ইউনিট ৯

অন্তরক, অন্তরকলণ ও প্রভেদকঃ২
(Derivative, Differentiation and Differential ঃ 2)

স্বাধীন ও নির্ভরশীল চলকের মধ্যবর্তী সম্পর্ককে অপেক্ষকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের মানের পরিবর্তনে নির্ভরশীল চলকের মান পরিবর্তনের হার নির্ণয়ে ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস ব্যবহার করা হয়। অর্থনীতিতে ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাসের ব্যপক ব্যবহার লক্ষ্য করা যায়। যেমন আড়াআড়ি ও আয় স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয়ে, নিরপেক্ষ ও সম উৎপাদন রেখার ঢাল নির্ণয়ে, বাধা বা শর্তযুক্ত সর্বোচ্চকরণ ও সর্বনিন্ককরণ সমস্যার সমাধান ইত্যাদি ক্ষেত্রে ডিফারেন্সিয়াল ক্যালকুলাস ব্যবহৃত হয়।
এই ইউনিটে আংশিক অন্তরকলণ, জ্যাকবিয়ান নির্ণায়ক, মোট প্রভেদক ও উচ্চমাত্রার প্রভেদক এবং মোট অন্তরক-পাঠগুলো আলোচনা করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

পাঠ-৯.১

আংশিক অন্তরকলণ
(Partial Differentiation)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- আংশিক অন্তরকলণের সংজ্ঞা সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- আংশিক অন্তরকলণের অর্থনৈতিক ব্যবহার সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- আংশিক অন্তরকলণের সাহায্যে সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।
- সাধারন ও আংশিক অন্তরকলণের মধ্যে পার্থক্য কি জানতে পারবেন।

আংশিক অন্তরকলণ (Partial Differentiation) ঃ

দুই বা ততোধিক স্বাধীন চলকের মধ্যে একটিকে পরিবর্তনশীল এবং অপরগুলোকে স্থিতিশীল ধরে অন্তরকলণ করলে অধীন চলকের যতটুকু পরিবর্তন হয় তার হারকে আংশিক অন্তরকলণ বলে। আংশিক অন্তরকলণের সময় অন্তরকলণের সব নিয়ম ঠিক থাকে কিন্তু এখানে যে চলকের প্রেক্ষিতে অন্তরকলণ করা হয় সেটা ব্যতীত অন্যান্য সবগুলো স্বাধীন চলক স্থির বা ধ্রুবক হিসাবে বিবেচিত হয়। আংশিক অন্তরকলণের সময় "d" চিহ্নের পরিবর্তে "δ" (ডেলটা) চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। যদি আমরা কোন অপেক্ষকের সমাধানে "δ" চিহ্ন দেখতে পাই তাহলে বুঝতে হবে অপেক্ষকটিকে আংশিক অন্তরকলণ করা হয়েছে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে এই ধারনাটিকে বোঝানোর চেষ্টা করা হলো।

উদাহরণঃ $Z= f(x,y)$

$$\frac{\delta z}{\delta x} = f'(x) = Z_x$$

এবং $\dfrac{\delta z}{\delta y} = f'(y) = Z_y$

অনেকক্ষেত্রে যে চলকের সাপেক্ষে আংশিক অন্তরকলণ করা হয়, তাকে অপেক্ষকের প্রতীকের সংগে সাবস্ক্রিপ্ট যোগে প্রকাশ করা হয়। যেমন Zx, Zy ইত্যাদি।

উপরের উদাহরণটি আমরা মনোযোগ সহকারে লক্ষ্য করি, এখানে $z = f(x,y)$ একটি অপেক্ষক। অপেক্ষকটি। (x,y) দুটি স্বাধীন চলক, z অধীন চলক এবং f অপেক্ষক প্রকাশক চিহ্ন।

যখন z-কে x-এর প্রেক্ষিতে অন্তরকলণ হয়েছে।

$$\frac{\delta z}{\delta y} = f'(x) = Zx$$

অনুরূপে y-এর প্রেক্ষিতে z কে যখন আংশিক অন্তরকলণ করা হয়েছে তখন x-কে স্থির বা ধ্রুবক বিবেচনা করা হয়েছে। ফলে y-এর প্রেক্ষিতে z এর আংশিক অন্তরকলণ হয়েছে $\dfrac{\delta z}{\delta y} = f'(y) = Zy$

আংশিক অন্তরক এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ঃ

আংশিক অন্তরকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দেয়ার জন্য আমরা একটি উৎপাদন অপেক্ষক বিবেচনা করি। ধরি,

$Q = f(L,K)$

যেখানে, Q = উৎপাদন

L = শ্রম উপাদান

K = মূলধন উপাদান

এক্ষেত্রে, $f(L) = \frac{\urcorner Q}{\urcorner L}$ এর পরিমানে সূক্ষাতিসূক্ষ পরিবর্তনের উৎপাদনের পরিবর্তনের হার বোঝায় যখন K-এর মান স্থির।

$f(K) = \frac{\urcorner Q}{\urcorner K}$ দ্বারা মূলধনের সূক্ষাতিসূক্ষ পরিবর্তনে উৎপাদনের পরিবর্তনের হার বোঝায়, যখন L-এর মান স্থির, অর্থাৎ $f(L)$ দ্বারা MPP_L অপেক্ষক এবং $f(k)$ দ্বারা MPP_k অপেক্ষক বুঝায়।

জ্যামিতিক উপায়ে উৎপাদন অপেক্ষক $Q = f(L,K)$-এর উৎপাদন (Production surface) তিন অক্ষবিশিষ্ট নিম্নের চিত্রে উপস্থাপন করা হলো ঃ

চিত্র-৯.১.১ ঃ তিন অক্ষ বিশিষ্ট উৎপাদন অপেক্ষক

চিত্রের লম্ব অক্ষে উৎপাদন (Q) নির্দেশ করা হলো যাতে সমতলে (L,K)-এর জোড়া মান নির্দেশিত যে কোন বিন্দুর প্রেক্ষিতে চিত্রতলের (Surface) উচ্চতা দ্বারা উৎপাদনের পরিমাণ (Q) নির্দেশ করে। উল্লেখ্য, অপেক্ষকের এলাকা সমতলের অঋনাত্মক চতুর্থাংশের যে কোন অংশে নির্দেশিত হতে পারে। চিত্রের OK_oBL_o আয়তাকার ক্ষেত্রটি দ্বারা নির্দেশ করা হলো।

অনুসিদ্ধান্ত (ইয়ং এর সূত্রের প্রয়োগ) ঃ

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x_2 \delta x_3} = \frac{\delta^2 y}{\delta x_3 \delta x_2} = f_{23} = f_{32}$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2} = \frac{\delta^2 y}{\delta x_2 \delta x_1} = f_{12} = f_{21} \text{ ইত্যাদি}$$

উদাহরণ ১ ঃ $y = x^2+4xz+z^2$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = fx = \frac{\delta(x^2)}{\delta x} + \frac{\delta(4xz)}{\delta x} + \frac{\delta(z^2)}{\delta x}$$

$= 2x + 4z + O$ [যেহেতু z কে স্থির ধরা হয়েছে]

$= 2x + 4z$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = fxx = \frac{\delta}{\delta x}(2x+4z) = \frac{\delta(2x)}{\delta x} + \frac{\delta(4z)}{\delta x} = 2$$

$$\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = \frac{\delta^2 y}{\delta z \delta x} = fzx = \frac{\delta}{\delta z}(2x+4z) = 4$$

পক্ষান্তরে- $\frac{\delta y}{\delta z} = fz = \frac{\delta(x^2)}{\delta z} + \frac{\delta(4xz)}{\delta z} + \frac{\delta(z^2)}{\delta z}$

