (AN∞AP) দ্বারা নির্দেশ করা যায়। এভাবে ab ব্যাপ্তিকে বিভিন্ন অংশে বিভক্ত করলে যে সব আয়তক্ষেত্র (Rectangular) পাওয়া যাবে সেগুলোর সমষ্টি/যোগফল y=f(x) রেখার ছায়াচ্ছন্ন এলাকা (Shaded area) দ্বারা প্রকাশ পাবে যা অনেকটা অনিয়মিত (Irregular) বলা যায়। এখন যদি ab ব্যাপ্তিকে অতি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করা হয় তবে আয়তক্ষেত্রগুলো অত্যন্ত ছোট হতে থাকবে এবং এর ফলে ছায়াচ্ছন্ন এলাকার পরিধি বাড়বে এবং এক সময় এই এলাকা একটি সীমিত মানের (Limiting Value) দিকে অগ্রসর হবে। এই সীমিত মানকে Ox অক্ষের উপরে AP এবং BQ Ordinate এর মধ্যে y=f(x) রেখার আওতাধীন এলাকা হিসাবে চিহ্নিত করা সম্ভব। সুতরাং x এবং ab ব্যাপ্তির মধ্যে y =f(x) রেখার আওতাধীন এলাকা হবে নিুরূপ ঃ

$\int_a^b f(x)dx = ABQP = \text{Lim}\ \Re f(x)\Delta x = y = f(x)$ অপেক্ষকের নীচের এরিয়া ABQP.

সুনির্দিষ্ট সমাকলনের কতিপয় বৈশিষ্ট্য (Some Properties of Definite Integral)

সুনির্দিষ্ট সমাকলনের কতিপয় বৈশিষ্ট্য রয়েছে। গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্যসমূহ নিেম্ন উল্লেখ করা হলো।

১. সমাকলনের উচ্চ এবং নিু সীমা (Limit) পরিবর্তন করলে সুনির্দিষ্ট যোজিত ফলের চিহ্ন বিপরীত হয়।

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

এই বৈশিষ্ট্য নিম্নোক্তভাবে প্রমান করা যায় ঃ

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)- F(b) = -[F(b)-F(a)]= -\int_a^b f(x)dx$$

২. উচ্চ এবং নিু সীমা একই রকম হলে সুনির্দিষ্ট সমাকলনের ফলাফল শূন্য হয়।

$$\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(a) = 0$$

৩. কোন অপেক্ষকের সুনির্দিষ্ট সমাকলনকে একাধিক Sub-integrals এর সমষ্টি হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c (x)\, dx + \int_c^d f(x)dx \quad [\text{যেখানে } a<b<c<d]$$

উল্লেখ্য এটিকে সুনির্দিষ্ট সমাকলনের যোগাত্তর বৈশিষ্ট্য (additive property) বলা হয়।
৪. একই সীমার দুই বা ততোধিক সুনির্দিষ্ট সমাকলনের যোগ অথবা বিয়োগফল বিবেচনাধীন অপেক্ষক সমূহের সুনির্দিষ্ট সমাকলনের যোগ অথবা বিয়োগফলের সমান হবে।

$$\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x)dx \pm g(x)dx]$$

৫. কোন স্থির রাশি এবং অপেক্ষকের গুণফলের সুনির্দিষ্ট সমাকলন ঐ স্থির রাশি এবং ফাংশনটির সুনির্দিষ্ট সমাকলনের গুণফলের সমান হয়।

$$\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$$

এছাড়াও সুনির্দিষ্ট সমাকলনের নিম্নোক্ত আরও দুটি বৈশিষ্ট্যের কথা উল্লেখ করা যায়

৬. $\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

৭. $\int_{x=a}^{x=b} vdu = uv\int_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} udv$

সুনির্দিষ্ট যোজিত ফল বের করার পদ্ধতি (Method of Finding Definite Integral)

সুনির্দিষ্ট যোজিত ফল নির্ণয়ের ব্যাপারে নিম্নলিখিত ধারাবাহিক পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে।

(i) $\int f(x)dx$ বের করতে হবে। মনে করি এটি $F(x)$ দ্বারা প্রকাশ পায়।

(ii) $F(x)$ ফাংশনে $x=b$ বসিয়ে $F(b)$ বের করতে হবে।

(iii) $F(x)$ ফাংশনে আবার $x=a$ বসিয়ে $F(a)$ নির্ণয় করতে হবে।

(iv) এখন $F(b)$ থেকে $F(a)$ বিয়োগ করলে ঐ বিয়োগফল ফাংশনটির সঠিক যোজিত ফল হবে। সূত্র দ্বারা এটি নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয়:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

