ইউনিট ৫

সংশ্লেষণ ও নির্ভরণ

ভূমিকা

পূর্ব ইউনিটগুলোকে একটি মাত্র চলকের ক্ষেত্রে বিভিন্ন ধরনের পরিমাপ পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করেছি। যেমন, কোন কারখানায় আয়, ব্যয়, শ্রমিকের বেতন ইত্যাদি একক বৈশিষ্ট্যের উপর ভিত্তি করে তথ্য সংগ্রহ করেছি এবং পাশাপাশি বিভিন্ন পরিমাপ পদ্ধতি ও আলোচনা করেছি। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে দুই বা ততোধিক চলক নিয়ে বিশ্লেষণ বা সিদ্ধান্ত হয়। যেমন, কোন কারখানায় পুঁজি বিনিয়োগ করে মুনাফা করা হয়। এখানে মুনাফা ও পুঁজি দুইটি চলক। আবার মুনাফা ও পুঁজি চলক দুইটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত। তাই বাস্তব ক্ষেত্রে তথ্যের প্রকৃতি, সম্পর্ক ইত্যাদির পরিমাপ প্রয়োজন হয়। সম্পর্কযুক্ত চলকের ক্ষেত্রে পরিমাপ পদ্ধতি বর্তমান ইউনিটে আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি বলতে পারবেন–

☞ সংশ্লেষণের সংজ্ঞা;
☞ সংশ্লেষণের প্রকারভেদ;
☞ সংশ্লেষণের পরিমাপ পদ্ধতি;
☞ নির্ভরণ এর সংজ্ঞা;
☞ নির্ভরণের প্রকারভেদ;
☞ নির্ভরণ পরিমাপ পদ্ধতি।

পাঠ-৫.১ সংশ্লেষণ পদ্ধতি ও সংশ্লেষণের পরিমাপ

ভূমিকা

সংশ্লেষণ বলতে দুইটি চলকের মধ্যে সম্পর্কের মাত্রাকে বুঝায়। কোন কোন ক্ষেত্রে তথ্যসমূহের বৈশিষ্ট্যকে দুই বা ততোধিক সম্পর্কযুক্ত তথ্যমালার দ্বারা পরিমাপ করা হয় তাই এ সম্পর্কযুক্ত তথ্যমালার, প্রকৃতি, বৈশিষ্ট্যের ডিগ্রী পরিমাপের জন্য বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন–

- ☞ সংশেষণের সংজ্ঞা;
- ☞ বিভিন্ন ধরনের সংশ্লেষণ;
- ☞ সংশ্লেষণের ধর্ম ও ব্যবহার;
- ☞ বিক্ষেপ চিত্রের সংজ্ঞা।

সংশ্লেষণ: সাধারণত দুইটি চলকের মধ্যে একটি চলকের মানের পরিবর্তনের জন্য অন্য চলকের মানের পরিবর্তন হয় অথবা হয় না। অর্থাৎ এ ক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি, চলক দুটির মানের পরিবর্তন হলে তাদের মধ্যে সম্পর্ক রয়েছে। যদি মানের পরিবর্তন না হয় তবে আমরা বলতে পারি তাদের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই। এ বিষয়গুলোকে সংজ্ঞায়িত করলে আমরা সংশ্লেষণের ধারণা পাব।

সংশ্লেষণ: দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে পারস্পরিক সম্পর্ক বিদ্যমান থাকে তাকে সংশ্লেষণ বলে। যেমন, বাজারে কোন জিনিসের সরবরাহ বেড়ে গেলে দাম কমে যায় আবার বিপরীত দিকে সরবরাহ কমে গেলে দাম রেড়ে যায় অর্থাৎ চলক সরবরাহের উপর দাম বাড়ে বা কমে। এ সম্পর্ককে সংশ্লেষণ বলে।

সংশ্লেষণ প্রধানত দুই প্রকার-

১। ধনাত্মক সংশ্লেষণ (Positive correlation)

২। ঋণাত্মক সংশ্লেষণ (Negative correlation)

১। ধণাত্মক সংশ্লেষণ: যদি দুইটি চলকের মধ্যে সম্পর্ক এরূপ হয় যে একটি পরিবর্তন হলে অর্থাৎ মান বাড়লে অন্য চলকটির মান বাড়তে থাকে আবার অন্যদিকে একটি চলকের মান হ্রাস পেলে অন্য চলকটির মানও হ্রাস পায় এরূপ চলককে ধণাত্মক সংশ্লেষণ বলে। যেমন, কোন ব্যবসায় অধিক পুঁজি বিনিয়োগ করলে লাভ বেশী হয়। পুজি ও মুনাফা চলকের সম্পর্কটি একটি ধনাত্মক সংশ্লেষণ।

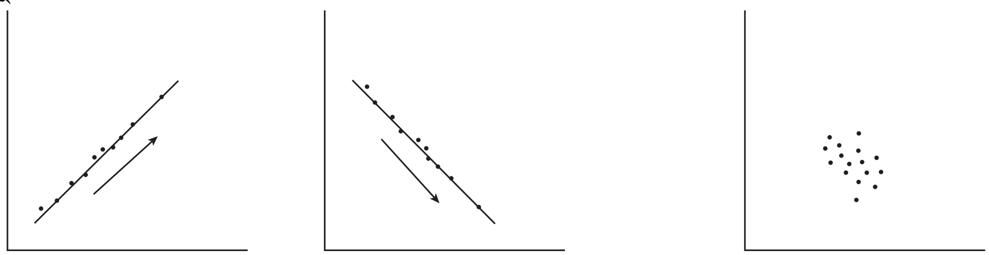
২। ঋণাত্মক সংশ্লেষণ: যদি দুইটি চলকের মধ্যে একটি চলকের মান এরূপ পরিবর্তন হয় যেন একটি চলকের মান বৃদ্ধি পেলে অন্য চলকের মান হ্রাস পায় অথবা একটির মান হ্রাস পেলে অন্যটির মান বৃদ্ধি পায় তাকে ঋণাত্মক সংশ্লেষণ বলে। উদাহরণস্বরূপ-

