ইউনিট ৩

বিষমতার পরিমাপ
Measures of Dispersion

ভূমিকা

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ থেকে বন্টনটি সম্পর্কে একটি সামগ্রিক ধারণা পাওয়া যায়। স্কোরগুলো যদি কেন্দ্রীয় প্রবণতার কাছাকাছি থকে তাহলে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপটি প্রতিনিধিত্বমূলক হয়। কিন্তু স্কোরগুলো যখন কেন্দ্রীয় প্রবণতা থেকে দূরে ছড়িয়ে থাকে তখন পরিমাপটি সমগ্র বন্টনটির প্রতিনিধিত্ব করে না।

দৈনন্দিন ব্যবহারের ক্ষেত্রে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপগুলোর মধ্যে গড় সবচেয়ে বেশি নির্ভরযোগ্য। দুইটি দলের প্রাপ্ত স্কোরের গড় তুলনা করে দল দুইটি সম্পর্কে মোটামুটিভাবে ধারণা পাওয়া যায়। কিন্তু স্কোরগুচ্ছের স্বরূপ এবং বৈশিষ্ট্য জানতে হলে কেবলমাত্র কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ পেলেই চলে না। স্কোরগুলোর মধ্যে কতটা বৈষম্য বা পার্থক্য আছে তাও জানা প্রয়োজন। পরিসংখ্যানের ভাষায় একে বিষমতার পরিমাপ বলে। এই ইউনিটে আমরা বিষমতার বিভিন্ন পরিমাপের ধর্ম ও ব্যবহার সম্পর্কে জানব। এছাড়া বিভিন্ন প্রকার বিষমতার পরিমাপ নির্ণয় করার পদ্ধতি শিখব।

পাঠ - ১ বিষমতার বিভিন্ন পরিমাপ ও বিস্তৃতি
পাঠ - ২ চতুর্থাংশ বিচ্যুতি
পাঠ - ৩ লেখ এর সাহায্যে চতুর্থাংশ বিচ্যুতি নির্ণয়
পাঠ - ৪ গড় বিচ্যুতি
পাঠ - ৫ অবিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়
পাঠ - ৬ বিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়
পাঠ - ৭ আদর্শ বিচ্যুতির ধর্ম ও ব্যবহার

পাঠ ১

বিষমতার পরিমাপ ও বিস্তৃতি
[Range]

এই পাঠ শেষে আপনি —

- বিষমতার পরিমাপ কাকে বলে তা বর্ণনা করতে পারবেন
- বিষমতার পরিমাপ কয় প্রকার এবং কি কি তা উল্লেখ করতে পারবেন
- বিস্তৃতি বলতে কি বুঝায় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- বিষমতার পরিমাপ হিসাবে বিস্তৃতি ব্যবহারের সুবিধা-অসুবিধা উল্লেখ করতে পারবেন।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ স্কোরগুচ্ছ সম্বন্ধে একটি সামগ্রিক ধারণা দেয়। স্কোরগুচ্ছের কেন্দ্রীয় প্রবণতা জানলেই এর সম্পূর্ণ বৈশিষ্ট্য জানা হয় না। দুইটি দলের গড় এক হওয়া সত্ত্বেও এদের মধ্যে গঠন প্রকৃতির দিক থেকে যথেষ্ট পার্থক্য থাকতে পারে। একটি দলের স্কোরগুলো সামঞ্জস্যপূর্ণ হতে পারে এবং অপর দলের স্কোরগুলোর মধ্যে যথেষ্ট বৈষম্য থাকতে পারে।

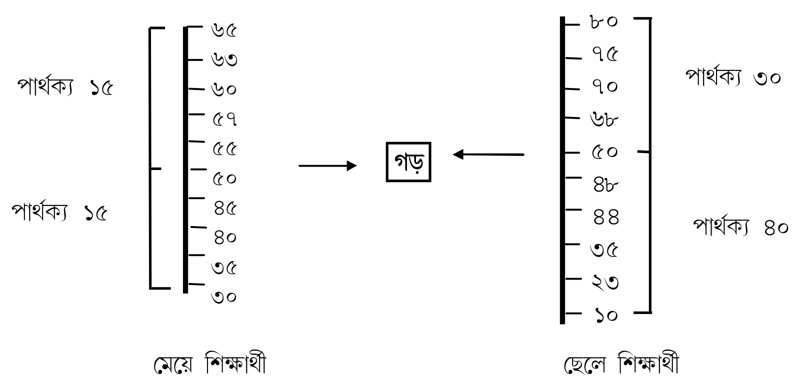
একটি উদাহরণ দিলে বিষয়টি বুঝতে সুবিধা হবে —

ধরা যাক, বাংলা বিষয়ের একই অভীক্ষা প্রয়োগ করে ১০ জন ছেলে এবং ১০ জন মেয়ের দুইটি পৃথক স্কোরগুচ্ছ পাওয়া গেল। (পরীক্ষাটিতে মোট নম্বর ছিল ১০০)।

মেয়েদের স্কোর	৩০	৩৫	৪০	৪৫	৫০	৫৫	৫৭	৬০	৬৩	৬৫
ছেলেদের স্কোর	১০	২৩	৩৫	৪৪	৪৮	৫০	৬৮	৭০	৭৫	৮০

গড় ৫০

স্কোরগুচ্ছ দুইটির গড় নির্ণয় করলে দেখা যাবে দুইটি দলের গড় এক, ৫০।



চিত্র ৩-১.১ অভিন্ন গড়বিশিষ্ট দুইটি স্কোরগুচ্ছ

কিন্তু স্কোরগুলোর প্রতি ভাল করে লক্ষ্য করলে বুঝা যায় যে, ছেলেদের স্কোরগুলো মেয়েদের স্কোরগুলোর তুলনায় অনেক বেশি ছড়িয়ে আছে। মেয়েদের সর্বোচ্চ স্কোর ৬৫ এবং সর্বনিম্ন স্কোর ৩০। অর্থাৎ দশজনের নম্বরের পার্থক্য ৬৫ - ৩০ = ৩৫ এর বেশি নয়। সুতরাং দেখা যাচ্ছে মেয়ে দলটির সদস্যরা বাংলা বিষয়ের পারদর্শিতার দিক দিয়ে অনেকটা সম পর্যায়ের (homogeneous)। অপরদিকে ছেলেদের সর্বোচ্চ স্কোর ৮০ এবং সর্বনিম্ন ১০। এ ক্ষেত্রে বুঝা যাচ্ছে যে, ছেলেদের দলটি বাংলা বিষয়ের পারদর্শিতার দিক দিয়ে অসমপর্যায়ের (heterogeneous)।

বিষমতা পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা

কোন একটি শ্রেণীর শিক্ষার্থীরা মেধা এবং পারদর্শিতার দিক দিয়ে সমপর্যায়ের হলে শিক্ষকের পক্ষে পঠন-পাঠন প্রক্রিয়াকে ফলপ্রসূ করে তোলা যেমন সহজ হয় শ্রেণীতে অসম মেধা এবং

পারদর্শিতার শিক্ষার্থী থাকলে তেমন সহজ হয় না। ব্যক্তিগতভাবে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর প্রতি দৃষ্টি দেওয়া শিক্ষকের পক্ষে সম্ভবপর হয়ে উঠে না। এতে পিছিয়ে পড়া শিক্ষার্থীরা দিনে দিনে আরও বেশি পিছিয়ে পড়ে। অপরদিকে উচ্চ মেধা সম্পন্ন শিক্ষার্থীদের অগ্রগতিও ব্যহত হয়। এসব কারণেই শিক্ষার্থীদলের বিষমতা নির্ণয় করা প্রয়োজন।

বিষমতার পরিমাপের উপর ভিত্তি করে সুষম দল গঠনের মাধ্যমে শ্রেণীর পঠন-পাঠনকে অধিকতর ফলপ্রসূ করে তোলা সম্ভব।

প্রকারভেদ

বিষমতার পরিমাপ চার প্রকার ––

- বিস্তৃতি বা রেঞ্জ (range)
- চতুর্থাংশ বিচ্যুতি বা কোয়ার্টাইল ডেভিয়েশন (quartile deviation-QD)
- গড় বিচ্যুতি বা মিন ডেভিয়েশন (mean deviation-MD)
- আদর্শ বিচ্যুতি বা স্ট্যাণ্ডার্ড ডেভিয়েশন (standard deviation-SD)

আদর্শ বিচ্যুতিকে পরিমিত ব্যবধানও বলা হয়।

সংজ্ঞা

স্কোরগুচ্ছের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম স্কোরের অন্তরফলকে স্কোরগুচ্ছের **বিস্তৃতি** বলে।
বন্টনের মধ্যবর্তী শতকরা ৫০ ভাগ স্কোরের অর্ধেককে **চতুর্থাংশ বিচ্যুতি** বলে।
বন্টনের গড় থেকে প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতির গড়কে **গড় বিচ্যুতি** বলে।
বন্টনের গড় থেকে স্কোরগুলোর বিচ্যুতির বর্গসমূহের গড়ের বর্গমূলকে **আদর্শ বিচ্যুতি** বলে।

বিস্তৃতি

বিস্তৃতি হল যে কোন স্কোরগুচ্ছের বিষমতার সবচেয়ে সহজ পরিমাপ। স্কোরগুচ্ছের বৃহত্তম স্কোরটি থেকে ক্ষুদ্রতম স্কোরটি বাদ দিলেই স্কোরগুচ্ছটির বিস্তৃতি পাওয়া যায়। একে আমরা সূত্রে প্রকাশ করতে পারি ––

বিস্তৃতির সূত্র

বিস্তৃতি = সর্বোচ্চ মান – সর্বনিম্ন মান (সূত্র ৩-১.১)

স্কোরগুচ্ছটির বৃহত্তম স্কোর যদি ৮০ হয় এবং ক্ষুদ্রতম স্কোর যদি ১০ হয় তাহলে স্কোরগুচ্ছটির বিস্তৃতি হবে ৮০ – ১০ = ৭০।

আবার সর্বোচ্চ স্কোরটি যদি ৬৫ হয় এবং সর্বনিম্ন স্কোরটি যদি ৩০ হয় তাহলে স্কোরগুচ্ছটির বিস্তৃতি হবে ৬৫ – ৩০ = ৩৫। যে দুইটি বিস্তৃতি পেলাম তা হল পূর্বে উল্লেখিত ছেলে এবং মেয়েদের স্কোরগুচ্ছ দুইটির বিস্তৃতি। এই বিস্তৃতি থেকেই আমরা বুঝতে পারছি যে, মেয়েদের দলটির তুলনায় ছেলে শিক্ষার্থীদের মধ্যে কৃতিত্বের ক্ষেত্রে তারতম্য বেশি।

বিস্তৃতির সীমাবদ্ধতা

বিস্তৃতির ক্ষেত্রে কেবলমাত্র দুইটি প্রান্তবর্তী স্কোরের প্রতি দৃষ্টি নিবদ্ধ করলে চলে। অপর স্কোরগুলো হিসাবের বাইরে থাকে। মাঝের স্কোরগুলো খুব কাছাকাছি হওয়া সত্ত্বেও দুইটি চরম প্রকৃতির প্রান্তীয় স্কোরের কারণে বিস্তৃতির মান অনেক বড় হতে পারে। এ কারণে বিষমতার পরিমাপ হিসাবে বিস্তৃতি তেমন নির্ভরযোগ্য নয়। বিস্তৃতির ব্যবহার তাই শুধুমাত্র সে সব ক্ষেত্রে সীমাবদ্ধ রাখা বাঞ্ছনীয় যেখানে খুব দ্রুত বিষমতার পরিমাপ নির্ণয়ের প্রয়োজন হয় এবং বিষমতা সম্পর্কে একটা মোটামুটি ধারণা পেলেই চলে। দুইটি বন্টনের বিস্তৃতিকে তুলনা করে বন্টন দুইটির বিষমতা সম্পর্কে একটি সাধারণ ধারণা পাওয়া যেতে পারে, তবে বন্টন দুইটির স্কোর সংখ্যার মধ্যে যদি খুব বেশি পার্থক্য থাকে তাহলে তুলনা নির্ভরযোগ্য হয় না। কারণ বন্টনে যত বেশি সংখ্যক স্কোর থাকে দুই প্রান্তে চরম প্রকৃতির স্কোর থাকার সম্ভাবনা তত বেড়ে যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন - ১

অ) বহু নির্বাচনী প্রশ্ন

সঠিক উত্তর নির্দেশমূলক অক্ষরটিকে বৃত্তায়িত করুন। (উদাহরণ ঃ আপনার পছন্দসই উত্তরটি ক হলে একে ক বৃত্তায়িত করুন)

১. বিস্তৃতির সঠিক সংজ্ঞা কোনটি?
   ক. সর্বোচ্চ স্কোর এবং সর্বনিম্ন স্কোরের যোগফল
   খ. সর্বোচ্চ স্কোর এবং সর্বনিম্ন স্কোরের বিয়োগফল
   গ. সর্বোচ্চ স্কোর এবং সর্বনিম্ন স্কোরের যোগফলের অর্ধেক
   ঘ. সর্বোচ্চ স্কোর এবং সর্বনিম্ন স্কোরের বিয়োগফলের অর্ধেক

২. বন্টনের মধ্যবর্তী ৫০% ক্ষেত্রের অর্ধেক হচ্ছে বন্টনের —
   ক. বিস্তৃতি
   খ. চতুর্থাংশ বিচ্যুতি
   গ. গড় বিচ্যুতি
   ঘ. আদর্শ বিচ্যুতি

৩. নিচের বন্টনটির বিস্তৃতি কত?
   ৫, ১১, ৭, ৮, ১৫, ১২, ১১
   ক. ৬
   খ. ৭
   গ. ৮
   ঘ. ১০

৪. ৩ নং প্রশ্নের সর্বোচ্চ স্কোরটি ১৫ এর স্থলে ২৫ হলে বিস্তৃতি কত হবে?
   ক. ১০
   খ. ১৫
   গ. ২০
   ঘ. ২৫

সঠিক উত্তর ঃ

অ) ১। খ, ২। খ, ৩। ঘ, ৪। গ

পাঠ ২

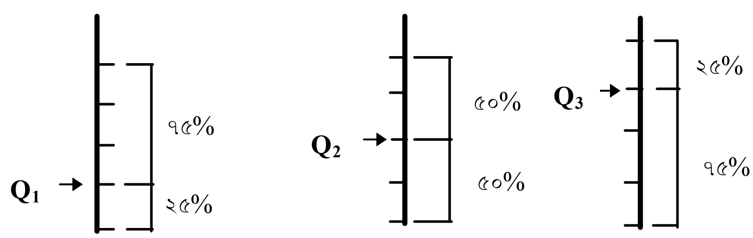
চতুর্থাংশ বিচ্যুতি
[Quartile Deviation]

এই পাঠ শেষে আপনি —

- চতুর্থাংশ বিচ্যুতি কাকে বলে তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- চতুর্থাংশ বিচ্যুতি নির্ণয় করতে পারবেন
- চতুর্থাংশ বিচ্যুতির ব্যবহার বর্ণনা করতে পারবেন।