উদাহরণ ঃ ১ $\int_3^4 5x^2dx$

$$= [\frac{5}{3} x^3]_3^4$$

$$= \frac{5}{3}[4^3-3^3]$$

$$= \frac{185}{3}$$

$$= 61\frac{2}{3}$$

উদাহরণ ঃ ২ $\int_1^2 (2x^3-1)^2(6x^2)dx$

ধরি $u = 2x^3-1$

$$\frac{du}{dx} = 6x^2$$

$\therefore$ $du = 6x^2dx$

এখন, $x=1$ হলে

$u = 2.1^3-1$

$\therefore u = 1$

আবার $x = 2$ হলে

$u = 2.\ 2^3-1$

$\therefore u=15$

অন্যকথায় u চলকের প্রেক্ষিতে এক্ষেত্রে সমাকলনের নিম্নসীমা হবে 1 এবং উর্ধ্বসীমা 15। এখন u-এর প্রেক্ষিতে সঠিক যোজিত ফল হবে নিম্নরূপ ঃ

$$\int_1^{15} u^2du$$

$$= [\frac{1}{3} u^3]_1^{15}$$

$$= \frac{1}{3}(15^3-1^3)$$

$$= 1124\frac{2}{3}$$

সঙ্গতিবিহীন যোজিত ফল (Improper Integral)

কতিপয় যোজিত ফল আছে, যা সঙ্গতিবিহীন যোজিত ফল হিসাবে পরিচিত, নিম্নে এরূপ দুই ধরনের যোজিত ফল সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

(ক) সমাকলনের অসীম সীমা (Infinite limits of Integration)

অনেক সময় দেখা যায় নির্দিষ্ট যোজিত ফলের একটি সীমা সসীম এবং অপরটি অসীম। এরূপ ক্ষেত্রে যোজিত ফলকে সঙ্গতিবিহীন যোজিত ফল বলা হয়।

$\int_3^{\alpha} f(x)dx$ এবং $\int_{\alpha}^{b} f(x)dx$ ইত্যাদি। এক্ষেত্রে পূর্বের নিয়মানুযায়ী নিম্নলিখিতভাবে এদেরকে প্রকাশ করা সম্ভব নয় ঃ

$F(\alpha)$ -$F(a)$ এবং $F(b)$ -$F(-\alpha)$ কেননা এক্ষেত্রে α একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা নয়। এজন্য x-এর পরিবর্তে $F(x)$ ফাংশনে এটি বসানো যায় না। এক্ষেত্রে সমাধানের জন্য আমাদেরকে সীমার ধারনার (Concept of limit) সাহায্য গ্রহণ করতে হয়। এদিক থেকে আমরা উপরোক্ত প্রথম সঙ্গতিবিহীন যোজিত ফলটিকে অন্য একটি যোজিত ফলের (যা সঙ্গতিপূর্ণ) সীমা হিসাবে সংজ্ঞায়িত করতে পারি।

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx = \lim_{a\emptyset -\alpha} \vee_a^b f(x)dx$$

উদাহরণ ঃ ১ $\int_1^{\alpha} \frac{dx}{x^2}$

প্রথমত ঃ আমরা $\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \frac{-1}{b} + 1$ বের করি।

এখন উপরোক্ত নিয়মানুযায়ী আমাদের যোজিত ফল হবে নিম্নরূপ ঃ

$$\int_1^{\alpha} \frac{dx}{x^2} = \underset{b\emptyset\alpha}{\text{Lim}} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \underset{b\emptyset\alpha}{\text{Lim}} \left(\frac{-1}{b} + 1\right) = 1$$

(খ) অসীম সমাকলনীয় রাশি (Infinite Integrand)

অনেক সময় দেখা যায় সমাকলনের সীমাদ্বয় সসীম হলেও তাদের ব্যপ্তির (Interval) কোন স্থানে সমাকলনীয় রাশি অসীম হয়। এক্ষেত্রে সঙ্গতিবিহীন যোজিত ফলের উদ্ভব ঘটে। পূর্বের মত এক্ষেত্রেও সমাধানের ব্যাপারে সীমার ধারণার (Concept of limit) সাহায্য গ্রহণ করতে হয়।

উদাহরণ ঃ ১ $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$

এক্ষেত্রে নিম্ন সীমার (০) প্রেক্ষিতে সমাকলনীয় রাশি $\left(\frac{1}{x}\right)$ অসীম হয় (অর্থাৎ $\frac{1}{x} \emptyset \alpha$ যখন $x \emptyset o$)। এক্ষেত্রে আমরা সর্বপ্রথমে নিম্নোক্ত যোজিত ফল বের করি ঃ

$$\int_a^1 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_a^1$$
$$= \ln 1 - \ln |a|$$
$$= -\ln a \ [a>0]$$

