৬

বিষমতা বা বিস্তার পরিমাপ

রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় কোন মানের দিকে কেন্দ্রীভূত হবার ঝোঁক যেমন থাকে, তেমনি কোন চলকের মানগুলোর বিভিন্ন দিকে প্রসারিত হবারও প্রবণতা দেখা যায়। এ প্রবণতাকে বিস্তৃতি বলা যায়। বিচ্যুতির দ্বারা কোন বিন্যাসের ব্যাপ্তি বা নির্দিষ্ট কোন মান থেকে রাশিগুলোর বিস্তৃতিকে বোঝানো হয়ে থাকে। কোন বিন্যাসের তথ্য মানসমূহ কেন্দ্রমূখী প্রবণতার চতুর্দিকে কতটুকু কেন্দ্রীভূত হচ্ছে বা বিস্তৃত হচ্ছে তার পরিমাণ হলো বিস্তার। যে পদ্ধতিতে বিস্তার পরিমাপ করা হয় সেই পদ্ধতিকে বিস্তার পরিমাপ বলে। এ ইউনিটের বিভিন্ন পাঠে বিস্তারের সংজ্ঞা, ব্যবহার ও প্রকারভেদ, পরম বিস্তার পরিমাপ, আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ সম্পর্কে বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

- পাঠ-৬.১ ঃ বিষমতা বা বিস্তারের সংজ্ঞা, ব্যবহার ও প্রকারভেদ
- পাঠ-৬.২ ঃ পরম বিস্তার পরিমাপ
- পাঠ-৬.৩ ঃ আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ

পাঠ-৬.১

বিষমতা বা বিস্তারের সংজ্ঞা, ব্যবহার ও প্রকারভেদ

এ পাঠ শেষে আপনি-

- বিস্তার পরিমাপের সংজ্ঞা বলতে ও লিখতে পারবেন।
- বিস্তার পরিমাপের ব্যবহার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।
- পরম বিস্তার পরিমাপ সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- আদর্শ বিস্তার পরিমাপ সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- লরেঞ্জ রেখা সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন।

বিস্তার পরিমাপ (Measures of Dispersion)

কোন তথ্য সারির মধ্যক মান বা গড় থেকে সারির সংখ্যাগুলো কত বড় বা ছোট তার পরিমাপকে বিস্তার পরিমাপ বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি তথ্য সারির মান যদি ৫, ৩, ৮, ১০, ১৫, ১২ ও ২০ হয় তাহলে তাদের মধ্যক মান বা গড় হবে ৯। গড় ৯ হতে তথ্যসারির পার্থক্য হলো +৪, +৬, +১, +৯, -৬, -৪, -১১। এ পার্থক্যগুলোকেই বলা হয় গড় হতে বিস্তার এবং উহাদের পরিমাপকে বলা হয় বিস্তার পরিমাপ।

বিস্তারের পরিমাপের ব্যবহার

বিস্ত্র্র পরিমাপ সাধারণত দুটি কাজে ব্যবহার করা হয়, যেমন-

- তথ্য সারির মধ্যক মান বা গড় মান হতে অন্যান্য সংখ্যাগুলোর ব্যবধান বা বিস্তৃতি পরিমাপ করা।
- এর সাহায্যে দুই বা ততোধিক তথ্যসারির বিস্তৃতি তুলনা করা।

বিস্তার পরিমাপের প্রকারভেদ

তথ্যসারির ওপর নির্ভর করে দুইভাবে বিস্তার পরিমাপ করা হয়, যেমন-

- পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ
- আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ

পরম বিস্তার পরিমাপ

বিস্তৃতির যে পরিমাপ মূল সংজ্ঞা হতে উদ্ভূত এবং তথ্যসারি যে এককের ভিত্তিতে সংগৃহীত হয় সেই এককে প্রকাশিত হয় অর্থাৎ তথ্যসারির মধ্যক মান বা সারির অন্তর্ভুক্ত সংখ্যাগুলোর বিস্তৃতির পরিমাপই পরম বিস্তার পরিমাপ। পরম বিস্তার পরিমাপসমূহ চলকের এককে পরিমাপ করা হয়। পরম বিস্তার পরিমাপ চার ধরনের, যথা-

- পরিসর
- গড় ব্যবধান
- চতুর্থক ব্যবধান
- পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক।

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ

কোন একটি বিস্তৃতির পরিমাপ এবং কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের অনুপাত একক বিহীন সংখ্যা। যে পরিমাপ কোন একটি বিস্তৃতির পরিমাপ ও কেন্দ্রীয় পরিমাপের সাথে তুলনা করে নির্ণয় করা হয়

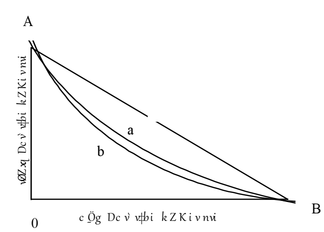
তাকে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ বলে। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপসমূহ সহগ, শতকরা বা অনুপাত আকারে পরিমাপ করা হয়। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ চার প্রকার যথা-

- পরিসরাঙ্ক
- গড় ব্যবধানাঙ্ক
- চতুর্থক
- বিভেদাঙ্ক।

লরেঞ্জ রেখা (Lorenz curve)

দুই বা ততোধিক বিন্যাসের বিস্তৃতিকে যে রেখার মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তাকেই লরেঞ্জ রেখা বলে।

দুই বা ততোধিক বিন্যাসের বিস্তৃতিকে যে রেখার মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় তাকেই লরেঞ্জ রেখা বলে। পরিসংখ্যানবিদ ড. লরেন সম্পদের বিন্যাস জানার জন্য এ পদ্ধতি প্রবর্তন করেন তাই এ পদ্ধতিতে অঙ্কিত রেখা লরেঞ্জ রেখা নামে পরিচিত। রেখাটি একটি ক্রমযোজিত শতকরা রেখা যাহা উপাদানসমূহের অন্তবর্তী উপাদানের শতকরা হার পর্যবেক্ষণ করে। একটি চিত্রে যে কোন সংখ্যক বিন্যাসেরই লরেঞ্জ রেখা আঁকা সম্ভব। তবে সাধারণত পারস্পরিক সম্পর্কযুক্ত কোন চলকের ছুটির ক্রমযৌগিক তথ্যের দুটি স্তম্ভ প্রথমে প্রস্তুত করা হয়। এবার প্রতি ক্রমযৌগিক তথ্যের মোট তথ্যের সংখ্যার সঙ্গে অনুপাত নির্ণয় করে দুটি আনুপাতিক ক্রমযৌগিক তথ্য স্তম্ভ নির্ণয় করা হয়। এবার দুটি স্তম্ভকে দুটি অক্ষে পরিমাপ করা হয়। উভয় ক্ষেত্রেই শতকরা হার হিসাবে প্রকাশ করার মানগুলোর প্রসার ০ থেকে ১০০ এর ভিতর থাকে। ফলে মূল বিন্দু থেকে ৪৫° কোণ করে একটি সরল রেখা বিপরীত কোণে অবস্থিত বর্গচিত্রের প্রান্ত বিন্দুর সঙ্গে যুক্ত করলে যে রেখা পাওয়া যায় তাই লরেঞ্জ রেখা। বিন্যাসের অসমতা যত বৃদ্ধি পাবে লরেঞ্জ রেখা ততই নিচের দিকে বিস্তৃতি পেতে থাকে। যদি দুটি বিন্যাসের স্তম্ভ দুটির রাশি বিন্যাসের কোন বিচ্যুতি না থাকে তবে লরেঞ্জ রেখা সমকেন্দ্রীভবন রেখায় সমান হবে। সমকেন্দ্রীভবন রেখা বলতে বিচ্যুতি বিহীন অবস্থায় অঙ্কিত রেখা।