প্রথম পাঠে আমরা দেখলাম, বিস্তৃতি একটি বন্টনের স্কোরগুচ্ছের বিষমতা পরিমাপ করে। বন্টনের বিষমতার আর একটি পরিমাপ হচ্ছে চতুর্থাংশ বিচ্যুতি। এ ক্ষেত্রে সমগ্র বন্টনের বিস্তারকে বিবেচনা করা হয় না। কেবলমাত্র বন্টনের মাঝামাঝিতে অবস্থিত ৫০% স্কোরের বিস্তারের উপর ভিত্তি করে চতুর্থাংশ বিচ্যুতি নির্ণয় করা হয়। আমরা জানি যে, মধ্যক বন্টনকে সমান দুইভাগে বিভক্ত করে। বন্টনের মাঝামাঝিতে অবস্থিত ৫০% স্কোরের বিস্তার জানার জন্য আরও দুইটি বিন্দু স্থির করতে হয় —

- যে বিন্দুর নিচে ২৫% এবং উপরে ৭৫% স্কোর থাকে তাকে প্রথম চতুর্থাংশ বিন্দু (first quartile) বা Q_1 বলা হয়।
- যে বিন্দুর নিচে ৭৫% স্কোর থাকে এবং উপরে ২৫% স্কোর থাকে তাকে তৃতীয় চতুর্থাংশ বিন্দু (third quartile) বা Q_3 বলা হয়।
- মধ্যক কে আমরা Q_2 বলব।



চিত্র ৩-২-১ বন্টনের বিভিন্ন চতুর্থাংশ বিন্দুর অবস্থান

Q_1, Q_2 এবং Q_3 বন্টনটিকে সমান চারটি ভাগে ভাগ করে। শেষ বিন্দুটি বা Q_4 চিহ্নিত করার কোন প্রয়োজন নেই। মনে রাখতে হবে Q_1, Q_2, Q_3 তিনটি বিন্দু বন্টনের কোন অংশ বা বিভাগ নয়। বন্টনের মাঝামাঝিতে অবস্থিত ৫০% স্কোরের বিস্তার অর্থাৎ Q_1 এবং Q_3 এর মধ্যবর্তী দূরত্বকে অন্তর্চতুর্থাংশ বিন্দুর বিস্তার (inter-quartile range) বলে। চতুর্থাংশ বিচ্যুতি হচ্ছে Q_3 থেকে Q_1 পর্যন্ত দূরত্বের অর্ধেক। সুতরাং একে অর্ধ-অন্তর্চতুর্থাংশ বিন্দুর বিস্তার (semi-inter-quartile range) বলা হয়।

চতুর্থাংশ বিচ্যুতির সূত্র

চতুর্থাংশ বিচ্যুতি Q দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

চতুর্থাংশ বিচ্যুতি (Q) $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ (সূত্র ৩-২.১)

সূত্রটির প্রতি লক্ষ্য করলেই আমরা বুঝতে পারি যে চতুর্থাংশ বিচ্যুতি অর্থাৎ Q নির্ণয় করার জন্য প্রথম চতুর্থাংশ বিন্দু অর্থাৎ Q_1 এবং তৃতীয় চতুর্থাংশ বিন্দু অর্থাৎ Q_3 নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

Q_2 অর্থাৎ মধ্যক নির্ণয়ের জন্য যে পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয় সেই পদ্ধতি প্রয়োগ করেই Q_1 এবং Q_3 নির্ণয় করতে হয়।

Q_1 নির্ণয়ের সময় $\frac{N}{২}$ (বা $\frac{N}{2}$) এর স্থলে $\frac{N}{৪}$ (বা $\frac{N}{4}$) ব্যবহার করতে হয় এবং Q_3 নির্ণয়ের সময় $\frac{৩N}{৪}$ (বা $\frac{3N}{4}$) ব্যবহার করতে হয়।

এখন Q_1 এর ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$$Q_1 = L_1 + i \times \frac{\frac{N}{4} - f_b}{f_m}$$ (সূত্র ৩-২.২)

এখানে, L_1 = যে শ্রেণী-ব্যবধানে Q_1 অবস্থিত সেই শ্রেণী-ব্যবধানের নিম্নসীমা
i = শ্রেণী-দৈর্ঘ্য
f_m = যে শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যে Q_1 অবস্থিত সেই শ্রেণী-ব্যবধানের ফ্রিকোয়েন্সী
f_b = f_m এর নিচের ফ্রিকোয়েন্সীগুলোর যোগফল বা সমষ্টি
$\frac{N}{৪}$ (বা $\frac{N}{4}$) = মোট স্কোরের এক চতুর্থাংশ

এবং Q_3 এর ক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারি,

$$Q_3 = L_1 + i \times \frac{\frac{৩N}{4} - f_b}{f_m}$$ (সূত্র ৩-২.৩)

এখানে, L_1 = যে শ্রেণী-ব্যবধানে Q_3 অবস্থিত সেই শ্রেণী-ব্যবধানের নিম্নসীমা
i = শ্রেণী-দৈর্ঘ্য
f_m = যে শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যে Q_3 অবস্থিত সেই শ্রেণী-ব্যবধানের ফ্রিকোয়েন্সী
f_b = f_m এর নিচের ফ্রিকোয়েন্সীগুলোর যোগফল বা সমষ্টি
$\frac{৩N}{৪}$ (বা $\frac{3N}{4}$) = মোট স্কোরের তিন চতুর্থাংশ

আমরা নিচের গণসংখ্যা নিবেশনটি ব্যবহার করতে পারি —

সারণী ৩-২.১ নমুনা গণসংখ্যা নিবেশন

শ্রেণী-ব্যবধান	ফ্রিকোয়েন্সী (f)	যোজিত গণসংখ্যা	
১১০ - ১১৪	১	৩৮	
১০৫ - ১০৯	৩	৩৭	
১০০ - ১০৪	২	৩৪	
৯৫ - ৯৯	৪	৩২	← Q_3
৯০ - ৯৪	৩	২৮	
৮৫ - ৮৯	১	২৫	
৮০ - ৮৪	৬	২৪	
৭৫ - ৭৯	৪	১৮	
৭০ - ৭৪	৪	১৪	
৬৫ - ৬৯	৩	১০	← Q_1
৬০ - ৬৪	১	৭	
৫৫ - ৫৯	৩	৬	
৫০ - ৫৪	১	৩	
৪৫ - ৪৯	১	২	
৪০ - ৪৪	১	১	
	N = ৩৮		

মনে রাখবেন ৬৫ - ৬৯ শ্রেণী ব্যবধানের প্রকৃত সীমা হল ৬৪.৫ - ৬৯.৫।

প্রথমে আমাদের Q_1 নির্ণয় করতে হবে। $\frac{N}{৪} = \frac{৩৮}{৪} = ৯.৫$

৯.৫ এর অবস্থান জানার জন্য নিচ থেকে ফ্রিকোয়েন্সীর ক্রমসমষ্টি নির্ণয় করে যাই। অর্থাৎ গণসংখ্যাগুলো যোগ করতে থাকি।

শ্রেণী-ব্যবধান ৬০ - ৬৪ পর্যন্ত এসে আমরা ফ্রিকোয়েন্সীর ক্রমসমষ্টি পাই ৭। বুঝতে পারছি যে, $\frac{N}{৪}$ অর্থাৎ ৯.৫ পাওয়া যাবে ৬৫ - ৬৯ শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যে।

সুতরাং,

f_b = ৭
f_m = ৩
L_l = ৬৪.৫
i = ৫

এখন (৩-২.২) সূত্রে মান বসিয়ে পাচ্ছি —

$$Q_1 = ৬৪.৫ + ৫ \times \frac{৯.৫ - ৭}{৩} = ৬৪.৫ + ৫ \times \frac{২.৫}{৩}$$
$$= ৬৪.৫ + ৪.১৭$$
$$= ৬৮.৬৭$$

এবার একই ভাবে Q_3 নির্ণয় করতে হবে।

প্রাথমিক ভাবে $\frac{৩N}{৪}$ বের করি

$$\frac{৩N}{৪} = \frac{৩৮ \times ৩}{৪} = \frac{১১৪}{৪} = ২৮.৫$$

Q_3 কোন শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যে অবস্থিত তা নির্ণয় করার জন্য আগের মত নিচ থেকে ফ্রিকোয়েন্সীগুলো যোগ করে উপরের দিকে যাই। ৯০ - ৯৪ শ্রেণী-ব্যবধান পর্যন্ত এসে ফ্রিকোয়েন্সীর ক্রম সমষ্টি পাই ২৮। কিন্তু আমাদের প্রয়োজন ২৮.৫ তম সংখ্যাটি। সুতরাং আমরা বলতে পারি যে, ৯৫ - ৯৯ শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যে Q_3 অবস্থিত।

এক্ষেত্রে,

f_b = ২৮
f_m = ৪
i = ৫ (আমাদের আগেই জানা আছে)

এবং L_l = ৯৪.৫

এখন (৩-২.৩) সূত্রে মান বসিয়ে Q_3 পাওয়া যায়।

$$Q_3 = ৯৪.৫ + ৫ \times \frac{২৮.৫ - ২৮}{৪}$$

$$= ৯৪.৫ + ৫ \times \frac{০.৫}{৪} = ৯৪.৫ + .৬৩ = ৯৫.১২$$

এ সমস্ত হিসাবের ফলে আমরা কি পেলাম?

Q_3 = ৯৫.১২
এবং Q_1 = ৬৮.৬৭

আমরা জানি যে, $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

সুতরাং উপরের সূত্রে Q_1 এবং Q_3 এর মান বসিয়ে Q পাই

$$Q = \frac{৯৫.১২ - ৬৮.৬৭}{২} = \frac{২৬.৪৫}{২} \cong ১৩.২৩$$

অর্থাৎ, গণসংখ্যা নিবেশনটির Q হল ১৩.২৩।

বিকল্প পদ্ধতি বা যাচাই পদ্ধতি

উপরের পদ্ধতিতে Q_1 ও Q_3 এর সঠিক মান নির্ণয় করা হয়েছে কি না তা আমরা উপর দিক থেকে ফ্রিকোয়েন্সীর ক্রমসমষ্টি নির্ণয় করে যাচাই করতে পারি। উপর থেকে নিচের দিকে $\frac{N}{৪}$ বা ২৫% গণনা করে Q_3 বের করতে হবে।

আমাদের Q_3 এর মান হবে —

$$\boxed{\begin{array}{l} f_a = ৬ \\ f_m = ৪ \\ i = ৫ \\ U_l = ৯৯.৫ \end{array}}$$

$$Q_3 = U_1 + i \times \frac{\frac{N}{৪} - f_a}{f_m} = ৯৯.৫ - ৫ \times \frac{৩.৫}{৪} = ৯৯.৫ - \frac{১৭.৫}{৪}$$

$$Q_3 = ৯৯.৫ - ৪.৩৮ = ৯৫.১২$$

এবার আমরা Q_1 এর মান নির্ণয় করব। উপর থেকে গণনা করে নিচের দিকে ৭৫% বা $\frac{৩N}{৪}$ তম সংখ্যাটি বের করতে হবে।

Q_1 এর মান হবে —

$$\boxed{\begin{array}{l} f_b = ২৮ \\ f_m = ৩ \\ i = ৫ \\ U_l = ৬৯.৫ \end{array}}$$

$$Q_1 = U_1 + i \times \frac{\frac{৩N}{৪} - f_b}{f_m} = ৬৯.৫ - ৫ \times \frac{২৮.৫ - ২৮}{৩} = ৬৯.৫ - \frac{৫ \times .৫}{৩}$$

$$= ৬৯ - \frac{২.৫}{৩} = ৬৯.৫ - .৮৩$$

$$Q_1 = ৬৮.৬৭$$

যেহেতু Q_1 এবং Q_3 এর মান উভয় পদ্ধতিতে সমান হয়েছে, সুতরাং Q এর মানও সমান হবে।

সারণী ৩-২.২ মূল ও বিকল্প পদ্ধতির পার্থক্য

মূল পদ্ধতি	বিকল্প পদ্ধতি
নিচের দিক থেকে যোজিত গণসংখ্যা বা cumulative frequency বের করা হয়।	উপরের দিক থেকে যোজিত গণসংখ্যা বা cumulative frequency বের করা হয়।

প্রশিক্ষণার্থী, গণনামূলক কাজের অংশ বলে পাঠটি দীর্ঘ। আপনি ইচ্ছে করলে পাঠ বিরতি গ্রহণ করতে পারেন।

আরো একটি উদাহরণ থেকে Q_1, Q_3 এবং Q এর মান বের করি।

সারণী ৩-২.৩ নমুনা গণসংখ্যা নিবেশন

শ্রেণী-ব্যবধান	২৫ - ২৯	৩০ - ৩৪	৩৫ - ৩৯	৪০ - ৪৪	৪৫ - ৪৯	৫০ - ৫৪	৫৫ - ৫৯	৬০ - ৬৪	৬৫ - ৬৯	৭০ - ৭৪	৭৫ - ৭৯	৮০ - ৮৪	৮৫ - ৮৯	
ফ্রিকোয়েন্সী (f)	১	৩	৫	৫	৬	৮	৯	৭	৫	৪	৪	২	১	N = ৬০

প্রয়োজনীয় পরামর্শ

আপনি নিজে হিসেবটি করতে চাইলে নিচের গণনার উপর এক টুকরো সাদা কাগজ রেখে দিন। আপনার হিসেব শেষ হলে মিলিয়ে দেখুন। কোথাও ভুল থাকলে ধীরে ধীরে মিলিয়ে নিন।

শ্রেণী-ব্যবধান	ফ্রিকোয়েন্সী (f)
৮৫ - ৮৯	১
৮০ - ৮৪	২
৭৫ - ৭৯	৪
৭০ - ৭৪	৪
৬৫ - ৬৯	৫
৬০ - ৬৪	৭
৫৫ - ৫৯	৯
৫০ - ৫৪	৮
৪৫ - ৪৯	৬
৪০ - ৪৪	৫
৩৫ - ৩৯	৫
৩০ - ৩৪	৩
২৫ - ২৯	১
	N = ৬০

Q_1 নির্ণয়

$$\frac{N}{৪} = ১৫$$
$$f_b = ১৪$$
$$f_m = ৬$$
$$i = ৫$$
$$L_l = ৪৪.৫$$

$$Q_1 = L_l + i \times \frac{\frac{N}{৮} - f_b}{f_m} = ৪৪.৫ + ৫ \times \frac{১৫ - ১৪}{৬} = ৪৪.৫ + ৫ \times \frac{১}{৬}$$

$$= ৪৪.৫ + \frac{৫}{৬} = ৪৪.৫ + .৮৩ = ৪৫.৩৩$$

Q_3 নির্ণয়

$$\frac{৩N}{৪} = ৪৫$$
$$f_b = ৪৪$$
$$f_m = ৫$$
$$i = i$$
$$L_l = ৬৪.৫$$

$$Q_3 = L_1 \quad ৬৪.৫ + ৫ \times \frac{৪৫-৪৪}{৫} = ৬৪.৫ + ১ = ৬৫.৫$$

$$Q = \frac{Q_3}{2}$$

মান বসিয়ে $Q = \frac{৬৫.৫-৪৫.৩৩}{২} = \frac{২০.১৭}{২} = ১০.০৯$

সুতরাং নিবেশনটির Q হল ১০.০৯।

Q_2 বা মধ্যক নির্ণয়

$$\frac{N}{২} = ৩০$$
$$f_b = ২৮$$
$$f_m = ৯$$
$$i = ৫$$
$$L_l = ৫৪.৫$$

$$\text{মধ্যক} = L_1 + i \times \frac{\frac{N}{২} - f_b}{f_m}$$

সূত্রে মান বসিয়ে পাচ্ছি, মধ্যক $= ৫৪.৫ + ৫ \times \frac{৩০-২৮}{৯} = ৫৪.৫ + \frac{৫\times২}{৯}$