এখন সীমা নেয়া হলে $(a\emptyset 0)$ পাওয়া যায় ঃ

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \underset{a\emptyset 0}{\text{Lim}} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \underset{a\emptyset 0}{\text{Lim}} (-1n\ a)$$

সমাকলনের কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ সূত্র (Some Important Rules of Integration)

১. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{x+1} + C$

২. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log x + C$

৩. $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C$ যেখানে $k =$ যে কোন স্থির রাশি।

৪. $\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k\log a} + C$ যেখানে a, k দুটি স্থির রাশি।

৫. $\int dx = \int 1 dx = x + C$

৬. $\int e^x dx = e^x + c$ যেখানে $k = 1$

৭. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ যেখানে $k = 1$

৮. $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$ যদি n □ -1

৯. $\int \frac{ax}{ax+b} = \frac{1}{a} \log(ax+b) + C$

১০. $\int a^{mx} dx = \frac{a^{mx}}{m\log_e a} + C$

১১. $\int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + C$

১২. $\int \log x \, dx = x\log x - x + C$

১৩. $\int xe^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + (x - \frac{1}{m}) + C$

সারাংশ ঃ যদি একটি অপেক্ষক $f(x)$ -এর অনির্দিষ্ট যোজিত ফল $F(x)$ এবং x-এর দুটি মান $x = b$ এবং $x = a$ হয় ; তাহলে x-এর মান a থেকে b তে পরিবর্তনের ফলে $F(x)$-এর মানের যে পরিবর্তন হয়, তাকে অর্থাৎ $F(b)-F(a)$ রাশিকে a ও b সীমার মধ্যে $f(x)$-এর সঠিক যোজিত ফল (Definite Integral) বলে। সুনির্দিষ্ট সমাকলনের কতকগুলো বৈশিষ্ট্য রয়েছে এবং এর বের করার পদ্ধতিও রয়েছে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৪

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। $\int_a^b f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করা হয়-

(ক) অনির্দিষ্ট যোজিত ফল (খ) সুনির্দিষ্ট যোজিত ফল

(গ) সঙ্গতিবিহীন যোজিত ফল (ঘ) কোনটিই নয়।

২। উচ্চ এবং নিম্ন সীমা একই রকম হলে সুনির্দিষ্ট সমাকলনের ফলাফল হয়-

(ক) ধনাত্মক (খ) ঋনাত্মক

(গ) এক (ঘ) শূন্য

পাঠ-১০.৫

অর্থনীতির বিভিন্ন ধারণায় সমাকলনের ব্যবহার

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সমকলনের স্থির রাশির অর্থনৈতিক তাৎপর্য সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- অর্থনীতিতে সমকলনের ব্যবহার সম্পর্কে জানতে পারবেন।

সমাকলনের স্থির রাশির অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা/তাৎপর্য (Economic Interpretation of the Constant of Integration)

অনির্দিষ্ট সমাকলনের বেলায় অপেক্ষকের যোজিত ফলের (Integral) সাথে একটি স্থির রাশি (সাধারণ C দ্বারা নির্দেশ করা হয়) যোগ করা হয়। কোন প্রান্তিক অপেক্ষকের যোজিত ফল নির্ণয় করলে আমরা একটি মোট ধারণা পাই। প্রান্তিক অপেক্ষকের নাম অনুযায়ী সাধারণত এর নামকরণ হতে পারে। যেমন পণ্যের প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষকের সমাকলন নিলে আমরা মোট ব্যয় অপেক্ষক পাই। সমাকলনের স্থির রাশি সাধারণত অর্থনীতিতে একটি স্বয়ম্ভূত চলক/ উপাদান নির্দেশ করে। এর নাম সমাকলিত (Integrated) অপেক্ষকের উপর নির্ভর করে। যেমন মোট ব্যয় অপেক্ষকের ক্ষেত্রে স্থির রাশিটি মোট স্থির ব্যয় (Total fixed cost) নির্দেশ করে। প্রান্তিক ভোগ অপেক্ষক এবং প্রান্তিক সঞ্চয় অপেক্ষক এর সমাকলন নিলে মোট ভোগ অপেক্ষক এবং স্বয়ম্ভূত সঞ্চয় নির্দেশ করে। সমাকলনের স্থির রাশির মানের প্রাথমিক শর্ত (Initial Condition) অথবা আবদ্ধ শর্তের (Boundary Condition) উপর নির্ভর করে। তাই স্থির রাশির মান ধনাত্মক, ঋনাত্মক, না শূন্য হবে তা মূলতঃ নির্ভর করে প্রাথমিক অথবা আবদ্ধ শর্তের প্রকৃতির উপর। মনে করি কোন দেশে প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা $MPC = C'(Y) = 0.5$ এবং মোট আয় $Y = 100$ হলে মোট ভোগ ব্যয় $C(Y) = 200$ হয়, তবে মোট ভোগ অপেক্ষক সমাকলনের সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব ঃ

$$C(Y) = \int C'(Y)\, dy$$
$$= \int 0.5\, dy$$
$$= 0.5y + C$$ যেখানে C = সমাকলনের স্থির রাশি।

