১১

নিশ্চয়তার সীমা ও প্রকল্প যাচাই
(Confidence Interval ও Test of Hypothesis)

তথ্যবিশ্ব থেকে নমুনায়নের মাধ্যমে নমুনা সংগ্রহ করে ঐ নমুনা বিশ্লেষণের মাধ্যমে তথ্য বিশ্বের প্রকৃতি সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। তথ্যবিশ্বের পরামান সমূহের নিরূপিত মান এদের প্রকৃত মানের কাছাকাছি কিনা এটা পরীক্ষা করার পদ্ধতিই হচ্ছে প্রকল্প যাচাই। প্রকল্প যাচাইয়ের পূর্বে পরামান সম্পর্কে কল্পনা করতে হয় যাকে প্রকল্প বলা হয়। তথ্য মানের ভিত্তিতে এ প্রকল্প গৃহীত বা বাতিল হবে এ সম্পর্কে সিদ্ধান্ত নেয়ার পরিসংখ্যানিক পদ্ধতি হলো প্রকল্প যাচাই পদ্ধতি। এ ইউনিটে আমরা প্রকল্প যাচাই, z ও t অভীক্ষা নির্ণয় ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করবো।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

পাঠ-১১.১

প্রকল্প যাচাই ধারণা
(Concept of test Hypothesis)

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- পরিসংখ্যানিক প্রকল্প যাচাই কি
- প্রকল্পের বিস্তারিত আলোচনা

তথ্য বিশ্বের পরামান সম্পর্কে কল্পনাগুলোকে প্রকল্প বলা হয়।

কোনো তথ্য বিশ্বের সম সম্ভব উপায়ে গৃহীত নমুনার সাহায্যে যে প্রকল্প বিচার করা হয় তা হলো নাস্তি (null) প্রকল্প।

পরিসংখ্যানিক অনুমিতির (Statistical inference) একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ অংশ হলো প্রকল্প যাচাই। পরিসংখ্যানিক অনুমিতির লক্ষ্য হলো নমুনাজের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী সমগ্রকের পরামানের সম্পর্কে সিদ্ধান্ত গ্রহণ। বিভিন্ন পর্যবেক্ষণের সাহায্যে বিভিন্ন চলকের মধ্যে গাণিতিক সম্পর্কের নমুনাজ থেকে প্রাপ্ত প্রাক্কলিত মানগুলোর সংখ্যাতাত্ত্বিক গ্রহণযোগ্যতা বিচারের জন্য এমন কিছু বিধির প্রয়োজন হয় যার সাহায্যে প্রাক্কলিত মানগুলো গ্রহণ করা হবে কিনা সে বিষয়ে সিদ্ধান্ত নেয়। এক্ষেত্রে সুবিধা হত যদি সমগ্রকের পরামান জানা থাকে তবে নমুনাজ থেকে প্রাপ্ত মানের তুলনা করা যেত। কিন্তু বাস্তবে পরামানের মান জানা থাকে না। তাই কতগুলো কল্পনার ওপর নির্ভর করতে হয়। তথ্য বিশ্বের পরামান সম্পর্কে এ কল্পনাগুলোকে প্রকল্প বলা হয়। কোনো তথ্য বিশ্বের সম সম্ভব উপায়ে গৃহীত নমুনার সাহায্যে যে প্রকল্প বিচার করা হয় তা হলো নাস্তি (null) প্রকল্প। এখানে নাস্তি শব্দটি প্রকৃত ও প্রকল্পিত মানের মধ্যে কোনো পার্থক্য নেই বা এ পার্থক্যের মান হলো শূন্য। তাই এ প্রকল্পকে H_0 দ্বারা সূচিত করা হয়। তথ্য বিশ্বের পরামানের প্রকৃত মান সম্পর্কে প্রকল্প কখনও প্রস্তুত করা কঠিন হয়। আবার অনেকগুলো প্রকল্পিত মান নমুনাজের মানের সাথে সামঞ্জস্যপূর্ণ হয় এবং সেক্ষেত্রে অনেকগুলো সম্ভব প্রকল্প থেকে সিদ্ধান্ড় গ্রহণের সমস্যা দেখা দেয়। এ সমস্যা এড়ানোর জন্য নমুনাজের প্রকৃত মান শূন্য নেয়া যায় অর্থাৎ $H_0{:}\theta=0$। যে কোনো নাস্তি প্রকল্পে একটি বিপরীত প্রকল্প বিচার করা হয় তাকে বিকল্প প্রকল্প বলে। বিকল্প প্রকল্পকে H_1 বা H_a দ্বারা সূচিত করা হয়। এবং এক্ষেত্রে H_1 বা $H_a: \theta\neq0, \theta>0, \theta<0$, যে কোনো প্রকারের হতে পারে। প্রকল্প দু' ধরনের হয়।

১। সরল প্রকল্প (Simple hypothesis)
২। যৌগিক প্রকল্প (Composite hypothesis)

যে প্রকল্পে কোনো নিবেশনে তার আপেক্ষিক রূপ ও নমুনাজ সম্পূর্ণ রূপে নির্দিষ্ট থাকে তাকে সরল প্রকল্প বলে।

সরল প্রকল্প (Simple hypothesis) : যে প্রকল্পে কোনো নিবেশনে তার আপেক্ষিক রূপ ও নমুনাজ সম্পূর্ণ রূপে নির্দিষ্ট থাকে তাকে সরল প্রকল্প বলে অর্থাৎ

$H_0 : \theta=\theta_0$;

$H_1 : \theta= \theta_1$ প্রকল্পটি সরল

কোনো প্রকল্প সরল না হলে তাকে যৌগিক প্রকল্প বলে।

যৌগিক প্রকল্প (Composite hypothesis) : কোনো প্রকল্প সরল না হলে তাকে যৌগিক প্রকল্প বলে। উদাহরণ স্বরূপ : নাস্তি কল্পনা-

