৯

সম্ভাবনা

পূর্বের অধ্যায়ে কীভাবে সংগৃহীত উপাত্তসমূহকে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতির প্রয়োগের মাধ্যমে সংক্ষেপে প্রকাশ করে, কীভাবে উপাত্তসমূহ থেকে তথ্যবিশ্বের বৈশিষ্ট্য উদ্ভাবন করা যায় সে সম্পর্কে আলোচনা করেছি। পরিসংখ্যান পদ্ধতিসমূহ যেমন ঘটনসংখ্যা বিন্যাস, শ্রেণিকরণের মাধ্যমে কেন্দ্রিয় প্রবণতা পরিমাপ, বিস্তার পরিমাপ ইত্যাদি ব্যবহার করেছি। উল্লিখিত পদ্ধতিসমূহের মাধ্যমে প্রাপ্ত ফলাফল থেকে কোন তথ্যবিশ্বের অতীত এবং বর্তমানের স্বরূপ উন্মোচন করা যায় কিন্তু ভবিষ্যতে কী ঘটবে বা কতটুকু ঘটবে সে সম্পর্কে কিছু আলোচনা করে না। কোন বিষয়ের ওপর ভবিষ্যৎবাণী করতে গেলে যে শব্দটি সম্বন্ধে আমরা সচরাচর আলোচনা করে থাকি সেটি হচ্ছে সম্ভবনা এবং এর ইংরেজি প্রতিশব্দ হলো `Probability'। অর্থনৈতিক, সামাজিক, পরিবেশ, ক্রীড়াঙ্গন ইত্যাদি ক্ষেত্রে ভবিষ্যৎ ঘটনাবলীর ওপর ভবিষ্যৎবাণী একটি জরুরী ব্যপার এবং সে ক্ষেত্রে সম্ভাবনা তত্ত্ব ব্যবহার করা হয়। সর্বক্ষেত্রে এমনকি প্রত্যাহিক জীবনে সম্ভাবনার মাত্রা নির্ণয় করা হয় পারিপার্শ্বিক অবস্থার পরিপেক্ষিতে। উদাহরণস্বরূপ একজন ছাত্র যদি লেখাপড়ায় ভালো হয় তবে তার পাশ করান সম্ভাবনা বেশি এবং লেখাপড়ায় খারাপ হলে তার পরীক্ষায় পাস করার সম্ভাবনা কম। ফরাসী গণিতবিদ বি প্যাসকল (১৬২৩-১৬৬২) ও পি ফরমাট (১৬০১-১৬৬৫) জুয়াড়ীদের সমস্যার সমাধান করতে গিয়ে সম্ভাবনা সম্বন্ধে গাণিতিক তত্ত্বের ভিত্তি রচনা করেন। এছাড়া সম্ভাবনা তত্ত্বের ওপর অনেকেই অবদান রেখেছেন এরমধ্যে যে বারনলী, ডি মইবার, আর, এ, ফিসার উল্লেখযোগ্য। এ ইউনিটে বিভিন্ন পাঠে সম্ভাবনার বিভিন্ন পরীক্ষণ, ঘটনা, নমুনা ক্ষেত্র, দৈব চয়ন, দৈব পরীক্ষণ, বিন্যাস, সমাবেশ ইত্যাদি বিষয়ে বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

এ ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে ঃ

পাঠ-৯.১
প্রচেষ্টা ও পরীক্ষণ

এ পাঠ শেষে আপনি -

- প্রচেষ্টা কী ব্যখ্যা করতে পারবেন।
- পরীক্ষণ সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- পরীক্ষণ সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

প্রচেষ্টা (Trial)

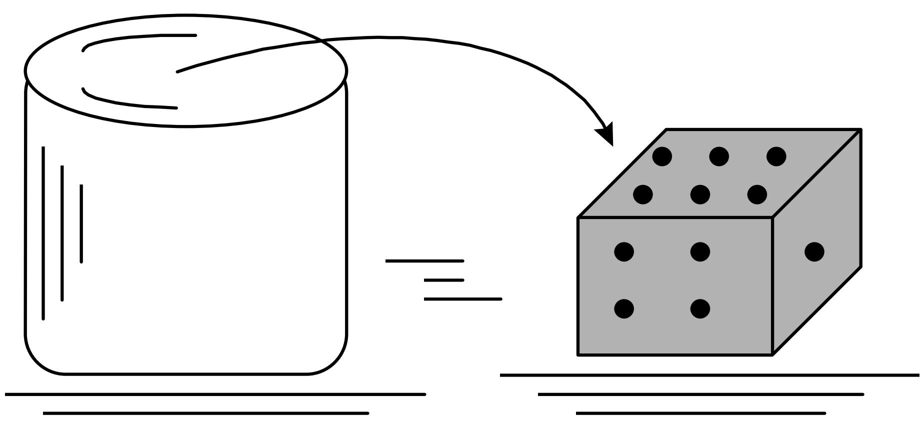
কোন ঘটনার সম্ভাব্যতা পরিমাপ করার জন্য কোন নির্দিষ্ট শর্তাধীনে কোন কাজ সম্পাদন করাই হলো প্রচেষ্টা (Trial)। কতগুলো প্রচেষ্টার সম্মিলিত ফলাফলই হলো একটি পরীক্ষণ।

পরীক্ষণ (Experiment)

পরীক্ষণ হলো এমন একটি ব্যবস্থা যার মাধ্যমে কোন একটি ঘটনার সম্ভাবনার ব্যাপারে জানা যায়।

পরীক্ষণ হলো এমন একটি ব্যবস্থা যার মাধ্যমে কোন একটি ঘটনার সম্ভাবনার ব্যাপারে জানা যায়। পরীক্ষণ করার পরই কোন ঘটনার ওপর মন্তব্য করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, আমরা জানি একটি ছক্কার ৬ টি সুষম পিঠ আছে এবং পিঠগুলো ১ টি, ২ টি, ৩ টি, ৪ টি, ৫ টি, এবং ৬ টি বিন্দু দিয়ে নির্দেশিত। একটি ছক্কা উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে ১ থেকে ৬ বিন্দুর মধ্যে যে কোন একটি পিঠ উপরের দিকে উঠতে পারে কিন্তু কোন বিন্দুর পিঠটি প্রথমে আসবে তা আমরা জানি না। মনে করি ৬ বিন্দুর পিঠটি আপনি চান এবং এর ফলাফল জানার জন্য ছক্কাটি নিক্ষেপ হলো, দেখা গেল চিত্র অনুযায়ী উপরের পিঠে ৬ এসেছে। তখন নিশ্চিতভাবে জানা গেল উপরের বিন্দু ৬, এখানে ছক্কাটি নিক্ষেপ করা হলো প্রচেষ্টা (Trial) এবং এই প্রক্রিয়াটাই হচ্ছে পরীক্ষণ।



চিত্র- ছক্কা পরীক্ষণ

সমসম্ভাব্য ফল (Equally likely outcome)

কোন পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলগুলোর প্রত্যেকটির সম্ভাবনা যদি সমান হয় তবে পরীক্ষণের ফলগুলোকে সমসম্ভাব্য ফল বলে। উদাহরণস্বরূপ একটি মুদ্রার ২টি পিঠ (যেমন হেড ও টেইল) আছে এবং এর যে কোন পিঠ আসার সম্ভাবনা সমান। এখানে ২টি ফলই সমসম্ভাবনা। আবার একটি ছক্কাকে উপরের দিকে নিক্ষেপ করলে ১,২,৩,৪,৫ ও ৬ বিন্দুযুক্ত যে কোন একটি পিঠ উপরে আসার সম্ভাবনা সমান। এখানে ছয়টি ফলই সমসম্ভাব্য।

কোন পরীক্ষণের সম্ভাব্য ফলগুলোর প্রত্যেকটির সম্ভাবনা যদি সমান হয় তবে পরীক্ষণের ফলগুলোকে সমসম্ভাব্য ফল বলে।

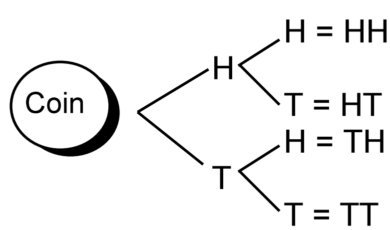
অনুকূল ফল (Favourable outcome)

কোন পরীক্ষণে একটি ঘটনার অনুকূলের বা স্বপক্ষের ফলগুলোকে উক্ত ঘটনার অনুকূলের ফল বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ কোন মুদ্রাকে ২ বার নিক্ষেপ পরীক্ষণে হেড (H) আসাকে ঘটনা বলা হয় তবে উক্ত ঘটনার অনুকূলের ফলগুলো হবে (HH, HT, TH) ।

সর্বসম্মিলিত ফলাফল (Exhaustive outcome)

একটি পরীক্ষণে সম্ভাব্য সর্বমোট ফলাফলকে সর্বসম্মিলিত ফলাফল বলে। উদাহরণস্বরূপ একটি মুদ্রাকে ২ বার উৎক্ষেপণ করলে সর্বসম্মিলিত ফলাফল হবে ৪ অর্থাৎ (HH, HT, TH, TT) চিত্রে একটি মুদ্রা উৎক্ষেপণের সম্মিলিত ফলাফল দেখানো হলো।

একটি পরীক্ষণে সম্ভাব্য সর্বমোট ফলাফলকে সর্বসম্মিলিত ফলাফল বলে।



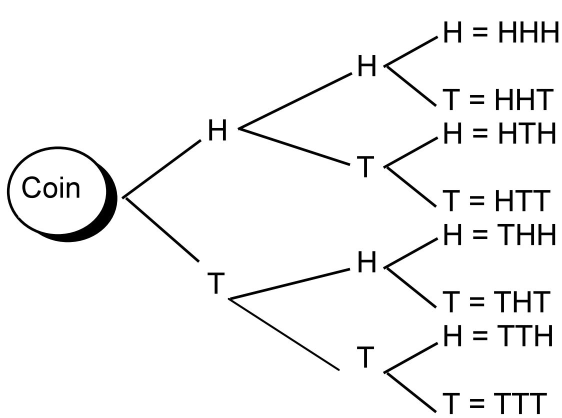
অর্থাৎ সম্মিলিত ফলাফল ৪ টি।

উদাহরণ

কোন মুদ্রাকে ৩ বার নিক্ষেপ করলে সম্মিলিত ফলাফল সংখ্যাগুলো লিখুন।

সমাধান

একটি মুদ্রাকে ৩ বার নিক্ষেপ করলে, যে ফলাফল গুলো পাওয়া যাবে তা নিম্নরূপ-



∴ সম্মিলিত ফলাফল সংখ্যা ৮ এবং ফলাফল গুলো হলো

{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

অনুশীলন (Activity) : কোন ছক্কাকে ২ বার নিক্ষেপ করলে সম্মিলিত ফলাফলের সংখ্যাগুলো লিখুন।

সারমর্ম ঃ কোন ঘটনার সম্ভাব্যতা পরিমাপ করার জন্য কোন নির্দিষ্ট শর্তাধীনে কোন কাজ সম্পাদন করাই হলো প্রচেষ্টা (Trial)। কতগুলো প্রচেষ্টার সম্মিলিত ফলাফলই হলো একটি পরীক্ষণ। পরীক্ষণ হলো এমন একটি ব্যবস্থা যার মাধ্যমে কোন একটি ঘটনার সম্ভাবনা ব্যপারে জানা যায়। কোন পরীক্ষণে একটি ঘটনার অনুকূলের বা স্বপক্ষের ফলগুলোকে উক্ত ঘটনার অনুকূলের ফল বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১

সটিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। কোন ঘটনার সম্ভাব্যতা পরিমাপ করার জন্য কোন নির্দিষ্ট শর্তাধীনে যে কাজ সম্পাদন করা হয় তাকে কী বলে?