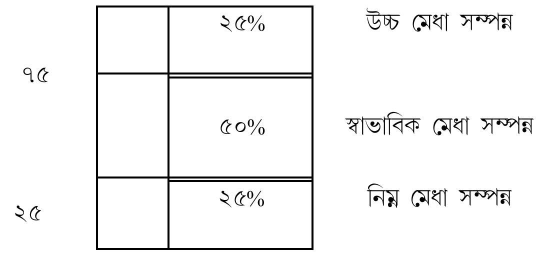
$$= ৫৪.৫ + ১.১১ = ৫৫.৬১$$

চতুর্থাংশ বিচ্যুতির ব্যবহার

চতুর্থাংশ বিচ্যুতি ব্যবহার করে আমরা স্কোরগুচ্ছের মধ্যবর্তী ৫০% স্কোর সম্পর্কে ধারণা পেতে পারি। মধ্যকের মান জানা থাকলে সেই মানের সঙ্গে দুই দিকে এক একক করে চতুর্থাংশ বিচ্যুতি ± করলে সম্পূর্ণ বন্টনের শতকরা ৫০টি স্কোর সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। আমাদের উদাহরণে মধ্যক ৫৫.৬১ এবং চতুর্থাংশ বিচ্যুতি ১০.০৯।

আমরা বুঝতে পারলাম যে —

- ৫৫.৬১ ± ১০.০৯ বা ৪৫.৫২ থেকে ৬৫.৭৩ স্কোর বিস্তারের মধ্যে শতকরা ৫০টি স্কোর আছে।
- শতকরা ২৫টি স্কোর ৪৫.৫২ এর কম এবং বাকী শতকরা ২৫টি স্কোর ৬৫.৭০ এর বেশি।
- এভাবে আমরা শিক্ষার্থীদের পারদর্শিতার উপর ভিত্তি করে তাদের তিনটি দলে ভাগ করতে পারি। মধ্যবর্তী ৫০% স্বাভাবিক মেধা সম্পন্ন, নিচের ২৫% নিম্ন মেধা সম্পন্ন এবং উপরের ২৫% উচ্চ মেধা সম্পন্ন।



চিত্র ৩-২.২ চতুর্থাংশ বিচ্যুতির তাৎপর্য

সারাংশ

আসুন, কাজের মূল পদক্ষেপগুলো লিখে নিই —

কোন একটি গণসংখ্যা নিবেশনের চতুর্থাংশ বিচ্যুতি বা চতুর্থক ব্যবধান বের করতে হলে

- আমাদের Q_1 এবং Q_3 বের করতে হবে
- এই দুইটি গণনা কাজের জন্য আমাদের প্রত্যেকবার পৃথকভাবে L_l, i, f_m, f_b বের করতে হবে
- $\frac{N}{৪}$ অথবা $\frac{৩N}{৪}$ বের করতে হবে
- এরপর নির্দিষ্ট সূত্রে এ সমস্ত মান বসিয়ে নির্ভুল গণনা করতে হবে

পাঠোত্তর মূল্যায়ন - ২

অ) বহু নির্বাচনী প্রশ্ন

সঠিক উত্তর নির্দেশমূলক অক্ষরটিকে বৃত্তায়িত করুন। (উদাহরণ ঃ আপনার পছন্দসই উত্তরটি ক হলে একে ক বৃত্তায়িত করুন)

১. প্রথম চতুর্থাংশ বিন্দু বা Q_1 এর নিচে বন্টনের শতকরা (%) কতগুলো স্কোর থাকে?
   ক. ৭৫
   খ. ৫০
   গ. ৩৫
   ঘ. ২৫

২. তৃতীয় চতুর্থাংশ বিন্দু বা Q_3 এর উপরে বন্টনের কত শতাংশ (%) স্কোর থাকে?
   ক. ১৫
   খ. ২৫
   গ. ৫০
   ঘ. ৭৫

৩. চতুর্থাংশ বিচ্যুতি (Q) এর সূত্র কোনটি?
   ক. $Q = Q - Q_3$
   খ. $Q = Q_3 - Q_1$
   গ. $Q = \dfrac{Q - Q_3}{2}$
   ঘ. $Q = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

৪. যদি Q_3 = ৫৫.২৫ হয় এবং Q_1 = ৪২.৭৫ হয়, তাহলে Q কত?
   ক. ০.৭৫
   খ. ৬.২৫
   গ. ৬.৭৫
   ঘ. ৭.২৫

৫. N = ৩২ হয়, তাহলে প্রথম চতুর্থাংশ বিন্দু (Q_1) কত?
   ক. ২৪
   খ. ১৬
   গ. ৮
   ঘ. ৪

৬. N = ৪০ হয় তাহলে তৃতীয় চতুর্থাংশ (Q_3) বিন্দু কত?
   ক. ৩২
   খ. ৩০
   গ. ২৮
   ঘ. ২০

সঠিক উত্তর ঃ

অ) ১। ঘ, ২। খ, ৩। ঘ, ৪। খ, ৫। গ, ৬। খ

পাঠ ৩

লেখ এর সাহায্যে বিচ্যুতি নির্ণয়

[Graphical Determination of Range and Median]

এই পাঠ শেষে আপনি —

- লেখ এর সাহায্যে চতুর্থাংশ বিচ্যুতি বের করতে পারবেন
- লেখ এর সাহায্যে মধ্যক বের করতে পারবেন।

দ্বিতীয় পাঠে আমরা গণসংখ্যা নিবেশন বা frequency distribution থেকে Q_1 এবং Q_3 হিসেব করে চতুর্থাংশ বিচ্যুতি (Q) হিসেব করা শিখেছি। এই পদ্ধতিটি ছাড়াও Q বের করা সম্ভব। আমরা আগেই শিখেছি গণসংখ্যা নিবেশন থেকে কি করে যোজিত গণসংখ্যা বা cumulative frequency বের করতে হয়। যোজিত গণসংখ্যা ব্যবহার করে যে রেখা আঁকা যায় তাকে আমরা অজিভ (ogive) বা যোজিত রেখা বলেছি।

লেখ অঙ্কন কাজের জন্য আমরা সারণী ৩-২.১ আবার ব্যবহার করব।

শ্রেণী-ব্যবধান	ফ্রিকোয়েন্সী (f)	যোজিত গণসংখ্যা	
১১০ - ১১৪	১	৩৮	
১০৫ - ১০৯	৩	৩৭	
১০০ - ১০৪	২	৩৪	
৯৫ - ৯৯	৪	৩২	← Q_3
৯০ - ৯৪	৩	২৮	
৮৫ - ৮৯	১	২৫	
৮০ - ৮৪	৬	২৪	
৭৫ - ৭৯	৪	১৮	
৭০ - ৭৪	৪	১৪	
৬৫ - ৬৯	৩	১০	← Q_1
৬০ - ৬৪	১	৭	
৫৫ - ৫৯	৩	৬	
৫০ - ৫৪	১	৩	
৪৫ - ৪৯	১	২	
৪০ - ৪৪	১	১	
	N = ৩৮		

আমাদের গণসংখ্যা নিবেশনটির —

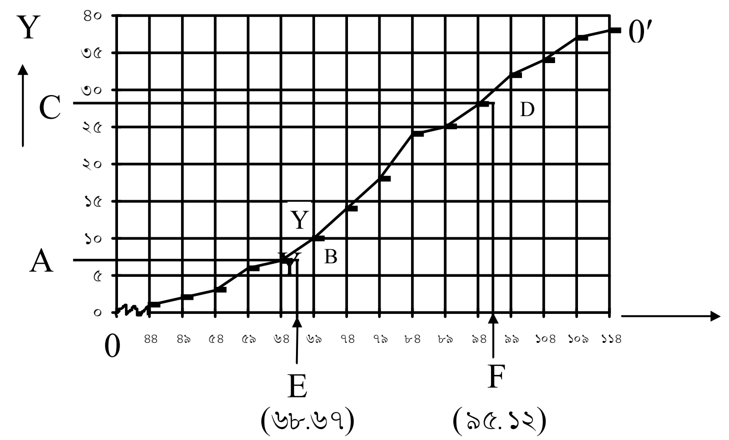
- নিম্নতম সংখ্যা হল ৪০ (প্রকৃত মান ৩৯.৫)
- এবং উর্ধ্বতন সংখ্যা হল ১১৪ (প্রকৃত মান ১১৪.৫)

সুতরাং X অক্ষের সীমা হবে ৪০ থেকে ১১৫ পর্যন্ত। কিন্তু আমরা জেনেছি যোজিত রেখা আঁকতে হলে মূলবিন্দু বা শূন্য থেকে শুরু করতে হয়। সুতরাং প্রকৃত সীমা হল ০ -১১৫। অনুরূপভাবে Y অক্ষের প্রকৃত সীমা হবে ০ - ৪০।

এবার ছক কাগজ নেই।

ছক কাগজে X অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দের্ঘ্যকে ৫ ধরে তাতে শ্রেণী ব্যবধানের উর্ধ্বসীমা বসাই (প্রকৃত উর্ধ্বসীমা ব্যবহার করবনা)।

অনুরূপভাবে Y অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে ৫ ধরে তাতে যোজিত গণসংখ্যাগুলো বসাই।



চিত্র ৩-৩.১ লেখ এর সাহায্যে বিচ্যুতি নির্ণয়

$\frac{N}{৪}$ = -----

$\frac{৩N}{৪}$ = -----

নিজে বের করে ডান পাশে লিখুন

এখানে

$\frac{N}{৪} = ৯.৫$

$\frac{৩N}{৪} = ২৮.৫$

- Y অক্ষে ৯.৫ এবং ২৮.৫ বিন্দু দুইটি হতে X অক্ষের সমান্তরাল করে দুইটি রেখা AB ও CD আঁকি।
- AB ও CD রেখা দুইটি অজিভ বা যোজিত রেখা 0 0′ কে B এবং D বিন্দুতে ছেদ করল। B এবং D বিন্দুদ্বয় হতে X অক্ষের উপর যথাক্রমে দুইটি লম্ব BE ও DF আঁকি।
- BE লম্বটির পাদবিন্দুর ভূজ E হল ৬৮.৬৭ এবং DF লম্বটির পাদবিন্দুর ভূজ F হল ৯৫.১২।
- ৬৮.৬৭ হল নিবেশনটির Q_1 এবং ৯৫.১২ হল নিবেশনটির Q_3।

এবার চতুর্থাংশ বিচ্যুতি $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{২}$

সূত্র অনুসারে $Q = \frac{৯৫.১২ - ৬৮.৬৭}{২} = ১৩.২৩$

এবার একই পদক্ষেপ অনুসরণ করে লেখচিত্রের সাহায্যে আপনি সারণী ৩-২.৩ উদাহরণটির Q বের করুন। পদক্ষেপগুলোতে কোন ত্রুটি না থাকলে আপনি এবার Q পাবেন ১০.০৯।

মধ্যক নির্ণয়

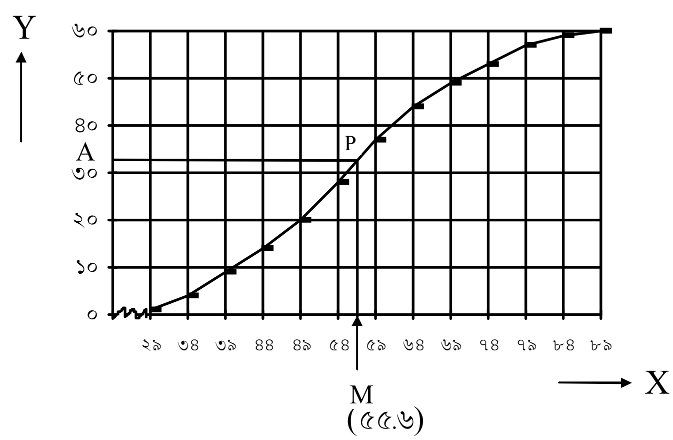
একই ভাবে X অক্ষ ও Y অক্ষে উপযুক্ত মান বসিয়ে আপনি প্রয়োজন অনুসারে লেখ এর মাধ্যমে যে কোন গণসংখ্যা নিবেশনের মধ্যক নির্ণয় করতে পারবেন।

সব সময় আমাদের অজিভ বা যোজিত রেখা আঁকতে হবে।

সমাধান

শ্রেণী-ব্যবধান	ফ্রিকোয়েন্সী (f)	যোজিত গণসংখ্যা
২৫ - ২৯	১	১
৩০ - ৩৪	৩	৪
৩৫ - ৩৯	৫	৯
৪০ - ৪৪	৫	১৪
৪৫ - ৪৯	৬	২০
৫০ - ৫৪	৮	২৮
৫৫ - ৫৯	৯	৩৭ ← Q_2 = মধ্যমা
৬০ - ৬৪	৭	৪৪
৬৫ - ৬৯	৫	৪৯
৭০ - ৭৪	৪	৫৩
৭৫ - ৭৯	৪	৫৭
৮০ - ৮৪	২	৫৯
৮৫ - ৮৯	১	৬০

পূর্বের নিয়ম অনুসারে X এবং Y অক্ষে যথাক্রমে শ্রেণীর উর্ধ্বসীমা এবং যোজিত গণসংখ্যা বসাই।



চিত্র ৩-৩.২ যোজিত রেখার সাহায্যে মধ্যক নির্ণয়

X অক্ষে একটি ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে ৫ ধরি। অনুরূপ ভাবে Y অক্ষে একটি ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে ৫ ধরি।

- এবার X অক্ষে $\frac{N}{২}$ তম অর্থাৎ ৩০ তম বিন্দুটি চিহ্নিত করি
- অতপর ঐ বিন্দু থেকে X অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা AP আঁকি।
- AP রেখাটি অজিভ রেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করল
- P বিন্দু থেকে X অক্ষের উপর লম্ব PM টানি
- PM রেখাটি X অক্ষকে ৫৫.৬ বিন্দুতে ছেদ করল
- সুতরাং নিবেশনটির মধ্যক হল ৫৫.৬।

সীমাবদ্ধতা

যোজিত রেখা থেকে মধ্যক বা মধ্যমা নির্ণয়ের সীমাবদ্ধতা

সাধারণ ছক কাগজের ব্যবহার দ্বারা আমরা দশমিকের পরের সংখ্যাগুলো নির্ভুল ভাবে পাই না। অনুমান করে নিতে হয়। সুতরাং সংখ্যা বসিয়ে, হিসেব করে ৫৫.৬১ পেলেও রেখাচিত্র থেকে ৫৫.৬ এর বেশি সূক্ষ্ম মান পাওয়া সম্ভব হবে না।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন - ৩

অ) গাণিতিক সমস্যা

১.