$H_0 : \theta \neq \theta_0$

$Ha : \theta>\theta_1$, or $\theta<\theta_1$ একটি যৌগিক প্রকল্প।

তথ্য বিশ্বের পরামান সম্পর্কে প্রকল্প বিচারের ক্ষেত্রে যে প্রক্রিয়া গ্রহণ করা হয় তা হলো মুখ্য ও বিকল্প প্রকল্পগুলো গঠন করা। এরপর বিচারের যথার্থতা মাত্রা (Significant level) ও বাতিল অঞ্চল (Critical region) স্থির করা। অতপর যাচাই স্ট্যাটিস্টিক নির্দিষ্ট করে উপযুক্ত পরিসংখ্যানিক

সারণী থেকে নির্দিষ্ট বাতিল এলাকা নির্ধারণ করা হয়। পরবর্তীতে উপযুক্ত সূত্রের সাহায্যে প্রয়োজনীয় যাচাই স্ট্যাটিসটিক্স মান নির্ণয় করে ঐ মানকে সারণীভিত্তিক মানের সাথে তুলনা করে প্রকল্প বাতিল বা গ্রহণ সিদ্ধান্ত নেয়া হয়।

সারমর্ম ঃ পরিসংখ্যানিক অনুমিতির কাজ হলো নমুনাজের বৈশিষ্ট্য অনুযায়ী সমগ্রকের পরামানের সম্পর্কে সিদ্ধান্ত গ্রহণ করা।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন : ১১.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। তথ্য বিশ্বের পরামান সম্পর্ক নির্ণয়ে যে কল্পনা করা হয় তাকে কি বলে-
ক. গড় খ. প্রকল্প
গ. ভেদাঙ্ক ঘ. সংশ্লেষাঙ্ক

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন :

২। যে কোনো নাস্তি প্রকল্পের বিপরীত প্রকল্পকে বিকল্প প্রকল্প বলে।

৩। নাস্তি প্রকল্পকে H_0 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

শূন্যস্থান পূরণ করুন:

৪। বিকল্প প্রকল্পকে সুচিত করা হয় ------ দিয়ে।

৫। $H_0 : \theta \neq \theta_0$
$H_a : \theta_0 < \theta; \theta > \theta_0$
এই প্রকল্পটি ------------- ।

৬। প্রকল্প দু' প্রকার ক. --- ও খ. ---।

পাঠ-১১.২

স্বাধীনতার মাত্রা, নিশ্চয়তার মাত্রা ও সংজ্ঞাসমূহ

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- স্বাধীনতার মাত্রা সম্পর্কে
- নিশ্চয়তার মাত্রা সম্পর্কে

বাতিল এলাকা (Rejection Region): নাস্তি কল্পনা সত্য হলে যাচাই স্ট্যাটিস্টিক এর যে সমস্ত মানের জন্য নাস্তি কল্পনা বাতিল হয়ে যায় ঐ সমস্ত মানের সমন্বয়ে গঠিত ক্ষেত্রকে বাতিল এলাকা বলে। একে সংশয় এলাকাও বলা হয়।

গ্রহণীয় এলাকা (Acceptance Region): নাস্তি কল্পনা সত্য হলে যাচাই কল্পনা বাতিল নয় বলে বিবেচিত হয়। যাচাই স্ট্যাটিস্টিক এর সমস্ত মানের জন্য যাচাই কল্পনা বাতিল নয়। ঐ সমস্ত মানের সমন্বয়ে গঠিত ক্ষেত্রকে গ্রহণীয় এলাকা বলে। গ্রহনীয় এলাকাকে আস্থা এলাকাও বলে।

স্বাধীনতার মাত্রা (Degrees of Freedom) : যে কয়টি নিরপেক্ষ বা অনপেক্ষ চলকের উপর ভিত্তি করে যাচাই স্ট্যাটিস্টিক নির্ণয় করা হয় তার সংখ্যাকে স্বাধীনতার মাত্রা বলে।

যথার্থতা মাত্রা (Level of Significance) : প্রকল্প যাচাই পদ্ধতি কল্পনার সাপেক্ষে প্রমাণ জোগাড় করে এবং উহার বিপরীতে কোনো প্রমাণ উপস্থিত করে না। তাই যাচাইয়ের ক্ষেত্রে একটি কল্পনাকে গ্রহণ করার অর্থ এই নয় যে এটা অন্যান্য যাচাইয়ের ক্ষেত্রেও সব সময়ই গৃহীত হবে। একটি যাচাই পদ্ধতি থেকে উদ্ভুত সিদ্ধান্ত সব সময়ই ভুল সাপেক্ষে নেয়া হয়। এ ভুলের পরিধি নির্ভর করে যাচাই পদ্ধতিতে যে সীমা ব্যবহার করা হয় তার ওপর। সচরাচর ৫% সীমার ওপর নির্ভর করে কল্পনাটি নাকচ অথবা গ্রহণ করা হয় অর্থাৎ শতকরা ৫টি ক্ষেত্রে ভুল সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া সম্ভাবনা থাকে। তাই এ সীমাকে যথার্থতা সীমা (Level of Significance) বলা হয়।

নিশ্চয়তার সীমা (Confidence Limit) : পরামান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে একটি মাত্র মান নির্ণয়ের পরিবর্তে দুটি সীমা নির্দিষ্ট করে পরামান নির্ণয় করা যায় যার মধ্যে একটি নির্দিষ্ট সম্ভাবনাসহ প্রয়োজনীয় পরামান থাকবে। যদি n আকারে কোনো সমসম্ভাবনাযুক্ত নমুনার গড় μ এবং ভেদাঙ্ক σ^2 হয় তবে-