ক) পরীক্ষণ
খ) প্রচেষ্টা
গ) গড়
ঘ) বিস্তার

২। একটি মুদ্রাকে ২ বার নিক্ষেপ করলে সর্বসম্মিলিত ফলাফল কতটি হবে?

ক) ৬টি
খ) ৪টি
গ) ৮টি
ঘ) ২টি

৩। কোন মুদ্রাকে ২ বার নিক্ষেপ করলে ২টি হেড আসার অনুকূল ঘটনা কোন্‌টি হবে?

ক) {HH}
খ) {HT}
গ) {TH}
ঘ) {TT}

৪। ২টি ছক্কাকে একবার নিক্ষেপ করলে একই চিহ্ন আসার অনুকূল ফল কোন্‌টি হবে?

ক) {(১,৩) (১,২), (১,৪), (১,৫), (২,৩), (২,৪)}
খ) {(১,১), (২,২), (৩,৩), (৪,৪), (৫,৫), (৬,৬)}
গ) {(১,১), (১,৪), (২,৪), (৫,৩), (২,২), (৩,৪)}
ঘ) {(২,২), (২,৩), (২,৫), (২,৬), (৩,১), (৩,২)}

পাঠ-৯.২

নমুনা ক্ষেত্র, নমুনা বিন্দু ও ঘটনা

এ পাঠ শেষে আপনি -

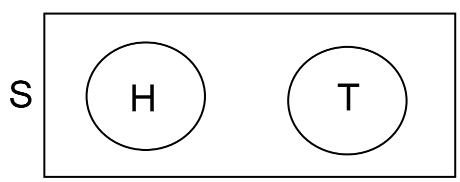
- নমুনা ক্ষেত্রের সম্পর্কে লিখতে ও বলতে পারবেন।
- নমুনা বিন্দু সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- ঘটনা সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন।
- ঘটনার সংজ্ঞা দিতে পারবেন।
- ঘটনার বিভিন্নপ্রকারভেদ সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- উদাহরণসহ নমুনা ক্ষেত্র, নমুনা বিন্দু ও ঘটনার ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।

সম্ভাবনা তত্ত্ব ভালভাবে জানতে হলে নমুনা ক্ষেত্র, নমুনা বিন্দু ও ঘটনা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ প্রয়োজন। এ পাঠে নমুনা ক্ষেত্র, নমুনবিন্দু ও ঘটনা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

নমুনা ক্ষেত্র (Sample space)

কোন একটি পরীক্ষায় প্রতিটি প্রচেষ্টায় এক একটি ফল পাওয়া যায়। কোন পরীক্ষায় অনুকূল ফলাফলসমূহের দলকে নমুনা ক্ষেত্র বলা হয় অথবা সম্ভাব্য ফলাফল একত্রে করে যে ক্ষেত্র পাওয়া যায় তাকেই নমুনা ক্ষেত্র বলে। উদাহরণস্বরূপ একটি সুষম নিরপেক্ষ মুদ্রা উৎক্ষেপিত করলে হেড (H) অথবা টেইল (T) যেকোন একটা পিঠ উপরে আসতে পারে। এখানে নমুনা ক্ষেত্র হবে $S = \{H, T\}$.

নমুনা ক্ষেত্রকে ভেন-চিত্রের সাহায্যে দেখানো যেতে পারে,



এখানে, S = নমুনা ক্ষেত্র। আবার কোন একটি সুষম ছক্কা উৎক্ষেপণ করলে ১,২,৩,৪,৫ অথবা ৬ বিন্দুযুক্ত পিঠ উপরে আসতে পারে। এখানে নমুনা ক্ষেত্র S = {১,২,৩,৪,৫ ও ৬}

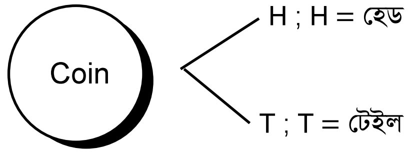
নমুনা বিন্দু (Sample Point)

নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে অবস্থিত উপাদানসমূহের প্রত্যেকটিকে একেকটি নমুনা বিন্দু বলে। নমুনা ক্ষেত্রে যে কয়টি উপাদান থাকে সেগুলোই নমুনা বিন্দুর সংখ্যা। গাণিতিক নিয়মে বিন্যাস ও সমাবেশের সাহায্যে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা নির্ণয় করা হয়।

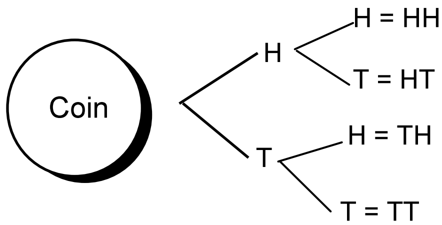
নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে অবস্থিত উপাদানসমূহের প্রত্যেকটিকে একেকটি নমুনা বিন্দু বলে।

নমুনা ক্ষেত্র তৈরি কৌশল

একটি মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র সৃষ্টি খুব একটা কঠিন নয় যেমন-



অর্থাৎ একবার নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র $S = \{ H, T\}$, এখানে একবার নিক্ষেপের নমুনা বিন্দু দুটি; H = হেড এবং T = টেইল। আবার, মুদ্রাটি ২ বার নিক্ষেপ করলে -



অর্থাৎ নমুনা ক্ষেত্র, $S = \{ HH, HT, TH, TT \}$ এখানে নমুনা বিন্দু ৪টি।
অনুরূপভাবে নিক্ষেপ সংখ্যা বাড়ালে নমুনা বিন্দু ও বৃদ্ধি পায়। মুদ্রাটি তিনবার নিক্ষেপ করলে নমুনা বিন্দু পাওয়া যাবে $S = \{ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT \}$ অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ৮টি।

- যদি একটি মুদ্রা বা ছক্কার মোট পিঠ n হয় এবং নিক্ষেপ সংখ্যা x হয় তাহলে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n(s) = n^x$. উদাহরণস্বরূপ একটি মুদ্রা উৎক্ষেপণে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দুর সংখ্যা ২. তিনটি মুদ্রা উৎক্ষেপণে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $২^৩ = ৮$। একটি ছক্কা উৎক্ষেপণে প্রাপ্ত নমুনা বিন্দুর সংখ্যা ৬। দুটি ছক্কা উৎক্ষেপণে প্রাপ্ত নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $৬^২ = ৩৬$.
- n সংখ্যক বস্তু থেকে x সংখ্যক বস্তু টানলে প্রাপ্ত নমুনা বিন্দুর সংখ্যা হবে $n(s) = nc_x$. যেমন ৫২ টি তাস থেকে ৩টি তাস টানলে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা হবে-

$$n(S) = 52_{C_3} = \frac{52!}{3!49!} = \frac{52 \times 51 \times 50}{32} = 22100$$

উদাহরণ ১

১ টি মুদ্রাকে ৪বার নিক্ষেপের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নমুনা বিন্দুসহ নমুনা ক্ষেত্র লিখুন এবং

1. ২টি হেড (H) আসার নমুনা বিন্দুসমূহ লিখুন।
2. ১টি টেইল (T) আসার নমুনা বিন্দুসমূহ লিখুন।
3. সবগুলো হেড (H) আসার নমুনা বিন্দুসমূহ লিখুন।
4. সবগুলো টেইল (T) আসার নমুনা বিন্দুসমূহ লিখুন।
5. ৩টি হেড (H) আসার নমুনা বিন্দুসমূহ লিখুন।

সমাধান

একটি মুদ্রাকে ৪ বার নিক্ষেপ করলে, নমুনা ক্ষেত্র হবে নিম্নরূপ-

$$S = \{HHHH, HHHT, HHTH, HHTT, HTHH, HTHT, HTTH, HTTT, \\ THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT\}$$

অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ৪$(S) = ২^৪ = ১৬$ টি।

১. দুটি হেড আসার ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র
S(২টি হেড) $= \{HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH\}$
অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ৬টি।

২. ১টি টেইল আসার ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র
S(১টি টেইল) = {HHHT, HHTH, HTHH, THHH}
এবং নমুনা বিন্দু ৪টি।

৩. সবগুলোই হেড আসার নমুনা ক্ষেত্র,
S(সবগুলোই হেড) = {HHHH}অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ১টি।

৪. সবগুলোই টেইল আসার নমুনা ক্ষেত্র,
S(সবগুলোই টেইল) = {TTTT}অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ১টি

৫. তিনটিই হেড ও ১টি টেইল আসার নমুনা ক্ষেত্র
S(৩টি হেড ও ১টি টেইল) = {HHHT, HHTH, HTHH, THHH} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ৪টি।

উদাহরণ ২

২টি ছক্কাকে উৎক্ষেপণ করার পর নমুনা ক্ষেত্র নির্ণয় করুন এবং

1| দুটিই একটি সংখ্যার বিন্দু পড়বে তার নমুনা বিন্দু লিখুন
2| দুই দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার নমুনা বিন্দু লিখুন
3| দুটিই জোড় সংখ্যার নমুনা বিন্দু লিখুন
4| দুটিই বিজোড় সংখ্যার নমুনা বিন্দু লিখুন

সমাধান

দু'টি ছক্কা নিক্ষেপ করলে তাদের নমুনা ক্ষেত্র হবে নিম্নরূপ-

নমুনা ক্ষেত্র

১ম ছক্কা

	১	২	৩	৪	৫	৬
১	(১,১)	(১,২)	(১,৩)	(১,৪)	(১,৫)	(১,৬)
২	(২,১)	(২,২)	(২,৩)	(২,৪)	(২,৫)	(২,৬)
৩	(৩,১)	(৩,২)	(৩,৩)	(৩,৪)	(৩,৫)	(৩,৬)
৪	(৪,১)	(৪,২)	(৪,৩)	(৪,৪)	(৪,৫)	(৪,৬)
৫	(৫,১)	(৫,২)	(৫,৩)	(৫,৪)	(৫,৫)	(৫,৬)
৬	(৬,১)	(৬,২)	(৬,৩)	(৬,৪)	(৬,৫)	(৬,৬)

1| দু'টি একই সংখ্যা পড়বে তার নমুনা ক্ষেত্র,
S (দুটি একই সংখ্যা) = {(১,১), (২,২, (৩,৩), (৪,৪), (৫,৫), (৬,৬)} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ৬টি।

2| দুই দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার নমুনা ক্ষেত্র,
S (দুই দ্বারা বিভাজ্য) = {(২,২), (২,৪), (২,৬), (৪,২), (৪,৪), (৪,৬), (৬,২), (৬,৪), (৬,৬)} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ৯টি।