এক্ষেত্রে C হচ্ছে স্বয়ম্ভূত ভোগ ব্যয়। এর মান প্রাথমিক শর্ত $Y = 100$ হলে $C(Y) = 200$ প্রয়োগ করলে পাওয়া যাবে ঃ

$200 = 0.5(100)+C$

বা $C = 150$

$\therefore C(Y) = 0.5Y + 150$

আবার ধরি পণ্যের প্রান্তিক ব্যয় $MC = 2ax+b$ এখানে x =পণ্যের উৎপাদন হলে মোট ব্যয়

$$TC = \int MC\, dx$$
$$= \int (2ax+b)dx$$

$= ax^2+bx+c$

এক্ষেত্রে সমাকলনের স্থির রাশি C পণ্যের স্থির ব্যয় নির্দেশ করে। কারণ x=0 হলে TC=C হয়। উৎপাদন শূন্য হলেও যে ব্যয় উৎপাদককে বহন করতে হয় তাকে স্থির ব্যয় বলে। তাই এক্ষেত্রে C হচ্ছে স্থির ব্যয়। এভাবে সমাকলনের স্থির রাশি বেশিরভাগ ক্ষেত্রে অর্থনীতিতে স্বয়ম্ভূত চলক/রাশি (Autonomous Variable) নির্দেশ করে।

প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষক থেকে মোট ব্যয় অপেক্ষক বাহিরকরণ (Finding Total Cost from Marginal Cost):
অর্থনীতিতে সময়ভেদে মোট ব্যয়/খরচ অপেক্ষক দুই ধরনের হয় ঃ

(a) স্বল্পমেয়াদী খরচ/ব্যয় অপেক্ষক (Shortrun Total Cost)

$TC = g(Q) + A = TVC + TFC$

যেখানে TC = মোট ব্যয়/খরচ

g (Q) = মোট পরিবর্তনশীল ব্যয় (TVC) এবং

A = মোট স্থির ব্যয় (TFC)

(b) দীর্ঘমেয়াদী খরচ/ব্যয় অপেক্ষক (Longrun Total Cost Function)

এক্ষেত্রে কোন স্থির খরচ/ব্যয় থাকে না। কারণ দীর্ঘমেয়াদে সব উপকরণ পরিবর্তনশীল বলে মোট খরচ শুধু পরিবর্তনশীল হয়।

TC = f(Q) যেখানে TC = মোট ব্যয়/খরচ এবং Q = উৎপাদন।

স্বল্প মেয়াদে Q=0 হলে ও TC=A=TFC হয়। দীর্ঘমেয়াদে Q = 0 হলে TC-0 হয়।

পণ্যের প্রান্তিক ব্যয়/খরচ অপেক্ষক থেকে মোট ব্যয়/খরচ অপেক্ষক সমাকলনের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ১ ঃ কোন ব্যবসা প্রতিষ্ঠানের প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষক $f'(q) = 3q^2-4q+5$ মোট ব্যয় অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি C = f(q) = মোট ব্যয়

$$C = \int(3q^2-4q+5)dq$$
$$= 3\frac{q^{2+1}}{2+1} - 4\frac{q^{1+1}}{1+1} + 5q + C$$
$$= q^3 - 2q^2 + 5q + C$$

এক্ষেত্রে C মোট স্থির ব্যয় নির্দেশ করে কেননা q = 0 হলে মোট ব্যয় C=C হবে।

উদাহরণ ঃ ২ কোন পন্যের প্রান্তিক ব্যয় যখন $MC = 12C^{0.5Q}$ তখন মোট স্থির ব্যয় TFC = 36। মোট ব্যয় নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ মনে করি TC = f(Q) হচ্ছে Q পণ্যের মোট ব্যয় অপেক্ষক। এখন TC নির্ণয়ের জন্য MC এর সমাকলন নেই ঃ

$$TC = \int 12e^{0.5Q}dQ$$
$$= 12.\frac{1}{0.5} e^{0.5Q} + C$$
$$= 24e^{0.5a} + C$$