$E(x)=\mu$ এবং $Var(\bar{x})=\sigma^2/n$ অতএব

$Z=\dfrac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ পরিমিত বিন্যাস এবং এ বিন্যাসের বৈশিষ্ট্য অনুসারে P[-১.৯৬ ≤ z ≤+১.৯৬]=.৯৫ হবে .৯৫ সম্ভাবনায় Z'র মান ± ১.৯৬ এ অন্তরের মধ্যে থাকবে, এখানে

P[-১.৯৬≤ z ≤ +১.৯৬]=.৯৫

অথবা P[-১.৯৬≤ $\dfrac{(\bar{x}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}$ ≤+১.৯৬]=.৯৫

অথবা P[$\bar{x}$ -১.৯৬$\sigma/\sqrt{n}$ ≤μ≤ $\bar{x}$ +১.৯৬$\sigma/\sqrt{n}$]=.৯৫

অর্থাৎ μ এর ০.৯৫ সম্ভাবনার মাত্রার মানের অন্তরের দুটি সীমা হলো $\bar{x}$ -১.৯৬ $\sigma/\sqrt{n}$ এবং $\bar{x}$ +১.৯৬$\sigma/\sqrt{n}$ । এগুলো $\bar{x}$ মানের উপর নির্ভরশীল। অন্তরের এ সীমা দুটিকে বলা হয় আস্থা বা নিশ্চয়তা সীমা (Confidence limit) এবং উহাদের বিয়োগফলকে বলা হয় আস্থা বা নিশ্চয়তার অন্তর এবং সংশ্লিষ্ট সম্ভাবনার মানকে অর্থাৎ ০.৯৫ বলা হয় আস্থা বা নিশ্চয়তা সহগ।

সারণী মানের সাথে নির্দিষ্ট যথার্থতা মাত্রা যা যাচাই স্ট্যাটিস্টিক এর স্বাধীন তার মাত্রার তুলনা করতে হবে। নির্নীত মান যদি সারণী মানের চেয়ে বড় হয় তবে নাস্তি কল্পনা বাদ দিতে হবে অন্যথায় গ্রহণ করতে হবে।

সারমর্ম ঃ প্রকল্প যাচাই করতে নাস্তি কল্পনা, সংশয় এলাকা যাচাই স্ট্যাটিস্টিক ইত্যাদি জানা প্রয়োজন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন : ১১.২

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন:

১। সচরাচর ৫% সীমার উপর নির্ভর করে কল্পনাটি নাকচ অথবা গ্রহণ করা হয়।

২। নির্ণীত মান যদি সারণী মানের চেয়ে বড় হয় তবে নাস্তি কল্পনা গ্রহণ করতে হবে অন্যথায় বাদ দিতে হবে।

৩। বাতিল এলাকাকে সংশয় এলাকাও বলে।

৪। যে কয়টি নিরপেক্ষ চলকের উপর ভিত্তি করে যাচাই স্ট্যাটিস্টিক নির্ণয় করা হয় তার সংখ্যাকে স্বাধীনতার মাত্রা বলে।

পাঠ-১১.৩

Z ও t অভীক্ষা : মান নির্ধারণ ও সম্পর্ক এবং নিশ্চয়তার সীমা

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- পরিমিত যাচাই স্ট্যাটিস্টিক নির্ণয়
- t যাচাই স্ট্যাটিস্টিক নির্ণয়
- বভিন্ন সমস্যার সমাধান

যথাযথ যাচাইয়ের জন্য সাধারণত পরিমিত স্ট্যাটিস্টিক, t স্ট্যাটিস্টিক যাচাই মান ব্যবহার করা হয়।

পরিমিত যাচাই (Normal test) :

বড় নমুনার প্রকৃতি যাচাই করতে পরিমিত যাচাই করা হয়।

বড় নমুনার প্রকৃতি যাচাই করতে পরিমিত যাচাই করা হয়। পরিমিত যাচাইকে Z দ্বারা প্রকাশ করা হয়। Z স্ট্যাটিস্টিক এর সূত্র নিম্নরূপ :

$Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

যেখানে, গড়=μ, ভেদাঙ্ক = σ^2 এবং n=নমুনার আকার। উপরোক্ত বিন্যাসটি পরিমিত বিন্যাস অনুসরণ করে যার গড় ০ ও পরিমিত ব্যবধান ১।

ধরা যাক $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ তথ্যমান সমূহ n আকারের একটি পরিমিত তথ্য বিশ্ব থেকে নেওয়া হয়েছে। তথ্য বিশ্বের গড় μ সম্পর্কে যথার্থতা যাচাই করতে হবে। এটি করতে হলে পরিমিত বিন্যাসের ভেদাঙ্ক σ^2 এর মান পূর্বের যে কোনো জরিপ থেকে জেনে নিতে হবে। নাস্তি কল্পনা H_0 : $\mu=\mu_\circ$ যাচাই করতে হলে, $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ এখন $Z\geq$১.৯৬ হলে ৫% যথার্থতার মাত্রা নাস্তি কল্পনা বাতিল হবে অন্যথায় গৃহীত হবে।

উদাহরণ :

একটি তথ্য বিশ্বের পরিমিত বিন্যাস থেকে ১৫ আকারের নমুনা নেয়া হলো। নমুনার তথ্য সমূহ নিম্নরূপ : ৩০, ২১, ২৪, ২৮, ৩০, ৩৮, ২৩, ২৪, ২৫, ৩৪, ২৬, ৪০, ৪৩, ২৩।

পরিমিতবিন্যাসের ভেদাঙ্ক σ^2 = ১৬, তাহলে যাচাই করুন $H_\circ$: μ=৩৫

সমাধান :

ধরা যাক, নাস্তি কল্পনা,

$H_\circ$: μ=৩৫ এবং σ^2 =১৬

$H_\circ$: $\mu \neq$ ৩৫

যাচাই স্ট্যাটিস্টিক $Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z_n$ বিন্যাস

