ইউনিট ৩ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ

ইউনিট ৩ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ

ইতোমধ্যেই আপনারা পরিসংখ্যানের ধারণা এবং উপাত্ত উপস্থাপনের বিভিন্ন কৌশল সম্পর্কে বিস্ তারিত জেনেছেন। এ ইউনিটে আপনি কেন্দ্রীয় প্রবণতা এবং এর পরিমাপ সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন। তথ্যবিশ্বের উপাদানের কোন বৈশিষ্ট্যের জন্য নমুনা চয়ন করার পর মানগুলোকে বিশেষভাবে লক্ষ্য করলে দেখবেন যে, এদের একটি সংখ্যার খুব কাছাকাছি থাকার প্রবণতা আছে। এ ঘটনাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। এরূপক্ষেত্রে যে মানের খুব নিকটবর্তী অন্যান্য মানগুলো বিদ্যমান থাকে তাকে কেন্দ্রীয় মান বলে। কেন্দ্রীয় প্রবণতার প্রধান পরিমাপকগুলো হলো গড় (Mean), মধ্যক (Median) এবং প্রচুরক (Mode)। পরিসংখ্যানে এসব পরিমাপক নির্ণয় খুবই গুরুত্বপূর্ণ। এ ইউনিটে বিভিন্ন পাঠে বিভিন্ন ধরনের গড়, মধ্যক ও প্রচুরক কী, কীভাবে এদের নির্ণয় করা হয় এবং এদের পারস্পরিক সম্পর্ক নিয়ে বিস্তারিতভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

পাঠ ৩.১ কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও গড়

এ পাঠ শেষে আপনি -

- কেন্দ্রীয় প্রবণতা কী তা বর্ণনা করতে পারবেন।
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকগুলো উল্লেখ করতে পারবেন।
- যোজিত গড়, গুণিতক গড় ও উল্টন গড় কাকে বলে তা বলতে ও লিখতে পারবেন।
- বিভিন্ন ধরনের গড় নির্ণয় করতে পারবেন এদের মধ্যে তুলনা করতে পারবেন।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা (Central Tendency)

কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিসংখ্যানের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য। কেন্দ্রীয় প্রবণতাকে সংজ্ঞায়িত করার পূর্বে আসুন এ বিষয়ে একটি উদাহরণ নিয়ে আলোচনা করি। মনে করুন আপনি কোন একটি এলাকায় চাষকৃত বিভিন্ন কৃষকের জমিতে ইজ৩ ধানের ফলন কত তা সংগ্রহ করলেন। এখন যদি আপনাকে কেহ প্রশ্ন করে যে, ঐ এলাকায় ইজ৩ ধানের গড় ফলন কত? তখন আপনি নিশ্চয় এমন একটি সংখ্যা বলবেন ঐ এলাকায় চাষকৃত সকল কৃষকের জমিতে ইজ৩ এর ফলনের কাছাকাছি একটি মান হবে। অর্থাৎ ঐ নির্দিষ্ট মানটি ঐ এলাকায় সকল কৃষকের জমিতে ইজ৩ ধানের ফলনের প্রতিনিধিত্ব করছে যার মাধ্যমে ঐ এলাকায় ইজ৩ ধানের ফলন সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। এক্ষেত্রে সকল কৃষকের জমিতে প্রাপ্ত ফসল সংখ্যা যারা একটি নির্দিষ্ট মানের দিকে পুঞ্জিভূত হবার প্রবণতা দেখায় তাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। আমাদের জীবনযাত্রা, পরিকল্পনা গ্রহণ ইত্যাদি কাজে আমরা কেন্দ্রীয় প্রবণতা ব্যবহার করে থাকি। যেমন- গড় ফলন, গড় বয়স, গড় আয় ইত্যাদি। এসকল তথ্যসমূহের যথার্থ বিশ্লেষণের জন্য সংখ্যাগত বিশ্লেষণ জানা প্রয়োজন। কেননা, সংখ্যাগত বিশ্লেষণ জানতে পারলে আপনি তথ্যরাশিকে একটি প্রতিনিধিত্বমূলক সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করতে সক্ষম হবেন। প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা বের করতে পারলে বিভিন্ন তথ্যসারির তুলনামূলক আলোচনা করা এবং সিদ্ধান্ত গ্রহণ সম্ভব হবে।

জীবনযাত্রা, পরিকল্পনা গ্রহণ ইত্যাদি কাজে কেন্দ্রীয় প্রবণতার ব্যবহার রয়েছে।

আদর্শ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকের নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য থাকা প্রয়োজন

- এটি খুব স্পষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।
- এটি সহজে বুঝা এবং হিসেব করা যায়।
- এটি সবগুলো পর্যবেক্ষণের ওপর ভিত্তি করে গঠিত হয়।
- একে বীজযোজিতভাবে প্রকাশ করা যায়।
- নমুনার মানসমূহের হ্রাস-বৃদ্ধির দ্বারা এটি প্রভাবিত হয়।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকসমূহ (Measures of central tendency)

কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের জন্য কতকগুলো বিশেষ পদ্ধতি রয়েছে। পদ্ধতিগুলো নিম্নরূপ-

১। গড় (Mean) : গড় আবার তিন ধরনের। যথা-

- যোজিত গড় (Arithmatic Mean)
- গুণিতক গড় (Geometric Mean)
- উল্টন গড় (Harmonic Mean)

২। মধ্যক (Median)

৩। প্রচুরক (Mode)

যোজিত গড় (Arithmatic Mean)

> কোন পর্যবেক্ষণে কতকগুলো রাশির সমষ্টিকে রাশিগুলোর সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগফল পাওয়া যায় তাকে ঐ রাশিগুলোর যোজিত গড় বলে।

কোন পর্যবেক্ষণে কতকগুলো রাশির সমষ্টিকে রাশিগুলোর সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগফল পাওয়া যায় তাকে ঐ রাশিগুলোর যোজিত গড় বলে। যেমন-

n সংখ্যক দলবদ্ধহীন (ungrouped) পর্যবেক্ষণ x_1, x_2, x_3 .... x_n এর যোজিত গড় $\bar{x}$ হবে নিম্নরূপ-

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ঘটনসংখ্যা বিন্যাস বা দলবদ্ধ ডাটার ক্ষেত্রে যোজিত গড় নিম্নরূপ-

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f_nx_n}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_ix_i \qquad [\because \sum_{i=1}^{n} f_i = n]$$

পর্যবেক্ষণ	ফ্রিকুয়েন্সী/ঘটনসংখ্যা
x_1	f_1
x_2	f_2
x_3	f_3
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n
মোট	$n = \sum f_i$

উদাহরণ

জনাব আলম সাহেবের মাসিক চাহিদা মেটানোর জন্য নিম্নলিখিত পণ্যগুলো ক্রয় করে-

পণ্য	প্রতি কেজির দাম (টাকা)	পরিমাণ (কেজি)
চাল	১৩	২০
আটা	১২	৬
ডাল	৩০	২
লবণ	৭	৪
তেল	৫০	৪

পরিবারটির গড় ক্রয়মূল্য নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান

প্রতি কেজির দাম (টাকা) (x_i)	পরিমাণ (f_i)	$x_i f_i$
13	20	260
12	6	72
30	2	60
7	4	28
50	4	200
$\sum x_i = 112$	$\sum f_i = 36$	$\sum x_i f_i = 620$

কেজি প্রতি গড় ক্রয়মূল্য $= \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$

$$= \frac{620}{36}$$

$= 17.22$ UvKv(cÖwZ)|

যোজিত গড়ের সুবিধা

যোজিত গড় নির্ণয় করতে হলে পর্যবেক্ষণের সব কয়টি রাশিকে বিবেচনায় আনতে হয়।

- সার্বিকভাবে সংগায়িত এবং সহজে হিসাব করা যায়।
- সহজবোধ্য হওয়ায় এটি যোজিত ও বীজগণিতের প্রক্রিয়ায় আরোপের উপযোগী। ফলে পরিসংখ্যান তথ্য বিশ্লেষণের ব্যবহার সর্বাধিক।
- যোজিত গড় নির্ণয় করতে হলে পর্যবেক্ষণের সব কয়টি রাশিকে বিবেচনায় আনতে হয়।
- এটি সহজবোধ্য হওয়ার কারণে সাধারণভাবে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসাবে সর্বাধিক ব্যবহৃত হয়।
- অনুক্রমের রাশিগুলোর প্রত্যেকটির প্রকৃত মান দেয়া না থাকলেও কেবলমাত্র এর সমষ্টি এবং সংখ্যা জানা থাকলেই যোজিত গড় নির্ণয় করা যায়।
- নমুনার তারতম্য দ্বারা কম প্রভাবিত হয়।

যোজিত গড়ের অসুবিধা

- প্রান্তিক বা চরম মানসমূহ দ্বারা যথেষ্ট প্রভাবিত হয়।
- যদি ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের চরম শ্রেণিসমূহের প্রান্ত খোলা হয়। তবে যোজিত গড় হিসেব করা যায় না।
- যোজিত গড়ের মানসমূহ সিরিজ আকারে ঘটে না।

যোজিত গড়ের বৈশিষ্ট্যসমূহ

যোজিত গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি পরিমাপক। তথ্য অনুক্রমের কেন্দ্রস্থলে এর অবস্থান।

যোজিত গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি পরিমাপক। তথ্য অনুক্রমের কেন্দ্রস্থলে এর অবস্থান। ফলে এর কতগুলো যোজিত বৈশিষ্ট্য রয়েছে। বৈশিষ্ট্যগুলো হলো-

- কোন একটি পরিসংখ্যান তথ্যসারির গড় থেকে প্রতিটি সংখ্যামানের বিচ্যুতি নির্ণয় করলে সমস্ত বিচ্যুতির সমষ্টি শূন্য হয়। সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করলে বৈশিষ্ট্যটি নিম্নরূপ, $\sum(x-\bar{x})=0$ উদাহরণস্বরূপ বলা যেতে পারে, যদি পাঁচজন শ্রমিকের প্রাপ্ত মজুরী যথাক্রমে ৫, ৬, ৭, ৮,৯ টাকা হয়, তবে তাদের গড় মজুরী $\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{35}{5}=7$ টাকা গড় থেকে অন্য রশিগুলোর বিচ্যুতির সমষ্টি, $\sum(x-\bar{x})=0$.