$= 4x+2z$ [$\frac{\delta(x^2)}{\delta z} = 0$, যেহেতু x কে স্থির ধরা হয়েছে]

$$\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta y}{\delta z}\right) = \frac{\delta^2 y}{\delta z^2} = f_{zz} = \frac{\delta}{\delta z}(4x+2z) = 2$$

$$\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta y}{\delta z}\right) = \frac{\delta^2 y}{\delta x \delta z} = fxz = \frac{\delta}{\delta x}(4x+2z) = 4$$

সুতরাং দেখা যায় ঃ $fxz = fzx = 4$

সাধারন অন্তরকলণ এবং আংশিক অন্তরকলণের মধ্যে পার্থক্য (Distinction between Simple Differentiation and Partial Differentiation)

প্রথমত ঃ সাধারণত অন্তরকলণের বেলায় অপেক্ষকের দুটি চলকের মধ্যে একটি স্বাধীন এবং অন্যটি অধীন ধরা হয়। স্বাধীন চলকের ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র পরিবর্তন হলে অধীন চলকের মধ্যে যে গড় পরিবর্তন হয় তাই অন্তরক দ্বারা প্রকাশ পায়। অন্যদিকে স্বাধীন চলকের সংখ্যা কোন অপেক্ষকে একাধিক থাকলে আংশিক অন্তরকের প্রশ্ন উঠে। এক্ষেত্রে অপরাপর স্বাধীন চলকের মান প্রদত্ত/স্থির ধরে একটি মাত্র স্বাধীন চলকের পরিবর্তন হেতু অধীন চলকের পরিবর্তন বিবেচনা করা হয়।

$z=f(x,y)$ অপেক্ষকটি বিবেচনা করি। এখন $x = x_o$ ধরলেই

$\delta z/\delta y = fy$ পাওয়া যাবে। আবার $y=y_o$ ধরে $\delta z/\delta x = fx$ নির্ণয় করা সম্ভব। অথচ $y = g(x)$ অপেক্ষকের বেলায় আমরা সাধারণ অন্তরক $dy/dx = g'(x)$ বের করে থাকি।

দ্বিতীয়ত ঃ এই দুই ধরনের অন্তরকলণের প্রতীকও ভিন্ন হয়। অপেক্ষক $y=f(x)$ হলে সাধারণ অন্তরকলণের প্রতীক $f'(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অথচ $y = f(x,z)$ অপেক্ষকের বেলায় $\delta y/\delta x = fx$ এবং $\delta y/\delta z = fz$ ইত্যাদি প্রতীক ব্যবহার হয়।

তৃতীয়ত ঃ সাধারণ অন্তরকলণের জ্যামিতিক ব্যাখ্যার জন্য দুই অক্ষ বিশিষ্ট লেখচিত্র হলেই চলে। আংশিক অন্তরকলণের বেলায় কমপক্ষে তিন অক্ষ বিশিষ্ট লেখচিত্র দরকার হয়। তিন এর অধিক চলক বিশিষ্ট অপেক্ষক থাকলে আংশিক অন্তরকলণ ব্যাখ্যার ক্ষেত্রে জ্যামিতিক পদ্ধতি প্রয়োগ করা অসম্ভব।

আংশিক অন্তরকলণের অর্থনৈতিক ব্যবহার ঃ

অর্থনীতিতে যে সমস্ত অপেক্ষক ব্যবহার করা হয় তার বেশির ভাগ অপেক্ষকেই চলকের সংখ্যা দুই বা ততোধিক হয়ে থাকে। যেমন-উৎপাদনতত্ত্ব, নিরপেক্ষ রেখা বিশ্লেষন ইত্যাদি। তাই অর্থনীতিতে আংশিক অন্তরকলণের গুরুত্ব ও ব্যবহার অত্যধিক। নিম্নে অর্থনীতিতে আংশিক অন্তরকলণের ব্যবহার আলোচনা করা হলোঃ

১. শ্রমের প্রান্তিক বস্তুগত উৎপাদনশীলতা (MPP_L) এবং মূলধনের প্রান্তিক বস্তুগত উৎপদনশীলতা (MPP_K) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে অন্তরকলণ ব্যবহৃত হয়।

২. দুটি দ্রব্য ভোগের ক্ষেত্রে ভোগকারীর প্রান্তিক উপযোগ নির্ণয়ের জন্য আংশিক অন্তরকলণের ব্যবহার হয়।

৩. বাজার ভারসাম্যের উপর অবধ্রুবক যা পরামিতিসমূহের পরিবর্তনের প্রভাব আলোচনা করার জন্য আংশিক অন্তরকলণ ব্যবহৃত হয়।

৪. বিভিন্ন দ্রব্যের ভোগের ক্ষেত্রে আড়াআড়ি স্থিতিস্থাপকতা, আয় স্থিতিস্থাপকতা ইত্যাদি বের করার জন্য আংশিক অন্তরকলণ ব্যবহৃত হয়।

উপরের ক্ষেত্রগুলো ছাড়া আরও বিভিন্ন ক্ষেত্রে আংশিক অন্তরকলণের ব্যবহার রয়েছে।

উদাহরণ ঃ ১

উৎপাদন অপেক্ষক $Q = f(L, K) = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ $(0<\alpha< 1)$

সেখানে $Q =$ উৎপাদন $L =$ শ্রম $K =$ মূলধন।

এক্ষেত্রে শ্রমের প্রান্তিক উৎপাদন (Q_L বা MP_L)

এবং মূলধনের প্রান্তিক উৎপাদন (Q_k অথবা MP_k) হবে নিম্নরূপঃ

$$Q_L = f_L = \partial Q/\partial L = \alpha AL^{\alpha-1}K^{1-\alpha}$$

$$Q_k = f_k = \partial Q/\partial K = (1-\alpha)AL^{\alpha}K^{-\alpha}$$

অন্যদিকে দ্বিতীয় মাত্রার আংশিক অন্তরকলণ (Q_{LL} বা f_{LL} এবং Q_{kk}বা f_{kk}) শ্রম ও মূলধনের প্রান্তিক উৎপাদনের পরিবর্তনের হার নির্দেশ করেঃ

$$Q_{LL} = f_{LL} = \partial^2Q/\partial L^2 = (\alpha-1)\alpha AL^{\alpha-2}K^{1-\alpha}$$

$$Q_{kk} = f_{kk} = \partial^2Q/\partial K^2 = -\alpha(1-\alpha)AL^{\alpha}K^{-\alpha-1}$$

$$Q_{Lk} = Q_{kL} = f_{Lk} = f_{kL} = \alpha(1-\alpha)AL^{\alpha}K^{-\alpha}$$

উদাহরণ ঃ ২

উপযোগ অপেক্ষক ঃ $U = f(q_1,q_2) = q_1q_2$

$$U_1 = f_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = q_2,$$

$$U_{21} = f_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_1} = 1$$

$$U_2 = f_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = q_1,$$

$$U_{12} = f_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} = 1$$

ইয়ং এর নিয়ম (Young's rule) অনুসারে যেহেতু $f_{12} = f_{21} = 1$ তাই বলা যায় q_1 এবং q_2 পরস্পর পরিপূরক (Complementary) দ্রব্য।