উৎপাদান না করলেও স্বল্পমেয়াদে কোন ফার্মকে পণ্যের স্থির ব্যয় বহন করতে হয়। সুতরাং প্রশ্নানুসারে বলা যায় Q=O হলে TC = TFC হবে। এখন TC = 36 বসলে পাই ঃ

$$36 = 24e^{0.5(0)}+C$$

বা $36 = 24e^{0} + C$

বা $36 = 24(1)+C$

$C = 12$ [যেহেতু $e^{0} = 1$]

$\therefore TC = 24e^{0.5Q}+12$, এটাই নির্ণেয় মোট ব্যয় অপেক্ষক।

উদাহরণ ঃ ৩ একটি ফার্মের $MC = 45q^2 - 4q + 20$ এবং স্থির ব্যয় 100 টাকা হলে TC, AC এবং AVC নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে,

$MC = 45q^2 - 4q + 20$

সুতরাং $TC = \int (45q^2 - 4q + 20)\, dq$

$= 15q^3 - 2q^2 + 20q + C$

$= 15q^3 - 2q^2 + 20q + 100$ [যেহেতু স্থির ব্যয় 100 টাকা]

অতএব, $AC = \frac{TC}{q} = \frac{15q^3 - 2q^2 + 20q + 100}{q}$

$= 15q^2 - 2q + 20 + \frac{100}{q}$

এবং $AVC = 15q^2 - 2q + 20$

প্রান্তিক ও মোট আয় অপেক্ষক (Marginal and Total Revenue Function) ঃ

একটি দ্রব্যের প্রান্তিক আয় অপেক্ষক, $MR = 3-2x-x^2$ হলে মোট আয় অপেক্ষক ও দাম (p) অপেক্ষক এবং উক্ত দ্রব্যের চাহিদা অপেক্ষক (Demand function) নির্ণয় করতে হবে।

দেওয়া আছে, প্রান্তিক আয় অপেক্ষক, $MR = 3-2x-x^2$

মোট আয় অপেক্ষক $TR = \int(MR)dx$

অর্থাৎ $TR = \int(3-2x-x^2)dx$

$= 3\int dx - 2\int x dx - \int x^2 dx$

$= 3x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$

$= 3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$..........(i)

এখানে C = ধ্রুবক,

আমরা জানি, উৎপাদনের পরিমাণ শূণ্য ($x = 0$) হলে মোট আয়ও শূণ্য হবে অর্থাৎ $TR = 0$ হবে। সুতরাং (i) সমীকরণে $x = 0$ বসালে পাই, $C = 0$

$\therefore TR = 3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3$ এটাই প্রকৃত অর্থে মোট আয় অপেক্ষক হিসাবে বিবেচিত।

আবার, দাম $P = \frac{TR}{x}$

এখানে R = আয়

x = উৎপাদন

$$\therefore p = \frac{3x - x^2 - \frac{1}{3x^3}}{x}$$

$$p = \frac{3x}{x} - \frac{x^2}{x} - \frac{\frac{1}{3}x^3}{x}$$

$p = 3 - x - \frac{1}{3} x^2$, এটা দাম বা চাহিদা অপেক্ষক হিসাবে বিবেচিত।

প্রান্তিক আয়, প্রান্তিক উৎপাদন ব্যয় ও মুনাফা ঃ

উদাহরণ-১ ঃ একটি উৎপাদন প্রতিষ্ঠানের প্রান্তিক আয় $MR=10x - x^2$ এবং প্রান্তিক উৎপাদান ব্যয় $MC=10 - 2x + x^2$ যেখানে x হলো উৎপাদনের পরিমাণ। কোম্পানির উৎপাদনের পরিমাণ কত হলে মুনাফার পরিমাণ সর্বোচ্চ হবে এবং ঐ সর্বোচ্চ মুনাফার পরিমাণ কত?

সমাধান ঃ দেয়া আছে, প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষক $MC=10-2x+x^2$ এবং প্রান্তিক আয় অপেক্ষক, $MR=10x-x^2$

আমরা জানি, মুনাফা, P = TR-TC

যেখানে P = মুনাফা

TR = Total Revenue বা মোট আয় এবং

TC = Total Cost বা মোট ব্যয়।

$$\therefore \quad TR = \int(MR)\,dx$$
$$= \int (10x - x^2)\,dx$$
$$= \frac{10x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$$
$$= 5x^2 - \frac{x^3}{3} + C$$

এবং মোট ব্যয়, $TC = \int(MC)dx$

$$= \int(10-2x+x^2)\,dx$$
$$= 10x - \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$
$$= 10x - x^2 + \frac{x^3}{3} + C$$