গড় থেকে রশিগুলোর বিচ্যুতির সমষ্টি নির্ণয় করে নিম্নে তালিকায় প্রদর্শিত হলো-

ী	$x-\bar{x}$
৫	-২
৬	-১
৭	০
৮	১
৯	২
	$\sum(x-\bar{x})=0$

একটি তথ্য অনুক্রমের প্রতিটি তথ্যের বদলে গড় ব্যবহার করলে তাদের যোগফল তথ্যসারির সংখ্যামানসম হের সমষ্টির সমান।

- একটি তথ্য অনুক্রমের প্রতিটি তথ্যের বদলে গড় ব্যবহার করলে তাদের যোগফল তথ্যসারির সংখ্যামানসম হের সমষ্টির সমান।

  চিহ্নের মাধ্যমে বিষয়টি $\sum x = N\bar{x}$ উপরের উদাহরণে গড় মজুরী ৭ টাকা। অনুক্রমের রাশিগুলোর সমষ্টি $\sum x=$ ৩৫। আবার রাশিগুলোর পরিবর্তে গড় বসালে তাদের সমষ্টি হয় $\sum\bar{x}=N\bar{x}=5\times7=35$। সেজন্য বলা চলে যে, যোজিত গড় তথ্য অনুক্রমের যথার্থ প্রতিনিধিত্বশীল রাশি।

- N সংখ্যক ধ্রুবক মান a এর গড় a।

  প্রমাণঃ মনেকরি ধ্রুবক a, n সংখ্যক বার বিদ্যমান।

  এক্ষেত্রে, $\bar{x}=\frac{\sum a}{n}=\frac{na}{n}=a$; প্রমাণিত।

- যোজিত গড় থেকে তথ্য অনুক্রমের প্রতিটি সংখ্যামানের বিচ্যুতির বর্গের সমষ্টি সর্বনিম্ন। চিহ্নের মাধ্যমে বিষয়টি নিম্নরূপঃ

  $\sum(x-\bar{x})^2 \le \sum(x-A)^2$। যেখানে A হচ্ছে গড় ব্যতীত যে কোন একটি সংখ্যামান। উপরের উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি দেখানো হলো, মনেকরি, $A=$ ৮

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$x-A$	$(x-A)^2$
৫	- ২	৪	- ৩	৯
৬	- ১	১	- ২	৪
৭	০	০	- ১	১
৮	১	১	০	০
৯	২	৪	১	১
		$\sum(x-\bar{x})^2$ = ১০		$\sum(x-A)^2$ = ১৫

উপরের তালিকায় দেখা যাচ্ছে, $\sum(x-\bar{x})^2$ = ১০ এবং $\sum(x-A)^2$ = ১৫

সুতরাং, $\sum(x-\bar{x})^2 \le \sum(x-A)^2$

- যদি ক গুচ্ছ মানের সংখ্যা ও গড় যথাক্রমে
  হল ও $\overline{xi}$ $(i = 1, 2, \text{.............} n$ ও $j = 1, 2, \text{..................} k)$ হয় তবে, গুচ্ছ মান

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \dots\dots + n_k\bar{x}_n}{n_1 + n_2 + \dots\dots + n_k}$$

যোজিত গড়ের ব্যবহার

এ পাঠে আপনি নিশ্চয়ই যোজিত গড় সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছেন। আমাদের দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন বক্তব্য যেমন, কোন দ্রব্যের গড় ক্রয়মূল্য, কোন পণ্যের গড় আমদানি, মাসিক গড় আয়, শিল্প পণ্যের গড় চাহিদা ইত্যাদি বিষয়ক ধারণার সম্মুখীন হই। এক্ষেত্রে প্রকৃতপক্ষে যোজিত গড় ব্যবহৃত হয়। কোন বিষয়ের সময়ের ভিত্তিতে সাজানো তথ্যকে সুষম করার জন্য অর্থাৎ বিভিন্ন মাসে উৎপাদন বিভিন্ন রকম হলেও প্রতিমাসে একটি প্রতিনিধিত্বশীল উৎপাদন সম্পর্কে বুঝানোর ক্ষেত্রে যে গড় ব্যবহৃত হয়, তা হলো যোজিত গড়। সূচক সংখ্যা পরিগণনায়ও যোজিত গড় ব্যবহৃত হয়। যোজিত গড় ছাড়া সম্মিলিত গড় বের করা সম্ভব নয়।

গুণিতক গড় (Geometric mean)

কোন সিরিজের n সংখ্যক অশ ন্য ধনাত্মক রাশিগুলোর গুণফলের n তম মূলকে গুণিতক গড় বলে।

কোন সিরিজের n সংখ্যক অশূন্য ধনাত্মক রাশিগুলোর গুণফলের n তম মূলকে গুণিতক গড় বলে।

মনে করি, x_1, x_2, x_3 .... x_n একটি হ সংখ্যক অশ ন্য ঋণাত্মক রাশির সিরিজ।

এর গুণিতক গড় হবে $G = (x_1 \times x_2 \times \text{...................} \times x_n)^{\frac{1}{n}}$

এ নিয়মে তিনটির বেশি সংখ্যা সিরিজ তার ম ল বের করা কষ্টকর বলে ষড়ম এর সাহায্য নেয়া হয়।

$$\log G = \log(x_1 \times x_2 \times x_3 \times \text{........................} \times x_n)^{\frac{1}{n}}$$

বা, $$\log G = \frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \text{..........} + \log x_n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$$

$$\therefore G = \text{Anti}\log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i\right] \text{(ungrouped data)}$$

ঘটনসংখ্যা বিন্যাস বা দলবদ্ধ ডাটার ক্ষেত্রে গুণিতক গড় নিম্নরূপ-

পর্যবেক্ষণ	ঘটনসংখ্যা
x_1	f_1

x_2	f_2
x_3	f_3
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n
মোট	$n = \sum f_i$

$$G = (x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ldots\ldots\ldots\ldots \times x_n^{f_n})^{\frac{1}{n}} \text{ যেখানে } n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$\log G = \frac{1}{n} \log(x_1^{f_1} \times x_2^{f_2} \times \ldots\ldots \times x_n^{f_n})$$

$$= \frac{1}{n}\left[f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n \log x_n\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i$$

$$G = \text{Anti}\log\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i\right) / n$$

উদাহরণ

নিচের ঘটনসংখ্যা বিন্যাসে দশটি কোম্পানিকে লাভের শতকরা অনুসারে দেখানো হলো-

লাভের শতকরা হার	কোম্পানির সংখ্যা
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১
মোট	১০

এখন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসটির গুণিতক গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান

ঘটনসংখ্যা সারণি থেকে গুণিতক গড় নির্ণয়

লাভ (শতকরা হার)	f_i	x_i মধ্যক	$\log x_i$	$f_i \log x_i$
০ - ৫	১	২.৫	০.৩৯৭৯	০.৩৯৭৯
৫ - ১০	২	৭.৫	০.৮৭৫১	১.৭৫০২
১০ - ১৫	৪	১২.৫	১.০৯৬৯	৪.৩৮৭৬
১৫ - ২০	২	১৭.৫	১.২৪৩০	২.৪৮৬০
২০ - ২৫	১	২২.৫	১.৩৫২২	১.৩৫২২
				১০.৩৭৩৯

$$\therefore \sum f_i \log x_i = 10.3739$$

$$\text{গুণিতক গড়} = G = \text{Anti}\log\left[\frac{\sum \log x_i}{n}\right]$$

$$= \text{Anti}\log\left[\frac{10.3739}{10}\right]$$

$$= \text{Anti}\log[1.03739]$$

$$= 10.899$$

$\therefore$ গুণিতক গড় $= 10.899$

গুণিতক গড়কে সার্বিকভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়। এটি পর্যবেক্ষণের সকল মানের ওপর ভিত্তি করে করা হয়।

গুণিতক গড়ের সুবিধা

- গুণিতক গড়কে সার্বিকভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।
- এটি পর্যবেক্ষণের সকল মানের ওপর ভিত্তি করে করা হয়।
- এটি নমুনার হ্রাসবৃদ্ধি দ্বারা প্রভাবিত হয় কম।
- এটি ছোট পর্যবেক্ষণের ক্ষেত্রে বেশি উপযোগী

গুণিতক গড়ের অসুবিধা

- এটি সহজে বুঝা যায় না এবং গণিতের বিশেষ জ্ঞান না থাকিলে নির্ণয় করা সম্ভব হয় না।
- যদি ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের চরম শ্রেণিসমূহের প্রান্ত খোলা হয় তবে এটি হিসাব করা যায় না।
- গুণিতকের মানসম হকে সিরিজ আকারে প্রকাশ করা যায় না।
- গুণিতক গড়ের ক্ষেত্রে কোন একটি তথ্যমান শূন্য হলে নির্ণয় করা যায় না।

উল্টন গড় (Hermonic mean)

অশূন্য কোন সিরিজের উল্টন সংখ্যাগুলো যোজিত গড়ের উল্টনকে উল্টন গড় বলে।

অশ ন্য কোন সিরিজের উল্টন সংখ্যাগুলো যোজিত গড়ের উল্টনকে উল্টন গড় বলে।

মনে করি, x_1, x_2, x_3 .... x_n একটি nতম অশূন্য রাশির সিরিজের উল্টন গড় হবে-

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x_n}}$$

$$= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \quad \text{(ungrouped data)}$$

ঘটনসংখ্যা বিন্যাস বা দলবদ্ধডাটার ক্ষেত্রে উল্টন গড় নিম্নরূপ-

পর্যবেক্ষণ	ঘটনসংখ্যা
x_1 x_2 x_3 . . . x_n	f_1 f_2 f_3 . . . f_n
মোট	$n = \sum f_i$

$$H = \cfrac{1}{\cfrac{1}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}\left(\cfrac{f_1}{x_1} + \cfrac{f_2}{x_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \cfrac{f_n}{x_n}\right)}$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cfrac{f_i}{x_i}} \qquad \left[\because \sum_{i=1}^{n} f_i = n\right]$$

$$= \cfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\cfrac{f_i}{x_i}}$$

উদাহরণ

নিম্নলিখিত ঘটনসংখ্যা বিন্যাস হতে উল্টন গড় নির্ণয় করুন।

শ্রেণিব্যাপ্তি	০-৫	৫-১০	১০-১৫	১৫-২০	২০-২৫	২৫-৩০
ঘটনসংখ্যা	২	৩	১২	১৫	৯	৬

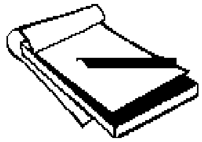
সমাধান

আমরা জানি, উল্টন গড় $= \cfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\cfrac{f_i}{x_i}}$

এখন,

গড় নির্ণয় সারণি			
শ্রেণিব্যাপ্তি	মধ্যক	ঘটনসংখ্যা	$\frac{f_i}{x_i}$
০-৫	২.৫	২	০.৮০০০
৫-১০	৭.৫	৬	০.৭৯৯৯৮
১০-১৫	১২.৫	১২	০.৯৬০০০
১৫-২০	১৭.৫	১৫	০.৮৫৭১০
২০-২৫	২২.৫	৯	০.৩৯৯৯৬
২৫-৩০	২৭.৫	৬	০.২১৮১৬
		$n = \sum f_i =$ ৫০	$\sum \frac{f_i}{x_i} =$ ৪.০৩৫২

$\therefore$ উল্টন গড় $= \cfrac{n}{\sum \cfrac{f_i}{x_i}}$



***অনুশীলন (Activities) ঃ** নিম্নের ঘটনসংখ্যা বিন্যাস সারণি হতে উল্টন গড়, গুণিতক গড় এবং যোজিত গড় নির্ণয় করুন।*

শ্রেণিব্যাপ্তি	ঘটনসংখ্যা
০-১০	৯
১০-২০	৪২
২০-৩০	৬১
৩০-৪০	১৪০
৪০-৫০	২৫০
৫০-৬০	১০২
৬০-৭০	৭১
৭০-৮০	২৩
৮০-৯০	২

উল্টন গড়ের সুবিধা

উল্টন গড়ের সুবিধা হচ্ছে এটিকে সার্বিকভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় এবং এটি নমুনার হ্রাস বৃদ্ধি দ্বারা প্রভাবিত হয় না।