উদাহরণ ঃ ৩

চাহিদা অপেক্ষক ঃ $q_1 = 150-2p_1^2 + 5p_2^3$ যেখানে $P_1 = 3$ এবং $P_2 = 4$। চাহিদার মূল্য স্থিতিস্থাপকতা (e_1) এবং আড়াআড়ি স্থিতিস্থাপকতা (e_2) নিম্নোক্তভাবে বের করা যাবে।

$$e_1 = \frac{\partial q_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{q_1}$$

$$= -4p_1 \cdot \frac{p_1}{150-2p_1^2+5p_2^3}$$

$$= \frac{-4p_1^2}{150-2p_1^2+5p_2^3}$$

$$= \frac{-4(3)^2}{150-2(3)^2+5(4)^3}$$

$$= \frac{-36}{150-18+320}$$

$$= \frac{-36}{452}$$

$= -0.08$ (প্রায়)

$$e_2 = \frac{\partial q_1}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{q_1}$$

$$= 15p_2^2 \cdot \frac{p_2}{150-2p_1^2+5p_2^3}$$

$$= \frac{15P_2^3}{150-2(3)^2+5(4)^3}$$

$$= \frac{960}{452}$$

$= 2.12$ (প্রায়)

উদাহরণ ঃ ৪

অপেক্ষক $z = f(x,y)$এর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের প্রয়োজনীয় এবং পর্যাপ্ত শর্ত আংশিক অন্তরকলণের সাহায্যে নির্দেশ করা সম্ভব:

সর্বোচ্চমানের শর্ত	**সর্বনিম্নমানের শর্ত**
প্রয়োজনীয় শর্ত :	প্রয়োজনীয় শর্ত :
$fx = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$	$fx = \frac{\partial z}{\partial x} = 0$
$fy = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	$fy = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
পর্যাপ্ত শর্ত ঃ	পর্যাপ্ত শর্ত ঃ
$fxx = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$	$fxx = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$
$fyy = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$	$fyy = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$
এবং	এবং
$(fxx\ fyy) > (fxy)^2$	$(fxx\ fyy) > (fxy)^2$

ধরা যাক, একটি খরচ অপেক্ষক $C = 5+\frac{48}{x} + 3x^2$, যেখানে x উৎপাদনের একক এবং C মোট খরচের পরিমাণ। এখন, সর্বনিম্ন খরচের পরিমাণ নির্ণয় করব।

এখানে, $C = 5+\frac{48}{x} + 3x^2$

$$\frac{dc}{dx} = 0-\frac{48}{x^2} + 6x$$

আমরা জানি, সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন বিন্দুতে, $\frac{dc}{dx} = 0$

$$\therefore -\frac{48}{x^2} + 6x = 0$$

বা, $\frac{-48+6x^3}{x^2} = 0$

বা, $6x^3 = 48$

বা, $x3 = 8$

$\therefore \ x = 2$

আবার, যখন $\frac{d^2c}{dx^2}$ = - ve তখন অপেক্ষকটি সর্বোচ্চ মান সম্পন্ন এবং $\frac{d^2c}{dx^2}$ = + ve হলে অপেক্ষকটি সর্বানম্ন মান সম্পন্ন হবে।

এখানে, $\frac{d^2c}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dc}{dx}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\frac{48}{x^2} + 6x\right)$$

$$= \frac{96}{x^3} + 6$$

যখন $x = 2$; তখন, $\frac{d^2c}{dx^2} = \frac{96}{(2)^3} + 6 = 18$

অর্থাৎ সর্বনিম্নকরণের শর্ত পালিত হয়েছে। অতএব বলতে পারি যখন $x = 2$ তখন অপেক্ষকটি সর্বনিু মান সম্পন্ন যা:-

$$C= 5 + \frac{48}{2} + 3(2)^2$$

$$= 5 + 24 + 12$$

$$= 41$$

$\therefore$ নির্ণেয় উত্তর ঃ 41 একক।

সারাংশ ঃ দুই বা ততোধিক স্বাধীন চলকের মধ্যে একটিকে পরিবর্তনশীল এবং অপরগুলোকে স্থিতিশীল ধরে অন্তরকলণ করলে অধীন চলকের যতটুকু পরিবর্তন হয় তার হারকে আংশিক অন্তরকলণ বলে। অর্থনীতিতে যে সব অপেক্ষক ব্যবহার করা হয় তার বেশীর ভাগ অপেক্ষকেই চলকের সংখ্যা দুই বা ততোধিক হয়ে থাকে, যেমন-উৎপাদন তত্ত্ব, নিরপেক্ষ রেখা বিশ্লেষণ, ইত্যাদি। তাই অর্থনীতিতে আংশিক অন্তরকলণের গুরুত্ব ও ব্যবহার অত্যধিক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। আংশিক অন্তরকলণের সময় যে চলকের প্রেক্ষিতে অন্তরকলণ করা হয়, সেটা ব্যাতীত অন্যান্য সবগুলো স্বাধীন চলক স্থির বা ধ্রুবক হিসাবে বিবেচিত হয়।

২। আংশিক অন্তরকলণের প্রকাশ d চিহ্ন দ্বারা করা হয়।

৩। আংশিক অন্তরকলণের জ্যামিতিক ব্যাখ্যার জন্য সর্বোচ্চ দুই অক্ষ বিশিষ্ট লেখচিত্র দরকার হয়।

পাঠ-৯.২

জ্যাকবিয়ান নির্ণায়ক
(Jacobian Determinant)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- জ্যাকবিয়ান নির্ণায়ক সম্পর্কে জানতে পারবেন।

জ্যাকবিয়ান নির্ণায়ক (Jacobian Determinant)

আংশিক অন্তরকলণের দ্বারা আরও বুঝতে পারা যায় যে সেখানে রৈখিক ও অরৈখিক অপেক্ষকের অস্তিত্ব f(x) অপেক্ষকের x চলকের উপর নির্ভর করছে কিনা। এটা মূলত জ্যাকবিয়ান নির্ণায়কের সাথে সম্পর্কিত। পূর্বে যার নাম ছিল জ্যাকবি।

নিম্নের দুটি অপেক্ষক বিবেচনা করি :

$$y_1 = 2x_1+3x_2$$

$$y_2 = 4x^2{}_1+12x_1x_2+9x_2{}^2$$

এখন যদি চলক চারটিকেই আংশিক অন্তরকলণ করি, তাহলে আমরা পাই

$$\frac{\vartheta y_1}{\vartheta x_1} = 2,$$

$$\frac{\vartheta y_1}{\vartheta x_2} = 3,$$

$$\frac{\vartheta y_2}{\vartheta x_1} = 8x_1+12x_2,$$

$$\frac{\vartheta y_2}{\vartheta x_2} = 12x_1+18x_2$$

আংশিক অন্তরকলণের মানগুলোকে অর্ডার অনুযায়ী স্কয়ার ম্যাট্রিক্স এ সাজালে যে ম্যাট্রিক্স-পাব তাকে বলা হয় জ্যাকবিয়ান ম্যাট্রিক্স এবং একে J দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এর মানগুলি বসালে যে ফল আসবে তাকে আমরা বলব জ্যাকবিয়ান নির্ণায়ক যাকে চিহ্নিত করা হয় |J|, দ্বারা ঃ

$$|J| + \begin{vmatrix} \frac{\vartheta y_1}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta y_1}{\vartheta x_2} \\ \frac{\vartheta y_2}{\vartheta x_1} & \frac{\vartheta y_2}{\vartheta x_2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ (8x_1+12x_2) & (12x_1+18x_2) \end{vmatrix}$$

জায়গা সংকুলানের জন্য মাঝে মাঝে জ্যাকবিয়ানকে এভাবেও প্রকাশ করা হয় ঃ

$$|J| + \left|\frac{\partial (y_1,y_2)}{\partial (x_1,x_2)}\right|$$

বিস্তারিতভাবে বলা যায়, এখন যদি n চলক বিশিষ্ট n সংখ্যক রৈখিক বা অরৈখিক অপেক্ষক থাকে তবে সহ-অপেক্ষকগুলোকে নিতে দেয়া হল ঃ

$$y_1 = f^1 (x_1,x_2............x_n)$$

$$y2 = f^2 (x_1,x_2,..........x_n)$$

....