এখানে $\bar{x} = \frac{৩০+২১+....+২৩}{১৫}$ = ২৯.৭৩

$Z=\dfrac{২৯.৭৩-৩৫}{৪/\sqrt{১৫}}=\dfrac{-৫.২৭}{১.০৩}=-৫.১২$

$\because$ Z=-৫.১২ এখন Z>১.৯৬ সুতরাং নাস্তি কল্পনা ৫% যথার্থতা মাত্রায় বাতিল।

অনুশীলন (Activity): তথ্য বিশ্বের পরিমিত বিন্যাস থেকে ২০ আকারের নমুনা প্রাপ্ত পরামান $\bar{x}$ =৩০.৭৫। পরিমিত বিন্যাসের ভেদাঙ্ক σ^2 =২৫। নাস্তি কল্পনা $H_\circ$: μ=৪০ হবে তা যাচাই করুন।

t যাচাই (t Statistic) :

নমুনার আকার খুব ছোট হলে এবং তথ্য বিন্যাসের ভেদাঙ্ক জানা না থাকলে পরিমিত যাচাই পদ্ধতি ব্যবহার না করে t যাচাই ব্যবহার করা হয় এবং এ ক্ষেত্রে σ এর নিরূপিত মান 's' নিরূপিত করতে হয়। t যাচাইয়ের সূত্র নিম্নরূপ :

নমুনার আকার খুব ছোট হলে এবং তথ্য বিন্যাসের ভেদাঙ্ক জানা না থাকলে t যাচাই ব্যবহার করা হয়।

$t=\dfrac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}$ ~t বিন্যাস যার স্বাধীন মাত্রা n-১

এখানে $s=\sqrt{\dfrac{1}{n-১}\sum(x_i-\bar{x})^2}$ হলো σ এর নিঝুঁকি নিরূপক।

যদি t-এর মান (n-১) স্বাধীন মাত্রায় এবং ৫% অথবা ১% যথার্থতা মাত্রায় সারণীকৃত t -এর মানের চেয়ে বড় হয় তবে নাস্তি কল্পনা $H_\circ$: $\mu=\mu_\circ$ বর্জন হবে অন্যথায় গৃহীত হবে।

উদাহরণ :

একটি নমুনার তথ্যসমূহ নিম্নরূপ

৩০, ২১, ২৪, ২৮, ৩৫, ৩০, ৩৮, ২৩, ৪০, ৪৩, ২৪, ২৫, ৩৪, ২৬

নমুনার ভেদাঙ্ক অজানা নাস্তি কল্পনা $H_\circ$: $\mu_\circ$=৩৫ যাচাই করুন।

সমাধান :

যেহেতু নমুনা আকার ছোট এবং σ এর মান অজানা অর্থাৎ আমরা t যাচাই করবো। দেওয়া আছে $\mu_\circ$=৩৫, n=১৫

এখন $s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2}$

$s=\sqrt{\dfrac{১}{১৫-১}+\left[(৩০-২৯.৭৩)^২.......(২৬-২৯.৭৩)^২\right]}$ $\because \bar{x}=\dfrac{৩৫+২১+....+২৩}{১৫}$=২৯.৩৭

$=\sqrt{(৬.৭৮৯)^২}$

$\therefore$ s= ৬.৭৮৯

অতএব, $t=\dfrac{|২৯.৭৩-৩৫|}{৬.৭৮৯/\sqrt{১৫-১}}=\dfrac{-৫.২৭}{১.৭৫}$

= ।-৩.০১।

=৩.০১

এখন, ৫% যথার্থতা মাত্রায় (১৫-১) বা ১৪ স্বাধীন মাত্রায় t-এর সারণীকৃত মান ২.১৪৫ অর্থাৎ (t .০২৫; : ১৪=২.১৪৫)≤(t=৩.০১)। সুতরাং নাস্তি কল্পনা বাতিল।

অনুশীলন (Activity): তথ্য বিশ্ব থেকে ১০ আকারের একটি নমুনার তথ্য মান নিম্ন দেওয়া হলো :
৫০, ৬০, ৬৫, ৬১, ৫৯, ৩০, ৪০, ৪৫, ৫২, ৫৫
নাস্তি কল্পনা H_o : μ=৯০ হবে, যাচাই করুন।

সারমর্ম ঃ সাধারণ যথার্থতা যাচাইয়ের জন্য পরিমিত স্ট্যাটিস্টিক ব্যবহার করা হয় যখন আকার বড় হয় এবং নমুনার আকার ছোট হলে t Statistic ব্যবহার করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন : ১১.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। তথ্য বিশ্বের ভেদাঙ্ক অজানা এবং নমুনার আকার ছোট হলে যে যাচাই স্ট্যাটিস্টিক ব্যবহার করা হয় সেটি হলো-
ক. পরিমিত খ. t স্ট্যাটিস্টিক
গ. F স্ট্যাটিস্টিক ঘ. র‌্যাঙ্ক টেট

২। Z যাচাই স্ট্যাটিস্টিক সূত্রটি হলো-
ক. $t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ খ. $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
গ. $\frac{(n-1)\sigma^2}{n}$ ঘ. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন:

৩। t এর স্বাধীন মাত্রা (n-১)

৪। Z এর সাধারণ মাত্রা $n_১$+১

শূন্যস্থান পূরণ করুন:

৫। t যাচাইয়ের সূত্র t =--- ।

৬। z যাচায়ের সূত্র z= --- ।

পাঠ-১১.৪

এক প্রান্তীয় ও দুই প্রান্তীয় যাচাই

(One Tailed and Two Tailed test)

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

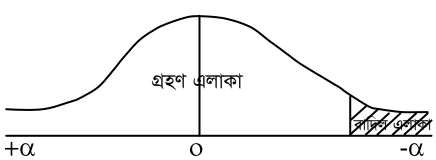
- এক প্রান্তীয় যাচাই
- দুই প্রান্তীয় যাচাই
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