কৃষিক্ষেত্রে ধানের বৃদ্ধির জন্য সার প্রয়োগে ধানের উৎপাদন বৃদ্ধি পাওয়ার কথা, কিন্তু অতিরিক্ত সার প্রয়োগে উৎপাদন কমে যায়। এরূপ ক্ষেত্রে সার ও ধানের সম্পর্ককে ঋণাত্মক সংশ্লেষণ বলে।

বিক্ষেপ চিত্র: দু'টি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ককে লেখের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় বিক্ষেপ চিত্রের মাধ্যমে দ্বিচলক বিশিষ্ট তথ্যকে লেখ এর মাধ্যমে উপস্থাপন করকে বলা হয় বিক্ষেপচিত্র। বিক্ষেপচিত্রের মাধ্যমে সংশ্লেষ সম্পর্কে নিম্নলিখিত মন্তব্য করা হয়।

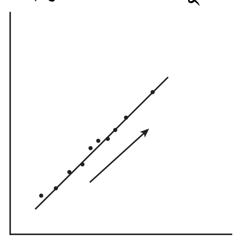
১। বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলি যদি উর্দ্ধগামী বা নিম্নগামী হয় তাহলে চলকদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্ক আছে বলে প্রতিয়মান হয় এবং যদি বিন্দুগুলির বিশেষ কোন গতিপথ না থাকে তবে চলক দ্বয়ের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।

চিত্র দেখুন:



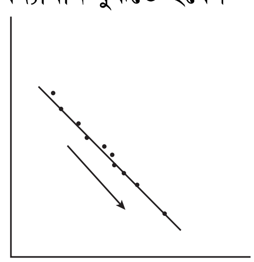
চিত্রঃ উর্ধ্বমূখী চিত্রঃ নিম্নমূখী চিত্রঃ কোন সম্পর্ক নেই

২। যদি চলকদ্বয়ের অবস্থানের গতি উর্ধ্বগামী হয় অর্থাৎ চিত্রের বাম দিকে নিচ হতে বিন্দুগলি উপরের দিকে উঠতে থাকে তখন চলকদ্বয়ের মধ্যে ধনাত্মক সংশ্লেষ বিদ্যমান বুঝতে হবে। চিত্র দেখুন:



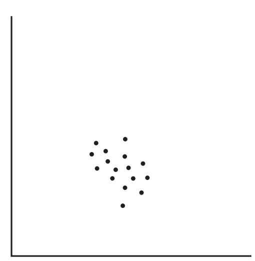
চিত্রঃ উর্ধ্বমূখী

৩। যদি চলক দ্বয়ের অবস্থানের গতি নিম্নমুখী হয় অর্থাৎ চিত্রের বাম দিকে উপর থেকে নিচে বিন্দুগলি নামতে থাকে তখন তাদের মধ্যে ঋনাত্মক সংশ্লেষ বিদ্যামান বুঝতে হবে।



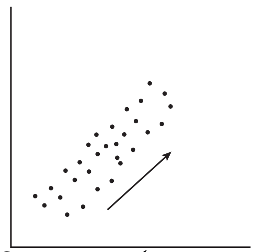
চিত্রঃ নিম্নমূখী

৪। যদি চলকদ্বয়ের মধ্যে কোন সম্পর্ক না থাকে তবে বিন্দুগলি বিক্ষিপ্তভাবে লেখ কাগজে অবস্থান করবে।
চিত্র দেখুন:



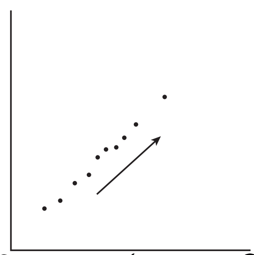
চিত্র ঃ কোনটাই নেই।

৫। বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলির বিস্তৃতি খুব কম হলে বুঝতে হবে চলকদ্বয়ের সংশ্লেষের মাত্রা খুব কম। চিত্রে দেখুন:



চিত্র ঃ সম্পর্কের মাত্রা কম

যদি চলকদ্বয়ের মধ্য সম্পর্কের মাত্রা খুব বেশী হয় তবে বিন্দু গুলির অবস্থান খুবই কাছাকাছি হবে। চিত্র দেখুন:



চিত্রঃ সম্পর্কের মাত্রা বেশী

শূণ্য সংশ্লেষ: যদি দুইটি চলকের মধ্যে কোন একটি পরিবর্তন হলে অন্যটির কোন পরিবর্তন হয় না অর্থাৎ উহাদের মধ্যে কোন সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় না তখন সেই চলকের সম্পর্ককে শুন্য সংশ্লেষ বলে।

সারসংক্ষেপ

কোন সমগ্রকের দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় তা হল সংশ্লেষণ। সংশ্লেষণ দুই ধরণের ১। ধনাত্মক সংশ্লেষণ ২। ঋনাত্মক সংশ্লেষণ। বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে দুইটি চলকের মধ্যকার পারস্পরিক সম্পর্ক প্রকাশ করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন: ৫.১

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। দুইটি চলকের মধ্য সম্পর্কের মাত্রাকে বলে