$$yn = f^n (x_1, x_2.........x_n)$$

যেখানে f^n প্রকাশ করে n তম অপেক্ষক (অপেক্ষকটি কোন ক্রমেই n তম শক্তিতে উঠবে না), এখন আমরা মোট n^2 আংশিক অন্তরকলণ করতে পারি।

$$|J| = \left|\frac{\partial (y1,y2........yn)}{\partial (x1,x2..........xn)}\right| + \left|\begin{matrix} \frac{\partial y_1}{dx_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} \cdots\cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{matrix}\right|$$

জ্যাকবিয়ান n সেট এর অপেক্ষকের উপর পরীক্ষা করে নিত্রে সূত্রটি প্রদান করেন "যে কোন মান $x_1,x_2..........,x_n$ এর জন্য আলাদাভাবে জ্যাকবিয়ান |J| এর মান শূন্য হবে, যদি n অপেক্ষক f',........., (রৈখিক অথবা অরৈখিক) পরস্পর নির্ভরশীল হয়।"

উদাহরণ স্বরূপ বলা যায়,

$$|J|= \left|\begin{matrix} 2 & 3 \\ (8x_1+12x_2) & (12x_1+18x_2) \end{matrix}\right|$$

এখন জ্যাকবিয়ান এর মান হয় শূন্য; অর্থাৎ

$$|J|= (24x_1+36x_2)-(24x_1+36x_2)=0$$

ফলশ্রুতিতে, সূত্র মোতাবেক উল্লেখিত $y_1 = 2x_1+3x$, $y_2 = 4x^2{}_1 + 12x_1x_2+9x_2{}^2$ অপেক্ষক দুটি অবশ্যই পরস্পর নির্ভরশীল। আমরা প্রমাণ করতে পারি যে, y_2,y_1 এর বর্গের সমান। অতএব এরা অপেক্ষকভাবে নির্ভরশীল।

সারাংশ *ঃ আংশিক অন্তরকলণের অন্যতম মৌলিক বিষয় হচ্ছে, রৈখিক ও অরৈখিক অপেক্ষকের অস্তিত্ব চলকের উপর নির্ভর করে কি না। এই বিষয়টি জ্যাকবিয়ান নির্ণায়কের সাথে সম্পর্কিত। এক্ষেত্রে $x1$, $x2$,.......x_n -এর জন্য আলাদাভাবে জ্যাকবিয়ান |J|-এর মান শূন্য হবে, যদি অপেক্ষক f,........ (রৈখিক বা অরৈখিক) নির্ভরশীল হয়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.২

সঠিক উত্তরটি চিহ্নিত করুন ঃ

১। জ্যাকবিয়ান নির্ণায়ক চিহ্নিত করা হয়-

(ক) |A| দ্বারা (খ) d দ্বারা
(গ) δ দ্বারা (ঘ) |J| দ্বারা

পাঠ-৯.৩

মোট প্রভেদক ও উচ্চতর মাত্রার প্রভেদক
(Total Differential and Higher Order Differential)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- মোট প্রভেদক সম্পর্কে ধারণা পারবেন।
- মোট প্রভেদক বের করতে পারবেন।
- মোট প্রভেদকের ব্যবহার সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- উচ্চতর মাত্রার প্রভেদক বের করতে পারবেন।

মোট প্রভেদকের ধারণা (Concept of Total Differential)

যদি $y=f(x,z)$ হয়, তবে কেবল x বা z এর পরিবর্তনের ফলে y তে কিরূপ পরিবর্তন হবে তা আংশিক অন্তরক নির্দেশ করে। কিন্তু x এবং z উভয়ের সামান্য পরিবর্তন হলে y-এর পরিবর্তন হবে। এটি মোট প্রভেদক এর সাহায্যে বিশ্লেষন করা সম্ভব। ধরি w,x এবং y যথাক্রমে গম উৎপাদনের পরিমাণ, শ্রমিকের সংখ্যা এবং জমির পরিমাণ নির্দেশ করে। এক্ষেত্রে লেখা যায় ঃ $w = f(x,y)$

এখন যদি x এবং y এর সামান্য পরিবর্তন করা হয়, তবে w-তে কি পরিমাণ পরিবর্তন আসবে ? x এর পরিবর্তন যদি Δx দ্বারা নির্দেশ করি তবে w-তে যে পরিবর্তন হবে তা হলঃ $\frac{\delta w}{\delta x} . \Delta x$

অনুরূপভাবে x-কে স্থির ধরে y-কে যদি Δy দ্বারা পরিবর্তন করি, তবে W-তে যে পরিবর্তন আসবে তা হবেঃ

$\frac{\delta w}{\delta y} . \Delta y$

সুতরাং x এবং y চলকের মান Δx এবং Δy পরিমাণ পরিবর্তন হলে w-এর মোট পরিবর্তন হবে নিম্নরূপ ঃ

$$\Delta w = \frac{\delta w}{\delta x} . \Delta x + \frac{\delta w}{\delta y} . \Delta y$$

এখন যদি x এবং y এর ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র (Infinitesimal) পরিবর্তনের বিষয় বিবেচনা করা হয় তবে চলকসমূহের ক্ষুদ্রতম পরিবর্তন হবে নিম্নরূপ ঃ

$$\Delta w = dw, \Delta x = dx; \Delta y = dy$$

এক্ষেত্রে, $dw = \frac{\delta w}{\delta x} . dx + \frac{\delta w}{\delta y} . dy = fx.dx+fy.dy$ [$\frac{\delta w}{\delta x} = fx$ এবং $\frac{\delta w}{\delta y} = fy$ প্রতীক ব্যবহার করলে]

এক্ষেত্রে dw-কে w=f(x,y) ফাংশনের মোট প্রভেদক বলা হয়। অনেক সময় dw প্রতীকের পরিবর্তে df প্রতীক ব্যবহার করা যায়। এখানে dx এবং dy যথাক্রমে x এবং y চলকের পরিবর্তন নির্দেশ করে। ফলে এদেরকে ধ্রুবক (Constants) হিসাবে বিবেচনা করা যায়।

সাধারণত ঃ $y = f(x_1,x_2, x_3.........x_n)$ হলে

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x_1} . dx_1 + \frac{\delta y}{\delta x_2} . dx_2 + \frac{\delta y}{\delta x_3} . dx_3 + ... + \frac{\delta y}{\delta x_n} . dx_n$$

$= f_1dx_1+f_2dx_2+f_3dx_3+...........+fndx_n$ হবে।

উদাহরণঃ $y = f(x,z) = 4x^2+3z^2$

$$dy = \frac{\delta y}{\delta x} . dx + \frac{\delta y}{\delta z} .dz = f_x dx + f_z dz$$

এক্ষেত্রে, $f_x = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta(4x^2+3z^2)}{\delta x} = 8x$

$$f_z = \frac{\delta y}{\delta z} = \frac{\delta(4x^2+3z^2)}{\delta z} = 6z$$

সুতরাং $dy = 8xdx + 6zdz$

মোট প্রভেদক বের করার নিয়ম (Rules for Finding Total Differential)

মোট প্রভেদক বের করার নিয়ম সাধারণ অন্তরক বের করার নিয়মের মতই। মনে করি $g= f(x,y)$ এবং $h =\psi (x,y)$, x এবং y এর ফাংশন। এখন এর ভিত্তিতে আমরা প্রভেদক এর নিম্নোক্ত নিয়মসমূহ পাইঃ-

ক. যোগের নিয়ম (Sum Rule) ঃ

যদি $z = g+h$ হয়, তবে $dz = dg+dh$ হবে।

উদাহরণ ১ ঃ

$$\begin{aligned} z &= 3x^2+2y^3 \\ dz &= d(3x^2) + d(2y^3) \\ &= 6xdx + 6y^2dy \end{aligned}$$