মুনাফার সূত্রানুযায়ী, P=TR-TC

$$\therefore P = 5x^2 - \frac{x^3}{3} - 10x + x^2 - \frac{x^3}{3}$$
$$= 6x^2 - \frac{2x^3}{3} - 10x$$

$$\frac{d}{dx}(p) = \frac{d}{dx}(6x^2 - \frac{2x^3}{3} - 10)$$
$$= 12x - \frac{2}{3} \infty 3x^2 - 10$$
$$= 12x - 2x^2 - 10$$

সর্বোচ্চ মুনাফার শর্তানুসারে, $\frac{d}{dx}(p) = 0$

বা, $12x - 2x^2 - 10 = 0$

বা, $2x^2 - 12x + 10 = 0$

বা, $2x^2 - 10x - 2x + 10 = 0$

বা, $2x(x-5) - 2(x-5) = 0$

বা, $(x-5)(2x-2) = 0$

এখন x = 5 ; আবার 2x = 2

বা, x = 1

২য় অন্তরকলন করে,

$$\frac{d^2}{dx^2}(p) = \frac{d}{dx}(12x\text{-}2x^2\text{-}10)$$
$$= 12 - 4x$$
$\therefore$ x = 1 হলে 12 - 4 X (1) = 12 - 4 = 8

$\therefore$ x = 8>0

আবার, x = 5 হলে,

12 - 4 X 5 = 12 -20 = - 8

x = -8 < 0

সুতরাং উৎপাদনের পরিমান x = 5 একক হলে মুনাফা সর্বোচ্চ হবে।

ভোগ, সঞ্চয় অপেক্ষক ও গুণিতক ঃ

উদাহরণ ১ ঃ Y = 10,000 টাকা হলে C = 1000+0.8Y ভোগ অপেক্ষক হতে MPC, APC, সঞ্চয় অপেক্ষক, MPS এবং APS নির্ণয় করতে হবে।

সামধান ঃ C = 1000 + 0.8Y

$$\therefore \text{MPC} = \frac{dC}{dY} = 0.80$$

Y= 10,000 হলে

C= 1000 + 0.8 (10,000)

= 1000 + 8000 = 9000

$$\therefore \text{APC} = \frac{C}{Y} = \frac{9000}{10000} = 0.9$$

আমরা জানি,

Y = C + S

বা, S = Y - C

বা, S = Y - (1000 + 0.8Y)

$\therefore$ S = .2Y - 1000

$$\text{MPS} = \frac{dS}{dY} = \frac{d}{dY}(\cdot 2Y - 1000)$$
$$= \frac{d}{dY}(.2Y)$$

$\therefore$ MPS = ·2

Y = 10,000 হলে S = 0.2(10,000)- 1000

= 2000 - 1000

= 1000

$$\text{APS} = \frac{S}{Y} = \frac{1000}{10000} = .10$$

$\therefore$ APS = .10

উদাহরণ ২ ঃ ভোগ অপেক্ষক C = 100 + 0.8Y হলে গুণিতক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ C = 100 + 0.8Y

বা, $\text{MPC} = \frac{d}{dY}(100+0.8Y)$

বা, MPC = 0.8

গুণিতক (Multiplier) $= \frac{1}{1\text{-MPC}}$

$$= \frac{1}{1-0.80}$$
$$= \frac{1}{.20}$$
$$= 5$$

অর্থাৎ গুণিতক 1 টাকা বিনিয়োগের ফলে 5 টাকা অতিরিক্ত আয় হবে।

ভোক্তার উদ্বৃত্ত (Consumer's Surplus)

কোন ভোক্তা নির্দিষ্ট দ্রব্যের জন্য যে পরিমাণ অর্থ পরিশোধ করতে প্রস্তত থাকে এবং যে পরিমাণ তাকে প্রকৃতপক্ষে প্রদান করতে হয় তার পার্থক্যই হলো ভোক্তার উদ্বৃত্ত (Consumer's Surplus)। মনে করি, একজন ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষক, $P = 500-10q$ দেয়া আছে। ফলে দ্রব্যটির দাম যখন 450 টাকা তখন সে 5 একক, দাম 400 টাকা হলে 10 একক, 350 টাকা হলে 20 একক দ্রব্য ক্রয় করবে। কিন্তু বাজারে দ্রব্যটির দাম 200 টাকা হওয়ায় সে 30 একক ক্রয় করল। ফলে তার খরচ হল 200∞30 = 6000 টাকা যা ABDC আয়তক্ষেত্রের সমান (চিত্র-১০.৫.১)। কিন্তু সে এই 30 একক পণ্যের জন্য প্রকৃতপক্ষে STDC ক্ষেত্রফলের সমান মূল্য দিতে প্রস্তত ছিল। কিন্তু এই STDC ক্ষেত্রটি আয়তাকার না হওয়ায় p∞q হিসেবে এর ক্ষেত্রফল পরিমাপ করা সম্ভব নয়। সুতরাং 30 একক পণ্যের জন্য সে প্রকৃতপক্ষে কত টাকা দিতে প্রস্তুত ছিল তা নির্ণয় করতে হলে আমাদের নির্দিষ্ট সমাকলনের আশ্রয় নিতে হবে এবং STDC ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে।