শ্রেণী ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা
৪০ - ৪৪	১
৪৫ - ৪৯	২
৫০ - ৫৪	২
৫৫ - ৫৯	৬
৬০ - ৬৪	১১
৬৫ - ৬৯	৫
৭০ - ৭৪	৩
	৩০

উপরের গণসংখ্যা নিবেশনটির Q_1, Q_3, Q নির্ণয় করুন।

ক. হিসাবের মাধ্যমে

খ. যোজিত রেখা এর মাধ্যমে

২. সারণী থেকে Q_1, Q_3, বের করার ক্ষেত্রে f_m, f_b, i, L_1 ব্যাখ্যা করুন।

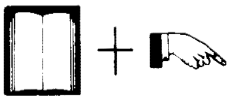
৩. Q_1, Q_3, Q সংজ্ঞায়িত করুন।

সঠিক উত্তর ঃ

অ) ১। ক. $Q_1 =$ ৫৭, $Q_3 =$ ৬৪.৬, $Q =$ ৩.৮

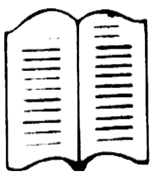
পাঠ ৪

গড় বিচ্যুতি
[Mean Deviation]



এই পাঠ শেষে আপনি —

- গড় বিচ্যুতি কি তা বর্ণনা করতে পারবেন
- অবিন্যস্ত স্কোরের গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করতে পারবেন
- বিন্যস্ত স্কোরের গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করতে পারবেন
- গড় বিচ্যুতির মানের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন।



কোন স্কোরগুচ্ছের গড় থেকে প্রত্যেকটি স্কোরের যে বিচ্যুতি, তার গড়কে গড় বিচ্যুতি (mean deviation) বলে।বন্টনের স্কোরগুলোর কিছু গড়ের নিচে থাকে এবং কিছু গড়ের উপরে থাকে। স্কোর এবং গড়ের পার্থক্যকে বিচ্যুতি (deviation) বলা হয়। যখন গড় এবং স্কোর সমান হয় তখন স্কোরটির বিচ্যুতি হয় শূন্য (০)।

বিচ্যুতি নির্ণয়ের সূত্র

$$x = X - M \qquad \text{(সূত্র ৩-৪.০)}$$

এখানে X = প্রতিটি স্কোর

M = গড়

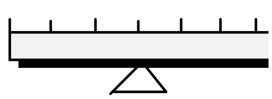
এবং x = গড় থেকে স্কোরটির বিচ্যুতি

X	$X - M = x$
X_1	$X_1 - M = x_1$
X_2	$X_2 - M = x_2$
X_3	$X_3 - M = x_3$
X_4	$X_4 - M = x_4$

এ কারণেই গড় থেকে প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতি নির্ণয় করার পর সবকটা বিচ্যুতিকে যোগ করলে যোগফল শূন্য (০) হয়। একে আমরা এভাবে প্রকাশ করতে পারি —

$$\sum x = ০$$

আমরা জানি যে, গড় হচ্ছে স্কোরগুচ্ছের ভারকেন্দ্র।



এখন আমরা যদি বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করতে চাই তাহলে যে সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে তা হল,

বিচ্যুতির গড়

$$\frac{\sum x}{N} \qquad \text{(সূত্র ৩-৪.১)}$$

(N হচ্ছে স্কোর সংখ্যা)

এবার সূত্রে যদি $\sum x$ এর মান বসাই তাহলে গড় বিচ্যুতি কি হবে?

$$\frac{\sum x}{N} = \frac{০}{N} = ০$$

আমরা দেখতে পাচ্ছি, যেহেতু বিচ্যুতিগুলোর যোগফল শূন্য (০), সে কারণে গড় বিচ্যুতিও শূন্য (০) হল। একটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি ভালভাবে বুঝা যাবে।

ধরা যাক্ আমাদের কাছে পাঁচটি স্কোর আছে।

৩	৭	৮	১০	১২

$$\frac{৩+৭+৮+১০+১২}{৫} = \frac{৪০}{৫} = ৮$$

উপরের পাঁচটি স্কোরের গড় হল ৮।

গড় থেকে প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতি বের করি আমরা —

প্রথম স্কোরটির বিচ্যুতি $৩ - ৮ = - ৫$
দ্বিতীয় স্কোরটির বিচ্যুতি $৭ - ৮ = - ১$
তৃতীয় স্কোরটির বিচ্যুতি $৮ - ৮ = ০$
চতুর্থ স্কোরটির বিচ্যুতি $১০ - ৮ = + ২$
শেষ স্কোরটির বিচ্যুতি $১২ - ৮ = + ৪$

এখন বিচ্যুতিগুলোর যোগফল নির্ণয় করা যাক —

$\sum x = - ৫ - ১ + ০ + ২ + ৪ = ০$

$\frac{\sum x}{N} = - - - -$

যোগফল পেলাম ০। এবার যদি বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করতে চাই তাহলে $\sum x$ কে N দিয়ে ভাগ করতে হবে। এতে গড় বিচ্যুতি কি পাওয়া যায়?

$$\frac{\sum x}{N} = \frac{০}{৫} = ০$$

আমরা বুঝতে পারছি যে, উপরের পদ্ধতিতে বিচ্যুতিগুলোর সাধারণ যোগফল নির্ণয় করার ফলে বন্টনটির বিষমতার কোন পরিমাপ পাওয়া যাচ্ছে না। এ কারণে গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের সময় বিচ্যুতিটি ধনাত্মক (পরম বা absolute) ধরে নিয়ে মানগুলোর যোগফল নির্ণয় করা হয়। একটি উদাহরণ নিলে বিষয়টি বুঝতে সুবিধা হবে।

প্রথমে আমরা একটি অবিন্যস্ত উদাহরণ নেই।

অবিন্যস্ত স্কোরের গড় বিচ্যুতি নির্ণয়

সারণী ৩-৪.১ নমুনা স্কোরগুচ্ছ

স্কোর (X)
২০
১৯
১৬
১৫
১৪
১২
৯
$\sum X = ১০৫$

$N = ৭$

$\text{গড়} = \frac{\sum X}{N} = \frac{১০৫}{৭} = ১৫$

$\sum|x|$ দ্বারা চিহ্ন নিরপেক্ষ (absolute value) বিচ্যুতির সংখ্যামানের বা পরমমানের যোগফল বুঝায়।

এক্ষেত্রে গড় বিচ্যুতি $= \frac{\sum|X|}{N}$ (সূত্র ৩-৪.২)

স্কোর (X)	বিচ্যুতি $x = (X - M)$
২০	২০ − ১৫ = + ৫
১৯	১৯ − ১৫ = + ৪
১৬	১৬ − ১৫ = + ১
১৫	১৫ − ১৫ = ০
১৪	১৪ − ১৫ = − ১
১২	১২ − ১৫ = − ৩
৯	৯ − ১৫ = − ৬
$\sum X$ = ১০৫	$\sum\lvert x\rvert$ = ২০

সংখ্যাগুলোর চিহ্নকে উপেক্ষা করে বিচ্যুতিগুলোর যোগফল পাওয়া গেল ২০।

সুতরাং গড় বিচ্যুতির সূত্র অনুসারে,

$\text{গড় বিচ্যুতি} = \frac{\sum|x|}{N} = \frac{২০}{৭} = ২.৮৫৫ \approx ২.৮৬$

যে ধাপগুলো অনুসরণ করা হয়েছে তা হল —

- স্কোরের সংখ্যা নির্ণয় করা
- স্কোরগুলোর যোগফল নির্ণয় করা
- স্কোরগুচ্ছের গড় নির্ণয় করা
- প্রত্যেকটি স্কোর এবং গড়ের পার্থক্য অর্থাৎ বিচ্যুতি নির্ণয় করা
- বিচ্যুতিগুলোর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক চিহ্ন উপেক্ষা করে মানগুলোর যোগফল নির্ণয় করা
- $\frac{\sum|x|}{N}$ নির্ণয় করা

প্রশিক্ষণার্থী, গণনামূলক কাজের অংশ বলে পাঠটি দীর্ঘ। আপনি ইচ্ছে করলে পাঠ বিরতি গ্রহণ করতে পারেন।

বিন্যস্ত স্কোরের গড় বিচ্যুতি নির্ণয়

এবার আমরা বিন্যস্ত স্কোরের গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করা শিখব।

সারণী ৩-৪.২ বিন্যস্ত স্কোর

শ্রেণী-ব্যবধান	f	x'	fx'	X	$x = X - M$	fx
৮৫ - ৮৯	৪	+ ৩	+ ১২	৮৭	+ ১৫.৪৭	+ ৬১.৮৮
৮০ - ৮৪	৫	+ ২	+ ১০	৮২	+ ১০.৪৭	+ ৫২.৩৫
৭৫ - ৭৯	৮	+ ১	+ ৮	৭৭	+ ৫.৪৭	+ ৪৩.৭৬
৭০ - ৭৪	১০	০	০	৭২	+ ০.৪৭	+ ৪.৭০
৬৫ - ৬৯	৬	− ১	− ৬	৬৭	− ৪.৫৩	− ২৭.১৮
৬০ - ৬৪	৪	− ২	− ৮	৬২	− ৯.৫৩	− ৩৮.১২
৫৫ - ৫৯	৪	− ৩	− ১২	৫৭	− ১৪.৫৩	− ৫৮.১২
৫০ - ৫৪	২	− ৪	− ৮	৫২	− ১৯.৫৩	− ৩৯.০৬
$\sum f = N =$ ৪৩				$\sum \lvert fx \rvert =$ ৩২৫.১৭		

এখানে X = শ্রেণী ব্যবধানের মধ্যবিন্দু
M = নিবেশনের গড়
$\sum \lvert fx \rvert$ = ৩২৫.১৭

প্রথমে আমাদের M বের করতে হবে —

$$\text{গড় } M = M' + i \times \frac{\sum fx'}{N} = ৭২ + ৫ \times \frac{(-৪)}{৪৩}$$
$$= ৭২ - \frac{২০}{৪৩} = ৭২ - ০.৪৭ = ৭১.৫৩$$

(সূত্র ২-৪.১)

এবারে $(x = X - M)$ ব্যবহার করে প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতি বের করি। সবগুলো বিচ্যুতি যোগ দিয়ে $\sum \lvert fx \rvert$ বের করি। তারপর এই পরম মান সূচক সংখ্যাটিকে N দিয়ে ভাগ করি —

$$\frac{\sum |fx|}{N} = ----$$

$$\text{গড় বিচ্যুতি} = \frac{\sum |fx|}{N} = \frac{৩২৫.১৭}{৪৩} = ৭.৫৬$$

বিন্যস্ত সারি থেকে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করার জন্য প্রথমে বন্টনটির গড় নির্ণয় করে নিতে হয়। উপরের উদাহরণটিতে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করার জন্য x' সারি এবং fx' সারি পূরণ করা হয়েছে।

শ্রেণী-ব্যবধান	f
৮৫ - ৮৯	৪
৮০ - ৮৪	৫
৭৫ - ৭৯	৮
৭০ - ৭৪	১০
৬৫ - ৬৯	৬
৬০ - ৬৪	৪
৫৫ - ৫৯	৪
৫০ - ৫৪	২
$\sum f = N =$ ৪৩	

অনুমিত গড় নির্ধারণ করে সেই শ্রেণী বরাবর x' সারিতে ০ বসিয়ে পরে নিচের শ্রেণী-ব্যবধান বরাবর −১, −২, −৩ ইত্যাদি এবং উপরের শ্রেণী-ব্যবধান বরাবর +১, +২, +৩ ইত্যাদি বসানো হয়েছে (পরের পৃষ্ঠায় দেখুন)।

x'	fx'
+ ৩	+ ১২
+ ২	+ ১০
+ ১	+ ৮
০	০
− ১	− ৬
− ২	− ৮
− ৩	− ১২
− ৪	− ৮

এরপর প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের জন্য fx' অর্থাৎ ফ্রিকোয়েন্সী f এবং x' এর মানের গুণফলকে নির্ধারিত স্থানে লিপিবদ্ধ করা হয়েছে। পরে সূত্রে মান বসিয়ে গড় নির্ণয় করা হয়েছে।

গড় $= M' + i \times \frac{\sum fx'}{N}$ সূত্র (২-৪.১) ব্যবহার করে গড় পাওয়া গেছে

= ৭১.৫৩

এখন গড় থেকে প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতি নির্ণয় করতে হবে। বিন্যস্ত স্কোরের ক্ষেত্রে আমরা প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতি পৃথকভাবে বের করতে পারি না। এ কারণে প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দুর সাপেক্ষে গড়ের বিচ্যুতি বের করতে হয়। প্রত্যেকটি শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দু নির্ণয় করে শ্রেণী-ব্যবধান বরাবর X সারিতে লিপিবদ্ধ করা হয়েছে।

X	$x = X - M$	fx
৮৭	+ ১৫.৪৭	+ ৬১.৮৮
৮২	+ ১০.৪৭	+ ৫২.৩৫
৭৭	+ ৫.৪৭	+ ৪৩.৭৬
৭২	+ ০.৪৭	+ ৪.৭০
৬৭	− ৪.৫৩	− ২৭.১৮
৬২	− ৯.৫৩	− ৩৮.১২
৫৭	− ১৪.৫৩	− ৫৮.১২
৫২	− ১৯.৫৩	− ৩৯.০৬
	$\sum \lvert fx \rvert$ =	৩২৫.১৭

পরে মধ্যবিন্দু এবং গড়ের পার্থক্য নির্ণয় করে প্রাপ্ত মানকে শ্রেণী-ব্যবধান বরাবর $x = X - M$ সারিতে লিপিবদ্ধ করা হয়েছে। সবশেষে প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের ফ্রিকোয়েন্সী (f) এবং বিচ্যুতি (x) গুণ করে মানগুলো (fx) সারির নির্ধারিত স্থানে বসানো হয়েছে। সূত্র ব্যবহার করে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করা হয়েছে —

গড় বিচ্যুতি বা $A.\ M. = \frac{\sum |fx|}{N}$ = ৭.৫৬ (সূত্র ৩-৪.৩)

বিন্যস্ত স্কোরের গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য আমরা যে ধাপগুলো অনুসরণ করলাম তা হল—

- স্কোরগুচ্ছের গড় নির্ণয় করা (দীর্ঘ অথবা সংক্ষিপ্ত যে কোন পদ্ধতি ব্যবহার করা যায়)
- প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দু X নির্ণয় করে ছকে লিপিবদ্ধ করা
- প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দু এবং গড়ের পার্থক্য $x = X - M$ নির্ণয় করা
- প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের ফ্রিকোয়েন্সী এবং সেই শ্রেণীর বিচ্যুতিকে গুণ করে fx সারিতে লিপিবদ্ধ করা
- ধনাত্মক, ঋণাত্মক চিহ্ন উপেক্ষা করে fx মানগুলোর সমষ্টি $\sum |fx|$ নির্ণয় করা।

- গড় বিচ্যুতি = $\frac{\sum|fx|}{N}$ নির্ণয় করা।

গড় বিচ্যুতির তাৎপর্য

গড় বিচ্যুতির দ্বারা সাধারণভাবে আমরা কোন স্কোরগুচ্ছের অভ্যন্তরীণ অবস্থা বুঝতে পারি। যেহেতু $\sum fx$ বের করার সময় আমরা প্রতিটি fx এর + অথবা – দুই ধরনের চিহ্নকেই উপেক্ষা করছি ; সেজন্য গড় বিচ্যুতি নির্ণয় পদ্ধতি গাণিতিক দিক দিয়ে যুক্তিসম্মত নয়। তাই বিষমতার পরিমাপ হিসাবে গড় বিচ্যুতির ব্যবহার অত্যন্ত সীমিত।

প্রশিক্ষণার্থী, গণনামূলক কাজের অংশ বলে পাঠটি দীর্ঘ। আপনি ইচ্ছে করলে পাঠ বিরতি গ্রহণ করতে পারেন।