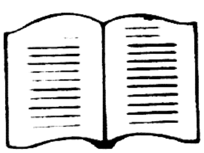
- এটি সার্বিকভাবে সংগায়িত করা যায়।
- নির্ণয় করতে হলে পর্যবেক্ষণের সবকটি রাশিকে বিবেচনা করতে হয়।
- নমুনার হ্রাসবৃদ্ধি দ্বারা প্রভাবিত হয় না।
- ছোট পর্যবেক্ষণের ক্ষেত্রে এর গুরুত্ব অনেক।

উল্টন গড়ের অসুবিধা

- এটি সহজে বুঝা যায় না ও হিসাব করা যায় না।
- ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের চরম শ্রেণিসমূহের প্রাপ্ত খোলা হলে উল্টন গড় বের করা অসম্ভব হয়ে পড়ে।
- উল্টন গড়ের মানসম হকে সিরিজ আকারে প্রকাশ করা যায় না।

ব্যবহারঃ

যখন পর্যবেক্ষণসম nকে হার, বেগ এবং মূল্য ইত্যাদিতে প্রকাশ করা হয় তখন উল্টন গড় ব্যবহার করা হয়।



সারমর্ম ঃ কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিসংখ্যানের একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য। আদর্শ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকের যেসব বৈশিষ্ট্য থাকা প্রয়োজন তা হচ্ছে - এটি খুব স্পষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়, এটি সহজে বুঝা এবং হিসেব করা যায়, এটি সবগুলো পর্যবেক্ষণের ওপর ভিত্তি করে গঠিত হয়, নমুনার মানসমূহের হ্রাস-বৃদ্ধির দ্বারা এটি প্রভাবিত হয়। কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের জন্য কতকগুলো বিশেষ পদ্ধতি রয়েছে। পদ্ধতিগুলো হলো- গড়, মধ্যক এবং প্রচুরক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

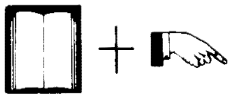
১। কোন্‌টির ওপর যোজিত গড় এর পরিবর্তন নির্ভর করে?
- ক) স্কেল এবং অরিজিনের উপর
- খ) স্কেলের ওপর
- গ) অরিজিনের ওপর
- ঘ) স্কেল ও অরিজিন কোনটির ওপর নয়

২। গুণিতক গড়ের সূত্র কোন্‌টি?
- ক) গুণিতক গড় $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i$
- খ) গুণিতক গড় $=$ Anti log $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i$
- গ) গুণিতক গড় $= (\sum X_i - \bar{x})$
- ঘ) গুণিতক গড় $= \dfrac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}$

৩। নিচের কোন্‌টির ক্ষেত্রে গুণিতক গড় নির্ণয় করা যায় না?
- ক) কোন একটি তথ্য মান বিয়োগ বোধক হয়
- খ) কোন একটি তথ্য মান যোগ বোধক হয়
- গ) কোন একটি তথ্য মান শূন্য হয়
- ঘ) কোন একটি তথ্য মান সসীম হয়

৪। N সংখ্যক মান a এর গড় কোন্‌টি?
- ক) N + a
- খ) a
- গ) a/N
- ঘ) N - a

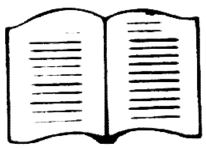
পাঠ ৩.২ মধ্যক



এ পাঠ শেষে আপনি -

- মধ্যক কী তা বর্ণনা করতে পারবেন।
- কোন অবিন্যস্ত তথ্য অনুক্রম থেকে মধ্যক নির্ণয় করতে পারবেন।
- কোন বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে মধ্যক নির্ণয় করতে পারবেন।
- লেখচিত্রের মাধ্যমে কোন তথ্যসারির মধ্যক নির্ণয় করতে পারবেন।
- মধ্যকের সুবিধা ও অসুবিধা বর্ণনা করতে পারবেন।

মধ্যক



মধ্যক কেন্দ্রীয় প্রবণতার অন্য একটি পরিমাপক। যেসব ক্ষেত্রে যোজিত গড় নির্ণয় করা সম্ভব নয় অথবা, যোজিত গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসাবে কম উপযোগী সেসব ক্ষেত্রে মধ্যক পরিমাপক ব্যবহার করা যেতে পারে।

মানের উর্ধ্ব অথবা নিম্নক্রম অনুসারে সাজানো কোন তথ্য অনুক্রমের যে সংখ্যাটি অনুক্রমটিকে সমান দুভাগে বিভক্ত করে তাকে মধ্যক বলে। মধ্যক পরিসংখ্যান সারিকে সমান দুভাগে ভাগ করে, একদিকে

থাকে মধ্যক থেকে কম মানের সব সংখ্যা এবং অন্যদিকে থাকে মধ্যক থেকে বৃহত্তর মানের সমস্ত সংখ্যা। তাই কোন তথ্যসারিকে সাজানোর পর সমান দুভাগে ভাগ করলে যে মধ্যবর্তী রাশিটি পাওয়া যায় সে মানই হচ্ছে মধ্যক। একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টিকে আরও সহজভাবে প্রকাশ করা হলো।

উদাহরণ ১

পাঁচজন শ্রমিকের প্রতি ঘন্টার শ্রমের মজুরী নিচে দেয়া হলো,

৭, ৯, ১১, ৮, ১০

তথ্য অনুক্রমটির মধ্যক নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান

তথ্যসারিটিকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজালে অনুক্রমটি নিম্নরূপ দাঁড়ায়,

৭, ৮, ৯, ১০, ১১

এখন তথ্যসারিটি ভালভাবে পর্যালোচনা করলে দেখা যায় যে, তথ্যসারির মধ্যম সংখ্যা হলো ৯। সুতরাং মধ্যকের সংজ্ঞা অনুসারে এ তথ্যসারির মধ্যক হচ্ছে ৯।

অবিন্যস্ত তথ্য অনুক্রম থেকে মধ্যক নির্ণয়

> কোন তথ্যসারিতে বিজোড় সংখ্যক রাশি থাকলে একটি বিশেষ সংখ্যা সারিটিকে সমান দুভাগে বিভক্ত করে।

কোন তথ্যসারিতে বিজোড় সংখ্যক রাশি থাকলে একটি বিশেষ সংখ্যা সারিটিকে সমান দুভাগে বিভক্ত করে। সেজন্য বিজোড় সংখ্যক রাশি বিশিষ্ট তথ্যসারির ক্ষেত্রে মধ্যকের অবস্থান চিহ্নিতকরণ সহজ হয়। যেমন, উপরের উদাহরণে সাজানো তথ্যসারির ঠিক মাঝখানে ৯ সংখ্যাটির অবস্থান। সেজন্য ৯ B হচ্ছে তথ্যসারির মধ্যক। প্রতীকের মাধ্যমে বিজোড় সংখ্যা বিশিষ্ট তথ্যসারির মধ্যক হচ্ছে $\frac{n+1}{2}$ তম সংখ্যামান, যেখানে n হচ্ছে তথ্য অনুক্রমের রাশি সংখ্যা। উপরের উদাহরণে $\frac{5+1}{2}$ তম সংখ্যা বা ৩য় সংখ্যা, ৯ হচ্ছে মধ্যক। এখন স্বাভাবিকভাবে প্রশ্ন আসে অনুক্রমে জোড় সংখ্যা থাকলে এর

মধ্যক কী হবে? জোড় সংখ্যা বিশিষ্ট তথ্য অনুক্রমের মধ্যকের সংজ্ঞা হচ্ছে $\frac{n}{2}$ তম এবং $\frac{n}{2}+1$ তম রাশির গড়, যেখানে n হলো অনুক্রমের রাশির সংখ্যা। বিষয়টি একটি উদাহরণে উপস্থাপন করা যাক।

উদাহরণ ২

একটি কারখানার আটজন শ্রমিকের কোন একটি নির্দিষ্ট দিনে উৎপাদিত দ্রব্যের সংখ্যা নিম্নরূপ। এ তথ্য অনুক্রমের মধ্যক নির্ণয় করতে হবে।

৬৮, ৪৪, ৬০, ৭৫, ৬৪, ৫৫, ৪৮, ৫০

সমাধান

এ তথ্যসারির রাশি সংখ্যা ৮। এটি একটি জোড় সংখ্যা বিশিষ্ট তথ্য অনুক্রম। সংজ্ঞা অনুসারে এর মধ্যক হলো, $\frac{n}{2}$ তম এবং $\frac{n}{2}+1$ তম রাশির গড়। মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজানো সারিটি হলো-

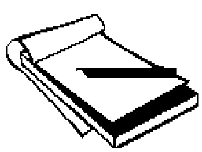
৪৪, ৪৮, ৫০, ৫৫, ৬০, ৬৪, ৬৮, ৭৫

সুতরাং মধ্যক $= \dfrac{\frac{n}{2}\,\text{Zg i wk} + (\frac{n}{2}+1)\,\text{Zg i wk}}{2}$

যেখানে হ = ৮, $= \dfrac{\frac{8}{2}\,\text{Zg i wk} + (\frac{8}{2}+1)\,\text{Zg i wk}}{2} = \dfrac{4\_ \text{ i wk} + 5\text{g i wk}}{2}$

= [illegible]

সুতরাং শ্রমিকদের উৎপাদিত দ্রব্য সংখ্যার মধ্যক হচ্ছে ৫৭.৫।



***অনুশীলন (Activity):** নিচের তথ্য অনুক্রমের মধ্যক নির্ণয় করুন।*
১০ জন ছাত্রের মৃত্তিকা বিজ্ঞানে প্রাপ্ত নম্বর ঃ ৫০, ৪২, ৩৭, ৬০, ৫৩, ৭৫, ৮২, ৪৪, ৩৭, ৬১

বিন্যস্ত উপাত্ত থেকে মধ্যক নির্ণয়

কোন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের মধ্যক নির্ণয় করতে হলে ঘটনসংখ্যাগুলো যোজনের মাধ্যমে বিন্যাসের শ্রেণিগুলোর কোনটিতে মধ্যক অবস্থান করছে - তা প্রথমে নিরূপণ করা হয়।

বিন্যস্ত তথ্য সাধারণত ঘটনসংখ্যা সারণিতে প্রকাশ করা হয়। কোন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের মধ্যক নির্ণয় করতে হলে ঘটনসংখ্যাগুলো যোজনের মাধ্যমে বিন্যাসের শ্রেণিগুলোর কোনটিতে মধ্যক অবস্থান করছে - তা প্রথমে নিরূপণ করা হয়। বিন্যাসের যোজন ঘটনসংখ্যা নির্ণয় করে যে শ্রেণির যোজিত ঘটনসংখ্যার মানটির সমান বা বেশি তা নির্ণয় করা হয়। সেই শ্রেণির মধ্যে মধ্যকের অবস্থান ধরে নেয়া হয়। মধ্যক শ্রেণি নিরূপিত হওয়ার পর মধ্যক শ্রেণির ঘটনসংখ্যা ঐ শ্রেণিতে সমভাবে নিবেশিত - এ অনুমানের ভিত্তিতে মধ্যক নিরূপণের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সূত্র ব্যবহার করা হয়।

$$\text{মধ্যক} = L_1 + \frac{\frac{n}{2} - f_c}{f_m} \times C$$

যেখানে L_1 = মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা
C = প্রতিটি উপ-অনুক্রমের রাশি সংখ্যা বা শ্রেণি ব্যাপ্তি
L_2 = মধ্যক শ্রেণির উচ্চসীমা
n = মোট ঘটনসংখ্যা

f_m = মধ্যক শ্রেণির ঘটনসংখ্যা

f_c = মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত ঘটনসংখ্যা

উদাহরণ ৩

বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের বিএগএড প্রোগ্রামের মাছের চাষ ও ব্যবস্থাপনা (বিএই ১৩০৬) কোর্স বই এর পরীক্ষায় একদল ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর নিচের ঘটনসংখ্যা সারণিতে দেয়া হলো। সারণি থেকে ছাত্রদের প্রাপ্ত নম্বরের মধ্যক বের করতে হবে।

নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা
০-১০	১
১০-২০	৪
২০-৩০	৬
৩০-৪০	৮
৪০-৫০	১০
৫০-৬০	২০
৬০-৭০	২৪
৭০-৮০	১৮
৮০-৯০	৬
৯০-১০০	৩

সমাধান

নম্বর	ছাত্রসংখ্যা ঘটনসংখ্যা	যোজিত ঘটনসংখ্যা	
০-১০	১	১	
১০-২০	৪	১+৪=৫	
২০-৩০	৬	৫+৬=১১	
৩০-৪০	৮	১১+৮=১৯	
৪০-৫০	১০	১৯+১০=২৯	$= f_c$
৫০-৬০	২০ $= f_m$	২৯+২০=৪৯	
৬০-৭০	২৪	৪৯+২৪=৭৩	
৭০-৮০	১৮	৭৩+১৮=৯১	
৮০-৯০	৬	৯১+৬=৯৭	
৯০-১০০	৩	৯৭+৩=১০০	
	n = ১০০		

$$\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

সুতরাং যোজিত ঘটনসংখ্যা ৫০ হওয়ায় ধরে নেয়া যায় মধ্যকের শ্রেণিব্যাপ্তি (৫০-৬০) এর মধ্যে অবস্থান করছে।

সুতরাং মধ্যক শ্রেণি = (৫০ - ৬০)

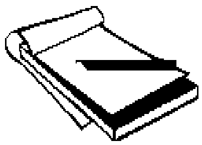
মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা = ৬০, মধ্যক শ্রেণির ঘটনসংখ্যা = ২০

$$\text{মধ্যক} = L_1 + \frac{\frac{n}{2} - f_c}{f_m} \times C$$

[illegible]

[illegible]

সুতরাং, ছাত্রদের নম্বরের মধ্যক = ৬০.৫০



অনুশীলন (Activity) : নিচের বিন্যস্ত উপাত্তের সাহায্যে মধ্যক নির্ণয় করুন।

বানান ভুলের সংখ্যা	*পৃষ্ঠা সংখ্যা*
০-২	*২*
২-৪	*২*
৪-৬	*৩*
৬-৮	*২*
৮-১০	*১*

ডবচ্ছিন্ন অনুক্রমের মধ্যক নির্ণয়

বিচ্ছিন্ন অনুক্রম তথ্যসারির জন্য মধ্যক নির্ণয় করতে হবে প্রথমেই $\frac{n}{2}$ তম সংখ্যার অবস্থান চিহ্নিত করতে হয়। সেক্ষেত্রে প্রথমে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার একটি কলাম প্রস্তুত করে নিতে হয়।

বিচ্ছিন্ন অনুক্রম তথ্যসারির জন্য মধ্যক নির্ণয় করতে হবে প্রথমেই $\frac{n}{2}$ তম সংখ্যার অবস্থান চিহ্নিত করতে হয়। সেক্ষেত্রে প্রথমে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার একটি কলাম প্রস্তুত করে নিতে হয়। এভাবে ঘটনসংখ্যার মধ্যস্থল নির্বাচিত হলে তা যে মানের বিপরীতে অবস্থান করে সে মানকে মধ্যক বলে চিহ্নিত করা হয়। একটি উদাহরণের মাধ্যমে বিসয়টিকে আরও সহজ করা যায় এভাবে -

উদাহরণ ৪

নিচের বিন্যাসে একটি চিংড়ির খামারের ১০০ জন শ্রমিকের কাজের সময়সীমা দেয়া হলো। বিন্যাসের মধ্যক নির্ণয় করুন।

কাজের সময় সীমা (বৎসর)	৫	৬	৭	৮	৯
শ্রমিকের সংখ্যা	১০	২০	৪০	২০	১০

সমাধান

মধ্যক নির্ণয় করার জন্য প্রথমে ক্রমযোজিত ঘটনসংখ্যা নির্ণয় করতে হবে। পরে সূত্রের সাহায্যে মধ্যক নির্ণয় করতে হবে।

কাজের সময় সীমা	ঘটনসংখ্যা (f)	ক্রমযোজিত ঘটনসংখ্যা পভ
৫	১০	১০
৬	২০	১০+২০=৩০
৭	৪০	৩০+৪০=৭০
৮	২০	৭০+২০=৯০
৯	১০	৯০+১০=১০০

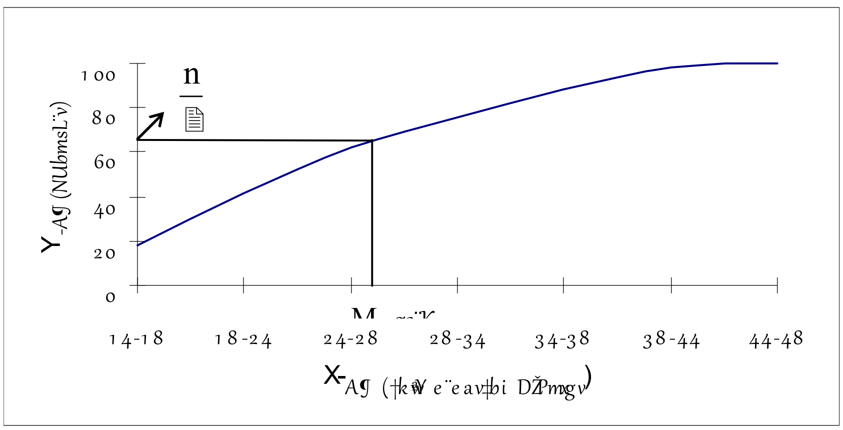
মধ্যক = $\frac{n}{2}$ তম রাশির মান, এখানে n = ১০০

মধ্যক = ৫০ তম রাশি

এখন যোজিত ঘটনসংখ্যার কলাম লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, ৫০তম সংখ্যার অবস্থান কাজের জীবন সীমার ৭ (সাত) এর বিপরীতে অবস্থান করছে। অতএব, শ্রমিকদের কাজের সময়সীমার মধ্যক = ৭ বৎসর।

লৈখিক প্রক্রিয়ায় মধ্যক নির্ণয়

লেখ চিত্রের মাধ্যমেও কোন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের মধ্যক নির্ণয় করা সম্ভব। এ প্রক্রিয়ার মধ্যক নির্ণয় করতে হলে প্রথমে একটি অজিভ বা যোজিত ঘটনসংখ্যা রেখা অংকন করতে হবে। আপনার নিশ্চয়ই অজিভ অংকন প্রণালী মনে আছে যা আপনি ইউনিট ২ এর পাঠ ৫ এ জেনেছেন। অজিভের মাধ্যমে মধ্যক নির্ণয় করতে গেলে যে সব ধাপ অতিক্রম করতে হবে তা জেনে নেয়া যাক। অজিভের Y- অক্ষে থাকবে যোজিত ঘটনসংখ্যা এবং X- অক্ষে থাকবে চলকের শ্রেণিসীমা। কোন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের মোট ঘটনসংখ্যা n হলে $\frac{n}{2}$ এর অবস্থান প্রথমে Y- অক্ষে চিহ্নিত করতে হবে। সেই $\frac{n}{2}$ বিন্দু থেকে X- অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা অংকন করতে হবে। X- অক্ষের সমান্ রাল রেখা যে বিন্দুতে অজিভকে ছেদ করে সে ছেদ বিন্দু থেকে X- অক্ষ রেখার ওপর একটি লম্ব অংকন করতে হবে। যা চিত্রানুযায়ী M বিন্দুতে X অক্ষকে ছেদ করবে। সেই ছেদ বিন্দুর অবস্থানে মধ্যক চিহ্নিত হবে এবং ছেদ বিন্দুটির মানই হবে মধ্যক।



চিত্র- অজিভের মাধ্যমে মধ্যক নির্ণয়

উদাহরণ ৫

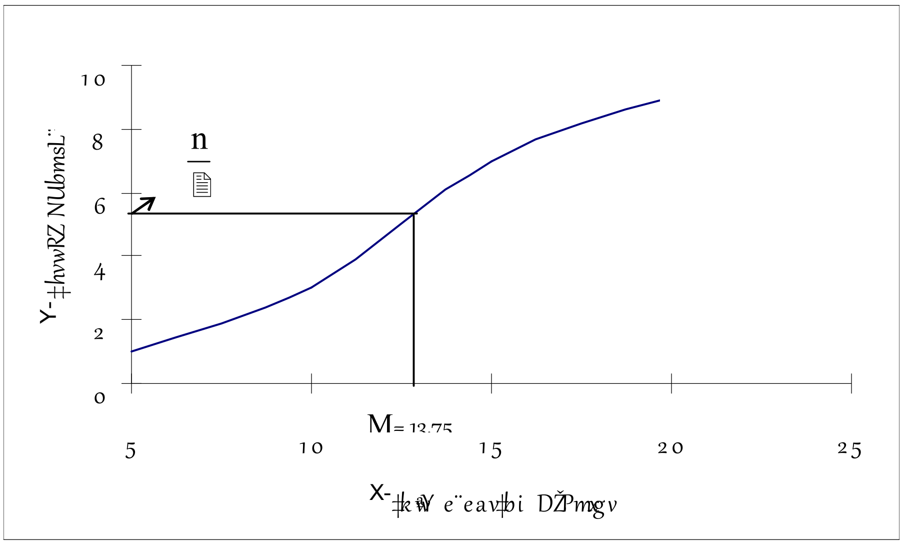
দশজন শ্রমিকের প্রতি ঘন্টার মজুরী নিচের ঘটনসংখ্যা বিন্যাসে দেখানো হলো। অজিভ অংকন করে তার সাহায্যে মধ্যক নির্ণয় করতে হবে।

ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা
০-৫	১
৫-১০	২
১০-১৫	৪
১৫-২০	২
২০-২৫	১
মোট	১০

সমাধান

ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	ঘটনসংখ্যা ভ	যোজিত ঘটনসংখ্যা পভ
০-৫	১	১
৫-১০	২	৩
১০-১৫	৪	৭
১৫-২০	২	৯
২০-২৫	১	১০

এখানে, $\frac{n}{[illegible]}$ [illegible] $= ৫$



চিত্র- অজিভের সাহায্যে মধ্যক নির্ণয়

$\therefore$ মধ্যক, গ = ১৩.৭৫ ।

অনুশীলন (Activity) : নিচের ঘটনসংখ্যা বিন্যাস হতে অজিভ অংকন করে মধ্যক নির্ণয় করুন।