চিত্র- লরেঞ্জ রেখা

উদাহরণ

দুটি প্রতিষ্ঠানের লাভের পরিমাণ নিম্নে দেয়া হলো। লরেঞ্জ রেখা অংকন করুন এবং লাভের কেন্দ্রীয়ভবনের তুলনা করুন।

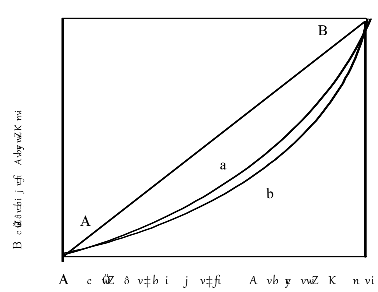
লাভ (হাজার টাকা)	প্রতিষ্ঠানের সংখ্যা	
	A	B
৬	৬	২
২৫	১১	৩৮
৬০	১৩	৫২
৮৪	১৪	২৮
১০৫	১৫	২৮
১৫০	১৭	২৬
১৭০	১০	১২
৪০০	১৪	৪

সমাধান

প্রদত্ত তথ্যকে ক্রমযৌগিক এবং আনুপাতিক ক্রমযৌগিক তথ্য নিম্নে প্রথমে বিন্যস্ত করি।

লাভ(হাজার টাকা)	ক্রমযৌগিক লাভ	আনুপাতিক ক্রমযৌগিক লাভ	প্রতিষ্ঠানের সংখ্যা		ক্রমযৌগিক প্রতিষ্ঠানের সংখ্যা		আনুপাতিক ক্রমযৌগিক সংখ্যা	
			A	B	A	B	A	B
৬	৬	০.৬	৬	২	৬	২	৬	১.০৫
২৫	৩১	৩.১	১১	৩৮	১৭	৪০	১৭	২১.০৫
৬০	৯১	৯.১	১৩	৫২	৩০	৯২	৩০	৪৮.৭০
৮৪	১৭৫	১৭.৫	১৪	২৮	৪৪	১২০	৪৪	৬৩.২০
১০৫	২৮০	২৮.০	১৫	২৮	৫৯	১৪৮	৫৯	৭৭.৯০
১৫০	৪৩০	৪৩.০	১৭	২৬	৭৬	১৭৪	৭৬	৯১.৬০
১৭০	৬০০	৬০.০	১০	১২	৮৬	১৮৬	৮৬	৯৭.৯০
৭০০	১০০০	১০০.০	১৪	৪	১০০	১৯০	১০০	১০০.০০

অতএব লাভের লরেঞ্জ রেখা-



চিত্র- লাভের লরেঞ্জ রেখা

যেহেতু B অঞ্চলের প্রতিষ্ঠানের রেখা সমকেন্দ্রীয় ভবন রেখা থেকে দূরে রয়েছে সে জন্য A প্রতিষ্ঠানের চেয়ে B প্রতিষ্ঠানের লাভের কেন্দ্রীয়ভবন বেশি।

অনুশীলন (Activity) : মেসার্স সালেহা স্টোর ও নবারুন ট্রেডার্সের লাভের অংশ (হাজার টাকায়) নিম্নে দেওয়া হলো। লরেঞ্জ রেখা অংকন করুন এবং মন্তব্য লিখুন।

লাভ	A মেসার্স সালেহা স্টোর	B নবারুন ট্রেডার্স
১০	৩	১০
১৫	১২	১৫
২৫	১৪	২৫
২০	১৪	১২
৯০	১৮	১১
১৫০	২০	১১
২০০	১০	৭

সারমর্ম ঃ *কোন তথ্য সারির মধ্যক মান বা গড় থেকে সারির সংখ্যাগুলো কত বড় বা ছোট তার পরিমাপকে বিস্তার পরিমাপ বলে। বিস্তার পরিমাপ সাধারণত দুটি কাজে ব্যবহার করা হয়, যেমন- তথ্য সারির মধ্যক মান বা গড় মান হতে অন্যান্য সংখ্যাগুলোর ব্যবধান বা বিস্তৃতি পরিমাপ করা। এর সাহায্যে দুই বা ততোধিক তথ্যসারির বিস্তৃতি তুলনা করা। তথ্যসারির ওপর নির্ভর করে দুভাবে বিস্তার পরিমাপ করা হয়, যেমন- পরম বা অনপেক্ষ বিস্তার পরিমাপ। আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ যে পরিমাপ কোন একটি বিস্তৃতির পরিমাপ ও কেন্দ্রীয় পরিমাপের সাথে তুলনা করে নির্ণয় করা হয় তাকে আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ বলে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। কেন্দ্রীয় প্রবণতার চতুর্দিকে বিস্তৃতির পরিমাপ কোন্‌টি?

- ক) মধ্যক
- খ) প্রচুরক
- গ) বিস্তার
- ঘ) গড়

২। বিস্তার এর প্রকারভেদ কয়টি?

- ক) ৪টি
- খ) ৩টি
- গ) ৫টি
- ঘ) ২টি

৩। কোন্‌টি লরেঞ্জ রেখা দ্বারা পরিমাপ করা হয়?

- ক) গড়
- খ) বিস্তার
- গ) মধ্যক
- ঘ) প্রচুরক

পাঠ-৬.২

পরম বিস্তার পরিমাপ

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরম বিস্তার পরিমাপের বিভিন্ন পদ্ধতি সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- পরম বিস্তার পরিমাপের বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

পরম বিস্তার পরিমাপ (Absolute Measures of Dispersion)

পরিসর (Range)

পরিসর কোন তথ্যসারির সংখ্যাগুলোর মধ্যে সর্বাধিক ব্যবধানের পরিমাপকেই পরিসর বলে। কোন তথ্যসারির সবচেয়ে বৃহত্তম সংখ্যা এবং সবচেয়ে ছোট বা ক্ষুদ্রতম সংখ্যার বিয়োগফল উহার পরিসর।
অর্থাৎ, পরিসর = বৃহত্তম সংখ্যা - ক্ষুদ্রতম সংখ্যা

উদাহরণস্বরূপ ২, ৫, ১০, ৯, ১৫, ২০ সংখ্যাগুলোর পরিসর নির্ণয় করতে হলে প্রথমে এদের বৃহত্তম মান ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় করতে হবে। অতপর পরিসরের সূত্র অনুযায়ী, পরিসর = ২০ - ২ = ১৮
এখানে বৃহত্তম সংখ্যা = ২০ এবং ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = ২

ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে উচ্চতম শ্রেণীর উর্ধ্বসীমা এবং নিম্নতম শ্রেণীর নিম্নসীমার ব্যবধানকে পরিসরের পরিমাপ হিসাবে ব্যবহার করা হয়।
অর্থাৎ পরিসর = উচ্চতম শ্রেণীর উর্ধ্বসীমা ূ নিম্নতম শ্রেণীর নিম্নসীমা
উদাহরণস্বরূপ নিম্নের ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের জন্য পরিসর নির্ণয় করুন।

শ্রেণীব্যাপ্তি	৫-১৫	১৫-২৫	২৫-৩৫	৩৫-৪৫	৪৫-৫৫	৫৫-৬০
ঘটনসংখ্যা	৮	১২	১৫	১৮	১৫	১০

এখানে, উচ্চতম শ্রেণীর উর্ধ্বসীমা = ৬৫ এবং নিম্নতম শ্রেণীর নিম্নসীমা = ৫
অতএব, পরিসর = ৬৫-৫ = ৬০

অনুশীলন (Activity) : ১৭২ জন কর্মীর প্রত্যকদিন আয়ের উপাত্ত দেয়া হলো। পরিসর নির্ণয় করুন।

দৈনিক আয়	১৫-১৯	২০-২৯	৩০-৩৯	৪০-৪৯	৫০-৫৯	৬০ এর ওপরে
কর্মীর সংখ্যা	২৭	৩০	৫০	২৩	২২	২০