ক. ভেদাঙ্ক খ. সংশ্লেষণ

গ. সম্পর্ক বিশ্লেষন ঘ. বিভেদাঙ্ক

২। একটি চলকের মানের বৃদ্ধিতে যদি অপর চলকের মান বৃদ্ধি পায় তবে তাকে বলা হয়

ক. শুন্য সংশ্লেষণ খ. ঋনাত্মক সংশ্লেষণ

গ. ধনাত্মক সংশ্লেষণ ঘ. আংশিক সংশ্লেষণ

৩। যদি দুটি চলকের মধ্যে সম্পর্কের মাত্রা খুব বেশী হয় তবে বিন্দু গুলি অবস্থা হবে
ক. কাছাকাছি খ. দূরে
গ. খুব দূরে ঘ. অরৈখিক

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়

৪। বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে দুটি চলকের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক প্রকাশ করা যায়।

৫। দুইটি চলকের মধ্যে সম্পর্ক না থাকলে তাকে শুন্য সম্পর্ক বলা হয়।

শুন্যস্থান পূরণঃ

৬। কোন সমগ্রকের দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যে যে সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয় তাকে বলা হয় ____________।

৭। যদি চলক দ্বয়ের গতি নিম্নগামী হয় তখন সেই সম্পর্কে ________ বলে।

বাক্য/শব্দ মিলানো

৮। দুইটি চলকের মধ্য পারস্পরিক	ক) গামী হলে তাদের ভিতর সম্পর্ক আছে
৯। বিক্ষেপ চিত্রের বিন্দুগুলি উর্ধ্ব	খ) সম্পর্ককে লেখের মাধ্যমে দেখানো যায়

পাঠ-৫.২ সংশ্লেষণের পরিমাপ পদ্ধতি (Measures of Correlation)

ভূমিকা

পূর্ব পাঠ থেকে আমরা জেনেছি সংশ্লেষণ হল দুটি চলকের মধ্যে সম্পর্কের মাত্রা। সম্পর্কের মাত্রার প্রকৃতি, ধরণ কেমন হবে সে সম্পর্কে বলা হয়েছে। সম্পর্কের মাত্রাকে গাণিতিকভাবে নির্ণয় করতে পারলে সম্পর্ককে আরও বিশ্লেষণ ধর্মী করা সম্ভব। বর্তমান পাঠে সংশ্লেষণের মাত্রাকে গাণিতিকভাবে নির্ণয় করার পদ্ধতি, ধর্ম, ব্যবহার ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন–

- ☞ সংশ্লেষণের মাত্রার পরিমাপ পদ্ধতি;
- ☞ সংশ্লেষাংকের সংজ্ঞা;
- ☞ সংশ্লেষাঙ্কের ধর্ম;
- ☞ সংশ্লেষাঙ্কের ব্যবহার;
- ☞ সম্ভাব্য বিচ্যুতির সংজ্ঞা ইত্যাদি।

সংশ্লেষাঙ্ক (Co-efficient of Co-rrelation)

সংশ্লেষণের মাত্রা বলতে দু'টি চলকের মধ্যে সম্পর্কের পরিমানকে বুঝায় অর্থাৎ মূলধনের বৃদ্ধিতে আয়ের বৃদ্ধির একটি ধণাত্মক সম্পর্ক রয়েছে আবার দাম বৃদ্ধির সাথে দ্রব্যর বিক্রয় কমার একটা সম্পর্ক বা ঋণাত্মক সম্পর্ক রয়েছে।

এ সম্পর্ক গাণিতিক পরিমাপের জন্য Karl Pearson সর্বপ্রথম একটা সুত্র আবিস্কার করেছেন যা Karl Pearson এর সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় সূত্র নামে পরিচিতি।

সূত্রটি নিম্নরূপ:

যদি $(x_i;y_i);i=1,2, \ldots\ldots\ldots n$ দুইটি পরস্পর সম্পর্কযুক্ত n জোড়া চলক হয়; তাহলে

$$\text{সংশ্লেষাঙ্ক, } r = \sqrt{\frac{\text{চলক দুইটির গুনফলের সমষ্টি}}{\text{একটি চলকের বর্গের যোগফল} \times \text{অপর চলকের বর্গের যোগফল}}}$$

$$\text{অর্থৎ, } r = \frac{\Sigma x_i y_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2}}$$

$$\text{উক্ত সূত্রকে অন্যভাবেও লেখা যায়, } r = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \Sigma(yi - \bar{y})^2}}$$

আবার যদি, $Sp(xy) = \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}); (x_i - \bar{x})$ ও $(y_i - \bar{y})$ এর গুণফলের যোগফল

$S_s(x) = \Sigma(x_i - \bar{x})^2; (x_i - \bar{x})$ এর বর্গের যোগফল

$S_s(y) = \Sigma(y_i - \bar{y})^2; (y_i - \bar{y})$ এর বর্গের যোগফল

তখন, r_{xy} তাকে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়

$$r_{xy}=\frac{sp(xy)}{\sqrt{ss(x)ss(y)}}$$

আবার r_{xy} কে ব্যবহারিক কাজে ব্যবহৃত সুত্রটি নিম্নভাবে প্রকাশ করা যায়

$$r_{xy}=\frac{\Sigma xiyi-\frac{\Sigma xi\Sigma yi}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma x_i^২-\frac{(\Sigma x_i)^২}{n}\right]\left[\Sigma y_i{}^২-\frac{(\Sigma yi)^2}{n}\right]}};i=১,২.....n$$

Karl Pearson এর সুত্র নিম্নলিখিত অনুমানের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হল:

১। চলকদ্বয়ের মধ্যে রৈখিক সম্পর্ক বিদ্যমান

২। চলকদ্বয়ের মধ্যে সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিদ্যমান

৩। স্বাধীন চলকের একটি মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের একাধিক মান বিদ্যমান হতে পারে।

সংশ্লেষাঙ্কের ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য : সংশ্লেষাঙ্কের প্রধান ধর্ম