উদাহরণ ২ ঃ

$$\begin{aligned} y &= 2x^3+\sqrt{z} \\ dy &= d(2x^3) + d(\sqrt{z}\,) \\ &= 6x^2dx + \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz \end{aligned}$$

খ. গুনের নিয়ম (Product Rule):

যদি $z = gh$ হয় তবে $dz = g.dh+h.dg$ হবে।

উদাহরণ ঃ $z = (2x^2+y)(x+2y^2)$

$$\begin{aligned} dz &= (2x^2+y).d(x+2y^2)+(x+2y^2).\ d(2x^2+y) \\ &= (2x^2+y)\ [dx+d(2y^2)]+(x+2y^2)\ [d(2x^2)+dy] \\ &= (2x^2+y)\ (dx+4ydy) + (x+2y^2)\ (4xdx+dy) \\ &= 2x^2dx+8x^2ydy+ydx+4y^2dy+4x^2dx+xdy+8xy^2dx+2y^2dy \\ &= 6x^2dx+8x^2ydy+6y^2dy+8xy^2dx+ydx+xdy \\ &= 6x^2dx+8xy^2dx+ydx+8x^2ydy+6y^2dy+xdy \\ &= (6x^2+8xy^2+y)dx+(8x^2y+6y^2+x)dy \end{aligned}$$

গ. ভাগের নিয়ম (Quotient Rule) ঃ

যদি $z = \frac{g}{h}$ হয় তবে $dz = \frac{hdg-g.dh}{h^2}$

উদাহরণ ঃ $z = \frac{x^2+y^2}{x+y}$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{(x+y)d(x^2+y^2)-(x^2+y^2)d(x+y)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{(x+y)(2xdx+2ydy)-(x^2+y^2)(dx+dy)}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(2x^2dx+2xydy+2xydx+2y^2dy-x^2dx-y^2dy-y^2dx-x^2dy)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{(x^2+2xy+y^2)dx-(x^2+y^2-2xy)dy}{(x+y)^2}$$

ঘ. অপেক্ষকের অপেক্ষক নিয়ম (Function of a Function Rule) ঃ

যদি $z = z(u)$ যেখানে $u = u(x)$ হয়, তবে $dz = d\{z(u)\} = \frac{d}{du}(z)\ .du$

এখানে du কোন ধ্রুবক নয় বরং এটি u -এর প্রভেদক।

অর্থাৎ $du = d\{u(x)\} = \frac{d}{dx}(u)\ du$

সুতরাং $dz = [\frac{d}{du}(z)]\ [\frac{d}{dx}(u)\ .dx]$

উদাহরণঃ ১. $z = u^2+1$ যেখানে $u = x^2+2$

$$\begin{aligned} dz &= [\frac{d}{du}(u^2+1)]\ [\frac{d}{dx}(x^2+2)\ .du] \\ &= (2u)\ (2x)dx \\ &= 4xu.dx \\ &= 4x(x^2+2)dx \end{aligned}$$

উদাহরণঃ ২ $z = \frac{1}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$ মনে করি $u = (x^2-y^2)$

তা হলে $z = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} = u^{-\frac{1}{2}}$

এখন, $dz = \frac{d}{du}(u^{-\frac{1}{2}}.\ du$

$$= -\frac{1}{2}\ u^{-\frac{3}{2}}\ du$$

$du= 2xdx-2ydy$

সুতরাং, $dz = -\frac{1}{2}\ u^{-\frac{3}{2}}(2xdx-2ydy$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}(2xdx-2ydy)$$

মোট প্রভেদকের ব্যবহার (Use of Total Differential)

প্রথমত ঃ একাধিক স্বাধীন চলক বিশিষ্ট কোন অপেক্ষকের ঢাল নির্ণয়ের জন্য মোট প্রভেদক এর ব্যবহার করা যায়। অন্য কথায় দুটো স্বাধীন চলকের মধ্যে বিকল্পন বা বিনিময় হার (rate of substitution) নির্ণয়ের জন্য মোট প্রভেদক ব্যবহার করা যায়। এজন্য নিরপেক্ষ রেখা এবং উৎপাদন তত্ত্বে সম উৎপাদন রেখার ঢাল এর সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ ঃ উৎপাদন অপেক্ষক $Q = f(L,K)$ যেখানে $Q=$ মোট উৎপাদন, L এবং K শ্রম এবং মূলধন উপকরণ। এক্ষেত্রে মোট প্রভেদকের সাহায্যে আমরা সম উৎপাদন রেখার ঢাল $\frac{d_k}{d_L}$ অথবা মূলধনের জন্য শ্রমের প্রান্তিক কারিগরী পরিবর্তনের হার ($MRTS_{Lk}$) নির্ণয় করতে পারি।

ধরি, $dQ = \frac{\vartheta Q}{\vartheta L}.dL + \frac{\vartheta Q}{\vartheta k}.dK = 0$

বা $\frac{\vartheta Q}{\vartheta k}.dk = \frac{\vartheta Q}{\vartheta L}.dL$

বা $\frac{\vartheta Q}{\vartheta K}.\frac{dK}{dL} = \frac{-\vartheta Q}{\vartheta L}$ [উভয় দিকে dL দ্বারা ভাগ করে]

$$\frac{dk}{dL} = MRTS_{Lk} = \frac{-\vartheta Q}{\vartheta L} / \frac{\vartheta Q}{\vartheta k} = -\frac{f_L}{f_k}$$

এক্ষেত্রে $f_L =$ শ্রমের (L) প্রান্তিক উৎপাদন $= MP_L$

$f_k =$ মূলধনের (k) প্রান্তিক উৎপাদন $= MP_k$

২. দ্বিতীয়ত ঃ ফাংশনের শর্তযুক্ত সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান নির্ণয়ের জন্যও মোট প্রভেদক ব্যবহার করা যায়। এক্ষেত্রে প্রথম এবং দ্বিতীয় মাত্রার প্রভেদককে প্রয়োজনীয় এবং পর্যাপ্ত শর্ত হিসাবে গণ্য করা যেতে পারে।

উদাহরণ ঃ উপযোগ অপেক্ষক ঃ $U = f(q_1, q_2)$

বাজেট সমীকরণ ঃ $M = P_1 q_1 + p_2 q_2$

বা, $q_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}.q_1$

এখন U সর্বোচ্চকরণের শর্তাদি নিম্নরূপভাবে বলা যায় ঃ

প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ $du = \frac{\partial u}{\partial q1} dq1 + \frac{\partial u}{\partial q_2} dq_2 = o$

বা, $du = \frac{\partial u}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2}(-p_1/p_2)\ dq_1 = 0$

$= f_1 dq_1 + f_2(-p_1/p_2) dq_1 = 0$

পর্যাপ্ত শর্ত ঃ $d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} dq_1^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} dq_1 dq_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} dq_2^2 < o$

$= f_{11} dq_1^2 + 2f_{12} dq_1 dq_2 + f_{22} dq_2^2 < 0$

উপরোক্ত আলোচনা থেকে দেখা যায় অর্থনীতির বহু ক্ষেত্রে বিভিন্ন বিষয় ব্যাখ্যা বিশ্লেষণের জন্য আমরা মোট প্রভেদক ব্যবহার করতে পারি।

উচ্চতর মাত্রার প্রভেদক নির্ণয় (Finding Higher Order Differential)

প্রথম মাত্রার প্রভেদকের আবার প্রভেদক বের করলে দ্বিতীয় মাত্রার প্রভেদক পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে দ্বিতীয় মাত্রা থেকে তৃতীয় এবং ক্রমান্বয়ে আরও উচ্চতর মাত্রার প্রভেদক বের করা যায়।