পরিসরের সুবিধা

- পরিসর যে কোন রাশিমালা বা বিন্যাসের শুধুমাত্র দু'টি প্রান্তীয় মানের ওপর নির্ভরশীল। তাই অতি সহজে এটি নির্ণয় করা যায়।
- এর স্পষ্ট সংজ্ঞা রয়েছে।
- এটি অত্যন্ত সহজবোধ্য।
- সর্বোপরি এটি স্বল্প শ্রমে এবং অতি কম সময়ে একটি বিন্যাসের রাশিগুলোর ভেদাভেদ সম্পর্কে ধারণা দিয়ে থাকে।

পরিসরের সীমাবদ্ধতা

- এটি সকল তথ্যমানের ওপর ভিত্তি করে তৈরি নয়।

- এটি নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা অনেক বেশি প্রভাবিত হয়।
- এটি প্রান্তীয় মান দ্বারা প্রভাবিত।
- এটি গাণিতিক প্রয়োগ উপযোগী নয়।
- এটি প্রান্ত খোলা শ্রেণীবিন্যাসের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়।

চতুর্থক ব্যবধান (Quartile Deviation)

যে কোন তথ্যসারির সংখ্যাগুলোর সমান চার ভাগে ভাগ করলে প্রত্যেক ভাগকে চতুর্থক বলে।

যে কোন তথ্যসারির সংখ্যাগুলোর সমান চার ভাগে ভাগ করলে প্রত্যেক ভাগকে চতুর্থক বলে। ২য় চতুর্থকটি সংখ্যাগুলোকে সমান দুভাগে ভাগ করে। প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্থককে $Q_১$, $Q_২$, $Q_৩$ ও $Q_৪$ দ্বারা প্রকাশ করলে চতুর্থক ব্যবধান হবে মধ্যক মান হতে প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থকের বিস্তৃতির পরিমাণ অর্থাৎ

$$\text{চতুর্থক ব্যবধান} = \frac{(Q_2 - Q_1) - (Q_2 - Q_3)}{2}$$

$$\text{বা, চতুর্থক ব্যবধান} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$\text{অর্থাৎ চতুর্থক ব্যবধান} = \frac{\text{তৃতীয় চতুর্থক - প্রথম চতুর্থক}}{২}$$

চতুর্থক নির্ণয়ঃ যদি কোন তথ্য সারির N সংখ্যক মান থাকে তবে j তম চতুর্থকে অবস্থান হবে $\frac{j(N+1)}{4}$ (j এর মান ১,২, ৩) তম মান। এখানে তথ্য সারিগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজাতে হবে।

প্রথম চতুর্থক কে $Q_১$ দ্বারা প্রকাশ করলে -

$Q_১ = 1 \times \left[\frac{N+1}{4}\right]$ তম মান,

দ্বিতীয় চতুর্থক কে $Q_২$ দ্বারা প্রকাশ করলে-

$Q_২ = 2 \times \left[\frac{N+1}{4}\right]$ তম মান। $Q_২$ কে মধ্যমা বলা হয়।

তৃতীয় চতুর্থককে $Q_৩$ দ্বরা প্রকাশ করলে $Q_৩ = 3 \times \left[\frac{N+1}{4}\right]$- তম মান

উদাহরণস্বরূপ, ২, ৫, ৭, ৯, ১৫, ১৮, ১২, ২০ যাহাকে উর্ধ্বক্রম অনুযায়ী সাজালে, ২, ৫, ৭, ১২, ১৫, ১৮, ২০ হয়। এখানে তৃতীয় চতুর্থক $3 \times \left(\frac{8+1}{4}\right)$ তম মান অর্থাৎ ১৮ এবং

প্রথম চতুর্থক $1 \times \left(\frac{8+1}{4}\right)$ ২তম মান অর্থাৎ ৫, চতুর্থক ব্যবধান $= \frac{18-5}{2} =$ ৬.৫।

ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করতে হলে প্রথমে $Q_১$, এবং $Q_৩$ নির্ণয় করতে হবে। এখানে,

$Q_১ = \frac{N}{4}$ তম রাশির মান যা দেখতে হবে কোন শ্রেণী ব্যাপ্তির ঘরে মানটি আছে সে ঘরই $Q_১$ শ্রেণীর নির্ণেয় ঘর। অতপর-

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{1}{4}N - f_c}{f_m} \times c$$

এখানে

$L_১ = Q_১$ শ্রেণীব্যাপ্তি ঘরের নিম্নসীমা

N = মোট সংখ্যা

$f_c = Q_১$ শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত ঘটনসংখ্যা

$f_m = Q_১$ শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা

$C = Q_১$ শ্রেণীর শ্রেণী ব্যাপ্তি

আবার,

$Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3}{4}N - f_c}{f_m} \times c$; [illegible]তম রাশির মান শ্রেণী ব্যাপ্তির যে ঘরে অবস্থান করবে সেই ঘরই $Q_৩$ নির্ণয়ের জন্য ব্যবহার করতে হবে।

এখানে,

$L_১ = Q_৩$ শ্রেণীর নিম্নতম সীমার মান

N = মোট সংখ্যা

$f_c = Q_৩$ শ্রেণীর পূর্ববর্তী শ্রেণীর ক্রমযোজিত ঘটন সংখ্যা

$f_m = Q_৩$ শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা

$C = Q_৩$ শ্রেণীর শ্রেণী ব্যাপ্তি

$\therefore$ চতুর্থক ব্যবধান = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

উদাহরণ

নিম্নলিখিত ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের জন্য চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করুন।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	৫০-৬০	৬০-৬৫	৬৫-৭০	৭০-৭৫	৭৫-৮০	৮০-৮৫	৮৫-৯০
ঘটনসংখ্যা	৮	১২	১৫	২০	১৬	১১	৯

সমাধান

শ্রেণী ব্যাপ্তি	৫০-৬০	৬০-৬৫	৬৫-৭০	৭০-৭৫	৭৫-৮০	৮০-৮৫	৮৫-৯০
ঘটনসংখ্যা	৮	১২	১৫	২০	১৬	১১	৯
যোজিত ঘটনসংখ্যা	৮	২০	৩৫	৫৫	৭১	৮২	৯১

এখানে, N = ৯০, $\frac{1}{4}N$ তম রাশির মান = $\frac{91}{4}$ = ২২.৭৫ তম রাশি।

যেহেতু, ২২.৭৫ তম রাশির মান ৬৫-৭৫ শ্রেণীতে আছে অতএব $Q_১$ নির্ণয়ের জন্য শ্রেণীব্যাপ্তি হবে ৬৫-৭০।

$$Q_1 = L_1 + \frac{\frac{1}{4}N - f_c}{f_m} \times c$$

এখানে, $L_১$ = ৬৫, f_c = ২০, f_m = ১৫ এবং C = ৫

$$\therefore Q_1 = 65 + \frac{\frac{91}{4} - 20}{15} \times 5 = 65.92$$

আবার, $Q_৩ = \frac{3}{4}N = \frac{3 \times 91}{4}$ তম রাশির মান = ৬৮.২৫ তম রাশির মান, যাহা ৭৫-৮০ শ্রেণী ব্যাপ্তিতে আছে

অতএব, $Q_3 = L_1 + \frac{\frac{3}{4}N - f_c}{f_m} \times c$; $L_১$ = ৭৫, f_c = ৫৫, f_m = ১৬ এবং C = ৫

$$\therefore Q_3 = 75 + \frac{\frac{3 \times 91}{4} - 55}{16} \times 5 = 79.14$$

$$\therefore \text{চতুর্থক ব্যবধান} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{79.14 - 65.92}{2} = 6.61$$

চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা

চতুর্থক ব্যবধানের সুবিধা হচ্ছে এটি অত্যন্ত সহজবোধ্য এবং সহজে এটি নির্ণয় করা যায়।