আসুন, আর একটি নিবেশন নিয়ে একই ধরনের কাজ করি। সমাধানটির উপর একটি সাদা কাগজ রেখে হিসাব ঢেকে দিন। প্রথমে নিজে চেষ্টা করে নিচের বন্টনটির গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন। পরে সমাধানের এর সঙ্গে প্রাপ্ত ফল মিলিয়ে দেখুন। ফল না মিললে ত্রুটি চিহ্নিত করুন এবং প্রয়োজনীয় সংশোধন করুন।

সারণী ৩-৪.৩ নমুনা গণসংখ্যা নিবেশন

শ্রেণী-ব্যবধান	৪০ - ৪৪	৪৫ - ৪৯	৫০ - ৫৪	৫৫ - ৫৯	৬০ - ৬৪	৬৫ - ৬৯	৭০ - ৭৪	৭৫ - ৭৯	৮০ - ৮৪	৮৫ - ৮৯	৯০ - ৯৪	৯৫ - ৯৯
ফ্রিকোয়েন্সী	১	৩	২	৪	৪	৬	১০	৮	৫	৪	২	১

সারণী ৩-৪.৩ এর সংক্ষিপ্ত সমাধান

শ্রেণী-ব্যবধান	f	x′	fx′
৯৫ - ৯৯	১	+ ৫	৫
৯০ - ৯৪	২	+ ৪	৮
৮৫ - ৮৯	৪	+ ৩	১২
৮০ - ৮৪	৫	+ ২	১০
৭৫ - ৭৯	৮	+ ১	৮
৭০ - ৭৪	১০	০	০
৬৫ - ৬৯	৬	– ১	– ৬
৬০ - ৬৪	৪	– ২	– ৮
৫৫ - ৫৯	৪	– ৩	– ১২
৫০ - ৫৪	২	– ৪	– ৮
৪৫ - ৪৯	৩	– ৫	– ১৫
৪০ - ৪৪	১	– ৬	– ৬
N =	৫০		– ১২

$\sum fx' = -$১২

X	x = X – M	fx
৯৭	২৬.২০	২৬.২০
৯২	২১.২০	৪২.৪০
৮৭	১৬.২০	৬৪.৮০
৮২	১১.২০	৫৬.০০
৭৭	৬.২০	৫৯.৬০
৭২	১.২০	১২.০০
৬৭	– ৩.৮০	– ২২.৮০
৬২	– ৮.৮০	– ৩৫.২০
৫৭	– ১৩.৮০	– ৫৫.২০
৫২	– ১৮.৮০	– ৩৭.৬০
৪৭	– ২৩.৮০	– ৭১.৪০
৪২	– ২৮.৮০	– ২৮.৮০

$\sum|fx|$ = ৫১২

গড় = $M' + i \times \frac{\sum fx'}{N}$, i = ৫, M' = ৭২.০

গড় = ৭২ + ৫ × $\frac{(-১২)}{৫০}$ = ৭২ + ৫ × $\frac{-৬}{২৫}$ = ৭২ − ১.২ = ৭০.৮০

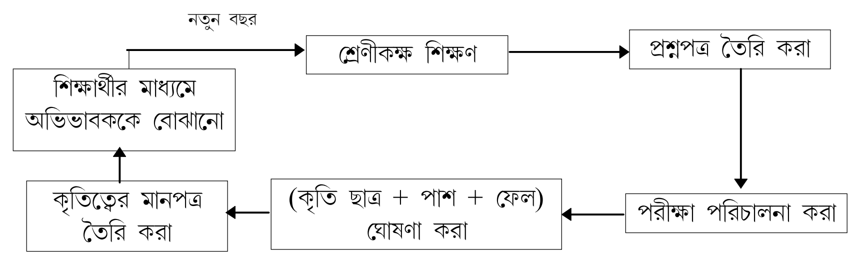
এবার আমরা গড়ের এই মান ব্যবহার করে গড় বিচ্যুতি বের করব। এর জন্য আমাদের সবগুলো $x\ (= X - M)$ বের করে প্রত্যেকটিকে সংশ্লিষ্ট f দিয়ে গুণ করতে হবে। পরে এগুলোর সমষ্টি বের করতে হবে। সবশেষে এই সমষ্টিকে N দিয়ে ভাগ করতে হবে।

অর্থাৎ গড় বিচ্যুতি $MD = \frac{\sum |fx|}{N}$ = $\frac{৫১২}{৫০}$ = ১০.২৪

নিবেশনটির গড় বিচ্যুতি হল ১০.২৪

মন্তব্য

শিক্ষকবৃন্দ, আমরা শিক্ষক হিসাবে অধিকাংশ ক্ষেত্রে যে কাজ করেছি এ যাবৎকাল তার মধ্যে রয়েছে শুধুমাত্র গতানুগতিক —



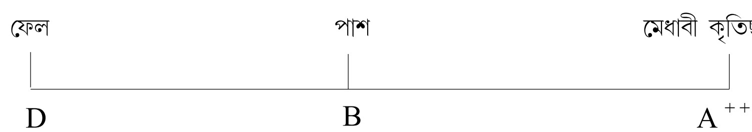
চিত্র ৩-৪.২ গতানুগতিক শ্রেণীকক্ষ শিক্ষণ চক্র

কখনো নিজের মনকে, বিবেককে প্রশ্ন করি না —

- সৃজনশীল শিক্ষক বা মানুষ গড়ার কারিগর হিসাবে আমি কি সন্তুষ্ট?
- আমি কি আমার সৃজনীশক্তি ব্যবহার করছি?
- আমি কি সত্যিকার অর্থে শিক্ষার্থীদের মেধার বিকাশে সাহায্য করছি?

শিক্ষা ব্যবস্থার নানাবিধ সমস্যা উন্নত দেশের অত্যন্ত উন্নত প্রকৃতির বিদ্যালয়ে আছে, আমাদেরও আছে। কিন্তু অন্য সবাই তো এগিয়ে যাচ্ছে। তবে আমরা কেন পারব না?

তাই শুধুমাত্র পাশ, ফেল, মেধাবী কৃতিছাত্র



চিত্র ৩-৪.৩ পাশ-ফেল চিহ্নিতকরণ

চিহ্নিত না করে, প্রত্যেকটি শিক্ষার্থীকে একজন পূর্ণাঙ্গ, পৃথক ব্যক্তিসত্তা বলে ভাবতে শুরু করুন। প্রতিটি পরীক্ষার মান নিয়ে ভাবনা, চিন্তা করুন। শিক্ষার্থীদের বুঝিয়ে দিন, আপনি তাদের মেধার সত্যিকার বিকাশে সাহায্য করতে চান।

শিক্ষার্থীদের মধ্যে কি ধরনের পার্থক্য রয়েছে, কেন রয়েছে ; কোন ধরনের পদক্ষেপ নিলে অবস্থার উন্নতি হবে তা ভাবুন। তবেই শিক্ষক প্রশিক্ষণ প্রোগ্রাম সার্থকতা লাভ করবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন - ৪

অ) বহু নির্বাচনী প্রশ্ন

সঠিক উত্তর নির্দেশমূলক অক্ষরটিকে বৃত্তায়িত করুন। (উদাহরণ ঃ আপনার পছন্দসই উত্তরটি ক হলে একে ক বৃত্তায়িত করুন)

গড় ও স্কোরের পার্থক্য x, ফ্রিকোয়েন্সী f এবং স্কোরের মোট সংখ্যা N হলে —

১. অবিন্যস্ত স্কোরের গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের সূত্র কোন্‌টি?

ক. $\frac{\sum x}{N}$

খ. $\frac{\sum |x|}{N}$

গ. $\frac{\sum fx}{N}$

ঘ. $\frac{\sum |fx|}{N}$

২. বিন্যস্ত স্কোরের গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের সূত্র কোন্‌টি?

ক. $\frac{\sum |x|}{N}$

খ. $\frac{\sum |fx|}{N}$

গ. $\frac{\sum x}{N}$

ঘ. $\frac{\sum fx}{N}$

৩. নিচের স্কোরগুলোর গড় বিচ্যুতি কত?

১৬, ১৪, ১২, ১০, ৮

ক. ০

খ. ৮

গ. ১২

ঘ. ১৪

নিচের বন্টনটি সম্পর্কিত ৪, ৫, ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দিন।

শ্রেণী-ব্যবধান	ফ্রিকোয়েন্সী (f)
১৩ - ১৫	২
১০ - ১২	২
৭ - ৯	৩
৪ - ৬	২
১ - ৩	১
	N = ১০

৪. বন্টনটির গড় কত?
   - ক. ৭.২৫
   - খ. ৭.৫৫
   - গ. ৮.৬০
   - ঘ. ৮.৫৫

৫. বন্টনটির গড় বিচ্যুতি কত?
   - ক. ৫.০২
   - খ. ৪.৬৫
   - গ. ৩.৮২
   - ঘ. ৩.১২

৬. ১০ - ১২ শ্রেণী-ব্যবধানটির প্রকৃত সীমা কোনটি?
   - ক. ১০ - ১২
   - খ. ১০.৫ - ১২.৫
   - গ. ৯.৫ - ১২.৫
   - ঘ. ১০ - ১২.৫

আ) **গাণিতিক সমস্যা**

একটি শ্রেণীতে বার্ষিক পরীক্ষায় ধর্মশিক্ষা বিষয়ে ৫০ জন শিক্ষার্থীর ১০০ নম্বরের পরীক্ষার ফলাফল নিচে দেওয়া হল। গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন। (সংকেত ঃ ৫ শ্রেণী-ব্যবধানযুক্ত বিন্যস্ত স্কোর প্রস্তুত করতে হবে এবং অনুমিত গড়ের মাধ্যমে গড় বিচ্যুতি বের করতে হবে)

৭৮	৬০	৯০	৮৫	৫৮	৪৯	৯০	৬৪	৪৬	৫৪
৯৮	৯৬	৫৫	৮৭	৭৫	৮৭	৮৯	৭৫	৫৭	৪৫
৫৮	৬৯	৪৭	৮৯	৯০	৫৭	৯৫	৯০	৭৫	৪৭
৭৬	৬৭	৮৪	৪৫	৯১	৮৩	৫৯	৫৭	৯২	৭৮
৭৮	৮৭	৭৪	৪৯	৯২	৪২	৮৩	৭৫	৬৭	৭৬

সঠিক উত্তর ঃ

অ) ১। খ, ২। খ, ৩। গ, ৪। গ, ৫। খ, ৬। গ

আ) সমাধান চূড়ান্ত প্রশ্নমালার উত্তর অংশে রয়েছে।

পাঠ ৫

অবিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়
[Standard Deviation of Raw Score]

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

- আদর্শ বিচ্যুতি বলতে কি বুঝায় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- বিচ্যুতি নির্ণয়ের মাধ্যমে অবিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি বের করতে পারবেন
- প্রত্যক্ষভাবে স্কোর থেকে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করতে পারবেন

আগের পাঠটিতে আমরা দেখেছি (গড় বিচ্যুতির ক্ষেত্রে) বিচ্যুতি ধনাত্মক (+) এবং ঋণাত্মক (–) দুই প্রকারের হতে পারে। এতে বেশ অসুবিধা হয়। আদর্শ বিচ্যুতি ব্যবহার করে এই অসুবিধা দূর করা সম্ভব।

আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করার সময় গাণিতিক চিহ্নের অসুবিধা দূর করার জন্য সকল বিচ্যুতি (x) কে বর্গ করে নেওয়া হয়। বর্গ করার ফলে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক চিহ্নগুলো বিলীন হয়ে সকল x^2 ধনাত্মক হয়ে যায়। x^2 গুলোর যোগফলকে মোট স্কোর সংখ্যা N দিয়ে ভাগ করে যে ফল পাওয়া যায় তার বর্গমূলকেই আদর্শ বিচ্যুতি বলা হয়। আদর্শ বিচ্যুতি বা SD কে সাধারণত গ্রীক অক্ষর σ (সিগমা) দিয়ে প্রকাশ করা হয়। আমরা সূত্রটি এভাবে লিখতে পারি —

আদর্শ বিচ্যুতির সূত্র

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} \qquad \text{(সূত্র ৩-৫.১)}$$

এখানে σ = আদর্শ বিচ্যুতি
$\sum x^2$ = বিচ্যুতির বর্গসমূহের সমষ্টি
এবং N = মোট স্কোর সংখ্যা

অবিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি

অবিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি দুইভাবে নির্ণয় করা যায় —

- বিচ্যুতি নির্ণয়ের মাধ্যমে
- স্কোরের সাহায্যে প্রত্যক্ষভাবে

বিচ্যুতি নির্ণয়ের মাধ্যমে

একটি উদাহরণের সাহায্যে বিচ্যুতি নির্ণয়ের মাধ্যমে কি ভাবে আদর্শ বিচ্যুতি বের করতে হয় তা দেখা যাক —

সারণী ৩-৫.১ নমুনা স্কোর

৬	৮	১০	১২	১৪	১৬	১৮

আমাদের উদাহরণটিতে সাতটি স্কোর রয়েছে

প্রথমে গড় বের করি —

$$\text{স্কোরগুলোর গড়} = \frac{৬+৮+১০+১২+১৪+১৬+১৮}{৭} = \frac{৮৪}{৭} = ১২$$

গড় থেকে এবার সবগুলো স্কোরের বিচ্যুতি $(x = X - M)$ বের করি।

বিচ্যুতিগুলো হচ্ছে ঃ

বিচ্যুতি $(x = X - M)$
৬
৪
২
০
– ২
– ৪
– ৬

এরপর এগুলোর বর্গ বের করি ঃ

বিচ্যুতির বর্গ (x^2)
৩৬
১৬
৪
০
৪
১৬
৩৬
$\sum x^2$ = ১১২

সমষ্টি বের করি →

এ সমস্ত কলামগুলো পাশাপাশি বসিয়ে নিচের সারণীটি পেলাম। এবার $\sum x^2$ কে মোট স্কোর সংখ্যা দিয়ে ভাগ করি। সবশেষে ভাগফলের বর্গমূল বের করি।

স্কোর	বিচ্যুতি $(x = X - M)$	বিচ্যুতির বর্গ (x^2)
১৮	৬	৩৬
১৬	৪	১৬
১৪	২	৪
১২	০	০
১০	– ২	৪
৮	– ৪	১৬
৬	– ৬	৩৬
$\sum X$ = ৮৪		$\sum x^2$ = ১১২

কি পেলাম?