ধরি, $u = f(x,y)$ একটি অপেক্ষক। এখানে x এবং y স্বাধীন চলক। এই অপেক্ষকটির প্রথম মাত্রার প্রভেদক নিম্নরূপ ঃ

$$du = df = \frac{\delta u}{\delta x}.dx + \frac{\delta u}{\delta y}.dy = fx.dx + fy.dy$$

এখন যদি du বা df এর পুনরায় প্রভেদক বের করা হয়; তবে তা d^2u বা d^2f দ্বারা নির্দেশ করা যায় যা দ্বিতীয় মাত্রার প্রভেদক হবে।

$$d^2u = d^2f = d(df) = \frac{\delta}{\delta x}(df).dx + \frac{\delta}{\delta y}.(df).dy$$

$= \frac{\delta}{\delta x}$ (fxdx+fydy) dx+ $\frac{\delta}{\delta y}$ (fxdx+dydy) .dy

$= [fxxdx + fx.\frac{\delta}{\delta x}(dx) + fyxdy+fy\frac{\delta}{\delta x}(dy)]dx + [fxydx+fx.\frac{\delta}{\delta y}(dx) + fydy+fy\frac{\delta}{\delta y}(dy)]dy$

এখানে dx এবং dy ধ্রুবক (Constant) বলে

$\frac{\delta}{\delta x}(dx) = 0; \frac{\delta}{\delta x}(dy) = 0; \frac{\delta}{\delta y}(dx) = 0 ; \frac{\delta}{\delta y}(dy) = 0$

সুতরাং, $d^2u=d^2f=(fxxdu+fyxdy)dx+(fxydx+fyydy)dy$

$d^2u=fxx(dx)^2+2fyxdxdy+fyy(dy)^2$ [যেহেতু fxy=fyx]

$= fxx(dx)^2+2fxydxdy+fyy(dy)^2$

উদাহরণ ১ ঃ $z = x^2+xy$

$dz = fxdx+fydy$

$d^2z = fxx(dx)^2+fyy(dy)^2+2fxydxdy$

এখন, $fx = \frac{\delta}{\delta x}(x^2+xy) = 2x+y; fy= \frac{\delta}{\delta y}(x^2+xy) = x$

$fxx = \frac{\delta}{\delta x}(2x+y) = 2; fyy= \frac{\delta}{\delta y}(2) = o$

$fxy = \frac{\delta}{\delta x}(fy) = \frac{\delta}{\delta x}(x) = 1$

$fyx = \frac{\delta}{\delta y}(fx) = \frac{\delta}{\delta y}(2x+y) = 1$

সুতরাং বলা যায় ঃ $d^2z = 2(dx)^2+2dxdy$

উদাহরণ ২ ঃ $y = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ যেখানে $u = x^2+1$

তা হলে ঃ $y = u^{-\frac{1}{2}}$

$dy = f'(u)du$

$d^2y = f'(u)d^2u + f\delta(u)(du)^2$

এক্ষেত্রে, $f'(u) = \frac{\delta}{\delta u}(u^{1/2}) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}$

$f\delta(u) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)u^{-\frac{3}{2}}$

$= -\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{2}}$

$du = \frac{\delta}{\delta x}(x^2+1)\,dx = 2xdx$

$d^2u = \frac{\delta}{\delta x}(2xdx)\,.dx = 2(dx)^2$

সুতরাং $d^2y = \frac{1}{2}(u)^{-\frac{1}{2}}(dx)^2+(-\frac{1}{4})u^{-\frac{3}{2}}(2xdx)^2$

$$= (\frac{1}{2}\, 2u^{-\frac{1}{2}}(dx)^2 + \{-\frac{1}{4}\, 4x^2u^{-\frac{3}{2}}(dx)^2\}$$

$$= (u^{-\frac{1}{2}}\,(dx)^2 - x^2u^{-\frac{3}{2}}(dx)^2$$

সারাংশ ঃ *একটি অপেক্ষক, $y = f(x,z)$- এ x ও z উভয়ের সামান্য পরিবর্তন হলে y-এর পরিবর্তন হবে। এটি মোট প্রভেদকের সাহায্যে বিশ্লেষণ করা সম্ভব। একাধিক স্বাধীন চলকবিশিষ্ট কোন অপেক্ষকের ঢাল নির্ণয়ের জন্য মোট প্রভেদকের ব্যবহার করা হয়। এর সাহায্যে আমরা মূলধনের জন্য শ্রমের প্রান্তিক কারিগরী পরিবর্তনের হার ($MRTS_{LK}$) ইত্যাদি নির্ণয় করতে পারি। সাধারণ অন্তরক বের করার নিয়মেই মোট প্রভেদক বের করা হয়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৩

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। একাধিক স্বাধীন চলক বিশিষ্ট কোন অপেক্ষকের ঢাল নির্ণয়ের জন্য মোট প্রভেদকের ব্যবহার করা যায়।

২। যদি $y = f(x,z)$ হয়, তবে x বা z এর সামান্য পরিবর্তন হলে y তে কিরূপ পরিবর্তন হবে তা মোট প্রভেদক নির্দেশ করে।

পাঠ-৯.৪
মোট অন্তরক
(Total Derivative)

এ পাঠ শেষে আপনি-

- মোট অন্তরক বের করতে পারবেন।
- মোট অন্তরকের ব্যবহার সম্পর্কে জানতে পারবেন।

মোট অন্তরক (Total Derivative)

আমরা পূর্বে $u = f(x,y)$ ফাংশনে x এবং y কে স্বাধীন চলক হিসাবে দেখিয়েছি। ধরি x এবং y স্বাধীন নয়, বরং চলকের অপেক্ষক।

ধরি $x = \psi(t)$ এবং $y = \varphi(t)$ যেখানে t স্বাধীন চলক। এক্ষেত্রে t এর সম্পর্কে u এর অন্তরক কি হবে অর্থাৎ এক্ষেত্রে $\frac{du}{dt}$ কি হবে? এই $\frac{du}{dt}$ হচ্ছে অপেক্ষটির মোট অন্তরক।

ক. একটি মাত্র স্বাধীন চলক থাকলে মোট অন্তরক নির্ণয় ঃ

যদি $u = f(x,y)$ হয় যেখানে $x = \psi(t)$ এবং $y = \varphi(t)$ হয় তবে

$$\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

বা, $$\frac{du}{dt} = f_x\cdot\frac{dx}{dt} + f_y\cdot\frac{dy}{dt}$$

অনুরূপভাবে যদি $u = f(x,y,z\ldots\ldots\ldots..)$ হয় এবং $x= \psi(t);\ y = g(t)\ldots\ldots\ldots.$ হয় তবে

$$\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\delta u}{\delta z}\cdot\frac{dz}{dt} + \ldots\ldots\ldots.$$

বা $$\frac{du}{dt} = fx\frac{du}{dt} + fy\frac{dy}{dt} + fz\frac{dz}{dt} + \ldots\ldots\ldots\ldots..$$

পক্ষান্তরে যদি $u = f(x,y)$ এবং $x = g(y)$ হয় তবে

$$\frac{du}{dy} = \frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dy} + \frac{\delta u}{\delta y}$$ হবে।

এবং যদি $u = f(x,y)$ এবং $y = \varphi(x)$ হয়, তবে-

$$\frac{du}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}$$ হবে।

উদাহরণঃ-১. $u = x^2+y^3 \quad x=t^2 \quad y=t^2+1$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\delta u}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\delta u}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\delta(x^2+y^3)}{\delta x} \cdot \frac{d(t^2)}{dt} + \frac{\delta(x^2+y^3)}{\delta y} \cdot \frac{d(t^2+1)}{dt}$$
$$= (2x).\ (2t)+(3y^2)(2t)$$
$$= 4tx+6ty^2$$