- এটি সহজে নির্ণয় করা যায়।
- এটি অত্যন্ত সহজবোধ্য।
- এটি পরিসরের চেয়ে বিস্তার পরিমাপ হিসেবে উত্তম।
- এটি প্রান্ত মান দ্বারা প্রভাবিত হয় না।
- প্রান্ত খোলা শ্রেণী বিশিষ্ট ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের জন্যও এটি নির্ণয় করা যায়।

চতুর্থক ব্যবধানের অসুবিধা

- এটি সকল উপাত্তের ওপর ভিত্তি করে তৈরি নয়।
- এটি নমুনা বিচ্যুতির দ্বারা প্রভাবিত হয়।
- এটি বীজগাণিতিক প্রয়োগ উপযোগী নয়।
- এটি বিন্যাসের স্থানীয় মানের ওপর ভিত্তি করে তৈরি তাই প্রকৃত অর্থে সঠিক বিস্তার পরিমাপ দেয় না।

অনুশীলন (Activity) : যশোর জেলার অন্তর্গত নওয়াপাড়া শঙ্কর পাশা টিউটোরিয়াল কেন্দ্রের ১৮ জন ছাত্র-ছাত্রীর দৈনিক খরচ দেয়া হলো, ৩৬, ৪২, ৫৬, ৩৮, ৪৯, ৫৭, ১৬, ৭৮, ৯, ৪৪, ৮৪, ৮২, ৫০, ৮৩, ৪০, ৩৩, ৫৫, ৯৬ এ তথ্যসারি হতে পরিসর, চতুর্থক ব্যবধান নির্ণয় করুন।

গড় ব্যবধান (Mean Deviation)

কোন তথ্য সারির গড় মান প্রত্যেক তথ্য মান হতে বিয়োগ করে তার পরম মানের সমষ্টিকে তথ্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে গড় ব্যবধান বলে।

কোন তথ্য সারির গড় মান প্রত্যেক তথ্য মান হতে বিয়োগ করে তার পরম মানের সমষ্টিকে তথ্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে গড় ব্যবধান বলে। যদি $X_১, X_২ .... X_N$, N সংখ্যক তথ্যমান হয় তাহলে গড়

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_N}{N}$$

$= \sum_{i=1}^{N} \frac{xi}{N}$; i এর মান ১ থেকে N পর্যন্ত। সামেশন ‘ $\sum$ ’ গ্রীক চিহ্ন যা যোগফল চিহ্নিত করে।

অতএব, গড় ব্যবধান $= \dfrac{|(X_1 - \overline{X})| + |(X_2 - \overline{X})| + ... + |(X_N - \overline{X})|}{N}$

$$= \frac{\Sigma |X_i - \overline{X}|}{N}$$

“ । ।” চিহ্নকে মোড বলা হয় যা উহার অন্তর্গত সকল মানকে যোগ বোধক সূচিত করে অর্থাৎ সংখ্যার আগে “-” চিহ্ন থাকলে তা হবে “+” চিহ্ন।

উদাহরণস্বরূপ, ১, ৪, ৭, ৮ তথ্য সংখ্যাগুলোর গড় ব্যবধান নির্ণয় করতে হলে প্রথমে গড় মান বের করতে হবে অর্থাৎ গড়, $\overline{X} = \dfrac{1+4+5+7+8}{5} = \dfrac{25}{5} = 5$

$\therefore$ গড় ব্যবধান $= \dfrac{|(1-5)| + |(4-5)| + |(5-5)| + |(7-5)| + |(8-5)|}{5}$

$$= \frac{|(-4)| + |(-1)| + |0| + |2| + |3|}{5}$$

$$= \frac{4+1+0+2+3}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$\therefore$ গড় ব্যবধান $= ২$

ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে গড় ব্যবধান $= \sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i |x_i - \overline{x}|}{n}$; $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

এখানে, $X_১, X_২ .... X_n$ একটি চলকের n সংখ্যক তথ্যমান এবং $f_১, f_২ .... f_n$ পর্যায়ক্রমিক ঘটনসংখ্যা এবং গড়, $\overline{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{N}$

উদাহরণ

নিম্নের তথ্য উপাত্ত হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	১০-১৫	১৫-২০	২০-২৫	২৫-৩০	৩০-৩৫	৩৫-৪০	৪০-৪৫

ঘটনসংখ্যা	৫	৮	৩	১২	১০	৮	১০

সমাধান

এখানে, গড় $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N}$ [illegible] = ২৯.৪৬

শ্রেণী ব্যবধান	মধ্যক মান	f_i	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
১০-১৫	১২.৫	৫	৮৪.৮০
১৫-২০	১৭.৫	৮	৯৫.৬৮
২০-২৫	২২.৫	৩	২০.৮৮
২৫-৩০	২৭.৫	১২	২৩.৫২
৩০-৩৫	৩২.৫	১০	৩০.৪০
৩৫-৪০	৩৭.৫	৮	৬৪.৩২
৪০-৪৫	৪২.৫	১০	১৩০.৪০
		N = ৬৫	$\sum f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$ = ৪৫০.০০

$\therefore$ গড় ব্যবধান = $\frac{450.00}{56}$ = ৮.০৩০

গড় ব্যবধানের সুবিধা

- এটি সহজে পরিমাপ করা যায়।
- এটি সহজবোধ্য।
- এটির স্পষ্ট সংজ্ঞা আছে।
- এটি তথ্য মানের ওপর ভিত্তি করে তৈরি বলে ভাল পরিমাপ পাওয়া যায়।
- এটি প্রাপ্তি মান দ্বারা কম প্রভাবিত হয়।
- বিন্যাসের তুলনামূলক আলোচনার অত্যন্ত ফলোদায়ক পরিমাপ।

গড় ব্যবধানের অসুবিধা

- পরিসংখ্যানিক সিদ্ধান্তে এটির উপযোগিতা নেই।
- সমাজ বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে খুবই কম ব্যবহৃত হয়।
- প্রান্ড় খোলা বিন্যাসে ব্যবহৃত হয় না।
- নমুনা আকার নগদানের সাথে সাথে এটির মানও বাড়তে থাকে।

অনুশীলন (Activity) : ৫, ১০, ১৫, ১৬, ১৮ তথ্যসারি হতে গড় ব্যবধান নির্ণয় করুন।

পরিমিত ব্যবধান (Standard Deviation)

থ্য সারি থেকে গড় র বর্গের সমষ্টিকে িত ব্যবধান বলে।

কোন তথ্য সারি থেকে গড় ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে পরিমিত ব্যবধান বলে। যদি $X_১, X_২$ .... X_N, N টি তথ্য সারির মান এবং উহার গড় $\bar{X}$ হলে,

পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\dfrac{(X_1 - \bar{x})^2 + (X_2 - \bar{x})^2 + ... + (X_N - \bar{x})^2}{N}}$

পরিমিত ব্যবধানকে σ দ্বারা প্রকাশ করলে $= \sqrt{\dfrac{\sum(\mathrm{Xi} - \bar{\mathrm{x}})^2}{\mathrm{N}}}$

$$= \sqrt{\frac{\sum(\text{Z\_¨mvwii gvb - Mo})^2}{\text{Z\_¨msL¨v}}}$$

উদাহরণস্বরূপ, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, সংখ্যাগুলোর পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করতে হলে প্রথমে গড় বের করতে হবে,

গড় $= \dfrac{3+4+5+6+7+8}{6} = \dfrac{33}{6} = 5.5$ Ges $\mathrm{N} = 6$

পরিমিত ব্যবধান,

$$= \sqrt{\frac{(3-5.5)^2 + (4-5.5)^2 + (5-5.5)^2 + (6-5.5)^2 + (7-5.5)^2 + (8-5.5)^2}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{6.25 + 2.25 + .25 + .25 + 2.25 + 6.25}{6}} = \sqrt{3} = 1.73$$