তাপমাত্রা (ডিগ্রি)	দিনের সংখ্যা
১৫-১৯	২০
১৯-২৩	৩১
২৩-২৭	৩৫
২৭-৩১	৪৪
৩১-৩৫	৩৭
৩৫-৩৯	২৯
৩৯-৪৩	২০

মধ্যক এর সুবিধাসমূহ

তথ্যসারিতে বিদ্যমান অস্বাভাবিকভাবে বড় বা ছোট সংখ্যা দ্বারা মধ্যক কম প্রভাবিত হয়।

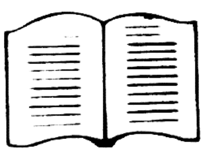
- মধ্যক একটি অবস্থান ভিত্তিক কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক। এটি সহজবোধ্য এবং সাজানো তথ্যসারি থেকে কম সময়ে নির্ণয় করা যায়।
- তথ্যসারিতে বিদ্যমান অস্বাভাবিকভাবে বড় বা ছোট সংখ্যা দ্বারা মধ্যক কম প্রভাবিত হয়।
- সীমাবিহীন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে যেখানে যোজিত গড় নির্ণয় করা যায় না সেক্ষেত্রে মধ্যক নির্ণয় করা সম্ভব। এসব ক্ষেত্রে মধ্যকই কেন্দ্রীয় প্রবণতার যথার্থ পরিমাপক।
- মধ্যক লেখচিত্রের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়।
- মধ্যকর অবস্থান যেহেতু সাজানো তথ্যসারির মাঝখানে, সেহেতু কোন ক্ষেত্রে কেবলমাত্র চোখে দেখেই মধ্যক নির্বাচন করা সম্ভব।

মধ্যক এর অসুবিধাসমূহ

- মধ্যক নির্ণয় করতে হলে প্রথমে রাশিগুলোকে মাননের উর্ধ্ব বা নিম্নক্রম অনুসারে সাজাতে হয়। তথ্যসারিতে অত্যধিক রাশি সংখ্যা থাকলে এ কাজ কষ্টসাধ্য হয়।

কোন বিন্যাসের মধ্যকের মান এবং রাশিগুলোর সংখ্যা জানা থাকলে রাশিগুলোর সমষ্টি নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

- কোন বিন্যাসের মধ্যকের মান এবং রাশিগুলোর সংখ্যা জানা থাকলে রাশিগুলোর সমষ্টি নির্ণয় করা সম্ভব নয়। তবে যোজিত গড়ের ক্ষেত্রে তা সম্ভব।
- মধ্যক যোজিত প্রক্রিয়া প্রয়োগের উপযোগী নয়। তথ্য অনুক্রমের কয়েকটি উপ-অনুক্রম থাকলে তাদের সম্মিলিত গড় নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু সম্মিলিত মধ্যক নির্ণয় করা সম্ভব নয়।
- অনিয়মিত তথ্যসারির ক্ষেত্রে মধ্যক অনেক সময় যথার্থভাবে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসাবে প্রকাশ পায় না। যেমন, পাঁচ ব্যক্তির দৈনিক আয় যথাক্রমে ২০, ২১, ২২, ৯০, ১০০ টাকা। তাদের আয়ের মধ্যক ২২ টাকা। এ ২২ টাকা ২০, ২১ টাকার প্রতিনিধিত্বশীল সংখ্যা হলেও ৯০ ও ১০০ টাকা যথার্থ প্রতিনিধিত্বম লক নয়।



সারমর্ম ঃ মধ্যক কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের একটি প্রধান পরিমাপক। যোজিত গড় ও অন্যান্য গড় যেখানে নির্ণয় করা প্রায় অসম্ভব সেখানে মধ্যক সহজ ও সঠিক ফলাফল দিয়ে থাকে। এছাড়া লৈখিক উপস্থাপনের মাধ্যমও মধ্যক উপস্থাপন করা যায় বলে মধ্যক বোঝা সহজ হয়। সাধারণভাবে কোন কোন সময় শুধুমাত্র সারণিবদ্ধ সংখ্যা দেখেই মধ্যক নির্ণয় করা যায়। মধ্যক নির্ণয়ের একাধিক সুবিধা থাকায় পরিসংখ্যানবিদদের কাছে দিন দিন মধ্যক নিরূপণ জনপ্রিয় হচ্ছে । কেননা শ্রেণিবিহীন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের ক্ষেত্রে মধ্যকের ব্যবহার ফলপ্রসু ফলাফল দিয়ে থাকে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.২

সটিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন।

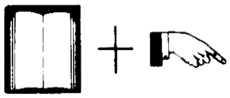
১। নিচের কোন্টি কেন্দ্রীয় প্রবণতার মধ্যককে নির্দেশ করে?
- ক) প্রতীক
- খ) পরিমাপক
- গ) তুলনাকারী অংশ
- ঘ) শতকরা হার

২। বিজোর সংখ্যার ক্ষেত্রে তথ্যমান ক্রম অনুসারে সাজালে মধ্যক এর ক্ষেত্রে কোন্টি সঠিক?
- ক) $\frac{N+\square}{\square}$ তম মানটি
- খ) $\frac{n}{\square}$ তম মানটি
- গ) $\frac{N-\square}{\square}$ তম মানটি
- ঘ) $\frac{n}{\square}$ + ১ তম মানটি

৩। জোড় সংখ্যার ক্ষেত্রে তথ্যমান ক্রম অনুসারে সাজালে মধ্যক এর ক্ষেত্রে কোন্টি সঠিক?
- ক) $\frac{N+\square}{\square}$ তম মানটি
- খ) $\frac{n}{\square}$ তম মানটি
- গ) $\frac{n}{\square}$ এবং $\frac{n}{\square}$ + ১ তম রাশির গড়
- ঘ) $\frac{N+\square}{\square}$ এবং $\frac{N+\square}{\square}$ তম রাশির গড়

৪। মধ্যক কোন্ লেখের সাহায্যে নির্ণয় করা হয়?
- ক) আয়তলেখ
- খ) অজিভ লেখ
- গ) পাই চার্ট
- ঘ) দন্ড চিত্র

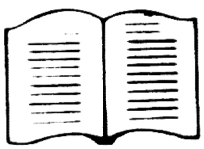
পাঠ ৩.৩ প্রচুরক এবং প্রচুরক নির্ণয়



এ পাঠ শেষে আপনি -

- ■ প্রচুরক কী তা বর্ণনা করতে পারবেন।
- ■ কোন অবিন্যস্ত তথ্য অনুক্রম থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবেন।
- ■ কোন অনিয়মিত শ্রেণিবদ্ধ উপাত্ত থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবেন।
- ■ বিন্যস্ত তথ্য বা ঘটনসংখ্যা বিন্যাস থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবেন।
- ■ লেখচিত্রের মাধ্যমে কোন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের প্রচুরক বের করতে পারবেন।
- ■ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হিসেবে প্রচুরকের সুবিধা-অসুবিধা চিহ্নিত করতে পারবেন।

প্রচুরক



কোন পরিসংখ্যান তথ্যসারিতে যে সংখ্যাটি বা রাশিটি সর্বাধিক পরিলক্ষিত হয় তাকেই ঐ তথ্যরাশির প্রচুরক বলা হয়। মনে করুন, কোন গার্মেন্টস্ কারখানায় ৬, ৭, ৯, ১১ ও ১২ সাইজের শার্ট তৈরি করা হয়। ঐ প্রতিষ্ঠানের কোন একটি বিক্রয় কেন্দ্রের একটি দিনে বিভিন্ন সাইজের শার্টের বিক্রয় নিম্নরূপ-

সাইজ	বিক্রীত শার্টের সংখ্যা
৬	১৫ টি
৭	২৫ টি
৯	৫৫ টি
১১	৩০ টি
১২	২০ টি

উপরের তথ্যে ৯ সাইজের বিক্রীত শার্টের বিক্রয় সর্বাধিক। অর্থাৎ বিক্রিত শার্টের মধ্যে ৫৫টিই ৯ সাইজের শার্ট। অতএব শার্টের মডেল সাইজ হচ্ছে ৯। মডেল সাইজ হচ্ছে সেই সাইজ যে সাইজের চাহিদা সর্বাধিক। অবিন্যস্ত তথ্যসারির প্রচুরক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সারিটিকে মানের ক্রম অনুসারে সাজিয়ে সবচেয়ে বেশিবার সংঘটিত সংখ্যাটি খুঁজে বের করে প্রচুরক নির্ণয় করতে হয়। একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি আরও সহজ করে তুলে ধরা যাক।

উদাহরণ ১

বাংলাদেশ উন্মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের বিএগএড প্রোগ্রামের মৃত্তিকা বিজ্ঞান কোর্স বই এর পরীক্ষায় দশজন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ। এ তথ্য অনুক্রমটির প্রচুরক নির্ণয় করতে হবে।

৭৫, ৬২, ৮০, ৭৭, ৮০, ৮০, ৬৫, ৭৩, ৯০, ৮৫

সমাধান

প্রথমে অনুক্রমটির মানের ন্দিরূপ ক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিন

৬২, ৬৫, ৭৩, ৭৫, ৭৭, ৮০, ৮০, ৮০, ৮৫, ৯০

এখানে দেখা যাচ্ছে যে ৮০ নম্বরটি অনুক্রমে তিনবার এসেছে। অর্থাৎ এ পরীক্ষায় সর্বাধিক ছাত্র ৮০ নম্বর পেয়েছে। অতএব এ অনুক্রমটির প্রচুরক হচ্ছে ৮০।

অনিয়মিত শ্রেণিবদ্ধ উপাত্ত থেকে প্রচুরক নির্ণয়

অনেক সময় পরিসংখ্যান তথ্যসারিতে সংখ্যাগুলোর মধ্যে অনিয়মিত অবস্থান পরিলক্ষিত হয়। অর্থাৎ একাধিক সংখ্যা সমানভাবে বা কম বেশি একই প্রকারে সংঘটিত হয়। সেক্ষেত্রে তাদের কোনটি

প্রচুরক হবে তা নির্ণয় করতে হলে প্রথমে উপাত্তটিকে বিভিন্নভাবে শ্রেণিকৃত করে, বিভিন্ন শ্রেণিকরণে কোন কোন সংখ্যা মোডরূপে পরিগণিত হচ্ছে তা নির্ণয় করতে হয়। এভাবে নির্ণীত প্রচুরক হওয়ার সম্ভাবনা পূর্ণ সংখ্যাগুলোর মধ্যে যেটি বেশি প্রচুরকরূপে গণ্য হয় সেটিকে ঐ উপাত্তের প্রচুরক হিসেবে স্থির করা হয়। উদাহরণ ২ এর মাধ্যমে বিষয়টি আরও সহজভাবে বোঝানো হয়েছে।

উদাহরণ ২

বাংলাদেশ কৃষি গবেষণা ইনষ্টিটিউট এ কর্মরত কিছু সংখ্যক অফিসারের চাকুরীর সময়কাল ও তাদের ঘটনসংখ্যা দেয়া হলো। এ অনিয়মিত শ্রেণিবদ্ধ উপাত্ত থেকে প্রচুরক নির্ণয় করতে হবে।