যাচাই পরীক্ষাতে সাধারণত ৫% মান ধরে নেয়া হয় কিন্তু বর্তমান পদ্ধতিতে সম্ভাবনা মানকে অগ্রাধিকার দেয়া হয়। ইচ্ছাকৃত মান বিবেচনার চেয়ে সম্ভাবনার মান গ্রহণ করলে H_0 সম্পর্কে ভালো বিবেচনা সিদ্ধান্ত পাওয়া সম্ভব।

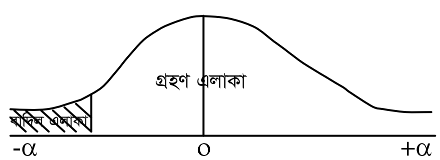
এক প্রান্তীয় যাচাই :

যদি বাতিল এলাকা (Rejection region) যাচাই নমুনা মানের সম্ভাবনা বিন্যাসের প্রথম প্রান্তে অথবা শেষ প্রান্তে অবস্থিত হয় তাহলে এরূপ যথার্থতা যাচাইকে এক প্রান্তীয় যাচাই বলে। নিচে এক প্রান্তীয় যাচাইয়ের চিত্র দেওয়া হলো।

যদি বাতিল এলাকা (Rejection region) যাচাই নমুনা মানের সম্ভাবনা বিন্যাসের প্রথম প্রান্তে অথবা শেষ প্রান্তে অবস্থিত হয় তাহলে এরূপ যথার্থতা যাচাইকে এক প্রান্তীয় যাচাই বলে।



চিত্র ক: ডান প্রান্তীয় বাতিল এলাকা



চিত্র খ: বান প্রান্তীয় বাতিল এলাকা

এখানে, চিত্র 'ক' হলো ডান প্রান্তীয় বাতিল এলাকা এবং চিত্র 'খ' হলো বাম প্রান্তীয় বাতিল এলাকা। উভয়ই এক প্রান্তীয় যাচাই চিত্র।

এক প্রান্তীয় যাচাই পদ্ধতি :

ধরা যাক, কোনো তথ্য বিশ্বের পরামান, μ এক প্রান্তীয় যাচাই এর জন্য নাস্তি কল্পনা।

ডান প্রান্তীয় যাচাই-এর ক্ষেত্রে

i) $H_0 : \mu \leq \mu_\circ$ এবং

$H_a : \mu > \mu_\circ$

বাম প্রান্তীয় যাচাই এর ক্ষেত্রে

ii) $H_0 : \mu \geq \mu_\circ$ এবং

$H_a : \mu < \mu_\circ$

এখন, নমুনা গড়কে $\mu_\circ = \bar{x}$ দ্বারা প্রকাশ করলে

$Z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} \sim N(০, ১)$ যার স্বাধীন মাত্রা

যেখানে $\sigma_{\overline{x}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ [যদি σ অজানা হয়]

i) ডান প্রান্তীয় যাচাইয়ের জন্য যদি Z (নির্ণিত মান) $>Z_\alpha$ হয় তবে $H_0 : \mu \le \mu_০$ বাতিল হবে। চিত্র 'ক' দেখুন।

ii) বাম প্রান্তীয় যাচাইয়ের জন্য যদি Z (নির্ণিত মান)<- Z_α হলে বাতিল হবে। চিত্র 'খ' দেখুন।

উদাহরণ :

একটি তথ্য বিশ্বের পরিমিত বিন্যাস থেকে নেয়া ১৫ আকার বিশিষ্ট নমুনার গড় $\overline{x}$ =৫.১২ এবং ভেদাঙ্ক σ^2=১৬ তাহলে প্রকল্প যাচাই করুন যখন

১. $H_0 : \mu$ =৩.০০ এবং ২. $H_0 : \mu$ =৬.০০

$H_1 : \mu > \mu_০$ $\qquad$ $H_0 : \mu < \mu_০$

সমাধান :

i. প্রথমটি নাস্তি কল্পনানুযায়ী Z স্ট্যাটিস্টিক,

$Z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Z$ বিন্যাস যার স্বাধীন মাত্রা ১০%

$$=\frac{০.১২-৩০০}{৪/\sqrt{১৫}}$$

$$=\left|\frac{+২.১২}{৪/\sqrt{১৫}}\right|$$

ii. ২য় ক্ষেত্রে, $Z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$=\frac{৫.১২-৩০০}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$=\frac{-০.৮৮}{৪/\sqrt{১৫}}$$

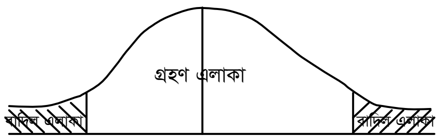
অনুশীলন (Activity): একটি তথ্যে নমুনা গড় $\overline{x}$ =১০ এবং ভেদাঙ্ক=৯ তাহলে, যাচাই করুন:

১। $H_0 : \mu \le$ ১৫ $\qquad$ ২। $H_0 : \mu \ge$ ৯

$H_1 : \mu > \mu_০$ $\qquad$ $H_1 : \mu < \mu_০$

দুই প্রান্তীয় যাচাই :

কোন যথার্থতা যাচাইয়ের ক্ষেত্রে বাতিল এলাকাকে দুইভাগে ভাগ করা হলে এবং এক ভাগ যাচাই তথ্যমানের সম্ভাবনা বিন্যাসের প্রথম প্রান্তে এবং অপর ভাগ শেষ প্রান্তে অবস্থিত হলে ঐ যথার্থতা যাচাইকে দুই প্রান্তীয় যাচাই বলে। নিচে দুই প্রান্তীয় যাচাই চিত্র দেওয়া হলো-



চিত্রঃ দুই প্রান্তীয় যাচাই

কোন যথার্থতা যাচাইয়ের ক্ষেত্রে বাতিল এলাকাকে দুইভাগে ভাগ করা হলে এবং এক ভাগ যাচাই তথ্যমানের সম্ভাবনা বিন্যাসের প্রথম প্রান্তে এবং অপর ভাগ শেষ প্রান্তে অবস্থিত হলে ঐ যথার্থতা যাচাইকে দুই প্রান্তীয় যাচাই বলে।