$= 1.73$ ।

ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে, যদি $X_১$, $X_২$ .... X_n একটি চলকের n সংখ্যক মান এবং $f_১$, $f_২$, ... f_n পর্যাক্রমিক ঘটনসংখ্যা হয় এবং গড় $= \bar{\mathrm{x}}$ তখন, পরিমিত ব্যবধান।

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2} \quad ; \quad \mathrm{N} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{f_i}$$

$$= \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i x_i^{\,2}}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}\right)^2\right]}$$

উদাহরণ

নিম্নের ঘটনসংখ্যা বিন্যাস থেকে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	১০-১৫	১৫-২০	২০-২৫	২৫-৩০	৩০-৩৫	৩৫-৪০	৪০-৪৫
ঘটনসংখ্যা	৩	৫	৮	১২	৯	৭	৪

সমাধান

পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়

শ্রেণী ব্যাপ্তি	ঘটনসংখ্যা	মধ্যমান	f_iX_i	$f_iX_i^2$
১০-১৫	৩	১২.৫	৩৭.৫	৪৬৮.৭৫
১৫-২০	৫	১৭.৫	৮৭.৫	১৫৩১.২৫
২০-২৫	৮	২২.৫	১৮০.০	৪০৫০.০০
২৫-৩০	১২	২৭.৫	৩৩০.০	৯০৭৫.০০
৩০-৩৫	৯	৩২.৫	২৯২.৫	৯৫০৬.০০
৩৫-৪০	৭	৩৭.৫	২৬২.৫	৯৮৪৩.৭৫
৪০-৪৫	৪	৪২.৫	১৭০.০	৭২২৫.০০
মোট	N = ৪৮		$\sum f_iX_i =$ ১৩৬০.০	$\sum f_iX_i^2 =$ ৪১৭০০.০০

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান,

$$\sigma = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{48} \frac{f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{48} f_i x_i}{N}\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{41700.00}{48} - \left(\frac{1360.00}{48}\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{48}[41700.00 - 38533.03]}$$

$$= \sqrt{65.97}$$

$$\therefore \sigma = 8.12$$

পরিমিত ব্যবধানের সুবিধা

- এটি বিস্তার পরিমাপের অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ এবং বহুল ব্যবহৃত পরিমাপ।
- এটির সুস্পষ্ট সংজ্ঞা আছে।
- পরিমিত ব্যবধানের একটি নির্দিষ্ট গাণিতিক অর্থ আছে।
- এটি খুবই কম নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা প্রভাবিত হয়।
- এটি তথ্যমানের ওপর ভিত্তি করে তৈরি।

পরিমিত ব্যবধানের সীমাবদ্ধতা

- এটি পরিমাপের যথার্থতা সম্পর্কে ধারণা দিতে পারে না।
- এটি নির্ণয় করা অপেক্ষাকৃত কঠিন।

অনুশীলন (Activity) : প্রথম n সংখ্যক ধনাত্মক সাধারণ সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

ভেদাঙ্ক (Variance)

পরিমিত ব্যবধানকে বর্গ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ তথ্য সারির ভেদাঙ্ক বলে।

পরিমিত ব্যবধানকে বর্গ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ তথ্য সারির ভেদাঙ্ক বলে। পরিমিত ব্যবধান σ হলে, ভেদাঙ্ক হবে $\sigma^২$।

যেহেতু, ভেদাঙ্ক = (পরিমিত ব্যবধান) ^{২}

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^২$ = (পরিমিত ব্যবধান) ^{২}

উদাহরণস্বরূপ, আমরা পূর্বের উদাহরণ দেখেছি পরিমিত ব্যবধান = ১.৭৩২

অতএব, ভেদাঙ্ক = (পরিমিত ব্যবধান) ^{২}

$\therefore$ ভেদাঙ্ক $\sigma^২ = (১.৭৩২)^২ = ৩$

উদাহরণ ১

গোমতা ইসহাকিয়া উচ্চ বিদ্যালয়ের ৯ জন ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা যথাক্রমে ৪.৫", ৩.০", ৪.৫", ৩.৯", ৪.৬", ৪.০", ৪.৪", ৩.৫"। তাদের উচ্চতার পরিসর, গড় ব্যবধান, পরিমিত ব্যবধান ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান

১। পরিসর

পরিসর = বৃহত্তম সংখ্যা - ক্ষুদ্রতম সংখ্যা
= ৪.৬ - ৩.০
= ১.৬

২। আমরা জানি, গড় ব্যবধান $= \dfrac{\sum|Xi - \bar{x}|}{N}$ এখানে, N = ৯

গড় $= \dfrac{4.1+3.0+4.5+3.9+4.3+4.6+4.0+4.4+3.5}{9} = \dfrac{36.3}{9} = 4.03$

$\therefore$ গড় ব্যবধান

$$= \frac{|(4.1-4.03)+(3.0-4.03)+(4.5-4.03)+(3.9-4.03)+(4.3-4.03)+(4.6-4.03)+(4.0-4.03)+(4.4-4.03)+(3}{9}$$

$$= \frac{.07+1.03+.47+.13+.27+.57+.03+.37+53}{9} = \frac{3.47}{9} = 0.38$$

$\therefore$ গড় ব্যবধান = ০.৩৮

৩। আমরা জানি, পরিমিত ব্যবধান $\sigma = \dfrac{\sqrt{\sum(Xi-\bar{x})^2}}{N}$

অতএব

$$\sigma = \frac{\sqrt{(4.1-4.03)^2 + (3.0-4.03)^2 + (4.5-4.03)^2 + (3.9-4.03)^2 + (4.3-4.03)^2 + (4.6-4.03)^2 + (4.0-4.}}{9}$$

এখানে, গড় = ৪.০৩ এবং N= ৯

$$\sigma = \frac{\sqrt{(.09)^2 + (1.03)^2 + (.47)^2 + (-.13)^2 + (.27)^2 + (-.03)^2 + (.37)^2 + (-.53)^2}}{9}$$

$$= \sqrt{.23} = .48$$

$\therefore$ নির্ণেয় পরিমিত ব্যবধান = ০.৪৮

৪। আমরা জানি, ভেদাঙ্ক = (পরিমিত ব্যবধান)^২ = (.৪৮)^২ = ০.২৩

$\therefore$ ভেদাঙ্ক = ০.২৩

উদাহরণ ২

নিম্নে ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের একটি তথ্য দেয়া হলো পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।

X_i	২	৫	৭	৮	১০	১৩	১৫
f_i	২	৪	৭	১০	৮	৫	৪

সমাধান

আমরা পরিমিত ব্যবধানের সংজ্ঞা হতে পাই,

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}\right)^2\right]}$

এখন,

X_i	f_i	f_iX_i	$f_iX_i^2$
২	২	৪	৮
৫	৪	২০	১০০
৭	৭	৪৯	৩৪৩
৮	১০	৮০	৬৪০
১০	৮	৮০	৮০০
১৩	৫	৬৫	৮৪৫
১৫	৪	৬০	৯০০
মোট	N = ৪০	= ৩৫৮	= ৩৬৩৬

$$\therefore \sigma = \sqrt{\left[\frac{3636}{40} - \left(\frac{358}{40}\right)^2\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{40}\left[3636 - \frac{358 \times 358}{40}\right]}$$

$$= \sqrt{10.8}$$

$$\therefore \sigma = 3.29$$

$\therefore$ পরিমিত ব্যবধান σ = ৩.২৯

আবার,

ভেদাংক $=$ (পরিমিত ব্যবধান)^২
$= (৩.২৯)^২$
$=$ ১০.৮
$\therefore$ ভেদাংক $\sigma^২ =$ ১০.৮