চাকুরীর সময়কাল X (বৎসর)	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯	১০	১১	১২	১৩
ঘটনসংখ্যা f	৩	৫	৯	১০	১৪	১৫	১২	১০	১২	৮	৩	২

সামাধান

অনিয়মিত শ্রেণিবদ্ধ উপাত্ত থেকে প্রচুরক নির্ণয় ঃ

চাকুরীর সময়কাল (বৎসর)	ঘটনসংখ্যা	পূনঃকৃত শ্রেণিকরণে ঘটনসংখ্যার তারতম্য				
	১	২	৩	৪	৫	৬
২	৩					
৩	৫	৮				
৪	৯		১৪	১৭		
৫	১০	১৯			২৪	৩৩
৬	১৪		২৪	৩৯		
৭	১৫	২৯			৪১	৩৭
৮	১২		২৭	৩৪		
৯	১০	২২			৩০	২৩
১০	১২		২২	১৩		
১১	৮	২০				
১২	৩		১১			
১৩	২	৫				

এ সারণি থেকে কী করে প্রচুরক নির্ণয় করা হলো তার বর্ণনা নিম্নরূপ-

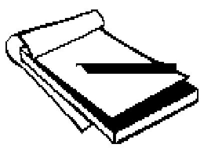
আলোচ্য বিন্যাসে সর্বাধিক ঘটনসংখ্যা ৭ এর বিপরীতে দেখা গেলেও ৬ এর বিপরীতে এবং আবার ৮ ও ১০ এর বিপরীতেও অধিক ঘটনসংখ্যা পরিলক্ষিত হচ্ছে । তাই এটি একটি অনিয়মিত (irregular) বিন্যাসের দৃষ্টান্ত । সুতরাং, এখানে তথ্যসারির কোন সংখ্যামান প্রচুরক হবে তা ঠিক করার জন্য বিন্যাসটির নতুন নতুন শ্রেণিকরণ করে কখন কোন্‌টি প্রচুরক হচ্ছে তা দেখা প্রয়োজন। সেই উদ্দেশ্যে ১ম কলামের দুটি একত্র করে (৩+৫, ৯+১০ ইত্যাদি) একটি শ্রেণি করা হয়েছে। এভাবে ২য় কলামও পূর্ণ করা হয়েছে। ৩য় কলামেও দুটি ঘটনসংখ্যা একত্রিত করে লেখা হয়েছে কিন্তু এক্ষেত্রে ১মটি বাদ দিয়ে ২য়টি থেকে (৫+৯, ১০+১৪ ইত্যাদি) শুরু করা হয়েছে। ৪র্থ কলামে তিনটি ঘটনসংখ্যা একত্রিত করে এক একটি শ্রেণি করা হয়েছে। ৫ম কলামেও তিনটি ঘটনসংখ্যা একত্রিত করে এক একটি শ্রেণি করা হয়েছে কিন্তু এক্ষেত্রে ১মটি বা দিয়ে আরম্ভ করা হয়। ৬ষ্ঠ কলামেও তিনটি ঘটনসংখ্যা একত্রিত করে এক একটি শ্রেণি করা হয়েছে কিন্তু এক্ষেত্রে ১ম ও ২য়টি বাদ দিয়ে শুরু করা হয়েছে।

এখন বিভিন্ন শ্রেণিকৃত অবস্থায় কোন কোন সংখ্যা প্রচুরক হলো তা নির্ধারণ করে তাদের মধ্যে সর্বাধিক যে সংখ্যা প্রচুরক রূপে গণ্য হলো সেটিকেই এ বিন্যাসের প্রকৃত প্রচুরক ধরা হয়েছে। বিষয়টি বিশ্লেষণ তালিকায় দেখানো হলো -

কলামের সংখ্যা	যে যে মানের বিপরীতে সর্বাপেক্ষা বেশি ঘটনসংখ্যা পরিলক্ষিত হলো				
১ম	-	-	৭	-	-
২য়	-	৬	৭	-	-
৩য়	-	-	৭	৮	-
৪র্থ	৫	৬	৭	-	-
৫ম	-	৬	৭	৮	-
৬ষ্ঠ	-	-	৭	৮	৯
কোন মানটি কতবার সংঘটিত হলো	১	৩	৬	৩	১

বিশ্লেষণ তালিকা

বিশে-ষণ তালিকা থেকে সহজেই বোঝা যাচ্ছে যে, ৭ সংখ্যাটি এখানে সর্বাধিকবার সংঘটিত হয়েছে। তাই বলা যায় এ উদাহরণে প্রচুরক হলো ৭।



অনুশীলন (Activity) : *নিচের অনিয়মিত শ্রেণিবদ্ধ উপাত্ত হতে বিশ্লেষণ তালিকার সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করুন।*

গোল সংখ্যা	*খেলার সংখ্যা*
১	১০
২	৮
৩	১২
৪	৬
৫	১২
৬	৭
৭	৪
৮	১

ঘটনসংখ্যা বিন্যাস থেকে প্রচুরক নির্ণয়

কোন বিন্যাসের যে অংশে ঘটনসংখ্যা সর্বাধিক কেন্দ্রীভূত থাকে সেই অংশেই প্রচুরক অবস্থান করে।

কোন ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের প্রচুরক নির্ণয় করতে হলে প্রথমে আপনাকে বিন্যাসটির প্রচুরক শ্রেণি নির্ণয় করতে হবে। কোন বিন্যাসের যে অংশে ঘটনসংখ্যা সর্বাধিক কেন্দ্রীভূত থাকে সেই অংশেই প্রচুরক অবস্থান করে। ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত সূত্রটির ব্যবহার করা হয়।

প্রচুরক = $L + \frac{A_1}{A_1 + A_2} \times C$

যেখানে, L = প্রচুরক শ্রেণির নিম্নসীমা

A_1 = প্রচুরক শ্রেণি এবং প্রচুরকের পূর্ববর্তী শ্রেণির ঘটনসংখ্যার মধ্যে পার্থক্য

A_2 = প্রচুরক শ্রেণি এবং প্রচুরকের পরবর্তী শ্রেণির ঘটনসংখ্যার মধ্যে পার্থক্য

C = প্রচুরক শ্রেণির ব্যাপ্তি

একটি সহজ উদাহরণ দিয়ে জেনে নেই, কী করে ঘটনসংখ্যা বিন্যাস থেকে প্রচুরক নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ ৩

একটি মুরগীর খামারের দশজন শ্রমিকের ঘন্টা প্রতি মজুরীর ঘটনসংখ্যা বিন্যাস নিচে দেয়া হলো। ঘটনসংখ্যা বিন্যাসটির প্রচুরক নির্ণয় করতে হবে।

ঘন্টা প্রতি মজুরী (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা f
০ - ৫	১
৫ - ১০	২
১০ - ১৫	৪
১৫ - ২০	২
২০ - ২৫	১
মোট	১০

সমাধান

বিন্যাসটিতে দেখা যাচ্ছে, ঘন্টা প্রতি ১০ থেকে ১৫ টাকা প্রাপ্ত শ্রমিকের সংখ্যা চার এবং এটিই সর্বাধিক শ্রমিক সংখ্যা। সুতরাং প্রচুরক এ শ্রেণিতেই অবস্থান করছেন। সূত্র অনুসারে,

প্রচুরক = $L+\dfrac{A_1}{A_1+A_2}\times C$

যেখানে, L = ১০

A_1 = ৪ - ২ = ২

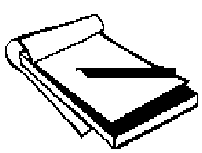
A_2 = ৪ - ২ = ২

C = ১৫ - ১০ = ৫

সুতরাং প্রচুরক = $10+\dfrac{2}{2+2}\times 5$

= ১০ + ২.৫

= ১২.৫ টাকা

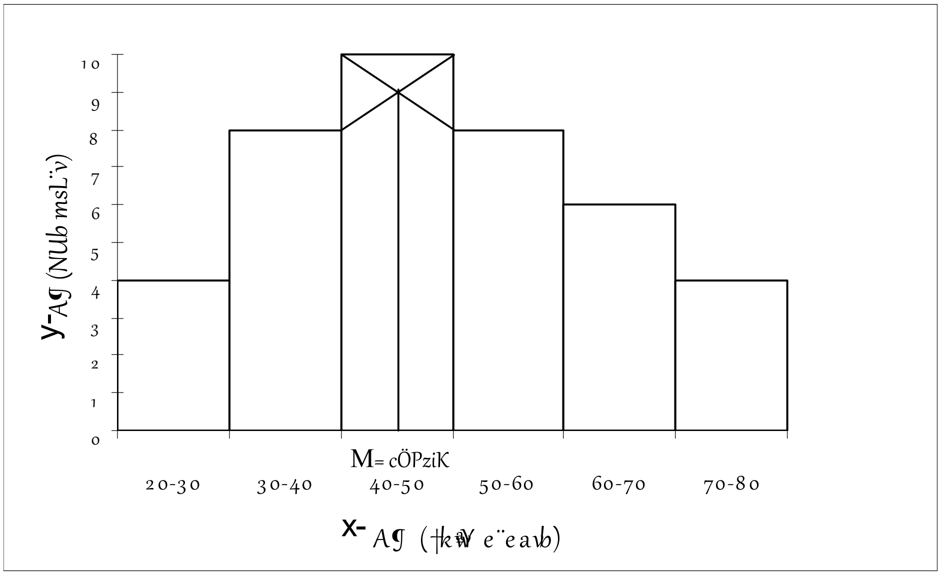


অনুশীলন (Activity): একটি কাল্পনিক বিন্যস্ত উপাত্তের সারণি থেকে সূত্রের সাহায্যে এবং গড় ও মধ্যকের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করে দুটি ফলাফলের ওপর মন্তব্য করুন।

লেখ-চিত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয়

এ প্রক্রিয়ায় প্রচুরক নির্ণয় করতে হলে প্রথমে আপনাকে ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের একটি আয়ত লেখ তৈরি করতে হবে। লেখচিত্রে X- অক্ষের মাধ্যমে শ্রেণির মান এবং Y- অক্ষের সাহায্যে ঘটনসংখ্যার মান দেখাতে হয়। আয়তলেখের সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্র হচ্ছে সর্বাধিক ঘটনসংখ্যার প্রতীক। এ শ্রেণিই হচ্ছে প্রচুরক শ্রেণি। আয়তক্ষেত্রের বিস্তৃতির কোন স্থানে প্রচুরক হবে - তা নির্ভর করে উহার উভয় পাশের দুটির শ্রেণির ঘটনসংখ্যার ওপর। প্রচুরক -এর পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী শ্রেণিদ্বয়ের ঘটনসংখ্যা বিস্তারে অসমতা দূর করার জন্য এ দুটি আয়তক্ষেত্রের দুটি উচ্চসীমা থেকে সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্রের দুটি মাথায় দুটি সরলরেখা অংকন করা হয়, যা পরস্পরকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে। এরপর ছেদ বিন্দু থেকে X- অক্ষের ওপর একটি লম্ব অংকন করা হয়। এখন যে বিন্দুতে লম্বটি X- অক্ষকে ছেদ করে সেই বিন্দুর সংখ্যামানই হলো ঐ শ্রেণিবিন্যাসের প্রচুরক।