উদাহরণঃ-২. $u = x^2+y^3$ যেখানে $y=2x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$= \frac{\delta(x^2+y^3)}{\delta x} + \frac{\delta(x^2+y^3)}{\delta y} \cdot \frac{d(2x)}{dx}$$
$$= 2x+(3y^2)(2)$$
$$=2x+6y^2$$

খ. **দুই এর অধিক স্বাধীন চলক থাকলে মোট অন্তরক নির্ণয় ঃ**

$u=f(x,y)$ $x= \psi(m,n)$ $y=\varphi(m,n)$

$$\frac{\delta u}{\delta m} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dm} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta m}$$
$$= fx \cdot \frac{\delta u}{\delta m} + fy \cdot \frac{\delta y}{\delta m}$$
$$\frac{\delta u}{\delta n} = \frac{\delta u}{\delta n} \cdot \frac{\delta x}{\delta n} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta n}$$
$$= fx\frac{\delta x}{\delta n} + fy.\frac{\delta y}{\delta n}$$

এখানে $\frac{\delta u}{\delta m}$ হচ্ছে m এর সম্পর্কে u এর মোট অন্তরক যখন n স্থির ধরা হয়। পক্ষান্তরে $\frac{\delta u}{\delta n}$ হচ্ছে nএর সম্পর্কে u এর মোট অন্তরক, যখন m স্থির ধরা হয়।

উদাহরণঃ ১. $u=x^2+y^2$ $x=m^2+n^2$ $y=m^2-n^2$

$$\frac{\delta u}{\delta m} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{\delta x}{\delta m} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta m}$$

= **Error!**,δx). **Error!**+ **Error!**,δy). **Error!**

$$= (2x)\ (2m) + (2y)(2m)$$
$$= 4xm+4ym$$
$$\frac{\delta u}{\delta n} = \frac{\delta u}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\delta u}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta n}$$

$= \frac{\delta}{\delta x}(x^2+y^2) \cdot \frac{\delta}{\delta n}(m^2+n^2) +$

Error!. **Error!**

$$= (2x)(2n)+(2y)(-2n)$$
$$= 4xn-4yn$$

উদাহরণঃ-২. $u =f(q_1, q_2)$

$M= p_1q_1+p_2q_2$

যেখানে u কোন ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষক, q_1এবং q_2 দুটি দ্রব্যের পরিমাণ, M, p_1, p_2 যথাক্রমে ক্রেতার আয় এবং দ্রব্য দুটির দাম। এখন আমরা $\frac{du}{dq_1}$ বের করতে পারি। প্রথমত আমরা বাজেট সমীকরণ q_2 কে q_1 এর অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করতে পারিঃ

$$M = p_1q_1 + p_2q_2$$

$$\text{বা } q_2 = \frac{M - p_1q_1}{p_2}$$

এখন $U = f(q_1, q_2)$ যেখানে $q_2 = \dfrac{M - p_2q_1}{p_2}$

$$\text{সুতরাং } \frac{du}{dq_1} = \frac{\delta u}{\delta q_1} + \frac{\delta u}{\delta q_2} \cdot \frac{dq_2}{dq_1}$$

$$= f_1 + f_2 \cdot \frac{d}{dq_1}\left(\frac{M - p_1q_1}{p_2}\right)$$

$$= f_1 + f_2\left(\frac{-p_1}{p_2}\right)$$

উদাহরণ:-৩. কোন ফার্মের উৎপাদন অপেক্ষক এবং খরচ সমীকরণ নিম্নরূপ ঃ

$$Q = f(K, L)$$
$$C = p_k.k + P_L.L$$

যেখানে Q উৎপাদন, K এবং L মূলধন ও শ্রমের পরিমাণ, C = মোট উৎপাদন ব্যয়, pk এবং p_L মূলধন এবং শ্রমের দাম নির্দেশ করে। এক্ষেত্রে আমরা $\dfrac{dQ}{dL}$ এবং $\dfrac{dQ}{dk}$ বের করতে পারি ঃ

প্রথমত $\dfrac{dQ}{dk}$ বের করার জন্য আমরা ব্যয় সমীকরণের সাহায্যে L কে Q-এর অপেক্ষক রূপে দেখাই:

$$C = P_kK + P_L.L$$

$$\text{বা } L = \frac{C - P_k.K}{P_L}$$

$$\text{এখন, } \frac{dQ}{dk} = \frac{\delta Q}{\delta k} + \frac{\delta Q}{\delta L} \cdot \frac{dL}{dk}$$

$$= f_k + f_L\left(\frac{-Pk}{P_L}\right)$$

অনুরূপভাবে $\dfrac{dQ}{dL}$ নির্ণয় করতে হলে আমরা প্রথমে ব্যয় সমীকরণ থেকে K-কে L এর অপেক্ষক হিসাবে দেখাই ঃ

$$K = \frac{C - P_LL}{P_k}$$

$$\text{এখন, } \frac{dQ}{dL} = \frac{\delta Q}{\delta_k} \cdot \frac{d_k}{dL} + \frac{\delta Q}{\delta L}$$

$$= f_k\left(\frac{-P_L}{P_k}\right) + f_L$$

$$= f_L + f_k\left(\frac{-P_L}{P_k}\right)$$

মোট অন্তরকের ব্যবহার (Use of Total Derivative)

প্রথমত: অর্থনীতিতে আমরা কতিপয় ক্ষেত্রে বাধা/শর্তযুক্ত (Constrained) সর্বোচ্চকরণ এবং সর্বনিন্মকরণ সমস্যার সম্মুখীন হই। যেমন উৎপাদক নির্দিষ্ট খরচ সাপেক্ষে উৎপাদন সর্বোচ্চ করে। আবার অনেক সময় নির্দিষ্ট পরিমাণ উৎপাদন উৎপন্ন করতে গিয়ে সে খরচ সর্বনিন্মকরণের প্রচেষ্টা চালায়। প্রথম ক্ষেত্রে খরচ সমীকরণ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উৎপাদন অপেক্ষক উৎপাদকের জন্য বাধা/শর্ত হিসাবে দেখা দেয়।
অন্যদিকে ভোক্তা তার নির্দিষ্ট ব্যাজেট সাপেক্ষে উপযোগ সর্বোচ্চ করে। বাজেট সমীকরণ ভোক্তার আর্থিক আয়, এবং প্রদত্ত দ্রব্য মূল্যের সম্পর্ক প্রকাশ করে। উপযোগ সর্বোচ্চকরণের বেলায় তাই বাজেট ভোক্তার কাছে একটি বাধা/ সীমাবদ্ধতা হিসাবে আবির্ভূত হয়।
উপরোক্ত ধরণের সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্নকরণ সমস্যার ক্ষেত্রে মোট অন্তরক ধারণা প্রয়োগ করা যায়।

উদাহরণ ঃ উপযোগ অপেক্ষক ঃ $U = f(q_1,q_2)$..........(1)

বাজেট সমীকরণ ঃ $M = p_1q_1+p_2q_2$..........(2)

২ নং সমীকরণ থেকে লেখা যায়

$$q_2 = \frac{M}{P_2} - \frac{p_1}{p_2}\, q_1$$

এখন মোট অন্তরক প্রয়োগ করে U এর সর্বোচ্চ মানের প্রয়োজনীয় এবং পর্যাপ্ত শর্ত নির্ণয় করা সম্ভব ঃ

প্রয়োজনীয় শর্ত ঃ $\frac{du}{dq_1} =$

Error!+ **Error!**. **Error!**= 0

$$= f_1 + f_2\,(-p_1/p_2) = 0$$

বা, $f_1 = f_2(p_1/p_2)$

বা $\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2}$ [উভয় দিকে f_2 দ্বারা ভাগ করে]