১। সংশ্লেষাঙ্ক একটি একক মুক্ত সংখ্যা

২। সংশ্লেষাংক মুলবিন্দু ও মাপনী হতে স্বাধীন

৩। সংশ্লেষাঙ্ক প্রতিসম অর্থাৎ $r_{xy} = r_{yx}$

৪। সংশ্লেষাঙ্কের মান সর্বদা -১ থেকে +১ এর মধ্যে অবস্থিত

৫। চলক দু'টি স্বাধীন হলে $r_{xy} = 0$

সংশেষাঙ্কের ধর্মাবলীর প্রমাণ:

১। সংশ্লেষাঙ্ক চলকদ্বয়ের মূলবিন্দু ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল নয়

প্রমাণ : মনে করি $(x_i;y_i);i=1,2............n$, x এবং y এর n জোড়া মান। x_i এর মূলবিন্দু a ও মাপনী h পরিবর্তনে নতুন মান u_i এবং yi এর মূলবিন্দু b ও মাপনী k পরিবর্তনে নতুন মান vi পাওয়া গেল

অর্থাৎ $ui=\frac{x_i-a}{h}$; $v_i=\frac{y_i-b}{k}$

$=> x_i=a+hu_i$; $=> yi=b+kv_i$

$$=>\bar{x}=a+h\bar{u};=>\bar{y}=b+k\bar{v}$$

এখন, $\Sigma(x_i-\bar{x})=\Sigma[a+hu_i-a-h\bar{u}]=h\Sigma(u_i-\bar{u})$

$$\Sigma(y_i-\bar{y})=\Sigma[b+kv_i-b-k\bar{v}]=k\Sigma(v_i-\bar{v})$$

এবং $\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\Sigma[h(u_i-\bar{u})xk(v_i-\bar{v})]=hk\Sigma(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})$

আমরা জানি-

সংশ্লেষাঙ্ক, $r_{xy}=\frac{\Sigma(xi-\bar{x})(yi-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(xi-\bar{x})^২\Sigma(yi-\bar{y})^২}}$

$$=\frac{hku_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sqrt{h^২\Sigma(ui-\bar{u})^২ xk^২\Sigma(vi-\bar{v})^২}}$$

$$=\frac{hku_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{hk\sqrt{\Sigma u_i-\bar{u})^২\Sigma(v_i-\bar{v})^২}}$$

$= r_{uv}$

অর্থাৎ $r_{xy}=r_{uv}$; অর্থাৎ সংশ্লেষাঙ্ক মূল ও মাপনীর উপর নির্ভর করে না। (প্রমানিত)

২। সংশ্লেষাঙ্কের মান -১ ও +১ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

প্রমাণ : মনে করি x_i ও y_i; i=1,2..........n,x,y এর n জোড়া মান।

আমরা জানি, কোন সংখ্যার বর্গ সর্বদা যোগবোধক অর্থাৎ

$$\left[\frac{(x_i-\bar{x})}{\sigma_x}\pm\frac{(y_i-\bar{y})}{\sigma_y}\right]^২\geq 0$$

এখানে σ_x=x এর পরিমিত ব্যবধান

σ_y=y এর পরিমিত ব্যবধান

এখন $\frac{(x_i-\bar{x})^২}{{\sigma_x}^২}+\frac{(y_i-\bar{y})^২}{{\sigma_y}^২}\pm\frac{২(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y}\geq 0$

or, $\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^২}{\sigma_x২}+\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^২}{\sigma_y২}\pm\frac{২\Sigma(xi-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sigma_x\sigma_y}\geq o$ ($\therefore$ উভয় পক্ষের যোগ চিহ্ন নিয়ে]

$$\frac{n\sigma_x^2}{\sigma_x^2}+\frac{n\sigma_y^2}{\sigma_y^2}\pm nr_{xy}\times 2\geq o\because r_{xy}=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{{\sigma_x}^২{\sigma_y}^২}}$$

or, $n + n \pm ২nr_{xy} \geq o$

$২n \pm ২nr_{xy} \geq o$

$\Rightarrow$ ১ + $r_{xy} \geq o$; $1-r_{xy}\geq o$

$\Rightarrow r_{xy} \geq$ - ১ ; r_{xy} • +১

অর্থাৎ r_{xy} এর মান -১ ও +১ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ। (প্রমানিত)

দু'টি পরস্পর স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক শূন্য

প্রমানঃ মনে করি x_i ও y_i; i=1, 2 .... n, x ও y এর n জোড়া মান ও তাহারা পরস্পর স্বাধীন। আমরা জানি দু'টি স্বাধীন চলকের ভেদাঙ্ক সহগ এর মান শুণ্য

অর্থাৎ $\frac{১}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = o$

আমরা আরও জানি

সংশ্লেষাঙ্ক, $r_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^{২}\Sigma(y_i - \bar{y})^{২}}}$

$= \frac{o}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})2\Sigma(y_i - \bar{y})2}}$; স্বাধীন চলকের ক্ষেত্রে

$= o$

$\therefore\ r_{xy} = o$ অর্থাৎ আমরা বলতে পারি দু'টি স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক শুণ্য। (প্রমানিত)

সংশ্লেষাঙ্ক, r_{xy} মানের ব্যাখ্যা:

১) r= +১ হলে, চলক দ্বয়ের মধ্যেপূর্ণ ধনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যামান

২) r =-১ হলে, চলক দ্বয়ের মধ্যেপূর্ণ ঋনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যামান