3| দুটিই জোড় সংখ্যার নমুনা ক্ষেত্র,
S (দুটি জোড় সংখ্যা) = {(২,২), (২,৪), (২,৬), (৪,২), (৪,৪), (৪,৬), (৬,২), (৬,৪), (৬,৬)} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ৯টি।

4| দুটি বিজোড় সংখ্যার নমুনা ক্ষেত্র,

S (দুটি বিজোড় সংখ্যা) = {(১,১), (১,৩), (১,৫), (৩,১), (৩,৩), (৩,৫), (৫,১), (৫,৩), (৫,৫)} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু ৯টি।

অনুশীলন (Activity): দুটি ব্যাগের প্রত্যেকটিতে ৪টি বিভিন্ন রঙের (লাল, সাদা, কাল ও সবুজ) বল আছে। নমুনা ক্ষেত্র নির্ণয় করুন এবং নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে নমুনা বিন্দু নির্ণয় করুন।

i. ১টি লাল ১টি সবুজ
ii. ১টি কাল ১টি সবুজ
iii. ২টি লাল
vi. ২টি সাদা
v. ১টি সাদা ১টি কাল

ঘটনা (Event)

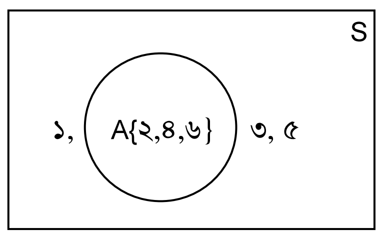
নমুনা ক্ষেত্রের কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলকেই ঘটনা বলে।

পরীক্ষার ফলাফল দ্বারা ঘটনা প্রকাশ করা হয়। নমুনা ক্ষেত্রের কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলকেই ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে নমুনা ক্ষেত্র হবে-

S {১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬}

২ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা গড়বে এরূপ ঘটনা A হলে ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র হবে

S(A) = {২, ৪, ৬}; এখানে ২, ৪, ৬ অনুকূল নমুনা বিন্দু ২ দ্বারা বিভাজ্য। যেহেতু ঘটনা একটা বিশেষ ধরনের ফল তাই কোন নমুনা ক্ষেত্রের একটি ঘটনাকে ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখানো যায়। উপরের উদাহরণের ঘটনাকে নিম্নভাবে দেখানো যায়।



উদাহরণ

২টি মুদ্রা একসাথে নিক্ষেপ করলে দু'টিই হেড আসবে এরূপ ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

সমাধান

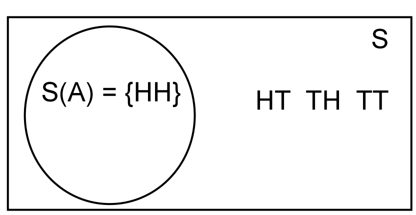
২টি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে নমুনা ক্ষেত্র হবে

S = {HH, HT, TH, TT}

২টিই হেড আসবে এরূপ ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র হবে

S (A) = {HH}

ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখানো যেতে পারে



অনুশীলন (Activity) : তিনটি মুদ্রা এক সাথে নিক্ষেপ করলে

ক) দুটি হেড ও একটি টেইল আসবে এরূপ ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

খ) তিনটিই হেড আসবে এরূপ ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

গ) দুটি টেইল ও একটি হেড আসবে এরূপ নমুনা ক্ষেত্র নির্ণয় করুন।

সারমর্মঃ *সম্ভাবনা তত্ত্ব ভালোভাবে জানতে হলে নমুনা ক্ষেত্র, নমুনা বিন্দু ও ঘটনা সম্পর্কে জ্ঞান লাভ প্রয়োজন। কোন পরীক্ষায় অনুকূল ফলাফলসমূহের দলকে নমুনা ক্ষেত্র বলা হয় অথবা সম্ভাব্য ফলাফল একত্রে করে যে ক্ষেত্র পাওয়া যায় তাকেই নমুনা ক্ষেত্র বলে। পরীক্ষার ফলাফল দ্বারা ঘটনা প্রকাশ করা হয়। নমুনা ক্ষেত্রের কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলকেই ঘটনা বলে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে অবস্থিত উপাদানসমূহের প্রত্যেকটিকে কী বলা হয়?

ক) নমুনা
খ) নমুনা বিন্দু
গ) নমুনা ক্ষেত্র
ঘ) কোনটিই নয়

২। পরীক্ষণ বস্তুর মোট পিঠ n এবং নিক্ষেপ সংখ্যা x হলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা কোন্টি হবে?

ক) $n - x$
খ) $n \geq x$
গ) n^x
ঘ) $n \neq x$

৩। নমুনা ক্ষেত্রের কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলকে কী বলা হয়?

ক) নমুনা বিন্দু
খ) নমুনা ক্ষেত্র
গ) ঘটনা
ঘ) সম্ভাবনা

৪। ২টি মুদ্রাকে একবার নিক্ষেপ করলে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা কোন্টি হবে?

ক) ৬টি
খ) ৪টি
গ) ৫টি
ঘ) ৮টি

পাঠ-৯.৩

সম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা ও পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা, অনুকূল ঘটনা ও সম্পূর্ণ ঘটনা

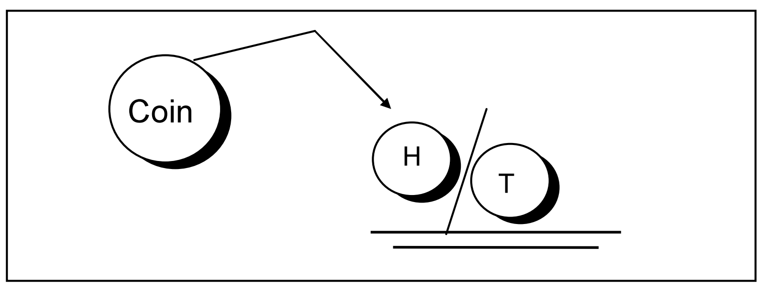
এ পাঠ শেষে আপনি -

- সম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার সংজ্ঞা লিখতে পারবেন।
- অনুকূল ঘটনা সম্পর্কে বলতে ও লিখতে পারবেন।
- সম্পূর্ণ ঘটনার সংজ্ঞা বলতে পারবেন।
- ঘটনার সমস্যাবলীর সমাধান করতে পারবেন।

একই নমুনা ক্ষেত্রের অর্ন্তগত দুই বা ততোধিক ঘটনার মধ্যবর্তী নমুনাসমূহের মিল ও অমিলের ওপর ভিত্তি করে ঘটনাকে বিভিন্নভাবে নমুনার বৈশিষ্ট্য বর্ণনা প্রয়োজন। এ পাঠে ঘটনা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

সমসম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা (Equally likely Events)

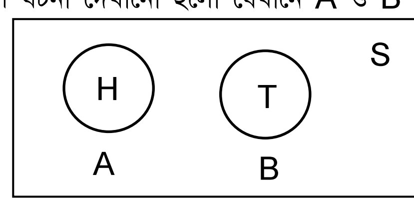
যদি দুই বা ততোধিক ঘটনা এরূপ হয় যে, উহাদের ঘটিবার সময় একটি অপরটি যে কোনটি অপেক্ষা কম বা বেশি পরিমাণ আশা করা যায় না তবে এদেরকে সমসম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা বলা হয়। অন্যভাবে বলতে পারি প্রতিটি ঘটনার সম্ভাবনা সমান হলে তাহারা সমসম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা। উদাহরণস্বরূপ ঝোঁক শূন্য মুদ্রা নিক্ষেপের পরীক্ষায় হেড ও টেইল পড়বার ঘটনা সমসম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা।



চিত্র- মুদ্রা পরীক্ষণ

পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা (Mutually Exclusive Events)

দুই বা ততোধিক ঘটনাকে তখনই পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা বলা হবে যখন এদের যেকোন একটি ঘটনা ঘটলে অপর ঘটনা বা ঘটনাগুলো কোনক্রমেই ঘটা সম্ভব নয়। যদি দুই বা ততোধিক ঘটনার নমুনা বিন্দুর মধ্যে কোন সাধারণ বিন্দু না থাকে কেবলমাত্র তখনই বর্জনশীল ঘটনার উৎপত্তি হয়। উদাহরণস্বরূপ, একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করে উহার যে কোন পিঠ উপরে পড়লে একই সময়ে অপর পিঠ কখনও উপরে পড়তে পারে না। মুদ্রার হেড উপরে থাকলে টেইল উপরে আসবে না। ভেন চিত্রের সাহায্যে পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা দেখানো হলো যেখানে A ও B দুটি ঘটনা যাদের মধ্যে কোন সাধারণ বিন্দু নেই।



; এখানে, S = নমুনা ক্ষেত্র

অনুকূল ঘটনা (Favoarable Events)

পরীক্ষার ফলাফল দ্বারা ঘটনা প্রকাশ করা হয়। কোন পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রে কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যে ফলাফলকে অনুকূল ঘটনা বলে। অনুকূল ঘটনার বৈশিষ্ট্যের ওপরই ঘটনার নামকরণ হয়ে থাকে। উদাহরণস্বরূপ একটি ছক্কা নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র

পরীক্ষার ফলাফল দ্বারা ঘটনা প্রকাশ করা হয়। কোন পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রে কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের ফলাফলকে অনুকূল ঘটনা বলে।

S : {১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬}

৩ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পড়বে এরূপ ঘটনা A দ্বারা প্রকাশ করলে অনুকূল ঘটনা A : {৩,৬}

সম্পূর্ণ ঘটনা (Exhaustive Events)

কোন পরীক্ষার সহিত সংশ্লিষ্ট দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি এরূপ হয় যে পরীক্ষাটি যে কোন অবস্থায় সম্পাদন করলে উহাদের যে কোন একটি অবশ্যই ঘটবে। তাহলে উক্ত ঘটনাগুলোকে সম্পূর্ণ ঘটনা বলে। দুই বা ততোধিক সম্পূর্ণ ঘটনার সংযোগ হবে সংশ্লিষ্ট পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র অর্থাৎ যদি $S_১$ $S_২$ ..... $S_হ$ সম্পূর্ণ ঘটনা হয় তবে,

$$S_1 \cup S_2 \cup .... \cup S_n = S|$$

উদাহরণ ১

ঢাকা হতে বিমানে চট্টগ্রামে যাওয়ার সম্ভাবনা ২/৫ এবং বাসে চট্টগ্রামে যাওয়ার সম্ভাবনা ১/4 হলে একজন লোক বিমানে বা বাসে চট্টগ্রাম যাবে তার সম্ভাবনা কী ধরনের ঘটনা। সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সমাধান

বিমান ও বাসে যাওয়ার ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল। সুতরাং বিমানে বা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা,

P [বিমানে বা বাসে] = P[বিমানে] + P [বাসে]

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$$

উদাহরণ ২

যদি P(A) = ০.৫০, P(B) = ০.২০ এবং P(A/B) = ৩/৫ হয় তবে পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A \cup B)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান

পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

= ০.৫০ + ০.২০ - ০.৩৭৫

= ০.৭০ - ০.৩৭৫

= ০.৩২৫

$\therefore$ $P(A \cup B)$ = ০.৩২৫

অনুশীলন (Activity) : একটি ছক্কা X নিক্ষেপ পরীক্ষায় ঘটনা A:{২,৪,৬} এবং ঘটনা B: {১,৩,৫}পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা ব্যাখ্যা করুন। একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় ৬টি পিঠে যে কোন একটি পিঠ আসার সমসম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা ব্যাখ্যা করুন।

সারমর্ম *ঃ যদি দুই বা ততোধিক ঘটনা এরূপ হয় যে, উহাদের ঘটিবার সময় একটি অপরটি যে কোনটি অপেক্ষা কম বা বেশি পরিমাণ আশা করা যায় না তবে এদেরকে সমসম্ভাবনাযুক্ত ঘটনা বলা হয়। পরীক্ষার ফলাফল দ্বারা ঘটনা প্রকাশ করা হয়। কোন পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রে কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের ফলাফলকে অনুকূল ঘটনা বলে। কোন পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট দুই বা ততোধিক ঘটনা যদি এরূপ হয় যে পরীক্ষাটি যে কোন অবস্থায় সম্পাদন করলে এদের যে কোন একটি অবশ্যই ঘটবে তাহলে উক্ত ঘটনাগুলোকে সম্পূর্ণ ঘটনা বলে।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে কোন্‌টি সঠিক?
- ক) সাধারণ বিন্দু থাকে না
- খ) সাধারণ বিন্দু থাকে
- গ) অসীম সংখ্যা থাকে
- ঘ) সসীম সংখ্যা থাকে

২। নিচের কোন্‌টির ক্ষেত্রে সম-সম্ভাবনাযুক্ত ঘটনার বস্তুর যে কোন পিঠ আসার সম্ভাবনা ?
- ক) সমান নয়
- খ) সমান
- গ) খর্বাকৃতি
- ঘ) কৌণিক

৩। ঝোঁক শূন্য মুদ্রা নিক্ষেপে H, T পড়ার ঘটনা কোন্‌টি হবে?
- ক) অসমসম্ভাবনাযুক্ত
- খ) সমসম্ভাবনাযুক্ত
- গ) সম্পূর্ণ ঘটনা
- ঘ) পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা

পাঠ-৯.৪

সম্ভাবনার ক্ল্যাসিকাল ও পরিসংখ্যানিক সংজ্ঞা

এ পাঠ শেষে আপনি -

- ক্ল্যাসিকাল সম্ভাবনার সংজ্ঞা দিতে পারবেন।
- পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনার সংজ্ঞা দিতে পারবেন।
- ক্ল্যাসিকাল ও পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনার পার্থক্য সম্বন্ধে বলতে পারবেন।
- সম্ভাবনা ভিত্তিক বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

ক্ল্যাসিকাল সম্ভাবনা

সম্ভাবনা সম্বন্ধে প্রথম ধারণা করেন জাকোব বার্নোলী। কোন ঘটনা ঘটার নিশ্চয়তা মাত্রার গাণিতিক পরিমাপই হচ্ছে সম্ভাবনা। যদি কোন দৈব পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্রে (S) সংখ্যক সমসম্ভাব্য, পরস্পর বর্জনশীল এবং সর্বসম্মিলিত নমুনা বিন্দু থাকে এবং ঐ নমুনা ক্ষেত্রে A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n(A) হয় তবে A ঘটনার সম্ভাবনা হবে $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

অর্থাৎ সম্ভাবনা $= \dfrac{\text{ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}}{\text{নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা}}$

উপরিউক্ত সংজ্ঞা থেকে এটা সুস্পষ্ট যে সম্ভাবনা একটি এককবিহীন বাস্তব সংখ্যা যা ০ থেকে ১ এর মধ্যে থাকে যখন n(A) এবং n(S) সমান হয় তখন p(A)=১ এবং যখন n(A)=০ হয় তখন p(A)=০ সূতরাং $০ \le P(A) \le ১$

উদাহরণস্বরূপ একটি নিরপেক্ষ ছক্কা উৎক্ষেপনে নমুনা ক্ষেত্র S = {১,২,৩,৪,৫,৬} এখানে n(S) = ৬. A দ্বারা ৪ বিন্দুযুক্ত পিঠ উপরে আসার ঘটনা সূচিত হলে n(A) = ১; যেহেতু S নমুনা ক্ষেত্রে ১ টিই মাত্র ৪ বিন্দুযুক্ত পিঠ, অতএব

$$\text{সম্ভাবনা } P(A) = \frac{1}{6}$$

অর্থাৎ ছক্কাটির ৪ বিন্দুযুক্ত পিঠ উপরে পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$ ।

অনুশীলন (Activity) : দুটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় নিম্নলিখিত ক্ষেত্রের সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

ক) উভয় ছক্কার জোড় সংখ্যা
খ) উভয় ছক্কার সংখ্যা দুটির যোগফল ৭
গ) উভয় ছক্কার বিজোড় সংখ্যা
ঘ) উভয় ছক্কার একই সংখ্যায়

সম্ভাবনার পরিসংখ্যানিক সংজ্ঞা (Statistical defination of Probability)

সম্ভাবনার ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞার ব্যবহারিক ক্ষেত্রে কিছু সীমাবদ্ধতার কারণে পরিসংখ্যানিক সংজ্ঞা ব্যবহার করে সম্ভাবনা নির্ণয় করা হয়।

যদি পরীক্ষা অসংখ্যবার পুনরাবৃতি করা হয় তাহলে কোন ঘটনা A এর অনুকূলের অনুপাতের মাত্রাকে উক্ত ঘটনার পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা বলা হয়। যদি একটি পরীক্ষা n বার (n অসীম) সম্পাদন করা

হয় এবং এর সাথে সংশ্লিষ্ট কোন অনুকূল ঘটনা n(A) বার ঘটে তাহলে ঘটনা A এর সম্ভাবনা p(A) দ্বারা সূচিত করলে

$$P(A) = \underset{n\to\alpha}{Lt} \frac{n(A)}{n}$$

উদাহরণস্বরূপ একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা উৎক্ষেপ করলে ক্ল্যাসিকাল সংখ্যা অনুযায়ী উহার হেড (H) এবং টেইল (T) আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ = ৫০. মনেকরি মুদ্রাটিকে পর্যায়ক্রমে ১০ বার ১০০ বার ১০০০ বার উৎক্ষেপণ করা হলো এবং হেড (H) উপরের দিকে পতিত হওয়ার ঘটনাকে অনুকূল ঘটনা বলা হয়। ধরি প্রথম, দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ক্ষেত্রে হেড সমান সংখ্যক অর্থাৎ যথাক্রমে ৫, ৫০ এবং ৫০০ বার না এসে ৪, ৪৭ এবং ৪৯ বার আসল। সে ক্ষেত্রে $\frac{n(A)}{n}$ অর্থাৎ H হেড এর ঘটন সংখ্যা অনুপাত হলো .৪, .৪৭ এবং .৪৯. এখানে দেখা যাচ্ছে যে যতই n এর মান বাড়তে থাকবে ততই হেড (H) এর ঘটনার সংখ্যা অনুপাত .৫০ এর কাছাকাছি হয় যা সম্ভাবনার ক্ল্যাসিকাল সংজ্ঞা অনুযায়ী পাওয়া যায়। সুতরাং n এর মান অসীমের দিকে হলে $P(A) = \frac{n(A)}{n}$ হবে এবং এটাই পরিসংখ্যানিক সম্ভাবনা নির্ণয়ের পদ্ধতি।

সম্ভাবনার ক্ল্যাসিক্যাল ও পরিসংখ্যানিক সংজ্ঞার পার্থক্য।

ক্ল্যাসিকাল	**পরিসংখ্যানিক**
1. ক্ল্যাসিকাল সংজ্ঞার সম্ভাবনা হচ্ছে কোন ঘটনার অনুকূলে প্রাপ্ত নমুনা বিন্দু এবং নমুনা ক্ষেত্রের সর্বমোট নমুনা বিন্দুর অনুপাত। অর্থাৎ $P(A) = \frac{n(A)}{n(s)}$ ।	1. কোন পরীক্ষা অসীম সংখ্যক বার পুণরাবৃত্তি করলে কোন ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দু এবং পরীক্ষণের মোট নমুনা বিন্দুর অনুপাতের মাত্রাকে উক্ত ঘটনার পরিসংখ্যানিক সংজ্ঞা বলে। অর্থাৎ $P(A) = \underset{n\to\alpha}{Lt} \frac{n(A)}{n(s)}$ ।
2. ক্ল্যাসিকাল সংজ্ঞাকে গাণিতিক সংজ্ঞা বলা হয় এবং এতে প্রচেষ্টা বা পরিক্ষণের সংখ্যা সব সময় সমান।	2. এতে পরিক্ষণের সংখ্যা অসীম ধরে নেয়া হয়।
3. ক্ল্যাসিক্যাল সংজ্ঞায় নমুনা বিন্দুগুলো সমসম্ভাব্য হতে হয়।	3. এক্ষেত্রে নমুনা বিন্দুগুলো সমসম্ভাব্য নাও হতে পারে।
4. এখানে সম্ভাবনা বের করা সহজ।	4. এক্ষেত্রে ঘটনসংখ্যা অনুপাতের একটি অনুমান পাই যার সঠিক মাত্রায় পাওয়া যায়।
5. এক্ষেত্রে সম্ভাবনার মান একটি নির্দিষ্ট।	5. এখানে সম্ভাবনার মান ভিন্ন হতে পারে।

উদাহরণ

একটি মুদ্রা তিন বার উৎক্ষেপণ করা হলো -

ক) ০ টি টেইল

খ) ১ টি টেইল

গ) কমপক্ষে ২টি টেইল

আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান

একটি মুদ্রা ৩ বার নিক্ষেপ করা হলে তার নমুনা ক্ষেত্র হবে

S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

মোট নমুনা বিন্দু n = ৮টি।

I. ০ টি হেড আসার ঘটনাকে অনুকূল ঘটনা ধরলে ও A দ্বারা প্রকাশ করলে

S(A) : {TTT} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু n(A) = ১

$\therefore$ সম্ভাবনা, $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{1}{8} = 0.125$

II. ঘটনা B : ১ টি হেড পাওয়ার ঘটনা

S(B) : {HTT, THT, TTH} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু n(B) = ৩

$\therefore$ ১টি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা $P(B) = \frac{n(B)}{n} = \frac{3}{8} = 0.375$

III. ঘটনা C : কম পক্ষে দুটি হেড আসার ঘটনা

S(C) : {HHT, HTH, HHH, THH} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু n(C) = ৪

$\therefore$ কমপক্ষে দু'টি হেড আসার সম্ভাবনা $P(C) = \frac{n(C)}{n} = \frac{4}{8} = 0.50$

IV. ঘটনা D : বড় জোর ১টি হেড আসার ঘটনা

S(D) : {HTT, THT, TTH, TTT} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু n(D)= ৪

$\therefore$ বড়জোর ১টি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা $P(D) = \frac{n(D)}{n} = \frac{4}{8} = 0.50$