বিষয়টি চিত্রের সাহায্যে দেখানো হলো-



চিত্র - আয়তক্ষেত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয়

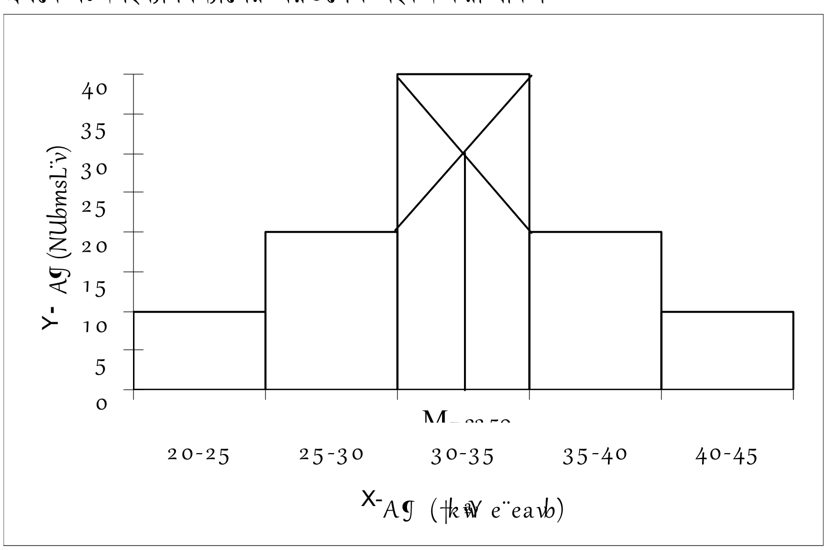
উদাহরণ ৪

নিচে বয়স অনুসারে কোন কারখানার শ্রমিকদের একটি বিন্যাস দেয়া হলো। ঘটনসংখ্যা বিন্যাসটির প্রচুরক লেখ -এর মাধ্যমে নির্ণয় করতে হবে।

বয়স (বৎসর)	শ্রমিকের সংখ্যা
২০ - ২৫	১০
২৫ - ৩০	২০
৩০ - ৩৫	৪০
৩৫ - ৪০	২০
৪০ - ৪৫	১০

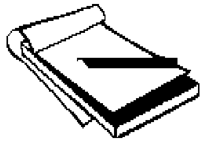
সমাধান

প্রথমে ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের অয়তলেখ অংকন করা যাক।



চিত্র- আয়তলেখের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয়

সুতরাং বলা যায়, এ ঘটনসংখ্যা বিন্যাসের প্রচুরক, $M =$ ৩২.৫০ বৎসর।



অনুশীলন (Activity): *নিচের ঘটনসংখ্যা বিন্যাস হতে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করুন।*

বিক্রয় (হাজার টাকা)	*দিনের সংখ্যা*
১০ - ২০	*২*
২০ - ৩০	*৪*
৩০ - ৪০	*৭*
৪০ - ৫০	*৫*
৫০ - ৬০	*২*

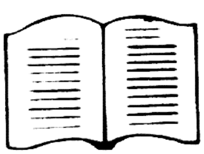
প্রচুরকের সুবিধা

কোন অনুক্রমের প্রচুরক ঐ অনুক্রমের সর্বাধিক সংঘটিত রাশি। তাই এটি নির্ণয় সহজ এবং সহজে বুজতে পারা

- কোন অনুক্রমের প্রচুরক ঐ অনুক্রমের সর্বাধিক সংঘটিত রাশি। তাই এটি নির্ণয় সহজ এবং সহজে বুজতে পারা যায়।
- লেখচিত্রের মাধ্যমে এর অবস্থান নিরূপণ করা যায়।
- যে ঘটনসংখ্যা বিন্যাসে সীমাহীন শ্রেণিব্যাপ্তি থাকে সেক্ষেত্রে যোজিত গড় নির্ণয় সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে প্রচুরক নির্ণয়ে কোন অসুবিধা হয় না।
- গুণবাচক বৈশিষ্ট্যের বর্ণনা দিতে প্রচুরকের সহজ ব্যবহার করা যায়। যেমন- কোন কোম্পানির উৎপাদিত দ্রব্যে ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্যের সংখ্যা কতটা বেশি তা সহজে ধরা যায়।
- বাণিজ্যিক সিদ্ধান্ত গ্রহণে প্রচুরক একটি বহুল প্রচলিত গড়। যেমন, একই প্রকৃতির শাড়ীর মধ্যে কোন কোম্পানির শাড়ী দৈনিক বেশি বিক্রয় হয় তা সহজেই প্রচুরকের মাধ্যমে চিহ্নিত করা যায়। একইভাবে বাজারে যে সাইজের জুতা বেশি চলে তা সহজেই নির্ণয় করা যায়। সে চিহ্নিত সাইজটিই হচ্ছে মডেল সাইজ।

প্রচুরকের অসুবিধা

- কোন অনুক্রমে সর্বাধিক সংঘটিত রাশির সংখ্যা দুই বা তার অধিক হলে প্রচুরক নির্ণয় করা সম্ভব হয় না।
- প্রচুরক নির্ণয় শ্রম সাপেক্ষ কারণ এতে তথ্যের সুশৃংখল বিন্যাস, শ্রেণিবদ্ধকরণ এবং অনেক ক্ষেত্রে পুনঃশ্রেণীবদ্ধকরণের দরকার হয়।
- প্রচুরক বীজযোজিত পরিগণনার উপযোগী নয়। যেমন, দুই বা ততোধিক সংখ্যক তথ্যসারির প্রচুরক জানা থাকলেও সম্মিলিত তথ্যসারির প্রচুরক নির্ণয় করা যায় না।
- নির্ণয় প্রক্রিয়া প্রচুরক মানের ওপর প্রভাব বিস্তার করে। যেমন, শ্রেণিবদ্ধকরণের প্রকৃতির ওপর প্রচুরকের মানের প্রভাব থাকে।



সারমর্ম ঃ প্রচুরক কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের একটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপক। মধ্যকের মত প্রচুরককেও লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা সহজ। সীমাহীন শ্রেণিব্যাপ্তি সম্বলিত ঘটনসংখ্যার ক্ষেত্রে যোজিত গড় নির্ণয় সম্ভব নয়। কিন্তু এক্ষেত্রে একজন পরিসংখ্যানবিদকে প্রচুরক সাহায্য করে থাকে। গুণবাচক বৈশিষ্ট্যের ক্ষেত্রেও প্রচুরকের ব্যবহার রয়েছে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৩

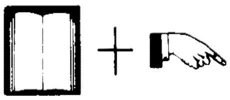
সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন

১। তথ্য সারির কোন্ মানটিকে প্রচুরক বলা হয়?
- ক) সর্বনিম্ন মানটি
- খ) সর্বাধিক পরিলক্ষিত মানটি
- গ) সর্বোচ্চ মানটি
- ঘ) মধ্য মানটি

২। ঘটনসংখ্যা বিন্যাস থেকে প্রচুরক নির্ণয় সূত্র কোন্‌টি?
- ক) প্রচুরক $= L + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}$
- খ) প্রচুরক $= L + \dfrac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times C$
- গ) প্রচুরক $= L + \dfrac{\frac{N}{2} + f_e}{f_m} \times C$
- ঘ) প্রচুরক $= L + \dfrac{\frac{N}{3} + f_e}{f_m} \times C$

৩। কোন্ লেখের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করা হয়?
- ক) আয়ত লেখ
- খ) অজিভ লেখ
- গ) দন্ড চিত্র
- ঘ) পাই চিত্র

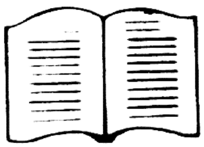
পাঠ ৩.৪ গড়, মধ্যক ও প্রচুরকের তুলনা



এ পাঠ শেষে আপনি -

- বিভিন্ন ধরনের গড় (যথা- যোজিত গড়, গুণিতক গড়, উল্টন গড়), মধ্যক ও প্রচুরকের মধ্যে মিল ও অমিলসম হ চিহ্নিত করতে পারবেন।
- গড়, মধ্যক ও প্রচুরকের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করতে পারবেন।

গড়, মধ্যক ও প্রচুরকের তুলনা



ঈর্ববর্তী পাঠে আমরা যোজিত গড়, গুণিতক গড়, উল্টন গড়, মধ্যক ও প্রচুরক সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছি। ওসব পাঠে বিভিন্ন ধরনের গড়, মধ্যক ও প্রচুরক বলতে কী বোঝায়, কীভাবে এসব কেন্দ্রীয় প্রবণতা বের করা হয়, ব্যবহারিক ক্ষেত্রে এদের প্রয়োগ, এদের প্রতিটি পরিমাপকের সুবিধা ও অসুবিধা

প্রভৃতি আলাদাভাবে অত্যন্ত সহজভাবে বর্ণনা করা হয়েছে। এ পাঠে আমরা কেন্দ্রীয় প্রবণতার উল্লিখিত পরিমাপকের মধ্যকার সাদৃশ্য ও বৈসাদৃশ্যসমূহ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করবো। নিচে যোজিত গড়, গুণিতক গড়, উল্টন গড়, মধ্যক এবং প্রচুরকের মধ্যকার মিল ও অমিলসমূহ একটি তালিকায় উপস্থাপন করা হলো-

তুলনার ভিত্তি	যোজিত গড়	গুণিতক গড়	উল্টন গড়	মধ্যক	প্রচুরক
১। সংজ্ঞা	কোন তথ্যসারির আওতাভুক্ত সংখ্যাগুলোর যোগফলকে ঐ তথ্যের মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগফল পাওয়া যায় তাকে যোজিত গড় বলে।	কোন সিরিজের n সংখ্যক অশূন্য ধনাত্মক রমিগুলোর গুণফলের n তম মূলকে গুণিতক গড় বলে।	অশূন্য কোন সিরিজের উল্টন সংখ্যাগুলোর যোজিত গড়ের উল্টনকে উল্টন গড় বলে।	কোন সিরিজের মানসমূহ ছোট থেকে বড় অথবা বড় থেকে ছোট আকারে সাজানোর পর ঠিক মধ্যকটিই মধ্যক।	তথ্যমালার মধ্যে অবস্থিত যে তথমানের ঘটনসংখ্যা সর্বাধিক সেটিই প্রচুরক।
২। নির্ণয় পদ্ধতি	সহজ	তত সহজ নয়	তত সহজ নয়	সহজ	সহজ, খুব তাড়াতাড়ি নির্ণয় সম্ভব।
৩। খোলা শ্রেণি ব্যপ্তির ওপর মানের তারতম্য নির্ণয়	খোলা শ্রেণি ব্যাপ্তি না হলে সকল ক্ষেত্রে গড় নির্ণয় সম্ভব।	খোলা শ্রেণি ব্যাপ্তি, মূন্য ও ঋণাত্মক মানের জন্য এ গড় নির্ণয় সম্ভব নয়।	খোলা শ্রেণি ব্যাপ্তি, শূন্য মানের জন্য এ গড় নির্ণয় সম্ভব নয়।	মধ্যক শ্রেণি ব্যাপ্তি খোলা না হলে এ গড় নির্ণয় সম্ভব।	ব্যাপ্তি খোলা না হলে এ গড় নির্ণয় সম্ভব।
৪। পরবর্তী বীজগণিতিক পরিগণনার ক্ষেত্র নির্ণয়	সম্ভব।	সম্ভব।	সম্ভব নয়।	সম্ভব নয়।	সম্ভব নয়।