৩) r = o হলে, চলকের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।

সম্ভাব্য বিচ্যুতি: সংশ্লেষাঙ্কের সম্পর্কে ব্যাখ্যা দানের ক্ষেত্রে বিচ্যুতি একটি গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে। কোন তথ্যবিশ্ব হতে বিভিন্ন আকারের নমুনা সংগ্রহ করে সংশ্লেষাঙ্কের মান r নির্ণয় করলে r এর বিভিন্ন মান পাওয়া যাবে এবং এদের বিন্যাসটির একটি ভেদাঙ্ক মান পাওয়া যাবে যার পরিমিত ব্যবধান মানকে SE(r) দ্বারা সূচিত করলে, $SE(r) = \sqrt{\frac{১ - r^{২}}{(n - ২)}}$ । সম্ভাব্য বিচ্যুতি $P.E(r) = .6745\sqrt{\frac{১ - r^{২}}{n - ২}}$; এ ক্ষেত্রে .৬৭৪৫ হল পরিমিত বিন্যাসের শতকরা ৫০% তথ্য মান যা $p \pm .৬৭৪৫x$ এর ভিতর বিদ্যমান থাকে। সম্ভাব্য বিচ্যুতি PE(r) এর উপর নির্ভর করে r এর মানের ব্যাখ্যা:

১। r এর মান যখন P.E.(r) এর থেকে ছোট হয়, তখন সংশ্লেষণ মোটেই যথার্থ নয়

২। যখন r>৬ P.E.(r) তখন সংশ্লেষাঙ্ক নিশ্চিতভাবে যথার্থ

৩। যখন r এর মান P.E.(r) এর চেয়ে বড় তখন সংশ্লেষাঙ্ক যথার্থভাবে বিদ্যমান।

নিজে করুন: নিম্নলিখিত তথ্য হতে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন ও উহাদের ফলাফল বিশ্লেষণ করুন

উৎপাদন (মন) x	২৫ ২৭ ৩৬ ৪২ ৪৪
মূল্য (টাকা) y	৩০ ৩৫ ৩৪ ৪৯ ৩৮

[উত্তর: r_{xy} = .৮৪]

উদাহরণ-১: মনে করি (x_i, y_i)i=১,২.........৫; x ও y এর ৫ জোড়া মান। দেওয়া আছে-

Σx=২৯; $\Sigma x^{২}$=২৩১

Σy = ৩১; $\Sigma y^{২}$ = ৩০৭ এবং

Σxy=২৩১

x ও y চলকের সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন

সমাধানঃ আমরা জানি দু'টি চলকের ক্ষেত্রে সংশ্লেষণ নির্ণয়ের সূত্রঃ

$$r_{xy}=\frac{\Sigma x_i y_i-\frac{\Sigma x_i \Sigma y_i}{n}}{\sqrt{\left[\Sigma xi^2-\frac{(\Sigma x_i)^২}{n}\right]\left[\Sigma {y_i}^২-\frac{(\Sigma\Sigma_i)^২}{n}\right]}}$$

$$=\frac{২৩১-\frac{২৯\times ৩১}{৫}}{\sqrt{\left[২৩১-\frac{(২৯)^২}{৫}\right]\left[৩০৭-\frac{(৩১)^২}{৫}\right]}}$$

$$=\frac{২৬৪-১৭৯.৮}{\sqrt{(২৩১-১৬৮.২)(৩০৭-১৯২.২)}}$$

$$=\frac{৮৪.২}{\sqrt{৬২.৮\times ১১৪.৮}}=\frac{৮৪.২}{৮৪.৯১}=.৯৯$$

$\therefore\ r_{xy}=.৯৯$

নিজে করুনঃ যদি $u=2x+5$, $v=৭-৩y$ এবং x ও y এর সংশ্লেষাঙ্ক $r_{xy}=০.৭৫$ হলে u ও v এর সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন।

[উত্তরঃ $r_{uv}=-.৭৫$]

৭টি দোকানের পুঁজি ও মুনাফার সম্পর্কে তথ্য দেওয়া হল

i) সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন।

x: পুঁজি	৫	৭	১০	১২	২০	২২	২৫
y: মুনাফা	৩	৬	৫	৮	১২	১৬	২০

সংশ্লেষাঙ্কের সীমাবদ্ধতাঃ সংশ্লেষাঙ্কের সীমাবদ্ধতাগুলি নিম্নে দেওয়া হলঃ

১। সংশ্লেষাঙ্ক শুধুমাত্র রৈখিক সম্পর্কের মাত্রা ও গতি নির্ণয় করতে পারে কিন্তু বক্র সম্পর্কের মাত্রা ও গতি নির্ণয় করতে পারে না।

২। সংশ্লেষাঙ্ক বড় মান দ্বারা প্রভাবিত নয়।

৩। সংশ্লেষাঙ্ক গণনার জন্য তথ্যগুলি যদি সমগুন সম্পন্ন না হয় তবে চলকদ্বয়ের সম্পর্কের প্রকৃত চিত্র নাও দিতে পারে।

সারসংক্ষেপ

সংশ্লেষনের মাত্রার গাণিতিক পরিমান কে সংশ্লেষণ বুঝায়। দু'টি স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক r=o, সম্ভাব্য বিচ্যুতি সংশ্লেষাঙ্কের পরিমান সম্পর্কে ব্যাখ্যা প্রদান করে। K. Pearson সংশ্লেষাঙ্কের নির্ণয় পদ্ধতির, সুত্র হল

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}$$

পাঠোত্তর মূল্যায়নঃ ৫.২

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। দুই বা ততোধিক চলকের রৈখিক সম্পর্ক বলা হয়।

ক. সংশ্লেষাংক   খ. ভেদাঙ্ক

গ. সহ সম্পর্ক   ঘ. পরিমিত ব্যবধান

২। সহ সম্পর্কের মাত্রার পরিমাপকে বলা হয়

ক. বিস্তার পরিমাপ   খ. সংশ্লেষাঙ্ক

গ. বিভেদাঙ্ক   ঘ. কার্টসিম

৩। চলক দুটি স্বাধীন হলে সংশ্লেষাঙ্কের মান হবে

ক. $r \geq +$ ১০   খ. $r = o$

গ. r • - ১০   ঘ. $r \neq o$

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন

৪। r =+১ হলে, চলকদ্বয়ের মধ্যেপূর্ণ ধনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যমান