V. ঘটনা F: শূন্যটি টেইল পাওয়ার সম্ভাবনা

S(F) : {HHH} অর্থাৎ নমুনা বিন্দু n(F) = ১

$\therefore$ শূন্যটি টেইল পাওয়ার সম্ভাবনা $P(F) = \frac{1}{8} = 0.125$

অনুশীলন (Activity) : ২টি মুদ্রা ও একটি ছক্কার নিক্ষেপে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রের সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

ক) একটি হেড এর সম্ভাবনা, P {১টি মাত্রা}

খ) দুটি হেড ও বিজোড় সংখ্যার সম্ভাবনা, P {দুটি হেড ও বিজোড় সংখ্যা}

গ) দুটি টেইল ও জোড় সংখ্যার সম্ভাবনা, P {২টি টেইল ও জোড় সংখ্যা}

ঘ) দুটি টেইল এর সম্ভাবনা, P {২টি টেইল}

ঙ) একটি হেড, একটি টেইল ও ৬ এর সম্ভাবনা, P {১টি হেড, ১টি টেইল ও ৬}

সারমর্মঃ ক্ল্যাসিকাল সংজ্ঞার সম্ভাবনা হচ্ছে কোন ঘটনার অনুকূলে প্রাপ্ত নমুনা বিন্দু এবং নমুনা ক্ষেত্রের সর্বমোট নমুনা বিন্দুর অনুপাত। অর্থাৎ $P(A) = \frac{n(A)}{n(s)}$ *। কোন পরীক্ষা অসীম সংখ্যক বার পুণরাবৃত্তি করলে কোন ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দু এবং পরীক্ষণের মোট নমুনা বিন্দুর অনুপাতের মাত্রাকে উক্ত ঘটনার পরিসংখ্যানিক সংজ্ঞা বলে। অর্থাৎ* $P(A) = \underset{n \to \alpha}{\mathrm{Lt}} \frac{n(A)}{n(s)}$ *।*

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৪

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। সম্ভাবনা এর ক্ষেত্রে কোন্‌টি সঠিক?

ক) একক বিহীন বাস্তব সংখ্যা
খ) একক যুক্ত বাস্তব সংখ্যা
গ) একক বিহীন অবাস্তব সংখ্যা
ঘ) একক যুক্ত অবাস্তব সংখ্যা

২। ‘A’ অনুকূল ঘটনার সম্ভাবনা P(A) হলে, P(A) অবস্থান কোন্‌টি হবে?

ক) P(A)≤ 0
খ) P(A)≥১
গ) P(A)≤১
ঘ) P(A)≤ - ১

৩। কে সম্ভাবনা তত্ত্ব সম্বন্ধে প্রথম ধারণা দেন?

ক) Fisher
খ) Bernulli
গ) Kendall
ঘ) Winner

পাঠ-৯.৫

সম্ভাবনার যোজনবিধি ও গুণনবিধি

এ পাঠ শেষে আপনি -

- সম্ভাবনার যোজনবিধি সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- সম্ভাবনার গুণনবিধি সম্পর্কে বলতে পারবেন।
- সম্ভাবনার যোজনবিধি ও গুণনবিধি প্রয়োগ করে বিভিন্ন সমস্যার সম্ভাবনা বের করতে পারবেন।

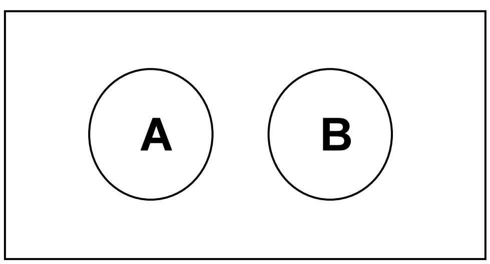
সম্ভাবনার যোজনবিধি (Additive law of Probability)

দুই বা ততোধিক ঘটনা একসাথে ঘটলে এদের যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা বের করতে সম্ভাবনার যোজনবিধির প্রয়োজন হয়। বর্জনশীল ঘটনা এবং অবর্জনশীল ঘটনা উভয়ক্ষেত্রেই সম্ভাবনার যোজনবিধি নির্ণয় করা যায়।

বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার যোজনবিধি

যদি A ও B দুটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা হয় তবে এদের যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা এদের প্রত্যেকটির পৃথক পৃথক ভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান। অর্থাৎ $P(A \text{ or } B) = P(A)+P(B)$.

প্রমাণঃ মনেকরি কোন দৈব পরীক্ষণের নমুনা ক্ষেত্র S এবং এতে মোট নমুনবিন্দুর সংখ্যা n(s). মনেকরি A ও B দুটি পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা যা নিম্নে চিত্রের সাহায্যে দেখান হলো।



চিত্র- পরস্পর দুটি বর্জনশীল ঘটনা

ধরা যাক, A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n(A) এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n(B) আবার A ও B বর্জনশীল ঘটনা এবং এদের মধ্যে কোন সাধারণ নমুনা বিন্দু নাই। সুতরাং A অথবা B ঘটনার ঘটার অনুকূলের নমুনা বিন্দু হবে A এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর যোগফল n(A)+n(B). অতএব সম্ভাবনার সংজ্ঞা অনুযায়ী A অথবা B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা হচ্ছে।

$$P(A \text{ অথবা } B) = \frac{n(A)+n(B)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$

আবার, A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}$

$\therefore$ P (A অথবা B)=$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

এই বিধিটি তিন অথবা তিন এর অধিক পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার জন্য প্রযোজ্য, যেমন

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)$$

উদাহরণ

একটা তাস এক প্যাকেট (৫২টি) তাস থেকে দৈব চয়ন করা হলো। এ তাসটি হয় একটি রাজা (King) অথবা একটি রাণী (Queen) হওয়ার সম্ভাবনা কত তা নির্ণয় করুন।

সমাধান

৫২ কার্ডের তাসের প্যাকেটে ৪টি রাজা এবং ৪টি রাণী থাকে।

মনেকরি A = তাসটি রাজা

B = তাসটি রাণী

$$\therefore P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

যেহেতু রাজার ১ টি তাস রাণীর একটি তাস হতে পারে না সূতরাং A এবং B পরস্পর বর্জনশীল।

অতএব A অথবা B এর আসার সম্ভাবনা = $\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{13}=\dfrac{2}{13}$

অনুশীলন (Activity): কোন একটি নির্বাচনী পরীক্ষায় P,Q ও R নামে তিন ব্যক্তি অংশগ্রহণ করেছেন। মনে করা যাক, P -এর নির্বাচিত সম্ভাবনা Q -এর দ্বিগুণ এবং Q -এর নির্বাচিত হওয়ার R এর দ্বিগুণ। এদের নির্বাচিত হওয়ার স্ব স্ব সম্ভাবনা নির্ণয় করুন। অথবা R এর নির্বাচিত হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

দুটি অবর্জনশীল বা অবিচ্ছিন্ন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার যোজনবিধি

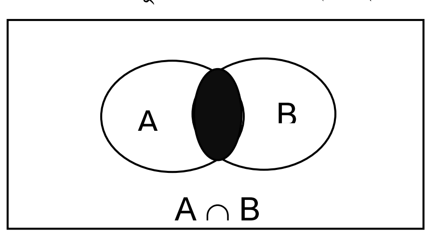
যদি A এবং B দুটি অবর্জনশীল বা অবিচ্ছিন্ন ঘটনা হয় তবে এদের যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা এদের প্রত্যেকের পৃথক পৃথক ঘটার সম্ভাবনার যোগফল থেকে বিয়োগ ফলের সমান। অর্থাৎ

$$P(A\cup B)= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

or

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

প্রমাণঃ যেহেতু A এবং B দুই অবিচ্ছিন্ন ঘটনা এদের মধ্যে একটি সাধারণ বিন্দু আছে। চিত্রের সাহায্যে A এবং B এর মধ্যকার সাধারণ বিন্দুকে $A\cap B$ ধরা হয়েছে।



চিত্র- দুটি অবিচ্ছিন্ন ঘটনা

A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দু এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দু প্রত্যেকটির সাথে $A\cap B$ এর নমুনা বিন্দু জড়িত। অর্থাৎ $[n(A)+n(B)]$ তে দুবার $n(A\cap B)$ হিসাব করা হয়। সূতরাং $n(A\cup B)$, $\{n(A)+n(B)\}$ থেকে $n(A\cap B)$ পরিমাণ কম অর্থাৎ, $n(A\cup B)= n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$$\therefore P(A \cap B)=P(A\cup B)=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$= P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

তিন বা ততোধিক অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে এই বিধিটি প্রযোজ্য। যদি A,B,C পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হয় তবে এদের যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)$.

উদাহরণ

একটি নিরপেক্ষ ছক্কা উৎক্ষেপ করা হলো। জোড় সংখ্যযুক্ত পিঠ উপরে পড়ার ঘটনার যে কোন একটির সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সমাধান

এখানে নমুনা ক্ষেত্র S ={১,২,৩,৪,৫,৬).

জোড় সংখ্যাযুক্ত ঘটনা A =(২,৪,৬)

৩ দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাযুক্ত ঘটনা B ={৩,৬}

$A\cup B$={২,৩,৪,৬), $A\cap B$ ={6}.

এখানে n(S) =৬, n(A) =৩, n(B) =২,

n($A\cup B$) =৪, n($A\cap B$) = ১

$$P(A\cup B)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3} \text{ (Ans.)}$$

অনুশীলন (Activity) : তিনজন ছাত্রকে একটি অঙ্ক করতে দেয়া হয়েছে। অঙ্কটি তিনজনই শুদ্ধভাবে করতে পারবে তার সম্ভাবনা যথাক্রমে ১/২, ১/৩ এবং ১/৪ অঙ্কটি শুদ্ধভাবে করা যাবে তার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

সম্ভাবনার গুণনবিধি (Multiple law of probability)

যদি দুটি ঘটনা স্বাধীন হয় তবে এদের একসাথে ঘটার সম্ভাবনা প্রত্যেকটির ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান। যদি ঘটনা A ও B উভয়ই স্বাধীন হয় তবে P(A এবং B)=$P(A\cap B)$=P(A), P(B).