দুই প্রান্তীয় যাচাই পদ্ধতি :

ধরা যাক তথ্য বিশ্ব পরামান μ সম্পর্কিত নাস্তি কল্পনাটি $H_0 : \mu = \mu_০$

এখানে $\mu_০$ হলো অনুমান ভিত্তিক μ
এবং $H_a : \mu \neq \mu_০$
এখন, $\bar{x}$ হলো নমুনাজ মান μ এর নিরূপক অর্থাৎ
$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2_{\bar{x}})$
অতএব $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_x} \sim N(০, ১)$; $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{s}{\sqrt{n}}$

দুই প্রান্তীয় যথার্থতা টেস্ট স্ট্যাটিস্টিকটির প্রাপ্ত মান সর্বদা $Z < -z_{\alpha/2}$ অথবা $> Z_{\alpha/2}$ হলে নাস্তি কল্পনা বাতিল হবে।
অর্থাৎ $Z < -Z_{\alpha/2}$ অথবা $> Z_{\alpha/2}$ সীমানায় $H_0 : \mu \neq \mu_০$ নাস্তি কল্পনা বাতিল হবে।

উদাহরণ :

১০০টি ফিলিপস বাল্বের উপর তথ্য নেওয়ার পর দেখা গেল ১,৫৭০ ঘন্টা গড় সময় জ্বলে এবং পরিমিত ব্যবধান ৮০ ঘন্টা। যাচাই করতে হবে উক্ত কোম্পানীর বাল্ব গড়ে ১৬০০ ঘন্টা জ্বলবে কিনা?

সমাধান :

নাস্তি কল্পনা করা যাক

$H_0 : \mu = \mu_০$ এবং

$H_a : \mu \neq \mu_০$

এখানে দেওয়া আছে

$\bar{x}$ =১৫৭০ ঘন্টা, μ=১৬০০ ঘন্টা

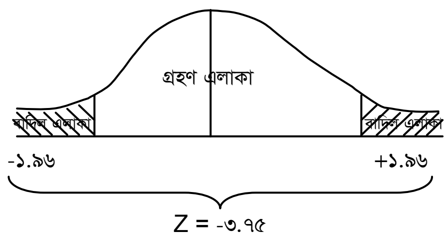
$\sigma_{\bar{x}}$=৮০ ঘন্টা

অতএব,

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{৫৭০ - ১৬০০}{৮০/\sqrt{১০০}}$$

Z=-৩.৭৫

Z এর সংশয় মান $Z=\pm$ ১.৯৬ দুই প্রান্তীয় যাচাই মানের ক্ষেত্রে ৫% সংশয় এলাকা। চিত্রানুযায়ী-



এখানে Z-এর মান সংশয় এলাকায় অবস্থান করেছে। তাই নাস্তি কল্পনাকে বাতিল বলা যায় অর্থাৎ উক্ত কোম্পানি কর্তৃক বাল্ব গড় ১৬০০ ঘন্টা জ্বলবে তা সঠিক নয়।

অনুশীলন (Activity): দুইটি সাবান কোম্পানির উৎপাদিত সাবানের তথ্য দেয়া হলো

বিবরণ	কোম্পানি-A	কোম্পানি-B
গড় ভালো সাবান	১৩০০	১২৪৮
পরিমিত ব্যবধান	৮২	৯৩
নমুনায়ন আকার	১০০	১০০

কোন সাবান কেনা উচিত যেখানে সংশয় মাত্রা হবে ৫% ।

সারমর্ম ঃ যদি বাতিল এলাকা যাচাই নমুনা মানের সম্ভাবনা বিন্যাসের প্রথম অংশে বা শেষ প্রান্তে উপস্থিত থাকে তাকে এক প্রান্তীয় যাচাই বলে। এবং কোন যথার্থতা যাচাইয়ের ক্ষেত্রে বাতিল এলাকাকে দুইভাগে ভাগ করা হলে এবং এক ভাগ যাচাই তথ্যমানের সম্ভাবনা বিন্যাসের প্রথম প্রান্তে এবং অপর ভাগ শেষ প্রান্তে অবস্থিত হলে ঐ যথার্থতা যাচাইকে দুই প্রান্তীয় যাচাই বলে।

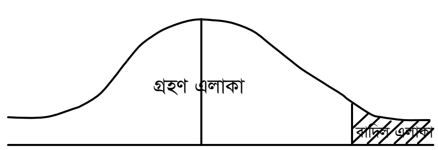
পাঠোত্তর মূল্যায়ন : ১১.৪

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। এক প্রান্তীয় যাচাইয়ের ক্ষেত্রে বাতিল এলাকা অবস্থান।
ক. কোথাও নেই খ. প্রথম অথবা শেষ প্রান্তে
গ. উভয় প্রান্তে ঘ. সর্বত্র

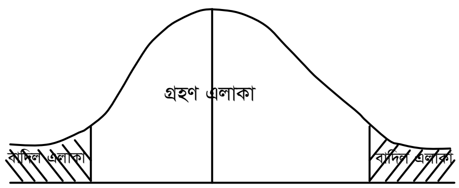
সত্য/মিথ্যা লিখুনঃ

২। নিচের চিত্রটি একটি এক প্রান্তীয় যাচাই চিত্র -



শূন্যস্থান পূরণ করুনঃ

৩। নিচের চিত্রটি ------ যাচাই চিত্র।



পাঠ-১১.৫

প্রকল্প যাচাই ও আলোচনা

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন-

- প্রকল্প যাচাই কি
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান

প্রকল্প যাচাই করতে যাচাই স্ট্যাটিস্টিক এর মান বের করে উক্ত বিন্যাসের সারণী মানের স্বাধীনতার মাত্রার বিপরীতে প্রাপ্ত মান তুলনা করতে হয়। আমরা পূর্বের পাঠে Z ও t স্ট্যাটিস্টিক সম্পর্কে জেনেছি। প্রকল্প যাচাই করার জন্য নিম্নলিখিতভাবে যথাক্রম অনুসরণ করতে হবে।