সূত্র (৩-৫.১) এ মান বসিয়ে পাওয়া গেল, $\sigma = \sqrt{\frac{১১২}{৭}} = \sqrt{১৬} = ৪$

আসুন, এবার ধাপগুলো সংক্ষেপে লিখি।

বিচ্যুতি নির্ণয়ের মাধ্যমে অবিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি বের করার জন্য যে ধাপগুলো অনুসরণ করতে হয় তা হল —

- স্কোরের মোট সংখ্যা (N) নির্ণয় করা
- স্কোরগুলোর গড় (M) নির্ণয় করা
- গড় থেকে প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতি $(x = X - M)$ নির্ণয় করা
- প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতির বর্গ (x^2) নির্ণয় করা
- বিচ্যুতির বর্গগুলোর যোগফল $(\sum x^2)$ নির্ণয় করা

- সূত্রে ($\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^২}{N}}$) মান বসিয়ে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করা।

a

এবার আপনি নিজে অভ্যেস করবেন। পাঁচটি স্কোর নিন। উপরের ধাপগুলো অনুসরণ করে নিচের স্কোরগুলোর আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করুন। কাজ শুরু করবার আগে সমাধানটি দেখবেন না। এর উপর একটি কাগজ রেখে দিন। কাজ শেষ হলে পরে সমাধানের সঙ্গে আপনার প্রাপ্ত ফল মিলিয়ে দেখুন। ভুল হলে প্রয়োজনীয় সংশোধন করুন।

সারণী ৩-৫.২

৬৫	৩০	৫২	৭১	৪২

সমাধান

স্কোর	বিচ্যুতি ($x = X - M$)	বিচ্যুতির বর্গ (x^2)
৬৫	১৩	১৬৯
৩০	−২২	৪৮৪
৫২	০	০
৭১	১৯	৩৬১
৪২	−১০	১০০
$\sum X$ = ২৬০		$\sum x^2$ = ১১১৪

স্কোরগুলোর গড় = $\frac{৬৫+৩০+৫২+৭১+৪২}{৫} = \frac{২৬০}{৫} = ৫২.০$ [$\therefore N$ = ৫]

σ = -------------

সূত্র (৩-৫.১) এ মান বসিয়ে পাওয়া যায় $\sigma = \sqrt{\frac{১১১৪}{৫}} = \sqrt{২২২.৮}$ = ১৪.৯

সূত্র ৩-৫.১ এর পরিবর্তিত রূপ

স্কোরের সাহায্যে প্রত্যক্ষভাবে σ নির্ণয়

প্রত্যক্ষভাবে স্কোর থেকে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করার জন্য ৩-৫.১ সূত্রটিকে পরিবর্তন করে নিতে হয়। আমরা জানি $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^২}{N}}$। একে আমরা অন্যভাবেও লিখতে পারি —

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^২}{N}} = \frac{১}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum x^২}$$

$$= \frac{১}{\sqrt{N}} \left\{\sqrt{\sum(X-M)^২}\right\}$$ [যেহেতু $x = X - M$

যখন x = বিচ্যুতি, X = স্কোর, M = গড়]

$$= \frac{১}{\sqrt{N}} \left\{\sqrt{\sum(X^২ - ২XM + M^২)}\right\}$$

$$= \frac{১}{\sqrt{N}} \left\{\sqrt{\sum X^২ - ২M\sum X + N.M^২}\right\}$$ [যেহেতু M ধ্রুব সংখ্যা হলে $\sum M^2 = N M^2$]

$$= \frac{১}{\sqrt{N}} \left\{\sqrt{\sum X^২ - ২\frac{\sum X}{N} \times \sum X + N\left(\frac{\sum X}{N}\right)^২}\right\}$$

$$= \frac{১}{\sqrt{N}} \left\{\sqrt{\sum X^{২} - ২\frac{\sum X}{N}\sum X + \frac{(\sum X)^{২}}{N}}\right\}$$

$$= \frac{১}{\sqrt{N}} \left\{\sqrt{\left(\sum X^{২} - \frac{(\sum X)^{২}}{N}\right)}\right\}$$

$$= \frac{১}{\sqrt{N}} \left\{\sqrt{\frac{N\sum X^{২} - (\sum X)^{২}}{N}}\right\}$$

$$= \frac{১}{\sqrt{N}} \cdot \frac{১}{\sqrt{N}} \sqrt{N\sum X^{২} - (\sum X)^{২}}$$

$$= \frac{১}{N} \sqrt{N\sum X^{২} - (\sum X)^{২}}$$

[কারণ $\frac{১}{\sqrt{N}} \times \frac{১}{\sqrt{N}} = \frac{১}{N}$] (সূত্র ৩-৫.২)

এই সূত্রে আমরা বিচ্যুতি (x) এর ব্যবহার এড়িয়ে গেলাম। সরাসরি $(\sum X)^2$, $\sum X^2$ ব্যবহার করলাম।

প্রশিক্ষণার্থী, গণনামূলক কাজের অংশ বলে পাঠটি দীর্ঘ। আপনি ইচ্ছে করলে পাঠ বিরতি গ্রহণ করতে পারেন।

সূত্র ৩-৫.২ এর ব্যবহার

এবার আসুন, সূত্রটির সাহায্যে প্রত্যক্ষভাবে স্কোর থেকে আদর্শ বিচ্যুতি বের করি —

সারণী ৩-৫.৩

১৪	১০	১৭	১১	১৩	১০	১৪	১৬	১৭	১১

সমাধান

কাজের সুবিধার জন্য মাত্র ১০টি স্কোর নিলাম এবার।

X	X^2
১৪	১৯৬
১০	১০০
১৭	২৮৯
১১	১২১
১৩	১৬৯
১০	১০০
১৪	১৯৬
১৬	২৫৬
১৭	২৮৯
১১	১২১
$\sum X$ = ১৩৩	$\sum X^2$ = ১৮৩৭

সূত্র ৩-৫.২ [অর্থাৎ $\sigma = = \frac{১}{N} \sqrt{N\sum X^{২} - (\sum X)^{২}}$] এ মানগুলো বসাই

$$\sigma = \frac{১}{১০}\sqrt{১০ \times ১৮৩৭ - (১৩৩)^{২}}$$

$$\sigma = \frac{১}{১০}\sqrt{১৮৩৭০ - ১৭৬৮৯}$$

$$\sigma = \frac{১}{১০}\sqrt{৬৮১} = \frac{১}{১০} \times ২৬.১$$

$$\sigma = ২.৬১$$

এবার ধাপগুলো লিখে ফেলি।

সরাসরি স্কোর থেকে বিচ্যুতি নির্ণয়ের ধাপগুলো হল —

- স্কোর (X) গুলোর সমষ্টি ($\sum X$) নির্ণয় করা
- স্কোরগুলোর বর্গ (X^2) নির্ণয় করা
- স্কোরগুলোর বর্গের সমষ্টি ($\sum X^2$) নির্ণয় করা
- স্কোরের সংখ্যা N নির্ণয় করা

সূত্র ৩-৫.২ ব্যবহার করার জন্য বর্গের সমষ্টি এবং সমষ্টির বর্গ নির্ণয় করতে হয়।

অর্থাৎ, সূত্র $\sigma = \frac{১}{N}\sqrt{N\sum X^{২} - (\sum X)^{২}}$ এ মান বসিয়ে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করা হয়।

অনুশীলন কাজের সুবিধার জন্য আপনাকে আরো একটি অবিন্যস্ত স্কোরগুচ্ছ দেওয়া হল। σ বের করুন। [প্রত্যেকবারের মতন আগে নিজে কাজটি করবেন, পরে ফল মিলাবেন]

সারণী ৩-৫.৪

১৫,	১৪,	১২,	১১,	১৫,	১০,	১৪,	১০,	১২,	৯

সমাধান

X	X^2
১৫	২২৫
১৪	১৯৬
১২	১৪৪
১১	১২১
১৫	২২৫
১০	১০০
১৪	১৯৬
১০	১০০
১২	১৪৪
৯	৮১
$\sum X$ = ১২২	$\sum X^2$ = ১৫৩২

সূত্র (৩-৫.২) এ মান বসিয়ে,

$$\sigma = \frac{১}{১০}\sqrt{১০ \times ১৫৩২ - (১২২)^{২}}$$

$$\sigma = \frac{১}{১০}\sqrt{১৫৩২০ - ১৪৮৮৪}$$

σ = -------------

$$\sigma = \frac{১}{১০}\sqrt{৪৩৬} = \frac{১}{১০}\times ২০.৮৯ = ২.০৮৯$$

$$\sigma \cong ২.০৯$$

চূড়ান্ত ফল

সারণী ৩-৫.৪ এর আদর্শ বিচ্যুতি হল ২.০৯

এই ইউনিটের পাঁচটি পাঠে আমরা কি শিখলাম? বিস্তৃতি, চতুর্থাংশ বিস্তৃতি, গড় বিচ্যুতি ও আদর্শ বিচ্যুতি মাপতে শিখলাম।

আদর্শ বিচ্যুতি (standard deviation বা SD) বিষমতার পরিমাপগুলোর মধ্যে সবচেয়ে নিখুঁত ও নির্ভরযোগ্য বলে বিবেচনা করা হয়।

ভাবছেন কি, এগুলো কোথায় ব্যবহার করবেন? উত্তর একটিই - শ্রেণীকক্ষে শিক্ষার্থীদের অগ্রগতি অবিরত মূল্যায়ন কাজে। অগ্রগতির রিপোর্টে সবকিছু ব্যবহার করার সুযোগ নেই? নিজের উদ্ভাবনী শক্তিকে কাজে লাগান। শিক্ষকবৃন্দ যদি উদ্যোগী হন তবে ক্রমান্বয়ে বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষ, অভিভাবকবৃন্দ এবং সরকারের শিক্ষা মন্ত্রণালয়ের নীতি নির্ধারণী কর্তৃপক্ষ সবাই মিলে শিক্ষার্থীর বিষয়ভিত্তিক অগ্রগতি, সার্বিক অগ্রগতি, তুলনামূলক অবস্থান সনাক্ত করা, লিপিবদ্ধ করা সম্ভব হবে।

আপনাদের জন্য দেশের একটি মাধ্যমিক ও উচ্চমাধ্যমিক শিক্ষা বোর্ডের HSC পরীক্ষার পরিসংখ্যানের প্রশ্নপত্র থেকে একটি প্রশ্ন তুলে ধরছি —

“”

- ৫০ জন ছাত্রের বয়সের গড় ২২ বৎসর এবং পরিমিত ব্যবধান ৪। কিন্তু ২ জনের বয়স ২৫ ও ২৪ বছরের স্থলে ভুলক্রমে ১৩ ও ১১ লেখা হয়। তাদের বয়সের প্রকৃত গড় ও পরিমিত ব্যবধান নির্ণয় কর।

এই HSC পরীক্ষার্থীদের এক অংশ একদিন আপনার, আমার মত শিক্ষক হবে। তারা তখন কি অর্থহীন ভাবে এই ধরনের গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে দেবে শিক্ষার্থীদের?

পাঠোত্তর মূল্যায়ন - ৫

অ) বহু নির্বাচনী প্রশ্ন

সঠিক উত্তর নির্দেশমূলক অক্ষরটিকে বৃত্তায়িত করুন। (উদাহরণ ঃ আপনার পছন্দসই উত্তরটি ক হলে একে ক বৃত্তায়িত করুন)

X = স্কোর, x = গড় ও স্কোরের পার্থক্য, f = ফ্রিকোয়েন্সী এবং N = স্কোরের মোট সংখ্যা হলে —

১. বিচ্যুতি নির্ণয়ের মাধ্যমে অবিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি বের করার সূত্র কোনটি?

ক. $\dfrac{\sum fx^{২}}{N}$

খ. $\sqrt{\dfrac{\sum x^{২}}{N}}$

গ. $\dfrac{\sum \left|fx^{২}\right|}{N}$

ঘ. $\dfrac{\sum x^{২}}{N}$

২. মূল স্কোর থেকে সরাসরি আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করার সূত্র কোনটি?

ক. $\sqrt{\dfrac{\sum fx^{২}}{N}}$

খ. $\dfrac{১}{N}\sqrt{N\sum X^{২} - (\sum X)^{২}}$

গ. $\sqrt{N\sum x^{২} - (\sum x)^{২}}$

ঘ. $\sqrt{\dfrac{N\sum x^{২} - (\sum x)^{২}}{২}}$

৩. বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি ৭২০০ এবং মোট স্কোর সংখ্যা ৫০ হলে বন্টনটির আদর্শ বিচ্যুতি কত?

ক. ১২.০

খ. ১২.০

গ. ১৪.০

ঘ. ১৪.২৫

৪. স্কোরগুলোর সমষ্টি ৬০, স্কোরগুলোর বর্গের সমষ্টি ৭৮০ এবং মোট স্কোর সংখ্যা ৫ হলে আদর্শ বিচ্যুতি কত?

ক. ৩.২৫

খ. ৩.৩৫

গ. ৩.৪৬

ঘ. ৩.৭৫

নিচের বন্টনটি সম্পর্কিত ৪, ৫, ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দিন।

স্কোর (X)	ফ্রিকোয়েন্সী (f)
১২	২
১০	১
৮	৩
৬	৪

৫. বন্টনটির $\sum f x$ কত?

ক. ৮২

খ. ১৭২

গ. ৩৪৪

ঘ. ৪২৪

৬. বন্টনটির $\sum f x^2$ কত?

ক. ৩৪৫

খ. ৭২৪

গ. ৮২০

ঘ. ৮৩২

৭. বন্টনটির আদর্শ বিচ্যুতি কত?

ক. ৫.১৬

খ. ৩.৪৪

গ. ৩.০৪

ঘ. ২.২৭

সঠিক উত্তর ঃ

অ) ১। খ, ২। খ, ৩। ক, ৪। গ, ৫। ক, ৬। খ, ৭। ঘ

পাঠ ৬

বিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়
[Standard Deviation of Tabulated Score]

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি ——

- দীর্ঘ পদ্ধতিতে বিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করতে পারবেন
- সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে বিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করতে পারবেন।

চতুর্থ পাঠটিতে আদর্শ বিচ্যুতি খুব অল্প সময়ে, সহজেই বের করা সম্ভব হয়েছিল। কারণ স্কোরের সংখ্যা ছিল খুব কম। কিন্তু স্কোরের সংখ্যা বেশি হলে কি করতে হয়? আমরা জানি প্রথম কাজটি হল, স্কোরগুলোকে শ্রেণীবদ্ধ করা। এরপর কি করবেন? তারই বর্ণনা রয়েছে এবারের পাঠে।

আমরা দুইটি পদ্ধতি অবলম্বন করে বিন্যস্ত স্কোরের σ বের করতে পারি। একটিতে সরাসরি কাজ করার ফলে অনেকগুলো পদক্ষেপ রয়েছে বলে একে বলা হয় দীর্ঘ বা direct পদ্ধতি এবং অন্যটিতে একটি কল্পিত গড় ব্যবহার করে পদক্ষেপ সংক্ষিপ্ত করা সম্ভব বলে একে বলা হয় সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি।

প্রথমে আমরা সরাসরি বা দীর্ঘ পদ্ধতি ব্যবহার প্রণালী শিখব।

দীর্ঘ বা direct পদ্ধতিতে বিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়

বিন্যস্ত স্কোরের ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি স্কোরের বিচ্যুতি পৃথকভাবে নির্ণয় করে গড় থেকে প্রতিটি শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দুর বিচ্যুতি বের করা হয়। পরে প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের ফ্রিকোয়েন্সী দিয়ে প্রাপ্ত বিচ্যুতিকে গুণ করতে হয়। গুণফলকে fx সারিতে নির্ধারিত স্থানে লিপিবদ্ধ করতে হয়। এরপর প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের জন্য প্রাপ্ত x এবং fx এর মানের গুণফল নির্ণয় করে fx^2 সারিতে লিপিবদ্ধ করতে হয়। সারণী ৬-৬.১ এ (৪৮ - ৫০) শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দু ৪৯ এবং স্কোরগুচ্ছের গড় হচ্ছে ৩৩.৫৫। সুতরাং বিচ্যুতি ($x = X -$ M) হচ্ছে ১৫.৪৫। fx হচ্ছে ১৫.৪৫×১ = ১৫.৪৫। fx^2 হচ্ছে ১৫.৪৫×১৫.৪৫ = ২৩.৮৭। একইভাবে প্রত্যেকটি শ্রেণী-ব্যবধানের জন্য fx^2 নির্ণয় করা হয়েছে। মধ্যবিন্দুকে f দিয়ে গুণ করে প্রাপ্ত মান fX সারিতে লিপিবদ্ধ করা হয়েছে।