প্রমাণ: মনেকরি ২টি স্বাধীন পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র যথাক্রমে $S_১$ এবং $S_২$. A এবং B যথাক্রমে ২ টি পরীক্ষার সহিত সংশ্লিষ্ট ঘটনা এবং A ও B পরস্পর স্বাধীন।

মনেকরি $S_১$ নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n_১$ এবং A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা S_a অথবা $S_২$ নমুনা ক্ষেত্রের মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $n_২$ এবং B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n_b

$$\therefore P(A)=\frac{n_a}{n_1},\ P(B)=\frac{n_b}{n_2}$$

যেহেতু A এবং B পরস্পর স্বাধীন এবং পরীক্ষা দুটিও স্বাধীন সূতরাং $S_১$ and $S_২$ নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দু পরস্পর স্বাধীনভাবে মিলিত হবে, এক্ষেত্রে পরীক্ষা দুটির সম্মিলিত নমুনা ক্ষেত্রে মোট নমুনা বিন্দু হবে $n_১\ n_২$

$$\therefore\ P(A \text{ এবং } B) = \frac{n_a \times n_b}{n_1 \times n_2}$$

$$= \frac{n_a}{n_1} \times \frac{n_b}{n_2}$$

$$\therefore\ P(A \cap B) = P(A).\ P(B).$$

দুই বা ততোধিক পরস্পর স্বাধীন ঘটনার ক্ষেত্রে বিধিটি প্রমাণ করা যায়।

A,B,C পরস্পর স্বাধীন হলে

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).\ P(B).\ P(C)$$

তিন এর অধিক অর্থাৎ n সংখ্যক পরস্পর স্বাধীন ঘটনা হলে

$$P(A_১ \cap A_২ \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_n) = P(A_১).\ P(A_২)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ P(A_n)$$

উদাহরণ

মনেকরি, একটি পাত্রে সাদা কালো ও লাল রং এর বলের সংখ্যা যথাক্রমে ১২,৯,৭ এবং অন্য একটি পাত্রে সাদা কালো ও লাল রঙের বলের সংখ্যা যথাক্রমে ৯,১৩,১০। প্রত্যেক পাত্র থেকে ১ টি বল দৈব চয়নের মাধ্যমে তোলা হলে উত্তলিত দুটি বলের রং সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত।

সমাধান

মনেকরি ঘটনা A = প্রথম পাত্র থেকে তোলা সাদা বল এবং ঘটনা B = ২য় পাত্র থেকে তোলা সাদা বল। যেহেতু বল দুটি পাত্র থেকে আলাদাভাবে তোলা হয়েছে সুতরাং A এবং B পরস্পর স্বাধীন।

$$\therefore\ P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

$$= \frac{{}^{3}12}{28} \times \frac{9}{32_{8}} \qquad \text{যেখানে, } P(A) = ১২/২৮$$

$$= \frac{27}{224} \qquad P(B) = ৯/৩২$$

অনুশীলন (Activity)ঃ দুটি ছক্কা উৎক্ষেপণ করা হলো,

$E_১$ ঃ প্রথম ছক্কার ৪ পাওয়ার ঘটনা

$E_২$ ঃ দ্বিতীয় ছক্কার বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা প্রমাণ করুন, ঘটনা দুটি অনপেক্ষ।

শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability)

অধীন ঘটনার ক্ষেত্রে পূর্বে আলোচিত যোজনবিধি প্রযোজ্য নয়। দুটি ঘটনাকে অধীন বলা হবে তখনই যখন একটি ঘটনা পূর্বে সংগঠিত আর একটি ঘটনার ওপর নির্ভর করে। পূর্বে একটি ঘটনা ঘটেছে এ শর্তাধীনে পরে আর একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে পূর্ববর্তী ঘটনার স্বাপেক্ষে শর্তাধীন সম্ভাবনা বলে। যদি A এবং B দুটি অধীন ঘটনা হয় তখন A ঘটনা ঘটেছে B শর্তাধীনে। B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে A এর স্বাপেক্ষে B এর শর্তাধীন সম্ভাবনা বলে এবং P(B/A) দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং P(B/A)

$$= \frac{P(AB)}{P(A)}$$

প্রমাণ: মনেকরি একটি দৈব পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র S এবং A ও B দুটি অধীন ঘটনা।
S নমুনা ক্ষেত্রে মোট নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n
A ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n_a
B ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n_b
$A \cap B$ ঘটনার অনুকূল নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n_{ab}

$$\therefore P(A) = \frac{n_a}{n},\ P(B) = \frac{n_b}{n},\ P(A \cap B) = \frac{n_{ab}}{n}$$

A ঘটনার শর্তাধীনে B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $P(A/B) = \frac{n_{ab}}{n_b}$

আবার $A \cap B$ দ্বারা A ও B এর একসাথে ঘটার ঘটনা বুঝায়

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{n_{ab}}{n} = \frac{n_{ab}}{n_a} \times \frac{n_a}{n} = P(B/A).P(A)$$

অন্যদিকে $P(A \cap B) = \frac{n_{ab}}{n} = \frac{n_{ab}}{n_b} \times \frac{n_b}{n} = P(A/B).P(B)$

সূতরাং $P(A \cap B) = P(B/A).\ P(A)$ অথবা $P(A/B).\ P(B)$.

উদাহরণ

একটি পাত্রে ৫টি সাদা এবং ৩ টি কাল রং আছে। পুনঃস্থাপন ব্যতিরেকে একটার পর আর একটা অর্থাৎ ২টি বল তোলা হলো। এখন এ দুটি বলই কালো হবার সম্ভাবনা বের কর।

সমাধান

প্রথম ধাপে একটি কালো বল আসার সম্ভাবনা $P(A) = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$

প্রথম বার কালো বল আসা স্বাপেক্ষে দ্বিতীয় বার কাল বল আসার সম্ভাবনা

$$P(B/A) = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$$

$\therefore$ ২ টি বলই কাল আসার সম্ভাবনা

$$P(AB) = P(A).P(B/A) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

অনুশীলন (Activity) : দুটি অনপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো। যদি দুটি ছক্কার দেখানো সংখ্যার যোগফল ৫ হয়, তাহলে একটি ছক্কায় তিন দেখানোর সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

__সারমর্মঃ__ দুই বা ততোধিক ঘটনা একসাথে ঘটলে এদের যে কোন একটি ঘটার সম্ভাবনা বের করতে সম্ভাবনার যোজনবিধির প্রয়োজন হয়। বর্জনশীল ঘটনা এবং অবর্জনশীল ঘটনা উভয়ক্ষেত্রেই সম্ভাবনার যোজনবিধি নির্ণয় করা যায়। যদি দুটি ঘটনা স্বাধীন হয় তবে এদের একসাথে ঘটার সম্ভাবনা প্রত্যেকটির ঘটার সম্ভাবনার গুণফলের সমান। যদি ঘটনা A ও B উভয়ই স্বাধীন হয় তবে P(A এবং B)=P(A∩B)=P(A), P(B).

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৫

সটিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন

১। A ও B কোন নমুনা ক্ষেত্রে ২টি ঘটনা $P(A)>0$ হলে নিচের কোন্‌টি সঠিক?

ক) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

খ) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cup B)}{P(A)}$

গ) $P(A/B) = P(A)\ P(B)$

ঘ) $P(A/B) = \dfrac{P(B)}{P(A \cap B)}$

২। পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে A ও B সম্ভাবনার যোজন সূত্র হবে কোন্‌টি?

ক) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

খ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

গ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(A \cup B)$

ঘ) $P(A \cup B) = P(A) - P(B)$

৩। A ও B দুটি স্বাধীন ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্য সূত্র হবে কোন্‌টি?

ক) $P(A \cap B) = P(A)/P(B)$

খ) $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

গ) $P(A \cap B) = P(A)\ .\ P(B)$

ঘ) $P(A \cap B) = P(A) - P(B)$

পাঠ-৯.৬

বে’ তত্ত্ব (Bayes Theorem)

এ পাঠ শেষে আপনি -

- বে তত্ত্বের সংজ্ঞা বলতে পারবেন
- বে তত্ত্বের ব্যবহার বলতে পারবেন
- বে তত্ত্বের সাহায্যে সমস্যার সমাধান করতে পরবেন।

সম্ভাবনা তত্ত্বে পূর্বে কিছু ফলাফল জানা থাকলে তার উপর ভিত্তি করে পরবর্তী ফলাফল বের করা একটি গুরুত্বপূর্ণ অধ্যায়। এ পাঠে উক্ত ফলাফলের জন্য বেতত্ত্ব সম্পর্কে আলোচনা করা হল।

বে’তত্ত্ব

কোন কোন সময় আমরা Priori সম্ভাবনা ব্যবহার করে posteriori সম্ভাবনা বের করি। এ ধরনের সূত্র বর্ণনা করেন ইংরেজ পাদ্রী থমাস বে’। তিনি মৃত্যুবরণ করেন ১৭৬১ সালে। কিন্তু তাঁর এ বর্ণনা প্রকাশ পায় ১৭৬৩ সালে। তাঁর এ সূত্রকে বে’ তত্ত্ব নামে পরিচিত। বে তত্ত্বটি নিম্নরূপঃ

যদি কোন দৈব পরীক্ষণে $E_1, E_2, \ldots\ldots E_n$ পরস্পর বিচ্ছিন্ন কতগুলো ঘটনা হয়ে থাকে এবং অন্য একটি ঘটনা A এই n পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনাসমূহের সাথে ঘটে। তাহলে A ঘটনার জন্য যে কোন E_i (i=১,২, ...n) ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় করার সূত্র হলঃ

$$P\,[E_1/A] = \frac{P[A \cap E_i]}{\sum_{i=১}^{n} P[A \cap E_i]} = \frac{P[E_i]P[A/E_i]}{\sum_{i=০}^{n} P[E_i]P[A/E_i]}$$

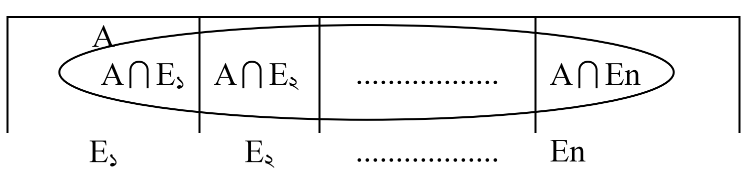
A ঘটনা ঘটার সাপেক্ষে E_i ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয় করার সূত্রকে বে’ তত্ত্ব নামে পরিচিত, তাই এ সূত্রকে বে’তত্ত্ব বলে।

বে’তত্ত্বের প্রমাণঃ

যেহেতু $E_১, E_২$ .... E_n পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা A ঘটনার কারণে ঘটে থাকে। তাই

$A = (A \cap E_১) + (A \cap E_২) + \ldots\ldots + (A \cap E_n)$

বিষয়টিকে ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখানো যেতে পারে,



ভেন চিত্র ঃ বে’তত্ত্ব

এখানে $(A \cap E_১), (A \cap E_২)$ .... $(A \cap E_২)$ ঘটনা সমূহ পরস্পর বিচ্ছিন্ন। তাই

$P\,[A] = P\,[A \cap E_১] + P[A \cap E_২] + \ldots\ldots + P[A \cap E_n]$

আবার শর্তাধীন সম্ভাবনার নিয়ম অনুসারে

$P[A \cap E_১] = P[E_১]\, P[A/E_১]$ এবং ক্রমশঃ

$$\therefore P[A \cap E_i] = P[E_i]\, P[A/E_i],\ i = ১, ২, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

এখন, A ঘটনা, ঘটার সাপেক্ষে E_i শর্তাধীন সম্ভাবনা হলঃ

$$P[A \cap E_i] = P[A]\, P[E_i/A] \therefore P[E_i/A] = \frac{P[A \cap E_i]}{P[A]}$$

$$= \frac{P[A \cap E_i]}{P[A \cap E_১] + P[A \cap E_২] + \ldots\ldots\ldots + P[A \cap E_n]}$$

$$= \frac{P[E_i]\, P[A/E_i]}{P[E_১]\, P[A/E_১] + P[E_২]\, P[A/E_২] + \ldots\ldots\ldots\ldots + P[E_n]\, P[A/E_n]}$$

$$= \frac{P[E_i]P[A/E_i]}{\sum_{i=1}^{n} P[E_i]P[A/E_i]}$$

এখানে, $P[A/E_i]$ কে বলা হয় Posterior সম্ভাবনা এবং $P[E_i/A]$ কে বলা হয় Perior সম্ভাবনা। [প্রমাণ]

উদাহরণ ঃ

একটি সাবান কারখানায় A, B I C তিনটি মেশিন যথাক্রমে ২৫%, ২৫% এবং ৫০% সাবান উৎপন্ন করে। উৎপাদন শেষে দেখা গেল ২% ৩% এবং ৫% সাবান সঠিকভাবে উৎপাদিত হয়নি। একদিনের উৎপাদন হতে একটা সাবান দৈব পদ্ধতিতে চয়ন করা হল এবং দেখা গেল সেটি সঠিকভাবে উৎপাদিত হয়নি। সাবানটি C মেশিন হতে উপাদিত হয়েছে তার সম্ভাবনা কত?