যথার্থতা যাচাইয়ের কতগুলো গুরুত্বপূর্ণ ধাপ :

১। প্রথমে নাস্তি কল্পনা ঠিক করে নিতে হবে এবং সেই সাথে বিকল্প কল্পনাও ঠিক করে নিতে হবে।

২। নাস্তি কল্পনা নির্দিষ্ট করার পর এটা যাচাই করার পর নির্দিষ্ট যাচাই স্ট্যাটিস্টিক নির্ধারণ করতে হয়।

৩। যাচাই স্ট্যাটিস্টিক জানার পর স্বাধীনতার মাত্রা নির্ণয় করা হয়।

৪। সর্বশেষে প্রাপ্ত তথ্য থেকে নাস্তি কল্পনার সাথে সংগতি রেখে যাচাই স্ট্যাটিস্টিক এর মান নির্ণয় করতে হবে।

দুইটি নিরপেক্ষ নমুনার গড়ের পার্থক্য যাচাই : (তথ্য বিশ্বের ভেদাঙ্ক অজানা)

মনে করি n_1 এবং n_2 আকারের দুটি নিরপেক্ষ নমুনার গড় যথাক্রমে $\bar{x}_১$ ও $\bar{x}_২$ এবং নিরূপিত পরিমিত ব্যবধান $s_১$ ও $s_২$। তথ্য বিশ্ব পরিমিত বিন্যাস অনুসরণ করে এবং তাদের গড় $\mu_১$ ও $\mu_২$ নমুনা দুটি একই গড় বিশিষ্ট তথ্য বিশ্ব থেকে নেয়া হয়েছে যাচাই করতে হবে।

এখানে নাস্তি কল্পনা,

$H_0 : \mu_১ = \mu_২$ এবং বিকল্প কল্পনা

$H1 : \mu_১ \neq \mu_২$

যাচাই স্ট্যাটিস্টিক

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{\mu_2;(n_1+n_2-2)}$$ বিন্যাস যার স্বাধীন মাত্রা n_1+n_2-2

এখানে $\bar{x}_১$ = ১ম নমুনার গড়

$\bar{x}_২$ = ২য় নমুনার গড়

$$S=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_1-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

এখন, $t \geq t_{.025(n_1+n_2-2)}$ হলে নাস্তি কল্পনা বাতিল হবে। অন্যথায় প্রকল্প গ্রহণযোগ্য হবে। এখানে $t_{.025(n_1+n_2-2)}$ এর মান সারণী থেকে পাওয়া যাবে।

উদাহরণ :

বাউবি'র অন্তর্গত একটি টিউটেরিয়াল কেন্দ্রের ২০ জন শিক্ষার্থীর বয়সের গড় ১৭ এবং নিরূপিত পরিমিত ব্যবধান '৩'। অন্য একটি কেন্দ্রের ২৫ জন শিক্ষার্থীর বয়সের গড় ১৯ ও নিরূপিত পরিমিত ব্যবধান ২.৮৭। টিউটোরিয়াল কেন্দ্রের শিক্ষার্থীদের বয়সের মধ্যে কোনো পার্থক্য আছে কিনা যাচাই করুন।

সমাধান :

দেওয়া আছে- একটি টিউটোরিয়াল কেন্দ্রে শিক্ষার্থীর বয়সের গড় $\bar{x}_১$ =১৭ ও

নিরূপিত পরিমিত ব্যবধান = ৩

অন্য একটি টিউটোরিয়াল কেন্দ্রে শিক্ষার্থীর বয়সের গড় $\bar{x}_২$ =১৯ ও

নিরূপিত পরিমিত ব্যবধান = ২.৮৭

নাস্তি কল্পনা, $H_0 : \mu_১ = \mu_২$

$H_১ : \mu_১ \neq \mu_২$

অতএব, $t = \dfrac{|\bar{x}_১ - \bar{x}_২|}{S\sqrt{\frac{1}{n_১} + \frac{1}{n_২}}}$; $S = \sqrt{\dfrac{(২০-১)৩ + (২৫-১)২}{২০ + ২৫ - ২}} = ১.১৭$

$= \dfrac{|১৭ - ১৯|}{১.১৭\sqrt{\frac{১}{২৫} + \frac{১}{২০}}} = \dfrac{২}{১.৭১\times০.৩}$ =৩.৮৯৯৮ যার স্বাধীনতার মাত্রা ৪৩

$\therefore$ t= ৩.৮৯৯৮ আবার

t সারণী থেকে $t = t_{.০২৫(২৫+২০-২)} = t_{.০২৫.৪৩} = ১.৯৬$

$\because t > t_{.০২৫.৪৩}$

অতএব নাস্তি কল্পনা বাতিল বলে গণ্য হবে।

অনুশীলন (Activity): দু'টি শিল্প কারখানায় গড় উৎপাদনের পার্থক্য আছে কিনা তা প্রমান করার লক্ষ্যে উক্ত কারখানার ৩০ দিনের উৎপাদনের পরিমানের তথ্য নিম্নে দেওয়া হলঃ

১ম কারখানা	২য় কারখানা
$\bar{x}_১$ = ১০০ টন/দিন	$\bar{x}_২$ = ৯৮ টন/দিন
উৎপাদনের বিন্যাস, N ($\mu_১$, , ৯)	উৎপাদনের বিন্যাস N ($\mu_২$, ৯)