$$\int_0^{30} (500 - 10q)\ dq = [500q - 5q^2]_0^{30}$$
$$= [\{500(30) - 500\ (0)\}\ -5\{(30)^2 - (0)^2]$$
$$= [\{15000 -0\} - \{4500 - 0\}]$$
$$= 15000 - 4500$$
$$= 10,500$$

চিত্র-১০.৫.১ ঃ ভোক্তার উদ্বৃত্ত

এখানে ভোক্তা 30 একক দ্রব্যের জন্য মোট 10,500 টাকা ব্যয় করতে প্রস্তুত কিন্তু তাকে প্রদান করতে হলে মাত্র 6,000 টাকা। সুতরাং ভোক্তার উদ্বৃত্ত (Consumer's Surplus) হবে 10,500 - 6,000 = 4,500 টাকা।

উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত (Producer's Surplus) ঃ

মুক্ত বাজার অবস্থায় অনেক সময় ভোগকারীর প্রদেয় দামের (P_0) চেয়েও কমদামে উৎপাদনকারী দ্রব্য বিক্রয় করতে আগ্রহশীল থাকে। কমদামে দ্রব্য বিক্রয় করার ইচ্ছা থাকলেও প্রকৃতপক্ষে তিনি ভোগকারীর নির্ধারিত (অধিক) দামে বিক্রয় করে। এর ফলে উৎপাদনকারী প্রকৃতপক্ষে যে দামে দ্রব্য বিক্রি করে এবং যে দামে দ্রব্য বিক্রি করতে ইচ্ছুক তার পার্থক্যই উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত বলে বিবেচিত হয়। নিচে চিত্র ও সূত্র উল্লেখ করা হল ঃ- উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত (Producer's Surplus) = {OAEB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল }-{0 থেকে X_0 পর্যন্ত সরবরাহ রেখার নিচের এলাকার ক্ষেত্রফল}

$$= P_0 X_0 - \int_0^x S(x)dx$$

চিত্র-১০.৫.২ ঃ উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত

ধরা যাক, একটি যোগান অপেক্ষক $P=(q+3)^2$ দেয়া হয়েছে। P = 81 এবং q=6 হলে উৎপাদকের উদ্বৃত্ত কত হবে?

উৎপাদক 6 একক প্রতিটি 81 টাকা দরে বিক্রয় করে মোট আয় পাবে, = 81∞6 = 486 টাকা। কিন্তু উৎপাদক q=6 একক দ্রব্য বিক্রয় করতে প্রস্তুত ছিল ঃ $\int_0^6 (q+3)^2 dq$ টাকায়

অতএব, উৎপাদকের উদ্বৃত্ত :

$$486 - \int_0^6 (q+3)\ 2dq$$

$$= 486 - [\frac{1}{3}(q+3)\ 2]^6$$

$$= 486 - [\frac{1}{3}(6+3)^2 - \frac{1}{3}(0+3)^2]$$

$$= 486 - [\frac{1}{3}\ .\ 81 - \frac{1}{3}.9]$$

$$= 486 - [27 - 3]$$

$$= 486 - 24 = 462$$

∴ উৎপাদকের উদ্বৃত্ত 426 টাকা।

***সারাংশঃ** অনির্দিষ্ট সমাকলনের ক্ষেত্রে অপেক্ষকের যোজিত ফলের সাথে একটি স্থির রাশি যোগ করা হয়। সমাকলনের স্থির রাশি বেশিরভাগ ক্ষেত্রে অর্থনীতিতে স্বয়ম্ভূত চলক/রাশি নির্দেশ করে। অর্থনীতির বিভিন্ন ধারণা ব্যাখ্যার জন্য সমাকলনের সাহায্য নিতে হয়। যেমন- প্রান্তিক ধারণা থেকে মোট ধারণা লাভ, ভোক্তার উদ্বৃত্ত, উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত, ইত্যাদি।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৫

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। C = 100 + 0.4y হলে MPC সমান হবে-

(ক) 0.4 (খ) 1000

(গ) 2.5 (ঘ) .001

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

২। কোন মোট অপেক্ষকের যোজিত ফল নির্ণয় করলে আমরা একটি প্রান্তিক ধারণা পাই।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন– ইউনিট ১০

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। সমাকলনের সংজ্ঞা দিন।

২। সমাকলনের অর্থনৈতিক ব্যবহার কি কি?