সমাধানঃ

এখানে A, B I C মেশিনে সাবান উৎপাদন করার সম্ভাবনা হল

$P[A] = \frac{২৫}{১০০} = .২৫$

$P[B] = \frac{২৫}{১০০} = .২৫$ এবং

$P[C] = \frac{৫০}{১০০} = .৫০$

ধরা হল E ঘটনা হল দ্রব্যটি সঠিকভাবে উৎপাদিত হয়নি তাহলে, দেয়া তথ্যানুসারে,

$P[E/A] = \frac{২}{১০০} = .০২,$ $\quad P[E/B] = \frac{3}{100} = .০৩$ এবং

$P[E/C] = \frac{৫}{১০০} = .০৫$, এখন বের করতে হবে $P[C/E]$.

এখন $P[A \cap E] = P(A) \times P(E/A) = .২৫ \times .০২ = .০০৫$

$P[B \cap E] = P(B) \times P(E/B) = .২৫ \times .০৩ = .০৭৫$

$P[C \cap E] = P(C) \times P(E/C) = .৫০ \times .০৫ = .০২৫$

অতএব, $P[C/E] = \frac{P[C/E_3]}{P[A \cap E] + P[B \cap E] + P[C \cap E]}$

$$= \frac{.০২৫}{.০০৫ + .০০৭৫ + .০২৫০} = \frac{.০২৫}{.০৩৭৫} = .৬৭$$

$\therefore$ খারাপ সাবানটি C মেশিন দ্বারা উৎপাদিত হওয়ার সম্ভাবনা .৬৭

অনুশীলন (Activity): বাংলাদেশের উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের বিএ/বিএসএস প্রোগ্রামের শিক্ষার্থীদের মধ্যে ৪০% মেয়ে এবং ৬০% ছেলে। এদের মধ্যে ৫০% ছাত্রী এবং ৬৫% ছাত্র মেধার ভিত্তিতে গড় মেধার উপরে শ্রেনীভুক্ত। ছাত্র/ছাত্রীদের মধ্য থেকে একজনকে দৈব পদ্ধতিতে চয়ন করা হল এবং দেখা গেল নির্বাচিত ছাত্র/ছাত্রী মেধার ভিত্তিতে গড় মেধার নিম্ন শ্রেনীভুক্ত এই ছাত্র/ছাত্রী একজন মেয়ে হবে তার সম্ভাবনা নির্নয় করুন।

বে,তত্ত্বের ব্যবহার ঃ

সম্ভাবনা ক্ষেত্রে বে তত্ত্বের ব্যবহারগুলো নিম্নে দেওয়া হলঃ

১। কোম্পানীতে উৎপাদিত দ্রব্যের খারাপ উৎপাদনের সম্ভাবনা নির্ণয় করতে বে তত্ত্বের ব্যবহার করা হয়।

২। পোস্ট অফিসে, চিঠিপত্র বিলির ব্যবস্থায় ভুলের সম্ভাবনার পরিমাণ নির্ণয় করতে বে তত্ত্ব ব্যবহার করা হয়।

৩। ব্যবসা প্রতিষ্ঠান, জনসংখ্যা ইত্যাদির ক্ষেত্রে বে তত্ত্ব ব্যবহার করা হবে।

সারমর্ম ঃ Priori সম্ভাবনা কে ব্যবহার করে Posteriori সম্ভাবনা বের করার পদ্ধতি হল বে' তত্ত্ব।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ঃ ৯.৬

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। বে' ছিলেন একজন
   ক) মুসলমান   খ) পাদ্রি
   গ) বৌদ্ধ   ঘ) হিন্দু

২। কত সালে বে' তত্ত্ব প্রকাশ পায়
   ক) ১৭৬৩   খ) ১৮৬৩
   গ) ১৭৬১   ঘ) ১৮৬১

সত্য মিথ্যা নির্নয় করুন :

৩। বে' তত্ত্বে Priori সম্ভাবনা ব্যবহার দরকার নেই

৪। বে' তত্ত্ব তার মৃত্যুর পর প্রকাশ পায়।

শুন্য স্থান পুরণ করুন :

৫। A ঘটনা, ঘটার সাপেক্ষে E_i ঘটনার সম্ভাবনা নির্নয় করার সূত্র কে ------------ বলে।

৬। $P[E_1/A]$ = ... ।

পাঠ-৯.৭

গাণিতিক প্রত্যাশা ঃ সংজ্ঞা ও গাণিতিক পদ্ধতি
(Mathematical Expectation: Definition and Mathematical Methods)

এ পাঠ শেষে আপনি -
- গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা ও ব্যাখ্যা
- বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলকের গাণিতিক প্রত্যাশা নির্নয়।
- দৈব চলকের গড় ও ভেদাঙ্ক নির্ণয় ।

গাণিতিক প্রত্যাশা (Mathematical Expectation) :

সম্ভাবনা নিবেশনের ক্ষেত্রে একটি পরিমাপক হল গাণিতিক প্রত্যাশা।

গণসংখ্যা নিবেশনের প্রকৃতি বর্ণনা করার জন্য যেমন কিছু পরামান পরিমাণ (গড়, প্রচুরক, মধ্যমা ইত্যাদি) ব্যবহার করা হয় তেমনি সম্ভাবনা নিবেশনের প্রকৃতি নির্ণয় করার জন্যেও পরামান নির্ণয় করা হয়। সম্ভাবনা নিবেশনের ক্ষেত্রে এ ধরনের একটি পরিমাপক হল গাণিতিক প্রত্যাশা। কোন দৈব চলক X হলে, E(X) বা μ_x কে গাণিতিক প্রত্যাশার প্রতীক হিসাবে চিহ্নিত করা হয়, অর্থাৎ X দৈব চলকের বিচ্ছিন্ন মান X_i (i=১, ২ .... n) এবং এদের সম্ভাবনা অপেক্ষক $f(Xi)$ হলে গাণিতিক প্রত্যাশা E(X) হবে,

$$E(X)=\sum_{i=১}^{n} X_i\ f(Xi);\ i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ n$$

অর্থাৎ X এর বিচ্ছিন্ন মানগুলোকে তাদের সংশি- ষ্ট সম্ভাবনার মান দিয়ে গুণ করে প্রাপ্ত গুণফলের সমষ্টিই হবে গাণিতিক প্রত্যাশা। আবার X_i (i = ১, ২ .... n) যদি অবিচ্ছিন্ন চলক হয় এবং এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক $f(X_i)$ হয় তাহলে গাণিতিক প্রত্যাশা হবে;

$$E(X)=\int_{\alpha}^{\beta} Xf(X)dx\ ;\ \alpha\leq X\leq\beta$$

এখানে α ও B হল দৈব চলকের দুই প্রান্তসীমা।

গাণিতিক গড়ের সাথে গাণিতিক প্রত্যাশার সম্পর্ক (Relation between Arithmetic mean and Mathematical Expectation) ঃ

সংজ্ঞানুসারে গাণিতিক প্রত্যাশা,

$$E(X) = \sum_{i=১}^{n} X_i\ f(X_i)$$

$$= X_১\ f(X_১) + X_২\ f(X_২) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + X_n\ f(X_n) \qquad (১)$$

$$= f(X_১).\ X_১ + f(X_২).\ X_২ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f(X_n).X_n$$

$$= \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_২ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} X_n \qquad (২)$$

সুতরাং সমীকরন (১) এবং (২) হতে দেখা যায় গাণিতিক গড় ও গাণিতিক প্রত্যাশার মধ্যে সম্পর্ক রয়েছে। দু'টোই ভার আরোপিত গাণিতিক গড়। প্রথমটির ভার, চলকের সংশ্লিষ্ট মানের সম্ভাবনা এবং ভার হল $\frac{1}{n}$ ।

উদাহরণ ঃ

কোন কোম্পানীর একটি নতুন দ্রব্য খারাপ উৎপাদনের সম্ভাবনা বিন্যাস নিম্নে দেওয়া হল।

নতুন দ্রব্য X_i	৩	১	৪
সম্ভাবনা $f(X_i)$	.১৫	.২৫	.৬০

দ্রব্যগুলির গাণিতিক প্রত্যাশা নির্নয় করুন।

সমাধানঃ

গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞানুযায়ী আমরা জানি

$E(X) = X_1 f(X_1) + X_2 f(X_2) + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + X_n f(X_n)$

এখানে দেওয়া আছে

$E(X)$ = ৩ x .১৫ + ১ x .২৫ + ৪ x .৬০

= .৪৫ + .২৫ + ২.৪০

= ৩.১০

$\therefore E(X)$ = ৩.১০

অনুশীলন (Activity): নিম্নে একটি সম্ভাবনা বিন্যাস দেওয়া হল, সম্ভাবনা বিন্যাসের গাণিতিক প্রত্যাশা নির্নয় করুনঃ

দৈব চলক X_i	১	২	১
সম্ভাবনা $f(X_i)$	.৩০	.৪০	.৩০

দৈব চলকের ভেদাঙ্ক নির্ণয়:

কোন বিচ্ছিন্ন দৈব চলক X_i ; i= ১,২,৩, ... n n‡j এবং উহার সম্ভাবনা $f(X_i$; i= ১,২,৩, ... n) হলে দৈব চলকের ভেদাঙ্ক, $V(X)=[E(X^2)-\{E(X)\}^2]$

এখানে, $E(X)=\sum_{i=১}^{n} X_i\, f(X_i)$; i= ১,২,৩, ... n

এবং $E(X^2)=\sum_{i=১}^{n} X_i\, f(X_i)$

$\therefore$ ভেদাঙ্ক, $V(X)=\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} f(X_i) - \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i f(X_i)\right\}^2\right]$

আবার দৈব চলক X_i ; i= ১,২,৩, ... n অবিচ্ছিন্ন হলে

$V(X)=\int_{\alpha}^{\beta} X_i^{\,2} f(X_i)dx - \left\{\int_{\alpha}^{\beta} X_i f(X_i)dx_i\right\}^2$; $\alpha \le X \le \beta$

গাণিতিক প্রত্যাশার ধর্ম ঃ

১। যদি $X = K$ হয় তবে $E(X) = K$ এবং $V(X) = O$

২। যদি $X=mX$ হয় তবে $E(X) = m\,E(X)$ এবং $V(X) = m^2V(X)$.