সারণী ৩-৬.১

শ্রেণী-ব্যবধান	মধ্যবিন্দু X	ফ্রিকেয়েন্সী f	fX	$x = X - M$	fx	fx^2
৪৮ - ৫০	৪৯	১	৪৯	১৫.৪৫	১৫.৪৫	২৩৮.৭০
৪৫ - ৪৭	৪৬	১	৪৬	১২.৪৫	১২.৪৫	১৫৫.০০
৪২ - ৪৪	৪৩	২	৮৬	৯.৪৫	১৮.৯০	১৭৮.৬১
৩৯ - ৪১	৪০	৫	২০০	৬.৪৫	৩২.২৫	২০৮.০১
৩৬ - ৩৮	৩৭	৬	২২২	৩.৪৫	২০.৭০	৭১.৪২
৩৩ - ৩৫	৩৪	৮	২৭২	০.৪৫	৩.৬০	১.৬২
৩০ - ৩২	৩১	৭	২১৭	– ২.৫৫	– ১৭.৮৫	৪৫.৫২
২৭ - ২৯	২৮	৪	১১২	– ৮.৫৫	– ২২.২০	১২৩.২১
২৪ - ২৬	২৫	৩	৭৫	– ৫.৫৫	– ২৫.৬৫	২১৯.৩১
২১ - ২৩	২২	২	৪৪	– ১১.৫৫	– ২৩.১০	২৬৬.৮১
১৮ - ২০	১৯	১	১৯	– ১৪.৫৫	– ১৪.৫৫	২১১.৭০
		N = $\sum f$ = ৫০	$\sum fX$ = ১৩.৪২			$\sum fx^2$ = ১৭১৯.৯০

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^{২}}{N}}$ (সূত্র ৩-৫.১)

গড় $(M) = \frac{\sum fX}{N} = \frac{১৩৪২}{৪০} = ৩৩.৫৫$

গড়ের মান ৩৩.৫৫ ব্যবহার করে চূড়ান্ত পর্যায়ে σ = ৬.৫৭ বের করা হল —

আদর্শ বিচ্যুতি (SD) $= \sqrt{\frac{\sum fx^{২}}{N}} = \sqrt{\frac{১৭১৯.৯০}{৪০}} = \sqrt{৪২.৯৯} = ৬.৫৭$

দীর্ঘ বা direct পদ্ধতিতে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য যে ধাপগুলো অনুসরণ করতে হয় তা হল —

- প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দু নির্ণয় করা এবং X সারিতে লিপিবদ্ধ করা
- প্রত্যেকটি মধ্যবিন্দুকে ঐ শ্রেণী-ব্যবধানের ফ্রিকোয়েন্সী দিয়ে গুণ করে fX সারিতে লিপিবদ্ধ করা
- fX সারির সকল মানের যোগফল অর্থাৎ $\sum fX$ নির্ণয় করা
- $\sum fX$ কে মোট স্কোর সংখ্যা N দিয়ে ভাগ করে গড় নির্ণয় করা
- গড় থেকে প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দুর বিচ্যুতি অর্থাৎ $x = X - M$ নির্ণয় করা এবং লিপিবদ্ধ করা
- বিচ্যুতি এবং শ্রেণী-ব্যবধানের ফ্রিকোয়েন্সী গুণ করে fx এর মানকে যথাযথ স্থানে লিপিবদ্ধ করা
- fx এর মানকে x এর মান দিয়ে গুণ করা এবং fx^2 সারিতে লিপিবদ্ধ করা
- fx^2 এর মানগুলোর যোগফল অর্থাৎ $\sum fx^2$ নির্ণয় করা
- সূত্র $\sqrt{\frac{\sum fx^{২}}{N}}$ এ মান বসিয়ে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করা

অনেকগুলো স্তরে হিসাব কাজ সম্পন্ন হয় বলে একে দীর্ঘ পদ্ধতি বলা হয়।

a

দীর্ঘ পদ্ধতিতে নিচের বিন্যস্ত স্কোরগুচ্ছের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করুন। পরে নিচের সমাধানের সঙ্গে মিলিয়ে দেখুন। প্রয়োজন হলে সংশোধন করুন।

সারণী ৩-৬.২

শ্রেণী-ব্যবধান	৩০-৩৪	৩৫-৩৯	৪০-৪৪	৪৫-৪৯	৫০-৫৪	৫৫-৫৯	৬০-৬৪	৬৫-৬৯	৭০-৭৪
ফ্রিকোয়েন্সী	২	৪	৭	৭	১১	৭	৬	৫	১

সমাধান

শ্রেণী-ব্যবধান	মধ্যবিন্দু X	ফ্রিকোয়েন্সী f	fX	বিচ্যুতি $x = X - M$	fx	fx^2
৭০ - ৭৪	৭২	১	৭২	২০.৩	২০.৩	৪১২.০০
৬৫ - ৬৯	৬৭	৫	৩৩৫	১৫.৩	৭৬.৫	২৩৪.০৯
৬০ - ৬৪	৬২	৬	৩৭২	১০.৩	৬১.৮	১০৬.০৯
৫৫ - ৫৯	৫৭	৭	৩৯৯	৫.৩	৩৭.১	১৯৬.৬৩
৫০ - ৫৪	৫২	১১	৫৭২	০.৩	৩.৩	০.৯৯
৪৫ - ৪৯	৪৭	৭	৩২৯	− ৪.৭	− ৩২.৯	১৫৪.৬৩
৪০ - ৪৪	৪২	৭	২৯৪	− ৯.৭	− ৬৭.৯	৬৫৮.৬৩
৩৫ - ৩৯	৩৭	৪	১৪৮	− ১৪.৭	− ৫৮.৮	৮৬৪.৩৬
৩০ - ৩৪	৩২	২	৬৪	− ১৯.৭	− ৩৯.৪	৭৭৬.১৮
N =		$\sum f$ = ৫০	$\sum fX$ =২.৫৮৫			$\sum fx^2$ = ৪৮৭০.৫০

গড় (M) = $\frac{\sum fX}{N}$ এখানে, $\sum fX$ = ২৫৮৫, N = ৫০

সুতরাং গড় = $\frac{২৫৮৫}{৫০}$ = ৫১.৭

আদর্শ বিচ্যুতি = $\sqrt{\frac{\sum fx^{2}}{N}}$ এখানে, $\sum fx^2$ = ৪৮৭০.৫০, N = ৫০

= $\sqrt{\frac{৪৮৭০.৫০}{৫০}}$ = $\sqrt{৯৭.৪১}$ = ৯.৮৭

দীর্ঘ পদ্ধতিতে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়ের পর অনুমিত গড় বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা যেতে পারে।

আশা করি পদ্ধতিটি সবাই ভাল ভাবে আয়ত্ত করেছেন। এবার আমরা দ্বিতীয় পদ্ধতিটি আয়ত্ত করব।

আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় এর সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি

এতক্ষণ যে পদ্ধতি বর্ণনা করা হল তার দ্বারা আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করতে অনেক সময়ের প্রয়োজন হয় এবং প্রচুর হিসাব করতে হয়। সব সময় শিক্ষকের হাতে যথেষ্ট সময় নাও থাকতে পারে। কম সময়ে σ বের করার জন্য একটি সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি ব্যবহার করা সম্ভব। এই পদ্ধতিতে কল্পিত গড়ের ভিত্তিতে বিচ্যুতি এবং বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করা হয় এবং পরে প্রয়োজনীয় সংশোধনের মাধ্যমে প্রকৃত বিচ্যুতির বর্গ নির্ণয় করা হয়। প্রকৃত গড় বের না করেই আমরা M এর মোটামুটি কাছাকাছি একটি মান ব্যবহার করি এবং কাজ শেষ হয়ে গেলে সংশোধন করে নেই।

এই পদ্ধতিতে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য নিচের সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সূত্র

আদর্শ বিচ্যুতি (σ) = $i \times \sqrt{\frac{\sum fx'^{2}}{N} - \left(\frac{\sum fx'}{N}\right)^{2}}$ (সূত্র ৩.৬.১)

এখানে i = শ্রেণী-দৈর্ঘ্য
f = ফ্রিকোয়েন্সী বা গণসংখ্যা
x'= কল্পিত গড় থেকে প্রত্যেকটি শ্রেণীর বিচ্যুতি
[অনেক সময় x' এর স্থলে d লেখা হয়]
N = মোট স্কোর সংখ্যা

সারণী ৩-৬.৩

শ্রেণী-ব্যবধান	ফ্রিকোয়েন্সী f	বিচ্যুতি x'	fx'	fx'^2
৪৮ - ৫০	১	+ ৫	৫	২৫
৪৫ - ৪৭	১	+ ৪	৪	১৬
৪২ - ৪৪	২	+ ৩	৬	১৮
৩৯ - ৪১	৫	+ ২	১০	২০
৩৬ - ৩৮	৬	০	৬	৬
৩৩ - ৩৫	৮	− ১	০	০
৩০ - ৩২	৭	− ২	− ৭	৭
২৭ - ২৯	৪	− ৩	− ৮	১৬
২৪ - ২৬	৩	− ৪	− ৯	২৭
২১ - ২৩	২	− ৫	− ৮	৩২
১৮ - ২০	১		− ৫	২৫
	N = ৪০		$\sum fx'$ = −৬	$\sum fx'^2$ = ১৯২

এবার সূত্র ৩-৬.১ এ নিচের মানগুলো বসাই,

$$\boxed{i = ৩,\ \ \sum f x' = -৬,\ \ \sum f x'^2 = ১৯২}$$

$$\sigma = ৩ \times \sqrt{\frac{১৯২}{৪০} - \left(\frac{-৬}{৪০}\right)^২} = ৩ \times \sqrt{৪.৮০ - .০২}$$

$$= ৩ \times \sqrt{৪.৭৮} = ৩ \times ২.১৯ = ৬.৫৭,$$

অর্থাৎ সারণী ৩-৬.৩ এর গণসংখ্যা নিবেশনটির আদর্শ বিচ্যুতি হল ৬.৫৭।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য পর্যায়ক্রমে নিচে উল্লেখিত কাজগুলো করতে হয় —

- বন্টনের মাঝামাঝিতে অবস্থিত যে কোন একটি শ্রেণী-ব্যবধানের মধ্যবিন্দুকে অনুমিত গড় ধরে প্রত্যেকটি শ্রেণীর বিচ্যুতি (x') নির্ণয় করা এবং x' সারিতে লিপিবদ্ধ করা
- প্রত্যেক শ্রেণীর বিচ্যুতিকে ঐ শ্রেণী-ব্যবধানের ফ্রিকোয়েন্সী দিয়ে গুণ করা এবং fx' সারিতে যথাস্থানে লিপিবদ্ধ করা
- fx' এর মানগুলোর যোগফল অর্থাৎ $\sum fx'$ নির্ণয় করা
- প্রত্যেক শ্রেণী-ব্যবধানের x' এবং fx' কে গুণ করে প্রাপ্ত মানকে fx'^2 সারিতে লিপিবদ্ধ করা
- fx'^2 এর মানগুলোর যোগফল অর্থাৎ $\sum fx'^2$ নির্ণয় করা
- সূত্র $\sigma = i \times \sqrt{\frac{\sum fx'^২}{N} - \left(\frac{\sum fx'}{N}\right)^২}$ এ মান বসিয়ে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করা

[লক্ষ্য করুন, সারণী ৩-৬.১ এর স্কোর ব্যবহার করে σ বের করতে নয়টি পদক্ষেপ অনুসরণ করার প্রয়োজন হয়েছিল। এবার মাত্র ৬টি পদক্ষেপ প্রয়োজন হল।]

যদিও আমরা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করার জন্য উপরের ছকটি তৈরি করেছি, এই একই ছক ব্যবহার করে বন্টনটির গড়ও নির্ণয় করা যায়। সুতরাং কোন

বন্টনের গড় এবং আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করার জন্য পৃথক পৃথক ছক তৈরি করার প্রয়োজন হয় না।

এবার আমরা সারণী ৬-৬.৩ থেকে গড় নির্ণয় করি —

আমরা জানি গড় = $M' + i \times \frac{\sum fx'}{N}$

এখানে, M' = ৩৪, i = ৩, $\sum fx'$ = − ৬, N = ৪০

সূত্রে মান বসিয়ে গড় পাওয়া যায়,

গড় = ৩৪ + ৩ × $\frac{(-৬)}{৪০}$ = ৩৪ − $\frac{১৮}{৪০}$ = ৩৪ − ০.৪৫ = ৩৩.৫৫

a

অনুশীলন কাজের অংশ হিসাবে এবার আপনি নিজে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে নিচের বন্টনটির আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করুন। পরে সমাধানের সাথে ফলাফল মিলিয়ে দেখুন। ফল এক না হলে ত্রুটি চিহ্নিত করুন এবং প্রয়োজনীয় সংশোধন করুন।

সারণী ৩-৬.৪ (১)

শ্রেণী-ব্যবধান	৩০-৩৪	৩৫-৩৯	৪০-৪৪	৪৫-৪৯	৫০-৫৪	৫৫-৫৯	৬০-৬৪	৬৫-৬৯	৭০-৭৪
ফ্রিকোয়েন্সী	২	৪	৭	৭	১১	৭	৬	৫	১

সমাধান

সারণী ৩-৬.৪ (২)

শ্রেণী-ব্যবধান	ফ্রিকোয়েন্সী f	বিচ্যুতি x'	fx'	fx'^2
৭০ - ৭৪	১	৪	৪	১৬
৬৫ - ৬৯	৫	৩	১৫	৪৫
৬০ - ৬৪	৬	২	১২	২৪
৫৫ - ৫৯	৭	১	৭	৭
৫০ - ৫৪	১১	০	০	০
৪৫ - ৪৯	৭	− ১	− ৭	৭
৪০ - ৪৪	৭	− ২	− ১৪	২৮
৩৫ - ৩৯	৪	− ৩	− ১২	৩৬
৩০ - ৩৪	২	− ৪	− ৮	৩২
	N = ৫০		$\sum fx'$ = − ৩	$\sum fx'^2$ = ১৯৫

সূত্র ঃ আদর্শ বিচ্যুতি (σ) = $i \times \sqrt{\frac{\sum fx'^২}{N} - \left(\frac{\sum fx'}{N}\right)^২}$

i = ---------------
$\sum fx'$ = -----------
$\sum fx'^2$ = ----------
σ = -----------------

এখানে, i = ৫, $\sum fx'$ = − ৩, $\sum fx'^2$ = ১৯৫

সূত্রে মান বসিয়ে, σ = ৫ × $\sqrt{\frac{১৯৫}{৫০} - \frac{৯}{২৫০০}}$ = ৫ × $\sqrt{৩.৯ - .০০৩৬}$

= ৫ × $\sqrt{৩.৮৯৬৪}$ = ৫ × ১.৯৭৩ = ৯.৮৭

সারণী ৩-৬.৪ এর স্কোরগুলোর আদর্শ বিচ্যুতি হল ৯.৮৭।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন - ৬

অ) বহু নির্বাচনী প্রশ্ন

সঠিক উত্তর নির্দেশমূলক অক্ষরটিকে বৃত্তায়িত করুন। (উদাহরণ ঃ আপনার পছন্দসই উত্তরটি ক হলে একে ক বৃত্তায়িত করুন)

১. x = গড় ও স্কোরের পার্থক্য, f = ফ্রিকোয়েন্সী এবং N = স্কোরের মোট সংখ্যা হলে —
দীর্ঘ পদ্ধতিতে বিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়ের সূত্র কোনটি?