পরম বিস্তার পরিমাপের বৈশিষ্ট্য

- ভেদাঙ্ক সর্বদা পরিমিত ব্যবধান সাপেক্ষ না। যদিও ভেদাঙ্ক পরিমিত ব্যবধানের বর্গের সমান। কোন প্রকৃত ভগ্নাশের বর্গমূল ঐ ভগ্নাংশ অপেক্ষা বড় হয় যেমন, ভেদাঙ্ক $\frac{1}{4}$ হলে পরিমিত ব্যবধান হবে $\frac{1}{2}$ এক্ষেত্রে ভেদাঙ্ক ছোট। অন্যদিকে পূর্ণ সংখ্যার ভেদাঙ্ক সর্বদা পরিমিত ব্যবধান অপেক্ষা বড় হবে। যেমন, পরিমিত ব্যবধান ২ হলে ভেদাঙ্ক হবে ৪।
- পরিমিত ব্যবধান মূল ব্যবধান হতে স্বাধীন কিন্তু মাপনীর ওপর নির্ভরশীল।
- গড় ব্যবধান পরিমিত ব্যবধান অপেক্ষা বড় হতে পারে না।
- মধ্যমা থেকে নির্ণিত গড় ব্যবধান ক্ষুদ্রতম।
- দুটি সংখ্যার গড় ব্যবধান ও পরিমিত ব্যবধান উহাদের পরিমানের অর্ধেক।
- দুটি সংখ্যার গড় উহাদের পরিমিত ব্যবধান অপেক্ষা বড়।

অনুশীলন (Activity) : n সংখ্যাক মানের মধ্যে -১, ০ ও ১ এ মানগুলো যথাক্রমে n_1 , n_2 ও n_3 বার দেখা যায়। যদি $n_1 + n_2 + n_3$ হয়, তবে সমস্ত মানগুলোর গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।

__সারমর্ম ঃ__ পরিসর, চতুর্থক ব্যবধান, গড় ব্যবধান, পরিমিত ব্যবধান, ভেদাঙ্ক, ইত্যাদি হলো পরম বিস্তার পরিমাপ। পরিসর যে কোন রাশিমালা বা বিন্যাসের শুধুমাত্র দু'টি প্রান্তীয় মানের ওপর নির্ভরশীল। তাই অতি সহজে নির্ণয় করা যায়। যে কোন তথ্যসারির সংখ্যাগুলোর সমান চার ভাগে ভাগ করলে প্রত্যেক ভাগকে চতুর্থক বলে। কোন তথ্য সারির গড় মান প্রত্যেক তথ্য মান হতে বিয়োগ করে তার পরম মানের সমষ্টিকে তথ্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায়, তাকে গড় ব্যবধান বলে। কোন তথ্য সারি থেকে গড় ব্যবধানের বর্গের সমষ্টিকে পরিমিত ব্যবধান বলে। পরিমিত ব্যবধানকে বর্গ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ঐ তথ্য সারির ভেদাঙ্ক বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। পরম বিস্তার পরিমাপ এর ক্ষেত্রে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
- ক) মূল সংজ্ঞা হতে উদ্ভুত
- খ) মূল সংজ্ঞা হতে উদ্ভুত নয়
- গ) কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের অনুপাত হতে উদ্ভুত
- ঘ) কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপের শতকরা অনুপাত হতে উদ্ভত

২। পরিমিত ব্যবধান নির্ণয়ের সূত্র কোন্‌টি?
- ক) পরিমিত ব্যবধান $= \frac{1}{N}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
- খ) পরিমিত ব্যবধান $= \frac{1}{N}\sum X_i^{\,2} - \left(\frac{\sum X_i}{N}\right)^2$
- গ) পরিমিত ব্যবধান $= \sqrt{\frac{1}{N}\sum X_i^{\,2} - \left(\frac{\sum X_i}{N}\right)^2}$
- ঘ) পরিমিত ব্যবধান $= \frac{1}{N}\sum\left|\left(X_i - \overline{X}\right)\right|$

৩। মধ্যক হতে নির্ণীত গড় ব্যবধানের বৈশিষ্ট্যের ক্ষেত্রে কোন্‌টি সঠিক?
- ক) বৃহত্তম
- খ) ক্ষুদ্রতম
- গ) সমান
- ঘ) শূন্য

৪। দুটো সংখ্যার গড় তাদের পরিমিত ব্যবধানের ক্ষেত্রে কোন্‌টি সঠিক?
- ক) ছোট
- খ) বড়
- গ) সমান
- ঘ) শূন্য

পাঠ-৬.৩

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ

এ পাঠ শেষে আপনি -

- গড় ব্যবধান সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- বিভেদাঙ্ক সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- আদর্শ মানকৃত চলক সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপের বিভিন্ন সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ (Relative Measures of Dispersion)

পরিসরাঙ্ক

কোন তথ্যসারির পরিসরকে তথ্যসারির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের যোগফল দ্বরা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে পরিসরাঙ্ক বলে। অর্থাৎ

$$\text{পরিসরাঙ্ক} = \frac{\text{পরিসর}}{\text{বৃহত্তম সংখ্যা} + \text{ক্ষুদ্রতম সংখ্যা}}$$

উদাহরণস্বরূপ, কোন তথ্যসারি ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, হলে বৃহত্তম মান = ৭ এবং ক্ষুদ্রতম মান ৩

$\therefore$ পরিসর = ৭ - ৩ = ৪

$$\therefore \text{পরিসরাঙ্ক} = \frac{৪}{\text{বৃহত্তম সংখ্যা} + \text{ক্ষুদ্রতম সংখ্যা}} = \frac{৪}{৭+৩} = \frac{৪}{১০} = .৪০$$

গড় ব্যবধানাঙ্ক (Coefficient of Mean Deviation)

গড় ব্যবধানাঙ্ক বিস্তার পরিমাপের একটি আপেক্ষিক পরিমাপ। কোন তথ্যসারির গড় ব্যবধান ও গড়ের অনুপাতকে গড় ব্যবধানাঙ্ক বলে।

গড় ব্যবধানাঙ্ক বিস্তার পরিমাপের একটি আপেক্ষিক পরিমাপ। কোন তথ্যসারির গড় ব্যবধান ও গড়ের অনুপাতকে গড় ব্যবধানাঙ্ক বলে। এ অনুপাত শতকরায় প্রকাশ করা হয়।

$$\text{অর্থাৎ গড় ব্যবধানাঙ্ক} = \frac{\text{গড় ব্যবধান}}{\text{গড়}} \times ১০০$$

উদাহরণস্বরূপ ৫, ৬, ৮, ৯, ১০,১৩, ১২ তথ্যসারি গড় ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করতে হলে, প্রথমে গড় বের করতে হবে।

$$\text{গড়} = \frac{5+6+8+9+10+12+13}{7} = \frac{63}{7} = 9$$

$$\therefore \text{গড় ব্যবধান} = \frac{|(5-9)|+|(6-9)|+|(8-9)|+|(9-9)|+|(10-9)|+|(12-9)|+|(13-9)|}{7}$$

$$= \frac{4+3+1+0+1+3+4}{7} = \frac{16}{7} = 2.28$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় গড় ব্যবধানাঙ্ক} = \frac{\text{গড় ব্যবধান}}{\text{গড়}} \times ১০০ = \frac{২.২৮}{৯} \times ১০০ = ২৫.৩৩$$

চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক ঃ চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক কোন তথ্যসারির চতুর্থকের ভিত্তিতে পরিমাপ করা হয়। চতুর্থক ব্যবধানাঙ্কের সূত্রটি নিম্নে দেয়া হলো।

$$\text{চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক} = \frac{\text{তৃতীয় চতুর্থক - প্রথম চতুর্থক}}{\text{তৃতীয় চতুর্থক + প্রথম চতুর্থক}} \times \text{১০০}$$

উদাহরণস্বরূপ, ১, ৫, ৭, ৯ তথ্যসারির চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক নির্ণয় করতে হলে নিম্ন লিখিত চতুর্থক নির্ণয় করতে হবে

প্রথম চতুর্থক = ১

তৃতীয় চতুর্থক = ৭

$$\therefore \text{চতুর্থক ব্যবধানাঙ্ক} = \frac{7-1}{7+1} \times 100 = \frac{6}{8} \times 100 = 75$$

বিভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation)

কোন তথ্যসারির পরিমিত ব্যবধান ও গাণিতিক গড়ের অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে বিভেদাঙ্ক বলে। অর্থাৎ কোন তথ্যসারির পরিমিত ব্যবধানকে গাণিতিক গড় দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ১০০ দ্বারা গুণ করলে বিভেদাঙ্ক পাওয়া যায়।

কোন তথ্যসারির পরিমিত ব্যবধান ও গাণিতিক গড়ের অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে বিভেদাঙ্ক বলে।

$$\text{বিভেদাঙ্ক} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$\text{অতএব, বিভেদাঙ্ক} = \frac{\text{পরিমিত ব্যবধান}}{\text{গাণিতিক গড়}} \times \text{১০০}$$

উদাহরণস্বরূপ ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ১০, ১২, ১৩ সংখ্যাগুলোর বিভেদাঙ্ক নির্ণয় করতে হলে প্রথমে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করতে হবে। অতঃপর গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হবে

অর্থাৎ পরিমিত ব্যবধান σ

$$= \sqrt{\frac{(4-8.43)^2+(5-8.43)^2+(8-8.43)^2+(10-8.43)^2+(12-8.43)^2+(13-8.43)^2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{69.68}{7}} = \sqrt{9.95} = 3.15$$

$$\text{গাণিতিক গড়, } \bar{x} = \frac{4+5+7+8+10+12+13}{7} = 8.43$$

$$\therefore \text{বিভেদাঙ্ক} = \frac{\text{পরিমিত ব্যবধান}}{\text{গাণিতিক গড়}} \times \text{১০০}$$

$$= \frac{\text{৩.১৫} \times \text{১০০}}{\text{৮.৪৩}} = \text{৩৭.৩৭}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় বিভেদাঙ্ক} = \text{৩৭.৩৭}$$

অনুশীলন (Activity) : ১. ৫, ১০, ১৫, ২০, ... ১২৫ সংখ্যাগুলোর বিভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।

কোন চলকের পরিমিত ব্যবধানের সাপেক্ষে উহার গড় থেকে প্রতিটির সংখ্যার বিচ্যুতি পরিমাপকে আদর্শমানকৃত চলক বলা হয়।

আদর্শমানকৃত চলক

কোন চলকের পরিমিত ব্যবধানের সাপেক্ষে এর গড় থেকে প্রতিটি সংখ্যার বিচ্যুতি পরিমাপকে আদর্শমানকৃত চলক বলা হয়। অর্থাৎ কোন চলকের একক পরিমাণ পরিমিত ব্যবধানের জন্য এর গড় থেকে প্রতিটি সংখ্যার বিস্তৃতি কত তা যে চলকের সাহায্যে পরিমাপ করা হয় তাকে আদর্শমানকৃত চলক বলে।

আদর্শমানকৃত চলককে Zi দ্বারা প্রকাশ করলে, $Zi = \frac{|xi - \overline{x}|}{\sigma}; i = 1, 2 .... n$

যেখানে, xi = সাধারণ চলক, $\overline{x}$ = গড়, σ =পরিমিত ব্যবধান

অর্থাৎ আদর্শমানকৃত চলক = $\frac{\text{চলক - গড়}}{\text{পরিমিত ব্যবধান}}$

আদর্শ বিস্তার পরিমাপ

পরিসংখ্যানবিদ Yule (ইয়ল) এর মতে একটি আদর্শ বিস্তার পরিমাপের নিম্নলিখিত গুণাবলী থাকা বাঞ্ছনীয়-

- এর সঠিক ও সুস্পষ্ট সংজ্ঞা থাকা উচিত।
- এটি তথ্যসারির সকল মানের ওপর নির্ভরশীল হতে হবে।
- এটি সহজে গাণিতিক ও বীজ গাণিতিক পরিগণনার উপযোগী হতে হবে।
- এটি নমুনা বিচ্যুতি দ্বারা খুব বেশি প্রচলিত হওয়া উচিত নয়।
- এটি প্রান্তিক মান দ্বারা খুব বেশি প্রভাবিত হওয়া উচিত নয়।

ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্কের মধ্যে পার্থক্য

ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্কের মধ্যে পার্থক্যগুলো নিম্নরূপ-

ভেদাঙ্ক	বিভেদাঙ্ক
১. এটি বিস্তার পরিমাপের একটি পরম পরিমাপ	১. এটি বিস্তার পরিমাপের একটি আপেক্ষিক পরিমাপ
২. এটির একক আছে। এটি চলকের এককে মাপা হয়	২. এটি একটি অনুপাত তাই এটি একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা
৩. এটি ধারাভুক্ত সংখ্যাগুলো বিস্তারিত পরিমাপ করতে ব্যবহার করা হয়	৩. দুই বা ততোধিক বিন্যাসের তুলনা করতে ব্যবহার করা হয়
৪. ভেদাঙ্কের সূত্র ঃ	৪. বিভেদাঙ্কের সূত্র ঃ
$\sigma_x{}^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{N}$	বিভেদাঙ্ক = $\frac{\text{পরিমিত ব্যবধান}}{\text{গাণিতিক গড়}} \times$ ১০০

উদাহরণ ১

১০০টি তথ্যের গড় ও পরিমিত ব্যবধান যথাক্রমে ২০ ও ৩০ গণনার শেষে দেখা গেল, তাদের মধ্যে তিনটির মান ত্রুটিপূর্ণভাবে ২১, ২১ ও ১৮ হিসাবে গণনায় অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে এ মানগুলো বাদ দিয়ে গড় ও পরিমিত ব্যবধান কত হবে নির্ণয় করুন?

সমাধান

ধরুন মোট তথ্যসংখ্যা N এবং চলকের বিভিন্ন মান X

$\therefore$ N = ১০০, $\overline{x}$ = ২০ এবং পরিমিত ব্যবধান, σ = ৩

যদি $N_১$ ও $N_২$ সটিক মানগুলোর সংখ্যা এবং ঐ মানগুলোকে যথাক্রমে $X1_i$ ও $X2_i$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তবে

$N_১$ = ৩ ও $N_২$ = ১০০ - ৩ = ৯৭

এখন $\overline{X}_1 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_{1i} = \frac{1}{3}[21+21+18] = 20$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}\left[(21-20)^2 + (21-20)^2 + (18-20)^2\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}\times 6} = \sqrt{2}$$

আমরা জানি, $N\overline{X} = N_1\overline{X_1} + N_2\overline{X}_2 \Rightarrow 100\times 20 = 3\times 20 + 97\overline{X}_2$

$\therefore \overline{X}_2$ = ২০

$d_1 = \overline{X}_1 - \overline{X} = 20 - 20 = 0$

I $d_2 = \overline{X}_2 - \overline{X} = 20 - 20 = 0$

উদাহরণ ২

একটি ক্রিকেট টেস্ট সিরিজের ৪টি খেলার ১০টি ইনিংসের জন্য A ও B দু'জন খেলোয়াড়ের প্রাপ্ত রান সংখ্যার তালিকা দেয়া হলো। কোন্ খেলোয়াড়ের ব্যাটিং দক্ষতা বেশি?