তুলনার ভিত্তি	যোজিত গড়	গুণিতক গড়	উল্টন গড়	মধ্যক	প্রচুরক
৫। গুণগত বৈশিষ্ট্যের ক্ষেত্রে নির্ণয়	সম্ভব নয়।	সম্ভব নয়।	সম্ভব নয়।	সম্ভব।	সম্ভব।
৬। ছোট মানের ক্ষেত্রে প্রভাবিত	প্রভাবিত।	প্রভাবিত নয়।	ছোট মান অধিক গুরুত্ব বহন করে।	প্রবাবিত নয়।	প্রভাবিত নয়।
৭। সকল মানের ক্ষেত্রে বিবেচনা	সকল মান বিবেচনা করা হয়।	সকল মান বিবেচনা করা হয়।	সকল মান বিবেচনা করা হয়।	শুধুমাত্র মধ্যক বিবেচনা করা হয়।	সকল মান বিবেচনা না করে যে মানের ঘটনসংখ্যা বেশি তা বিবেচনা করা হয়।
৮। নমুনার তারতম্য	অতি সমান্য।	অতি সমামান্য।	অতিসামান্য ।	বেশি।	বেশি।
৯। চিত্রের সাহায্যে নির্ণয়	নির্ণয় করা যায় না।	নির্ণয় করা যায় না।	নির্ণয় করা যায় না।	নির্ণয় করা যায়।	নির্ণয় করা যায়।

যোজিত গড়, গুণিতক গড় ও উল্টন গড়ের মধ্যে সম্পর্ক

যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং উল্টন গড়কে যথাক্রমে A, G, H প্রতীক চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করলে এদের মধ্যে সম্পর্ক হবে $A \geq G \geq H$.

একই পরিসংখ্যান তথ্যসারি থেকে নির্ণীত কেন্দ্রীয় প্রবণতার বিভিন্ন পরিমাপকসম হের মধ্যে এক প্রকার যোজিত সম্পর্ক বিদ্যমান রয়েছে। একই তথ্যসারির সংখ্যামান প্রতিটি যদি সমান হয়, তবে সেই তথ্যসারির যোজিত গড়, গুণিতক গড় ও উল্টানো গড় সমান হবে। তথ্যসারির রাশিগুলো ভিন্ন ভিন্ন মানের হলে যোজিত গড়, গুণিতক গড় অপেক্ষা বড় এবং যোজিত গড় উল্টন গড় অপেক্ষা বড় হবে। যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং উল্টন গড়কে যথাক্রমে A, G, H প্রতীক চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করলে এদের মধ্যে সম্পর্ক হবে $A \geq G \geq H$.

এখন আসুন দেখা যাক এ যে আমরা বলছি, তথ্যসারির রাশিগুলোর মান ভিন্ন হলে যোজিত গড়, গুণিতক গড় ও উল্টন গড়ের মধ্যে সম্পর্ক হবে $A \geq G \geq H$. -এ স ত্রটি প্রমাণ করি। উদাহরণ-৫ এ সূত্রটির প্রমাণ দেয়া হলো।

উদাহরণ ১

একশত ছাত্রের নম্বর নিচের ঘটনসংখ্যা বিন্যাসে প্রদর্শিত হলো। বিন্যাসটির যোজিত গড়, গুণিতক গড় এবং উল্টন গড় নির্ণয় করুন এবং তাদের মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্ক দেখান।

নম্বর	ছাত্রের সংখ্যা
৪০ - ৫০	১০
৫০ - ৬০	২০
৬০ - ৭০	৪০
৭০ - ৮০	২০
৮০ - ৯০	১০

সমাধান

যোজিত গড় নির্ণয়

নম্বর	ঘটনসংখ্যা f	মধ্যক X	fX
৪০ - ৫০	১০	৪৫	৪৫০
৫০ - ৬০	২০	৫৫	১১০০
৬০ - ৭০	৪০	৬৫	২৬০০
৭০ - ৮০	২০	৭৫	১৫০০
৮০ - ৯০	১০	৮৫	৮৫০
	$\sum f$ = ১০০		$\sum f$X = ৬৫০০

n = $\sum f$ = ১০০

$\sum f$X = ৬৫০০

যোজিত গড়, $A = \frac{\sum fx}{n} = \frac{6500}{100} = 65$

গুণিতক গড় নির্ণয় -

নম্বর	ঘটনসংখ্যা f	মধ্যক X	logX	$f$logX
৪০ - ৫০	১০	৪৫	১.৬৫৩২	১.৬৫৩২
৫০ - ৬০	২০	৫৫	১.৭৪০৪	৩৪.৮০৮
৬০ - ৭০	৪০	৬৫	১.৮১২৯	৭২.৫১৬
৭০ - ৮০	২০	৭৫	১.৮৭৫১	৩৭.৫০২
৮০ - ৯০	১০	৮৫	১.৯২৯৪	১৯.২৯৪
	$\sum f$ = ১০০			১৮০.৬৫২

$\therefore \sum f$ logX = ১৮০.৬৫২

$$G = \text{Anti}\log\left[\frac{\sum \log x}{n}\right]$$

$$= \text{Anti}\log\frac{80.652}{10} = \text{Anti}\log(1.80652) = 64.05$$

$\therefore$ গুণিতক গড় = ৬৪.০৫

উল্টন গড় নির্ণয় -

নম্বর	ঘটনসংখ্যা f	মধ্যকন X	$\frac{1}{x}$	$\frac{f}{x}$
৪০ - ৫০	১০	৪৫	০.০২২২	০.২২২০
৫০ - ৬০	২০	৫৫	০.০১৮২	০.৩৬৪০
৬০ - ৭০	৪০	৬৫	০.০১৫৪	০.৬১৬০
৭০ - ৮০	২০	৭৫	০.০১৩৩	০.২৬৬০
৮০ - ৯০	১০	৮৫	০.০১১৮	০.১১৮০
	১০০			১.৫৮০৬

$$\therefore \sum \frac{f}{x} = ১.৫৮৬০$$

$$H = \frac{n}{\sum\limits_{i=}^{n} \frac{}{x_i}} =$$

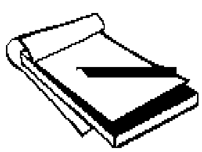
$\therefore$ উল্টন গড় = ৬৩.০৫

সুতরাং, যোজিত গড় = ৬৫

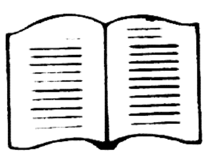
গুণিতক গড় = ৬৪.০৫

উল্টন গড় = ৬৩.০৫

সুতরাং, এখন আপনি প্রমাণস্বরূপ বলতে পারেন, $A \geq G \geq H$



অনুশীলন (Activity) : *প্রথম ১৫টি ক্রমিক সংখ্যার যোজিত গড়, গুণিতক গড় ও উল্টন গড় নির্ণয় করুন এবং ফলাফলের ওপর আপনার মতামত লিখুন।*



সারমর্ম ঃ যোজিত গড়, গুণিতক গড়, উল্টন গড়, মধ্যক ও প্রচুরক এর মধ্যে কিছু কিছু ক্ষেত্রে মিল আবার অমিলও রয়েছে। কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের যে তিনটি অতীব প্রয়োজনীয় গড় আছে এদের মধ্যে যোজিত গড় (A), গুণিতক গড় (G), এবং উল্টন গড় (H) প্রধান। এ গড় তিনটির মধ্যে সম্পর্ককে $A \geq G \geq H$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। প্রতিটি গড়ই কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপককে বহুলভাবে সাহায্য করে বলে, বিবিধ পরিমাপকে এদের বহুল ব্যবহার হয়ে থাকে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৪

সঠিক উত্তরের পাশে টিক চিহ্ন (√) দিন

১। কোন্‌টি উল্টন গড় নির্ণয়ের সমীকরণ নির্দেশ করে?

ক) $H = \frac{1}{n}\sum f_i x_i$

খ) $H = \text{Anti}\log\left[\sum f_i \log x_i\right] / n$

গ) $H = \frac{1}{\sum f_i / x_i}$

ঘ) $H = \sum f_i \frac{1}{\sum x_i}$

২। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপকের কোন্‌টি চিত্রের (গ্রাফের) সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব?

ক) যোজিত গড়
খ) উল্টন গড়
গ) প্রচুরক
ঘ) গুণিতক গড়

৩। যোজিত গড়, গুণিতক গড় ও উল্টন গড়ের মধ্যকার সম্পর্ক প্রকাশ করে কোন্‌টি?

ক) $A \geq G \geq H$
খ) $A \leq G \leq H$
গ) $A \geq G \leq H$
ঘ) $A \geq H \geq G$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন - ইউনিট ৩

সংক্ষিপ্ত ও রচনামূলক প্রশ্নাবলী

১। কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলতে কী বুঝায়। আদর্শ কেন্দ্রীয় প্রবণতার বৈশিষ্ট্যগুলো বর্ণনা করুন।

২। যোজিত গড়ের সংজ্ঞা লিখুন। যোজিত গড়ের মান স্কেল ও অরিজিন পরিবর্তন করলে প্রভাবিত হয়, প্রমাণ করুন।

৩। গুণিতক গড়, উল্টন গড়ের সংজ্ঞা লিখুন। এদের সুবিধা ও অসুবিধাগুলো লিখুন।

৪। যোজিত গড়, গুণিতক গড়, উল্টন গড়, মধ্যক ও প্রচুরকের তুলনামূলক আলোচনা করুন।

৫। মধ্যকের সংজ্ঞা লিখুন। আয়তক্ষেত্রের সাহায্যে কীভাবে মধ্যক নির্ণয় করা যায় লিখুন।

৬। প্রচুরকের সংজ্ঞা লিখুন। অজিভ রেখা হতে কীভাবে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় আলোচনা করুন।

৭। প্রচুরক কাকে বলে? প্রচুরক এবং মধ্যকর মধ্যে পার্থক্য কী? প্রচুরক কোথায় কোথায় ব্যবহৃত হয়?

৮। দ্বি প্রচুরক ও বহু প্রচুরক সমস্যাটি কী ব্যাখ্যা করুন।

৯। প্রমাণ করুন : $AM \geq GM \geq HM$

যেখানে, $AM =$ যোজিত গড়

$GM =$ গুণিতক গড়

$HM =$ উল্টন গড়

১০। একটি অনিয়মিত শ্রেণিবদ্ধ উপাত্ত থেকে বিশ্লেষণের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় করুন।

অনিয়মিত শ্রেণি

বয়স X	৮	১০	১২	১৩	১৬	১৭	১৯	২০	২২
ঘটনসংখ্যা f	৪	৬	১০	১৪	১১	১২	১১	১০	১১

উত্তরমালা - ইউনিট ৩

পাঠ ৩.১

১। ক ২। খ ৩। গ ৪। খ

পাঠ ৩.২

১। খ ২। খ ৩। গ ৪। খ

পাঠ ৩.৩

১। খ ২। খ ৩। ক

পাঠ ৩.৪

১। গ ২। গ ৩। ক