বা নিরপেক্ষ রেখার ঢাল $\frac{f_1}{f_2}$ = বাজেট রেখার ঢাল $\frac{p_1}{p_2}$

পর্যাপ্ত শর্ত ঃ $\frac{d^2u}{dq_1^{\,2}} =$

Error!+2. **Error!**. **Error!**+ **Error!**^{2}<0

$$= f_{11} + 2f_{12}(-p_1/p_2)+f_{22}(-p_1/p_2)^2<0$$

যেহেতু $f_{11}<0$; $f_{22}<0$ এবং $f_{12} \varepsilon\ 0$

দ্বিতীয়ত: কোন রেখার আকৃতি (Shape) অর্থাৎ বিবেচনাধীন রেখা উত্তল না অবতল না সরলাকৃতি সেটি নির্ণয়ের ব্যাপারেও দ্বিতীয় মাত্রার মোট অন্তরক ধারণা ব্যবহার করা যায় যা কোন রেখার ঢালের পরিবর্তন হার নির্দেশ করে।

উদাহরণ ঃ উপযোগ অপেক্ষক $U=f(q_1,q_2)$

বাজেট সমীকরণ ঃ $M = p_1q_1+p_2q_2$

বা, $q_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}\, q_1$

এখন নিরপেক্ষ রেখার ঢাল নির্ণয় করিঃ

du =
Error!dq_1 + **Error!**$dq_2 = 0$

বা, $\frac{du}{dq_2}.dq_2$ = -
Error!dq_1

বা, $\frac{dq2}{dq_1}$ = নিরপেক্ষ রেখার ঢাল = -
Error!/ **Error!**=-**Error!**

$$\frac{d^2q_2}{dq_1{}^2} = -\left[\frac{\vartheta\,(f_1/f_2)}{\vartheta q_1} + \frac{\vartheta\,(f_1/f_2)}{\vartheta q_2}\cdot\frac{dq_2}{dq_1}\right]$$

$$= -\left[\frac{f_1f_{11}-f_1f_{12}}{f_2{}^2} + \frac{f_2.f_{21}-f_1f_{22}}{f_2{}^2}\cdot\frac{-f_1}{f_2}\right]$$

$$= -\frac{1}{f_2{}^3}\left[f_{11}f_2{}^2-2f_{12}f_1f_2+f_1{}^2f_{22}\right]$$

এখন $\frac{d^2q_2}{dq_1{}^2} > 0$ হলে বিবেচনাধীন নিরপেক্ষরেখা উত্তল (Convex) হবে।

যদি $\frac{d^2q_2}{dq_1{}^2} < 0$ হয় তবে নিরপেক্ষ রেখা সরল অথবা অবতল (Concave) আকৃতির হবে।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে দেখা যায় অর্থনীতির বহু ক্ষেত্রে বিভিন্ন বিষয় ব্যাখ্যা বিশ্লেষণের জন্য আমরা মোট অন্তরক ব্যবহার করতে পারি।

সারাংশ ঃ কোন অপেক্ষক, $y = f(x, z)$ -এ x ও z স্বাধীন চলক না হয়, সেক্ষেত্রে $x = \psi(t)$ এবং $Z = \varphi(t)$ ধরা হয়। এখানে স্বাধীন চলক হচ্ছে t, এবং $\frac{dy}{dt}$ হচ্ছে মোট অন্তরক। একটি, দুই বা ততোধিক স্বাধীন চলকের ক্ষেত্রে মোট অন্তরক বের করার নিয়ম ভিন্ন। অর্থনীতিতে শর্তযুক্ত সর্বোচ্চকরণ এবং সর্বনিম্নকরণ সমস্যার ক্ষেত্রে মোট অন্তরক ধারণা প্রয়োগ করা হয়। যেমন, উপযোগ সর্বোচ্চকরণের ক্ষেত্রে বাজেট ভোক্তার কাছে বাধা এবং নির্দিষ্ট পরিমাণ উৎপাদন করার জন্য খরচ সর্বনিম্নকরণ, উৎপাদকের জন্য একটি শর্ত।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৪

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন ঃ

১। একটি, দুই বা ততোধিক স্বাধীন চলকের ক্ষেত্রে মোট অন্তরক বের করার নিয়ম ভিন্ন।
২। কোন রেখার ঢালের পরিবর্তনের হার নির্দেশের জন্য দ্বিতীয় মাত্রার মোট অন্তরক ধারণা ব্যবহার করা যায়।

চূড়ান্ত মূল্যয়ন-ইউনিট ৯

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্ন ঃ

১। অর্থনীতিতে আংশিক অন্তরকলণের ব্যবহার কি কি ?

২। নিম্নোক্ত সমস্যাগুলোর সমাধান করুন ঃ

(ক) $y=(3x_1+2)(x^2-2)$ (খ) $z=\dfrac{x^2+2y^3}{2x+3y}$

$f_1=?\,;\ f_2=?$ $f_x=?\,;\ f_y=?$

(গ) $y=3x_1^2+x_1x_2+4x_2^2$ (ঘ) $y=\dfrac{3u-2v}{u^2+3v}$

$f_1=?\,;\ f_2=?$ $f_u=?\,;\ f_v=?$

৩। একটি একচেটিয়া কারবারের চাহিদা অপেক্ষক $3q = 98 - 4p$ এবং গড় খরচ $3q + 2$, যেখানে q = উৎপাদনের পরিমান এবং p = একক প্রতি বিক্রয় মূল্য। একচেটিয়া কারবারের মুনাফা নির্ণয় করুন।

৪। $x^2-6x+13$ অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন বিন্দু নির্ণয় করুন।

৫। সাধারণ অন্তরকলণ ও আংশিক অন্তরকলণের মধ্যে পার্থক্য কি ?

৬। মোট প্রভেদক বের করার যোগের নিয়ম কি ?

৭। মোট প্রভেদক নির্ণয় করার জন্য অপেক্ষকের অপেক্ষক বের করার নিয়ম লিখুন।

৮। মোট প্রভেদকের নিয়মাবলী বিশদভাবে আলোচনা করুন।

৯। একটি মাত্র স্বাধীন চলক থাকলে মোট অন্তরক কিভাবে নির্ণয় করা হয় ?

১০। দুই বা ততোধিক স্বাধীন চলক থাকলে মোট অন্তরক কিভাবে নির্ণয় করা হয় ?

১১। অর্থনীতিতে মোট অন্তরকের ব্যবহার সম্পর্কে আলোচনা করুন।

১২। অর্থনীতিতে মোট প্রভেদকের ব্যবহার সম্পর্কে আলোচনা করুন।

১৩। নিম্নোক্ত সমাধানগুলো বের করুন।

(ক) $z=x^2+2y^2$ এবং $x=2t$ ও $y=t^2$ হলে, Z এর মোট অন্তরক সহগ কত ?

(খ) $q=40-3p^3+2y^2$ একটি চাহিদা অপেক্ষক। আবার $P=2+\frac{1}{4}t$ এবং $y=14+t^2$ হলে, q এর মোট অন্তরক সহগ কত হবে ?

১৪। মোট ধারণাসমূহ থেকে প্রান্তিক ধারণা সমূহ বের করুন।

(ক) $TC = 3q^2+7q+12$ হলে MC এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) ভোগ অপেক্ষক $C =120+0.8Y_d$ হতে MPC এর মান নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা -ইউনিট ৯

পাঠ-১ ঃ (১) সত্য(২) মিথ্যা (৩) মিথা

পাঠ-২ ঃ (১) ঘ

পাঠ-৩ ঃ (১) সত্য(২) মিথ্যা

পাঠ-৪ ঃ (১) সত্য(২) সত্য