৫। r =-১ হলে, চলকদ্বয়ের মধ্যে কোন সম্পর্ক নেই।

৬। r এর মান যখন p.E(r) থেকে ছোট হয়, তখন সংশ্লেষাঙ্ক মোটেই যথার্থ নয়।

৭। সংশ্লেষাঙ্কের মাত্রা বলতে দুটি চলকের মধ্যে সম্পর্কের পরিমানকে বুঝায়।

শুন্যস্থান পূরণ করুন

৮। সংশ্লেষাঙ্ক একটি _____ মুক্ত সংখ্যা।

৯। সংশ্লেষাঙ্ক _____ ও ______ হতে স্বাধীন।

১০। সংশ্লেষাঙ্ক প্রতিসম অর্থাৎ ______ ।

১১। চলক স্বাধীন হলে r = _______ ।

বাক্য/শব্দ মিলানো

১২। পরস্পর সম্পর্কযুক্ত দু'টি চলকের পরিবর্তনের প্রকৃতি এবং উহাদের মধ্যকার	ক. -১ থেকে +১ এর মধ্যে বিদ্যমান
১৩। k. pearson এর সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের সুত্রটি	খ. শূণ্য।
১৪। সংশ্লেষাঙ্কের মান সর্বদা	গ. তখন সংশ্লেষাঙ্ক নিশ্চিতভাবে যথার্থ।
১৫। দু'টি স্বাধীন চলকের সংশ্লেষাঙ্ক	ঘ. সম্পর্কের মাত্রাকে সংশ্লেষাঙ্ক বলে।
১৬। যদি r>৬P.E(r) হয়	ঙ. $r = \frac{sp(xy)}{\sqrt{ss(x) \times ss(y)}}$

পাঠ-৫.৩ আনুক্রমিক সংশ্লেষণ (Rank Correlation)

ভূমিকা

পূর্ব পাঠে আমরা সংশ্লেষাংক নির্ণয়ের জন্য k. pearson এর সূত্র ব্যবহার করেছি। যে সব সম্পর্ক সংখ্যাগতভাবে প্রকাশ করা সম্ভব নয় সেসব সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য k. pearson পদ্ধতি ব্যবহার করা যায় না। যেমন, বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের সংখ্যাগত প্রকাশ করা যায় না অর্থাৎ সততা, নৈপুন্য, ভাল, মন্দ, দোষ-গুন ইত্যাদি। তাই বৈশিষ্ট্যগত চলকের সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করার পদ্ধতি জানা প্রয়োজন। আমরা বর্তমান পাঠে বৈশিষ্ট্যগত চলকের সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য Rank correlation বা আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন–

- Rank Correlation Coefficient এর সংজ্ঞা;
- Rank Correlation Coefficient এর পরিমাপ
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান।

আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্কঃ C.E. Spearmar (১৯০৪) সংশ্লেষাঙ্ক পরিমাপ পদ্ধতি আবিস্কার করেন। তিনি ছিলেন একজন বৃটিশ মনোবিজ্ঞানী তিনি প্রথমে গুনবাচক চলকগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে quantify করেন। অতপর আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ে যে সুত্রটি বের করেন তা নিম্নরূপ:

$$R = ১ - \frac{৬\Sigma d^{২}}{N(N^{২} - 1)}$$

এখানে

R = আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক

d = দুইটি দলের/গ্রুপের ক্রমের পার্থক্য

N = তথ্য সংখ্যা

নির্ণয় পদ্ধতিঃ

১। প্রতি জোড়া বা গ্রুপে প্রাপ্ত বৈশিষ্ট্যের মানের ক্রম অনুসারে সাজাতে হবে।

২। প্রতি জোড়ায় ক্রমের পার্থক্য নির্ণয় করতে হবে।

৩। বড় মানের ক্রমিক ১, অতপর ২, ৩ .... রাশিগুলিকে মানের মাত্রায় প্রকাশ করাকে rank প্রদান বলা হয়। একই মানের ক্রমগুলির গড় বের করে গড় মানকে উক্ত ক্রম স্থানে স্থাপন করতে হবে।

৪। অতপর Spearman এর আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্কের সুত্র ব্যবহার করে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণঃ কোন একটি কোম্পানিতে শ্রমিকদের দক্ষতার তথ্য ক্রমানুসারে নিম্নে দেওয়া হল। গুণানুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্কের মান নির্ণয় করুন।

শ্রমিকের দক্ষতা	১	২	৫	৪	৩
সুপারভাইজারে দক্ষতা	১	৩	৪	৫	২

সমাধানঃ আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করতে নিম্নোক্ত টেবিলটি ব্যবহার করবো।

x_i শ্রমিকের দক্ষতা	y_i সুপারভাইজারের দক্ষতা	d=x-y	d^2
১	১	০	০
২	৩	-১	১
৫	৪	১	১
৪	৫	-১	১
৩	২	১	১
মোট			$\sum d^2$=৪

$$\therefore R = ১ - \frac{৬\Sigma d^২}{N(N^২ - 1)}$$

এখানে

$\Sigma d^২$=৪

N=৫

$$\therefore R = ১ - \frac{৬ \times ৪}{৫(৫^২ - ১)}$$

$$= ১ - \frac{১}{৫} = .৮০$$

$\therefore$ নির্ণেয় দক্ষতার আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক R =.৮০

নিজে করুন: নিম্নের তথ্য থেকে আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করুন