বিষয়টি যাচাই করুন।

সারমর্ম ঃ দুটি নিরপেক্ষ নমুনার গড়ের তাৎপর্য যাচাই t স্ট্যাটিস্টিক এর সাহায্যে করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন : ১১.৫

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। তথ্য বিশ্বের ভেদাঙ্ক অজানা থাকলেও নমুনার আকার ছোট হলে দুটি গড়ের পার্থক্য যাচাইয়ের জন্য কোনটি ব্যবহার করা হয়

ক. t খ. x^2

গ. F ঘ. Z

শূন্যস্থান পূরণ করুনঃ

২। দুটি গড় যাচাই স্ট্যাটিস্টিক

t= ----- ।

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন :

৩। দুটি গড় যাচাই স্ট্যাটিস্টিক স্বাধীন মাত্রা $n_১+n_২$-২

চূড়ান্ত মূল্যায়ন - ইউনিট ১১

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলী

১। উদাহরণ সহ প্রকল্প যাচাই আলোচনা করুন।
২। প্রকল্প কত প্রকার ও কি কি? নমুনা আকার বড় হলে কোন যাচাই স্ট্যাটিস্টিক ব্যবহার করা হয় ব্যাখ্যা করুন।
৩। স্বাধীনতার মাত্রা ও যথার্থতার মাত্রার সংজ্ঞা লিখুন। নমুনার আকার ছোট হলে কোন স্ট্যাটিস্টিক ব্যবহার করা হয় লিখুন।
৪। নাস্তি কল্পনা ও বিকল্প কল্পনার সংজ্ঞা লিখুন? দুটি নিরপেক্ষ গড়ের পার্থক্য যাচাইয়ের জন্য কোন যাচাই স্ট্যাটিস্টিক ব্যবহার করা হয আলোচনা করুন।
৫। টিকা লিখুন
১ম প্রকার ভুল ও ২য় প্রকার ভুল
খ. বাতিল এলাকা ও গ্রহণীয় এলাকা
গ. যথার্থতা মাত্রা ও নিশ্চয়তার সীমা
ঘ. Z স্ট্যাটিস্টিক ও t স্ট্যাটিস্টিক
ঙ. স্বাধীনতার মাত্রা ও বাতিল প্রকল্প
৬। বাউবি বিএ/বিএসএস প্রোগ্রামের ২টি কেন্দ্রের বয়সের তথ্য নিম্নরূপ

$\bar{x}_1$=৩০ $\bar{x}_2$=২৭
S^2=৫.২৫ S^2=৪.২৫

তথ্য বিশ্ব পরিমিত বিন্যাস অনুসরণ করলে উক্ত বয়সের তাৎপর্য যাচাই করুন।

উত্তরমালা - ইউনিট ১১

পাঠ ১১.১

১। খ ২। সত্য ৩। সত্য ৪। H_1 বা H_a ৫। যৌগিক
৬। সরল , যৌগিক

পাঠ ১১.২

১। সত্য ২। মিথ্যা ৩। সত্য ৪। সত্য

পাঠ ১১.৩

১। খ ২। খ ৩। সত্য ৪। মিথ্যা ৫। $\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s/\sqrt{n}}$
৬। $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

পাঠ ১১.৪

১। খ ২। সত্য ৩। দুই প্রান্ত্রীয় যাচাই

পাঠ ১১.৫

১। ক ২। $\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$ ৩। সত্য

তথ্যসূত্র

আহমেদ, শ: আধুনিক পরিসংখ্যান।

ভূঞা, কে. সি. ও মতিন, এম.এ: মৌলিক পরিসংখ্যান, সাহিত্য প্রকাশনী।

মিয়া, ম. আ. ও মিয়ান, ম. আ. : পরিসংখ্যান পরিচিতি।

Bailey, T. J. : Statistical Methods in Biology (3rd E.D), Cambridge University press.

Bhat. B.R. : Modern Probability Theory. 1981.

Brunk, H. : An Introduction to Mathematical Statistics. Girnl Co., Boston 1980.

Chow, Y.S. : Probability Theory, 1979.

Cochran, M.G. & Cox, M.G. : Experimental Design, New York, Wiley (1957).

Cramer, H. : Mathematical Methods of Statistics, princelton University press.

Eason, G. : Mathematics and Statistics for Bio-Science, 1980.

Euglewood Cliff N. J. : General Statistics, Prentice-Hall Inc. 1967.

Fisher, R. A. : Statistical Methods, Experimental Design, and Scientific inference, Oxford University Press (1990).

Goulden, C. H. : Methods of Statistical Analysis, Modern Asia Edition John Wiley and Sons. Inc. 1952.

Gupta, S.C. & Kapoor, V.K. : Fundamentals of Mathematical Statistics. Sultan Chand and Sons, Delhi, India.

Gupta, S.C. : Statistical Methods. Sultan Chand and Sons, Delhi, India.

Guilford, J. P. & Fruchter, B. : Fundamental Statistics in Psychology and Education, New York, McGraw-Hill (1973).

Harnett, D.L : Introductory Statistical Analysis 2nd ediction 1980.

Horton, R. L. : The General Linear Model, , New York, McGraw-Hill, International (1978).

Kendall, M.G and Stuart, A. The Advanced Theory of Statisties, Vol. 1,2, and 3 charles, Griffin and Co. Ltd.

Mood, A. M and Graybill, F. A : An Introduction to the Theory of Statistics. McGrow-Hill Book Com. 2nd edition, 1963.

Mostafa, M.G. : Methods of Statistics.

Peers, S. I. : Statistical Analysis for Educational and Psychology Researcher. The Falmer press, London.

Williams, E. J: Regression Analysis, John Wiley and sons Inc. 1954.

Winner, B. J. : Statistical Principles in Experimental Design (2nd E.D.), New York, McGraw-Hill (1971).

Hossain, Farzana : MSC Thesis, Lecturer in Geography & Environmnt, School of Social Science, Humanities and Language, Bangladesh Open University.