ক্রিকেটার A ঃ ৫, ২৬, ৯৭, ৭৬, ১১২, ৮৯, ৬, ১০৮, ২৪, ১৬
ক্রিকেটার B ঃ ৫১, ৪৭, ৩৬, ৬০, ৫৮, ৩৯, ৪৪, ৪২, ৭১, ৫১

সমাধান

দুটি বিন্যাসের তুলনার ক্ষেত্রে বিভেদাঙ্কের ব্যবহার প্রযোজ্য। যে বিন্যাসের বিভেদাংক কম সেটি বেশি ভাল বলে বিবেচিত। আমরা বিন্যাস দুটি তুলনার জন্য প্রথমে বিভেদাংক নির্ণয় করব।

বিভেদাঙ্ক $= \frac{\text{cwiwgZ e¨eavb}}{\text{Mo}} \times 100$

এখানে পরিমিত ব্যবধান ও গড় নির্ণয়ের জন্য নিম্নসারণি ব্যবহার করব

ক্রিকেটার : A			ক্রিকেটার : B		
A	A - ৭৬ = a	a^2	B	B - ৪৭ = b	b^2
৫	-৭১	৫০৪১	৫১	৪	১৬
২৬	-৫০	২৫০০	৪৭	০	০
৯৭	২১	৪৪১	৩৬	-১১	১২১
৭৬	০	০	৬০	১৩	১৬৯
১১২	৩৬	১২৯৬	৫৮	১১	১২১
৮৯	১৩	১৬১	৩৯	-৮	৬৪
৬	-৭০	৪৯০০	৪৪	-৩	৯
১০৮	৩২	১০২৪	৪২	-৫	২৫
২৪	-৫২	২৭০৪	৭১	-২৪	৫৭৬
১৬	-৬০	৩৬০০	৫১	৪	১৬
	$\sum$ a = - ২০১	$\sum$ a^২ =২১৬৭৫		$\sum$ b = - ১৯	$\sum$ b^২ =১১১৭

$\therefore$ ক্রিকেটার A এর জন্য পরিমিত ব্যবধান, $Sa = \sqrt{\frac{\sum a^2}{n} - \left(\frac{\sum a}{n}\right)^2}$

এখানে, $\sum a = -$ ২০১

$\sum a^2 =$ ২১৬৭৫

$$\therefore Sa = \sqrt{\frac{21675}{10} - \left(\frac{-201}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2167.5 - 404.01}$$

$$= \sqrt{1772.49} = 42.1$$

এবং গড় $\bar{a} = \bar{A} - 76 \Rightarrow \bar{A} = 76 + \frac{-201}{10} = 76 - 20.1 = 55.9$

$\therefore$ ক্রিকেটার A এর জন্য বিভেদাঙ্ক $= \frac{42.1}{55.9} \times 100 = 75.3$

আবার ক্রিকেটার B এর জন্য পরিমিত ব্যবধান,

$$S_B = \sqrt{\frac{\sum b^2}{n} - \left(\frac{\sum b}{n}\right)^2}$$

এখানে,

$\sum b = -$ ১৯

$\sum b^2 =$ ১১১৭

$n =$ ১০

$$\therefore S_B = \sqrt{\frac{1117}{10} - \left(\frac{-19}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{111.70 - 3.61}$$

$$= \sqrt{108.09} = 10.4$$

এবং গড় $\bar{b} = \bar{B} - 47 \Rightarrow \bar{B} = b + 47 = \left(\frac{-19}{10}\right) + 47 = (-1.9) + 47 = 45.1$

$\therefore$ B ক্রিকেটারের জন্য বিভেদাঙ্ক $= \frac{10.4}{45.1} \times 100 = 23.1$

$\therefore$ B ক্রিকেটারের ব্যবধানাঙ্ক A ক্রিকেটারের চেয়ে কম। তাই B ক্রিকেটারের ব্যাটিং দক্ষতা A ক্রিকেটারের চেয়ে বেশি।

সারমর্ম ঃ *কোন তথ্যসারির পরিসরকে তথ্যসারির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মানের যোগফল দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে পরিসরাঙ্ক বলে। গড় ব্যবধানাঙ্ক বিস্তার পরিমাপের একটি আপেক্ষিক পরিমাপ। কোন তথ্যসারির গড় ব্যবধান ও গড়ের অনুপাতকে গড় ব্যবধানাঙ্ক বলে। কোন তথ্যসারির পরিমিত ব্যবধান ও গাণিতিক গড়ের অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে বিভেদাঙ্ক বলে। কোন চলকের পরিমিত ব্যবধানের সাপেক্ষে উহার গড় থেকে প্রতিটির সংখ্যার বিচ্যুতি পরিমাপকে আদর্শমানকৃত চলক বলা হয়।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। কোন্‌টি আপেক্ষিক বিস্তার পরিমাপ?

ক) একক যুক্ত মান
খ) একক বিহীন মান
গ) শূন্য মান
ঘ) একক যুক্ত মান ও শূন্য মান কোনটিই নয়

২। গড় বিভেদাঙ্ক এর সূত্র কোন্‌টি?

ক) গড় বিভেদাঙ্ক $= \dfrac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{N} \times 100$

খ) গড় বিভেদাঙ্ক $= \dfrac{\text{পরিমিত ব্যবধান}}{\text{গড়}} \times ১০০$

গ) গড় বিভেদাঙ্ক $= \dfrac{\text{পরিমিত ব্যবধান}}{\text{গড়}}$

ঘ) গড় বিভেদাঙ্ক $= \dfrac{\text{গড়}}{\text{পরিমিত ব্যবধান}} \times ১০০$

৩। কে আদর্শ বিস্তার পরিমাপের সংজ্ঞা দিয়েছেন?

ক) Winner
খ) Yule
গ) R. Fisher
ঘ) John Stone

চূড়ান্ত মূল্যায়ন - ইউনিট ৬

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলী

১। বিস্তার পরিমাপ উদাহরণসহ লিখুন।
২। পরিমিত ব্যবধান কাহাকে বলে। দেখান যে কেবলমাত্র কোন চলকের সমস্ত মানগুলো পরস্পর সমান হলে পরিমিত ব্যবধান মান শূন্য হবে।
৩। ভেদাঙ্কের সংজ্ঞা লিখুন। আদর্শ বিস্তার পরিমাপের ধর্মগুলো লিখুন।
৪। গড় ব্যবধান কাহাকে বলে। পরিমিত ব্যবধান ও গড় ব্যবধানের পার্থক্য নির্ণয় করুন।
৫। বিভিন্ন প্রকারের বিস্তার পরিমাপগুলো আলোচনা করুন।
৬। পরম বিস্তার পরিমাপের সংজ্ঞা লিখুন এবং লরেঞ্জ রেখা কী ব্যাখ্যা করুন।
৭। ভেদাঙ্ক ও বিভেদাঙ্কের পার্থক্যগুলো লিখুন।
৮। ব্যাখ্যা করুন : পরম বিস্তার পরিমাপ, ভেদাঙ্ক, বিস্তার পরিমাপ, লরেঞ্জ রেখা।
৯। দুটি সংখ্যায় ভেদাঙ্ক ১ ও গড় ৭ সংখ্যা দুটি বের করুন।
১০। প্রথম ১০টি স্বাভাবিক সংখ্যার বিভেদাঙ্ক নির্ণয় করুন।
১১। $X_১$, $X_২$, $X_৩$ এ তিনটি সংখ্যার পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।
১১। বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের একটি টিউটোরিয়াল কেন্দ্রের ছাত্র-ছাত্রীর বৃত্তির বিভেদাঙ্ক যথাক্রমে ৫০% এবং ৭০% তাদের পরিমিত ব্যবধানের মান ২০ টাকা ও ১৫ টাকা। যদি ছাত্র ৬০% থাকে তবে ছাত্রীদের বৃত্তির গড় নির্ণয় করুন।
১৩। ৭, ৮, ৯ তথ্যসারি হতে পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় করুন।
১৪। প্রমাণ করুন দুটি চলকের পরিমিত ব্যবধান চলক দুটির অন্তরের অর্ধেকের সমান হলে পরিমিত ব্যবধান হবে, $\sigma = \left|\frac{X_1 - X_2}{2}\right|$

উত্তরমালা - ইউনিট ৬

পাঠ ৬.১
১। গ ২। ঘ ৩। খ
পাঠ ৬.২
১। ক ২। গ ৩। খ ৪। খ
পাঠ ৬.৩
১। খ ২। খ ৩। খ