৩। যদি $X = X+K$ হয় তবে $E(X) = E(X) + K$ এবং $V(X) = V(X)$

৪। যদি $X = X+Y$ হয় তবে $E(X) = E(X) + E(Y)$ অর্থাৎ দু'টি দৈব চলকের সমষ্টির প্রত্যাশা হল তাদের একক প্রত্যাশার সমষ্টির সমান।

৫। দু'টি স্বাধীন দৈব চলক X ও Y এবং গাণিতিক প্রত্যাশা যথাক্রমে $E(X)$ এবং $E(Y)$ হলে তাদের গুনফল চলক দু'টির একক প্রত্যাশায় গুনফলের সমান। অর্থাৎ $E(XY) = E(X).E(Y)$

৬। দু'টি স্বাধীন দৈব চলকের ভেদাঙ্ক উহাদের একক ভেদাঙ্কের যোগফলের সমান

অর্থাৎ $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ আবার

$$V(X\text{-}Y) = V(X) + V(Y)$$

সারমর্ম ঃ গাণিতিক প্রত্যাশা সম্ভাবনা বিন্যাসের একটি পরিমাপক। গাণিতিক প্রত্যাশা গাণিতিক গড়ের সাথে সম্পর্কযুক্ত।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ঃ ৯.৭

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

১। গাণিতিক প্রত্যাশার সাথে সম্পর্কযুক্ত পরিমাপক হল

ক) সংশ্লেষ খ) গড়

গ) নির্ভরন ঘ) X^2

২। $X = K$ হলে $E(X)$ কত

ক) K^2 খ) K

গ) $\sqrt{K}$ N) 2K

৩। $E(X+Y)=$ কত

ক) $E(XY)$ খ) $E(X) – E(X)$

গ) $E(X) + E(Y)$ ঘ) $E(X) > E(Y)$

সত্য-মিথ্যা নির্ণয় করুন :

৪। গাণিতিক প্রত্যাশাকে প্রকাশ করা হয় $E(X)$ দ্বারা

৫। গাণিতিক প্রত্যাশার সাথে গাণিতিক গড়ের সম্পর্ক রয়েছে।

শুন্যস্থান পূরন করুন :

৬। দু'টি দৈব চলক স্বাধীন হলে তাদের গুনন সুত্র অনুযায়ী $E(XY) =$ .... ।

৭। দু'টি স্বাধীন চলক X, Y হলে $E(X – Y) =$ ------------- ।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন - ইউনিট ৯

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলী

১। সমসম্ভাবনা ও অনুকূল ঘটনা কাকে বলে। একটি উদাহরণের সাহায্যে লিখুন।

২। নমুনা ক্ষেত্র ও নমুনা বিন্দুর সংজ্ঞা লিখুন। ২টি মুদ্রা ও একটি ছক্কার নমুনা ক্ষেত্র ও নমুনা বিন্দুর সংখ্যা নির্ণয় করুন।

৩। সম্ভাবনার সংজ্ঞা লিখুন। ক্ল্যাসিক্যাল ও পরিসংখানিক সংজ্ঞার মধ্যে পার্থক্য গুলো লিখুন।

৪। সম্ভাবনার যোজন সুত্রটি লিখুন ও প্রমান করুন।

৫। শর্তাধীন সম্ভাবনার সংজ্ঞা লিখুন। A ও B দুটি ঘটনা হলে প্রমান করুন যে, $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ।

৬। যদি $P(A) = ৫০$, $P(B) = ৩.২৩$ এবং $P(A/B) = ০.৩৭৫$ i. $P(A \cap B)$

ii. $P(B/A)$ iii. $P(A \cup B)$ নির্ণয় করুন।

৭। সম্ভাবনা ও শর্তাধীন সম্ভাবনা বলতে কী বুঝায় লিখুন। কোন ঘটনার ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন- i. $P(A)+P(A^c) = ১$; A^c, γ ঘটনা A এর পূরক, ii. $O \leq P(A) \leq ১$.

৮। কোন পাত্রে ৫টি লাল ও ৪টি কাল বল আছে। একটি বল পাত্র থেকে নিয়ে অন্য পাত্রে রাখা হলো। উক্ত পাত্রে পূর্বেই ৩টি লাল ও ৭টি কাল বল ছিল। এখন দ্বিতীয় পাত্র থেকে যে কোন একটি বল তোলা হলে সেটি লাল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

৯। প্রমাণ করুন, যদি কোন ঘটনা একটি ক্ষেত্রে ঘটার সম্ভাবনা P হয় তবে n সংখ্যক পরস্পর স্বতন্ত্র প্রয়াসের ক্ষেত্রে ঘটনাটি অন্ততপক্ষে (n - ১) বার ঘটার সম্ভাবনা হলো-

$P^{n-১}\{n - (n - ১)P\}$.

১০। ৫২ টি তাসের একাটি প্যাকেট থেকে ৫টি তাস পরপর টানা হলো। প্রথম চারটি টেক্কা ও পঞ্চমটি রাজা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

১১। বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ব্যাচেলর অভ্ এগ্রিকালচারাল এডুকেশন প্রোগ্রামের ভর্তির জন্য ২০ জন ছাত্র/ছাত্রী আবেদন করেছে। ২০ জনের মধ্যে ৫ জন স্নাতক। এদের মধ্যে যেকোন ৩ জনকে নেয়া হবে। (ধ) সকলেই স্নাতক (ন) অন্তত ১ জন স্নাতক হওয়ার সম্ভাবনা কত নির্ণয় করুন।

১২। প্রমাণ করুন,

$(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

১৩। একটি ছক্কা ১বার নিক্ষেপ করলে এর নমুনা ক্ষেত্র লিখুন। প্রত্যেকটি নমুনা বিন্দু কি সম্ভাবনা যুক্ত? উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি লিখুন।

১৪। ১টি ছক্কা ও ২টি মুদ্রা নিক্ষেপের মোট নমুনা বিন্দু কয়টি এবং উহাদের নমুনা ক্ষেত্রটি লিখুন। একটি জোড় সংখ্যা ও ২টি হেড আসার নমুনা ক্ষেত্র ও নমুনা বিন্দু সংখ্যা লিখুন।

১৫। ৪টি মুদ্রাকে একত্রে নিক্ষেপ করলে-

i. ২টি হেড ২টি টেইল আসার ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র লিখুন

ii. ৪টি টেইল আসার ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র ভেন চিত্রের সাহায্যে দেখান।

iii. ১টি টেইল ও তিনটি হেড আসার ঘটনার নমুনা ক্ষেত্র ও নমুনা বিন্দুগুলো লিখুন।

১৬। বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের একটি অনুসন্ধানে দেখা গেল ৭০% ছাত্র/ছাত্রী ডিপ্লোমা-ইন-ম্যানেজমেন্ট এ, ৬০% ছাত্র/ছাত্রী স্কুল অভ্ এগ্রিকালচার এন্ড রুর‍্যাল ডিভেলপমেন্টে, ৪০% উভয় কোর্সে অধ্যয়ন করে। ছাত্র/ছাত্রী ডিপ্লোমা-ইন-ম্যানেজমেন্ট অথবা স্কুল অভ্ এগ্রিকালচার এন্ড রুর‍্যাল ডিভেলপমেন্ট এ পড়ার সম্ভাবনা কত তা নির্ণয় করুন।

১৭। এক প্যাকেট তাস হতে ২ খানা তাস দৈব চয়ন ভাবে দেয়া হলে একটিও রাজা না হওয়ার সম্ভাবনা এবং টেক্কা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

১৮। একটি থলেতে ৫টি সবুজ ও ৪টি লাল বল আছে। থলে হতে দৈব চয়ন ভিত্তিতে সবুজ রংয়ের তিনটি ও লাল রংয়ের দুটি বল নেয়া হলো বলগুলোর সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

১৯। এস এস সি প্রোগ্রামে যশোর R.R.C. থেকে ২০০ জন ছাত্র/ছাত্রীর মধ্যে ৪০ জন অংকে, ২০ জন পরিসংখ্যানে এবং ১০ জন উভয় বিষয়ে ফেল করে। একজন ছাত্র/ছাত্রী দৈব চয়ন ভিত্তিতে দেওয়া হলে অংকে ফেল কিন্তু পরিসংখ্যানে পাশ করার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন?

২০। REGULATIONS শব্দটির অক্ষরগুলোকে দৈবায়িত পদ্ধতিতে R এবং E কে কতভাবে সাজানো যাবে তা নির্ণয় করুন।

২১। পাঁচটি বল থেকে ২টি বল কতভাবে নেয়া যাবে তার সমাবেশ নির্ণয় করুন।

২২। বে তত্ত্ব টি লিখুন। বে তত্ত্বের ব্যবহারগুলো আলোচনা করুন।

২৩। বে তত্ত্বের সাহায্যে কিভাবে সম্ভাবনা নির্নয় করা যায় আলোচনা করুন।

২৪। Priori I Posteriori সম্ভাবনার পার্থক্য লিখুন। বে তত্ত্বে তাদের ব্যবহার আলোচনা করুন।

২৫। গাণিতিক প্রত্যাশার সংজ্ঞা লিখুন। কিভাবে গাণিতিক গড়ের সাথে সম্পর্ক যুক্ত ব্যাখ্যা করুন।

২৬। গাণিতিক প্রত্যাশার সাথে কিভাবে দৈব চলকের ভেদাঙ্ক নির্ণয় করা যায় আলোচনা করুন।

২৭। গাণিতিক প্রত্যাশার ধর্মগুলো লিখুন, প্রমাণ করুন $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

২৮। কোন একটি কোম্পানীর বছরে নতুন দ্রব্যর মুনাফার সম্ভাবনা বিন্যাস নিম্নে দেওয়া হল। ভেদাঙ্ক নির্ণয় করুনঃ

মুনাফাঃ X	৩	৪	৬
সম্ভাবনা f(X)	.৩০	.৪০	.৩০

উত্তরমালা - ইউনিট ৯

পাঠ ৯.১

১। খ ২। খ ৩। ক ৪। খ

পাঠ ৯.২

১। খ ২। গ ৩। গ ৪। খ

পাঠ ৯.৩

১। ক ২। খ ৩। খ

পাঠ ৯.৪

১। ক ২। গ ৩। খ

পাঠ ৯.৫

১। ক ২। ক ৩। গ

পাঠ ৯.৬

১। খ ২। ক ৩। মিথ্যা ৪। সত্য ৫। বে তত্ত্ব

৬। $\frac{P[A \cap E_i]}{\sum_{i=১}^{n} P[A \cap E_i]} = \frac{P[E_i]P[A/E_i]}{\sum_{i=০}^{n} P[E_i]P[A/E_i]}$

পাঠ ৯.৭

১। খ ২। খ ৩। গ ৪। সত্য ৫। সত্য

৬। $E(X).E(Y)$ ৭। $E(X) - E(Y)$