৩। অনির্দিষ্ট সমাকলন কি?

৪। সুনির্দিষ্ট সমাকলন কি?

৫। সুনির্দিষ্ট ও অনির্দিষ্ট সমাকলনের মধ্যে পার্থক্য কি কি?

৬। সমাকলন বলতে কি বোঝায়? পার্থক্যসহ অনির্দিষ্ট ও সুনির্দিষ্ট সমাকলন আলোচনা করুন।

৭। সমাকলনের ঘাতের নিয়ম কি ?

৮। সমাকলনের ভাগের নিয়ম কি ?

৯। সমাকলিত মান নির্ণয় করুন ঃ

(i) $\int\sqrt{x}\ dx$ (ii) $\int(3x^2 - 6x)\ dx$

(iii) $\int\frac{5x}{(x - 1)}\ dx$ (iv) $\int\frac{1}{x^2(1 + x)}\ dx$

(v) $\int\frac{2x^3+1}{x^4 + 2x}\ dx$ (vi) $\int(2x + 3)^5\ dx$

(vii) $\int_1^2 2x^3 dx$ (viii) $\int_0^2 (4x^2 - 8x)\ dx$

(ix) $\int_0^2 \frac{1}{16-x^2}$ (x) $\int_0^1 e^x dx$

১০। কোন উৎপাদন প্রতিষ্ঠানের প্রান্তিক ব্যয় অপেক্ষক (Marginal Cost Function) $MC=39-22q+3q^2$ এবং FC=25 টাকা হলে মোট ব্যয় অপেক্ষকটি (Total Cost Function) নির্ণয় করুন।

১১। একটি দ্রব্যের প্রান্তিক আয় (Marginal Revenue) $MR = 16 - x^2$ দেওয়া আছে। যেখানে, x= উৎপাদনের পরিমাণ

(ক) সর্বোচ্চ মোট আয়ের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

(খ) মোট ও গড় আয় অপেক্ষক (TR ও AR) এবং চাহিদা অপেক্ষক (P) নির্ণয় করুন।

১২. একজন ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষক P =1600 - q2। যদি সে 20 একক দ্রব্য ক্রয় করে তবে ভোক্তার উদ্বৃত্ত কত হবে?

১৩. একটি যোগান অপেক্ষক $P=(q+3)^2$ দেওয়া আছে। P=81 এবং q=6 হলে উৎপাদকের উদ্বৃত্ত কত হবে?

১৪. প্রান্তিক আয় অপেক্ষক $MR=\int(4-x^2)dx$ হলে (ক) মোট আয় এবং গড় আয় অপেক্ষক এবং (খ) সর্বোচ্চ মোট আয় নির্ণয় করুন।

১৫. কোন ব্যক্তির প্রান্তিক সঞ্চয় প্রবনতা, $MPS = 0.2 - 0.1Y^{-\frac{1}{2}}$ যেখানে Y= আয়।

যদি Y= 81 হলে মোট সঞ্চয় শূন্য হয় তবে মোট সঞ্চয় S(Y) এবং ভোগ C(Y) অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

১৬. প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা, MPC= 1.5 + 0.2Y-2 , যেখানে Y=আয় তবে নির্ণয় করুণ
(ক) C(10)= 4.8 অবস্থায় মোট ভোগ (C(Y)) এবং (খ) সঞ্চয় অপেক্ষক।

উত্তরমালা ইউনিট-১০

পাঠ-১০.১ ঃ	(১) ক	(২) খ	(৩) সত্য
পাঠ-১০.২ ঃ	(১) গ	(২) ঘ	
পাঠ-১০.৩ ঃ	(১) সত্য	(২) সত্য	
পাঠ-১০.৪ ঃ	(১) খ	(২) ঘ	
পাঠ-১০.৫ ঃ	(১) ক	(২) মিথ্যা	

তথ্যসূত্র

E.T.Dowling, Mathematical Economics, MC-Graw Hill, 1992.

A.C. Chiang, Fundamental Methods of Mathematical Economics, MC-Graw Hill, 1974.

মনোরঞ্জন দে, গাণিতিক অর্থনীতি, ২০০০।

দীপক কুমার বিশ্বাস ও মীর সাজ্জাদ আলী, ব্যবসায় গণিত, ২০০৩।

এম এস বাশার, গাণিতিক অর্থনীতি।