ক. $\sqrt{\dfrac{\sum x^2}{N}}$

খ. $\dfrac{\sum fx^2}{N}$

গ. $N\sqrt{\sum fx^2}$

ঘ. $\sqrt{\sum fx^2}$

২. $\sum f x^2$ = ৬৫৯২ এবং N = ৫০ হলে, আদর্শ বিচ্যুতি কত?

ক. ১০.২৪

খ. ১১.০৪

গ. ১১.৪৮

ঘ. ১২.১৫

৩. i = শ্রেণী-দৈর্ঘ্য, f = ফ্রিকোয়েন্সী, x' = কল্পিত গড় থেকে প্রত্যেকটি শ্রেণীর বিচ্যুতি এবং N = মোট স্কোরের সংখ্যা হলে — সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে বিন্যস্ত স্কোরের আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয়ের সূত্র কোনটি?

ক. $\sqrt{\dfrac{\sum fx'^2}{N} - \left(\dfrac{\sum fx'}{N}\right)^2}$

খ. $i \times \left(\dfrac{\sum fx'^2}{N} - \dfrac{\sum fx'}{N}\right)$

গ. $i \times \sqrt{\dfrac{\sum fx'^2}{N} - \left(\dfrac{\sum fx'}{N}\right)^2}$

ঘ. $i \times \sqrt{\dfrac{\sum fx'}{N}}$

৪. N = ৫০, $\sum f x'$ = ২৪ এবং $\sum f x'^2$ = ২৬০ হলে, আদর্শ বিচ্যুতি কত?

ক. ১০.২৩

খ. ১০.৪৫

গ. ১১.১৫

ঘ. ১১.৩৫

সঠিক উত্তর ঃ

অ) ১। ক, ২। গ, ৩। গ, ৪। গ

পাঠ ৭

আদর্শ বিচ্যুতির ধর্ম ও ব্যবহার

[Characteristics and Uses of Standard Deviation]

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি —

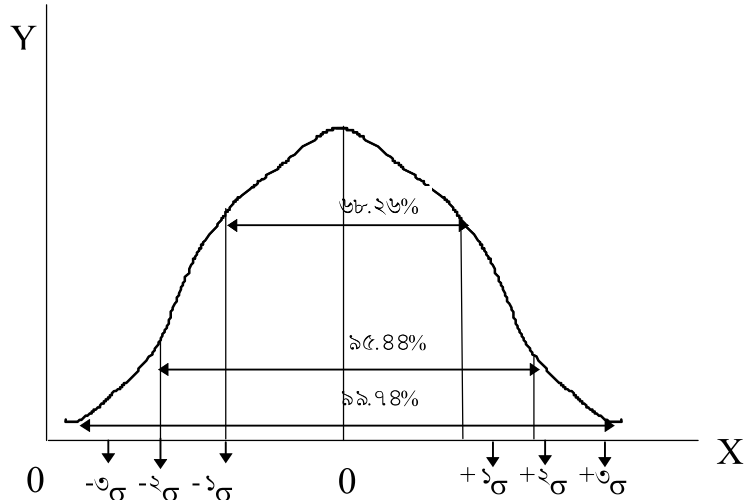
- আদর্শ বিচ্যুতির ধর্মসমূহ ব্যাখ্যা করতে পারবেন
- আদর্শ বিচ্যুতির মানের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন
- আদর্শ বিচ্যুতির ব্যবহার উল্লেখ করতে পারবেন।

আদর্শ বিচ্যুতির ধর্ম

- গড় থেকে বিচ্যুতির বর্গ নির্ণয় কালে আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করা হয় বলে যে সব বিচ্যুতি চরম প্রকৃতির সেগুলোর উপর অনেক বেশি জোর দেওয়া হয়। সুতরাং যে সব বন্টনে চরম প্রকৃতির স্কোর থাকে সেসব বন্টনে আদর্শ বিচ্যুতির মান অস্বাভাবিক ভাবে বেড়ে যায়।
- আদর্শ বিচ্যুতি বন্টনের প্রত্যেকটি স্কোরের মানের উপর নির্ভরশীল। স্কোরগুচ্ছের যে কোন একটি স্কোরের মানের পরিবর্তন ঘটলে, স্কোর এবং গড় থেকে স্কোরটির বিচ্যুতির পরিমাণেরও পরিবর্তন ঘটে। এ কারণে বন্টনের আদর্শ বিচ্যুতিও পরিবর্তিত হয়।
- অস্বাভাবিক স্কোর বন্টনের ক্ষেত্রে বিষমতার পরিমাপ হিসাবে আদর্শ বিচ্যুতি তেমন নির্ভরযোগ্য নয়। কারণ যে কোন একটি স্কোর যদি অন্যান্য স্কোরের তুলনায় অত্যন্ত চরম প্রকৃতির হয় তাহলে আদর্শ বিচ্যুতির অনেক বেশি পরিবর্তন হয়ে যায়।
- বন্টনের প্রত্যেকটি স্কোরের সঙ্গে কোন নির্দিষ্ট মান যোগ করলে অথবা প্রত্যেকটি স্কোর থেকে কোন নির্দিষ্ট মান বিয়োগ করলে বন্টনটির আদর্শ বিচ্যুতির কোন পরিবর্তন হয় না। বন্টনের প্রত্যেকটি স্কোরকে যদি নির্দিষ্ট মান দিয়ে গুণ বা ভাগ করা হয় তাহলে বন্টনটির আদর্শ বিচ্যুতির একই পরিবর্তন ঘটে।

আদর্শ বিচ্যুতির সংব্যাখ্যান

আদর্শ বিচ্যুতির ত াৎপর্য নির্ণয়ের ক্ষেত্রে স্বাভাবিক বন্টনের কথাই বিবেচনা করা হয়।



চিত্র ৩-৭.১ স্বাভাবিক বন্টন (Normal Distribution)

স্বাভাবিক বন্টনের ক্ষেত্রে [গড় ± ১ σ] এর মধ্যে বন্টনটির প্রায় শতকরা ৬৮ ভাগ স্কোর থাকে এবং [গড় ± ২ σ] এর মধ্যে বন্টনটির প্রায় শতকরা ৯৫ ভাগ স্কোর থাকে। সুতরাং কোন বন্টনের গড় এবং আদর্শ বিচ্যুতি জানা থাকলে স্কোরগুচ্ছের অভ্যন্তরীণ প্রকৃতি জানা যায়। একটি উদাহরণ দিলে ধারণাটি আরও সুস্পষ্ট হবে। ধরা যাক অষ্টম শ্রেণীর বিজ্ঞান বিষয়ে শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত স্কোরের গড় ৫০ এবং আদর্শ বিচ্যুতি ১২। এই তথ্য থেকে আমরা বুঝতে পারি যে, অষ্টম শ্রেণীর শিক্ষার্থীদের শতকরা ৬৮ জনের স্কোর ৫০ ± ১২ অর্থাৎ ৩৮ থেকে ৬২ এর মধ্যে। শতকরা ৯৫ জনের স্কোর ৫০ ± ২×১২ অর্থাৎ ২৬ থেকে ৭৫ এর মধ্যে। এভাবে শিক্ষামূলক পরিমাপের ক্ষেত্রে আদর্শ বিচ্যুতির তাৎপর্য নির্ণয় করা হয়।

গড় ± ১ σ কে স্বাভাবিক পারদর্শিতার সীমা হিসাবে ধরা হবে।

আদর্শ বিচ্যুতির ব্যবহার

- যখন বিষমতার নিখুঁত এবং নির্ভরযোগ্য পরিমাপের প্রয়োজন হয় তখন আদর্শ বিচ্যুতি ব্যবহার করা হয়।
- যখন কোন স্কোরগুচ্ছের অভ্যন্তরীণ প্রকৃতি জানার প্রয়োজন হয় তখন আদর্শ বিচ্যুতি ব্যবহার করা হয়।
- যখন সমস্ত বিচ্যুতিগুলোর প্রভাব বিষমতার পরিমাপ থাকা একান্ত কাম্য তখন আদর্শ বিচ্যুতি ব্যবহার করা হয়।
- যখন ব্যাপকভাবে বন্টনের তাৎপর্য নির্ণয়ের প্রয়োজন হয় তখন বিভিন্ন পরিমাপের ক্ষেত্রে (যেমন - সহগতির সহগাঙ্ক, গড়ের নির্ভরশীলতা, গড়ের পার্থক্যের নির্ভরশীলতা ইত্যাদি) আদর্শ বিচ্যুতি ব্যবহার করা হয়।
- যখন স্বাভাবিক সম্ভাবনার চিত্র সম্পর্কিত নানা পরিসংখ্যানের প্রয়োজন হয় তখন আদর্শ বিচ্যুতি ব্যবহার করা হয়।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

অ) বহু নির্বাচনী প্রশ্ন

সঠিক উত্তর নির্দেশমূলক অক্ষরটিকে বৃত্তায়িত করুন। (উদাহরণ ঃ আপনার পছন্দসই উত্তরটি ক হলে একে ক বৃত্তায়িত করুন)

১. নিচের বন্টনটির বিস্তৃতি কত?
৪৫, ৫২, ৩৩, ৪২, ২৩, ৫৮, ৭০, ৭৯, ৫৬
ক. ২৩
খ. ৪৬
গ. ৫২
ঘ. ৭৯

২. নিচের বন্টনটির গড় বিচ্যুতি কত?
৫, ৮, ১০, ৭, ১৪, ১৬, ১২, ১৮
ক. ২.৮৫
খ. ৩.৭৫
গ. ৪.০০
ঘ. ৪.১২

৩. নিচের বন্টনটির আদর্শ বিচ্যুতি কত?
৮, ১০, ১২, ১৪, ১৬
ক. ৮.০
খ. ৪.২৫
গ. ২.৮৩
ঘ. ২.০

৪. চতুর্থাংশ বিচ্যুতি হল —
ক. মধ্যক এবং এক চতুর্থাংশ বিন্দুর মধ্যস্থ দূরত্বের অর্ধেক
খ. তিন চতুর্থাংশ বিন্দু এবং মধ্যকের মধ্যস্থ দূরত্বের অর্ধেক
গ. তিন চতুর্থাংশ বিন্দু এবং এক চতুর্থাংশ বিন্দুর মধ্যস্থ দূরত্ব
ঘ. তিন চতুর্থাংশ বিন্দু এবং এক চতুর্থাংশ বিন্দুর মধ্যস্থ দূরত্বের অর্ধেক

৫. আদর্শ বিচ্যুতি হল —
ক. বন্টনের গড় থেকে স্কোরের বিচ্যুতিগুলোর বর্গের সমষ্টি
খ. বন্টনের গড় থেকে স্কোরের বিচ্যুতিগুলোর বর্গসমূহের গড়
গ. বন্টনের গড় থেকে স্কোরসমূহের বিচ্যুতিগুলোর বর্গের গড়ের বর্গমূল
ঘ. বন্টনের গড় থেকে স্কোরগুলোর বিচ্যুতিসমূহের সমষ্টির বর্গমূল

৬. স্বাভাবিক বন্টনের ক্ষেত্রে গড় $\pm$ ১ σ এর মধ্যে শতকরা কতগুলো স্কোর থাকে?
ক. ৩৪
খ. ৫০
গ. ৬৮
ঘ. ৯৫

আ) রচনা ও সমস্যামূলক প্রশ্ন

৭. নিচের বন্টনের মধ্যক এবং চতুর্থাংশ বিচ্যুতি নির্ণয় করুন। প্রাপ্ত ফলের ব্যাখ্যা দিন।

শ্রেণীব্যবধান	৩০-৩৪	৩৫-৩৯	৪০-৪৪	৪৫-৪৯	৫০-৫৪	৫৫-৫৯	
ফ্রিকোয়েন্সী (f)	২	৪	৮	৬	৫	৩	N = ২৮

৮. নিচের বন্টনটির গড় এবং আদর্শ বিচ্যুতি নির্ণয় করুন। প্রাপ্ত ফলের তাৎপর্য ব্যাখ্যা দিন।

শ্রেণীব্যবধান	২০-২৫	২৬-৩১	৩২-৩৭	৩৮-৪৩	৪৪-৪৯	৫০-৫৫	৫৬-৬১	৬২-৬৭	
ফ্রিকোয়েন্সী (f)	২	২	৭	১৬	৯	৮	৪	২	N = ৫০

৯. কোন বন্টনের বিষমতা বলতে কি বুঝেন? বিষমতা পরিমাপের প্রয়োজনীয়তা সংক্ষেপে আলোচনা করুন।

১০. বিষমতার পরিমাপের মধ্যে সবচেয়ে নির্ভরযোগ্য কোনটি? কেন?

সঠিক উত্তর ঃ

১। খ, ২। খ, ৩। গ, ৪। খ, ৫। গ, ৬। ক

৭। Q_1 = ৪০.১২, Q_3 = ৫০.৫০, Q = ৫.১৯ এবং Q_2= ৪৪.৫০, পাঠ-২ এর সর্বশেষ অনুচ্ছেদ দেখুন।

৮। গড় = ৪৩.৭৮, আদর্শ বিচ্যুতি = ৯.৫৪। (পাঠ-৫ এর সারণী ৩-৫.৩ দেখুন। ফলের ব্যাখ্যার জন্য পাঠ-৬ দেখুন।)

৯। পাঠ-১ দেখুন।

১০। পাঠ-৫ এবং ৬ দেখুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন-৪ [পৃঃ২৮] এর (আ) অংশের গাণিতিক সমাধান —

শ্রেণী-ব্যবধান	X	f	x′	fX′	x = X − M	f x
৯৫ - ৯৯	৯৭	৩	+ ৪	+ ১২	২৪.৭	৭৪.১
৯০ - ৯৪	৯২	৭	+ ৩	+ ২১	১৯.৭	১৩৭.৯
৮৫ - ৮৯	৮৭	৬	+ ২	+ ১২	১৪.৭	৮৮.২
৮০ - ৮৪	৮২	৩	+ ১	+ ৩	৯.৭	২৯.১
৭৫ - ৭৯	৭৭	৯	০	০	৪.৭	৪২.৩
৭০ - ৭৪	৭২	১	− ১	− ১	− .৩	− .৩
৬৫ - ৬৯	৬৭	৩	− ২	− ৬	− ৫.৩	− ১৫.৯
৬০ - ৬৪	৬২	২	− ৩	− ৬	− ১০.৩	− ২০.৬
৫৫ - ৫৯	৫৭	৭	− ৪	− ২৮	− ১৫.৩	১০৭.১
৫০ - ৫৪	৫২	১	− ৫	− ৫	− ২০.৩	২০.৩
৪৫ - ৪৯	৪৭	৭	− ৬	− ৪২	− ২৫.৩	১৭৭.১
৪০ - ৪৪	৪২	১	− ৭	− ৭	− ৩০.৩	৩০.৩
		N f = ৫০		$\sum f x'$ = −৪৭	$\sum \lvert f x \rvert$	৭৪৩.২

$$M = ৭৭ + ৫ \times \frac{-৪৭}{৫০}$$

$$= ৭৭ - ৪.৩ = ৭২.৩$$

$$\text{গড় বিচ্যুতি} = \frac{\sum|fx|}{N} = \frac{৭৪৩.২}{৫০} = ১৪.৮৬$$