আবেদনকারী	A	B	C	D	E	F	G	H
হিসাব বিজ্ঞানের প্রাপ্ত মার্ক	১৫	২০	২৮	১২	৪০	৬০	২০	৪০
পরিসংখ্যানের প্রাপ্ত মার্ক	৪০	৩০	৫০	৩০	২০	১০	৩০	৬০

ধর্ম ও বৈশিষ্ট্য:

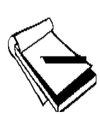
১। R এর মান-১ থেকে +১ এর মধ্যে অবস্থিত।

২। গুনবাচক চলকের ক্ষেত্রে আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করা সম্ভব।

৩। **ব্যবসা বাণিজ্যের ক্ষেত্রে:** ভাল, মন্দ ইত্যাদি ক্ষেত্রে R এর সাহায্যে বৈশিষ্ট্যের মাত্রা নির্ণয় করা যায়।

সারসংক্ষেপ

আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক বৈশিষ্ট্যগত চলকের সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করে। আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক ব্যবসার ক্ষেত্রে ভাল, মন্দ ইত্যাদির মাত্রা নির্ণয় করতে সাহায্য করে।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন: ৫.৩

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। Rank Correlation আবিষ্কার করেন।

ক. K. pearson　　খ. Spearman

গ. R.A. Fisher　　ঘ. Cowden

২। বৈশিষ্ট্য মূলক চলকের সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করা যায় কোনটি দ্বারা

ক. আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক   খ. নির্ভরাঙ্ক

গ. সংশ্লেষণ   ঘ. নির্ভরণ

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন

৩। গুণবাচক চলকের সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করা যায় না

৪। আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়ের ক্ষেত্রে মানের ক্রমানুসারে সাজানো প্রয়োজন।

শুণ্যস্থান পূরণ করুন

৫। বড় মানের ক্রমিক ______ ।

৬। আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক r=____________ ।

বাক্য/শব্দ মিলানো

৭। R এর মান -১ থেকে	ক) আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয় করা যায়।
৮। গুণবাচক চলকের ক্ষেত্রে	খ) +১ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

পাঠ-৫.৪ নির্ভরণ (Regression)

ভূমিকা

সংশ্লেষাঙ্কের ক্ষেত্রে আমরা শুধূমাত্র দু'টি চলকের সম্পর্কের মাত্রা নির্ণয় করতে পারি। কিন্তু ইহার মাধ্যমে চলকের মধ্যে একটির গতিশীলতা আরেকটির উপর কিভাবে প্রভাব বিস্তার করে তা জানা যায় না। একটি চলকের গতিশীলতার উপর অপর চলকের যে পরিবর্তন হয় তাহা পরিমাপ করার জন্য নির্ভরণ এর সাহায্য নেওয়া হয়। বর্তমান পাঠে নির্ভরণ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

উদ্দেশ্য

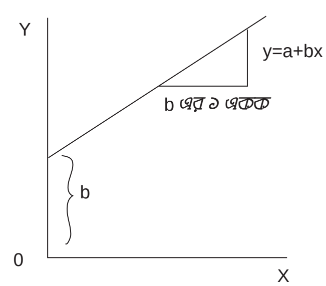
এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন–

☞ নির্ভরণের সংজ্ঞা কি;
☞ নির্ভরন রেখা বলতে কি বুঝায়;
☞ নির্ভরাঙ্কের সংজ্ঞা;
☞ কিভাবে নির্ভরাঙ্ক নির্ণয় করা যায়
☞ সংশ্লেষাঙ্কের সাথে নির্ভরাঙ্কের পার্থক্য।

নির্ভরণ

নির্ভরণ: নির্ভরণ প্রক্রিয়াটি সর্ব প্রথম প্রখ্যাত জীবতত্ত্ববিদ স্যার ফেন্সিস গেলটন (১৮২২-১৯১১) প্রদান করেন। র্নিভরণ বিশ্লেষণে একটি চলকের পরিবর্তনের ফলে অপর চলকের যে গড় পরিবর্তন পরিলক্ষিত হয় তাহা বিশ্লেষণ করা হয়। নির্ভরণের শব্দগত অর্থ হচ্ছে "গড় মানের দিকে আসা" অর্থাৎ নির্ভরণ, সম্পর্ক যুক্ত দু'টি চলকের একটির নির্দিষ্ট মানের জন্য অন্য চলকের গড় মান নির্ণয় করে। এ ভাবে সম্পর্কের সমীকরণের মাধ্যমে একটি চলকের যে কোন মানের জন্য অন্য নির্ভরশীল চলকের মানও নির্ণয় করে।

নির্ভরণ রেখা: বিক্ষেপ চিত্রের ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, দু'টি চলকের মধ্যে সম্পর্ক থাকলে চলক দু'টির বিভিন্ন মান লেখ কাগজে স্থাপন করলে বিন্দুগুলি একটি পথ নির্দেশ করে। নির্ভরণ রেখা একটি চলকের গড় মানগুলির বিপরীতে অন্য একটি চলকের যথার্থ গড় মান প্রকাশ করে। যদি x ও y দুইটি চলক হয়। তাহলে দু'টি নির্ভরণ রেখা পাওয়া যাবে-



চিত্রঃ নির্ভরণ রেখা

১। একটি রেখা x চলকের মানগুলির বিপরীতে y চলকের যথার্থ গড় মানগুলি প্রদর্শন করে।
২। অন্য রেখাটি y চলকের মানগুলির বিপরীতে x চলকের যথার্থ গড় মানগুলি প্রদর্শণ করে।

১ম টিকে x চলকের উপর y চলকের নির্ভরণ রেখা এর ২য় টিকে y চলকের উপর x এর নির্ভরণ রেখা বলে। প্রাপ্ত নির্ভরণ রেখাকে সমীকরণের সাহায্যে দেখানো হল:

১। $y=a_১+b_১x$; x এর উপর y এর নির্ভরণ রেখা
২। $x=a_২+b_২y$; y এর উপর x এর নির্ভরণ রেখা
উপরোক্ত সমীকরণ দু'টিতে $a_১$, $b_১$ এবং $a_২$, $b_২$ কে বলা হয় ধ্রুবক। এখানে $b_১$, $b_২$ কে নির্ভরাঙ্ক বলা হয়।

নির্ভরণ রেখার নির্ণয় পদ্ধতি:
নির্ভরণ রেখার গড় মান অন্যান্য সমীকরণে ব্যবহার করে নির্ভরণ রেখা প্রস্তুত করা যায়। এরূপ একটি নির্ভরই রেখা প্রকাশ করা হল:
$y_i=a+bx_i+e_i$; i = ১, ২ .... n
এখানে e_i; i = ১, ২ .... n হচ্ছে বিচ্যুতিসমূহ যারা স্বাধীনভাবে গড় মান = ০ ও ভেদাঙ্ক = σ^2 সহ পরিমিত বিন্যাসে বিন্যস্ত। E(y/x) কে x এর সাপেক্ষে y এর প্রত্যাশিত মান। এ ক্ষেত্রে E(y/x) = a + bx.

ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি: উনবিংশ শতাব্দীতে ফরাসি গণিতবিদ এনড্রিন লেগনড্রি সর্বপ্রথম ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়া ব্যবহার করেন। ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়ার মূল বিষয় হল, "অঙ্কিত নির্ভরণ রেখা হতে প্রতিটি বিন্দুর বিচ্যুতির বর্গের যোগফল হবে ন্যূনতম"
নির্ভরণ রেখা নির্ণয়ের জন্য a ও b ধ্রুবক প্রাক্কলন করতে হয় ন্যূনতম বিচ্যুতির বর্গের মাধ্যমে।
নির্ভরণ রেখা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্ন লিখিত অনুমানগুলো ধরা হয়

- x এর মান সমূহ নির্দিষ্ট হতে হবে
- x এর উপর y এর নির্ভরণ রৈখিক হবে
- x এর প্রত্যেকটি মানের জন্য y এর শর্তাধীন বিস্তার পরিমিত হবে
- বিচ্যুতিসমূহ স্বাধীনভাবে পরিমিত বিন্যস্ত থাকবে এবং এদের গড় মান æo" এবং ভেদাঙ্ক σ^2 হবে।

আমরা পূর্বেই নির্ভরণ সমীকরণ পেয়েছি-
$y_i = a + bx_i+e_i$; i = ১, ২ .... n
$=> e_i = y_i-a-bx_i$
বা, $\sum e_i^২ = \sum(y_i-a-bx_i)^2$ [উভয় পক্ষে বর্গ ও যোগ চিহ্ন নিয়ে পাই]
ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতির নিয়মানুযায়ী a ও b এর মান পাওয়া যাবে আংশিক অন্তকরণ (Partial Differentiation) করে অর্থাৎ

$$\frac{\partial \Sigma e_i^২}{\partial b} = o$$

এবং $\frac{\partial \Sigma e_i^২}{\partial a} = o$

এখানে $\frac{\partial \Sigma ei^২}{\partial a} = o => -২\Sigma(yi - a - bxi) = o$

or, $\Sigma(y_i-a-bx_i)=o$
or, $\Sigma y_i-\Sigma a-b\Sigma x_i=o$ ....(i)
এবং $\Sigma x;(y;-a-bx;)=o$ ....(ii)

সমীকরন দুটি সমাধান করে পাওয়া যায়

$\hat{b} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ এবং $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$

অথবা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে

$$\bar{b} = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \times \Sigma y}{n}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}}$$

এবং $\bar{a} = \bar{y} - \bar{b}\bar{x}$

অর্থাৎ y_i = (প্রাককলিত a) + (প্রাককলিত b) xi

উদাহরণঃ

১০টি পরিবারের মোট খরচের উপর সাপ্তাহিক খাদ্যদ্রব্যের খরচের একটি নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করুন।

সাপ্তাহিক মোট খরচ x	৪০০	৩১৫	২৭৫	৩৫০	২৯০	২২৫	২১৫	২২৫	২৭৫	২৯০
সাপ্তাহিক খাদ্য দ্রব্যের খরচ y	১৭০	১৬০	১৫০	১৪০	১২৫	১১০	১২০	১৪০	১৮০	১৯০

সমাধান: x এর উপর y এর নির্ভরণ রেখার সমীকরণ

$y = a + bx_i$; i = ১, ২ .... ১০

যেহেতু মানগুলি খুব বড় তাই আমরা সংক্ষিপ্ত ব্যবহার করবো। ন্যূনতম বর্গ প্রক্রিয়ায় a ও b নির্ণয় সারনী

y	x	dy=y-১৪০	dx=x-২৭৫	dxdy	dx²
১৪০	৪০০	০	১২৫	০	১৫৬২৫
১৬০	৩১৫	২০	৪০	৮০০	১৬০০
১৫০	২৭৫	১০	০	০	০
১৪০	৩৫০	০	৭৫	০	৫৬২৫
১২৫	২৯০	-১৫	১৫	-২২৫	২২৫
১১০	২২৫	-৩০	-৫০	১৫০০	২৫০০
১২০	২১৫	-২০	-৬০	১২০০	৩৬০০
১৪০	২২৫	০	-৫০	০	২৫০০
১৮০	২৭৫	৪০	০	০	০
১৯০	২৯০	৫০	১৫	৭৫০	২২৫
মোট		৫৫	১১০	৪০২৫	৩১৯০০

এখানে Ax = ২৭৫ এবং Ay = ১৪০

$$\therefore bxy = \frac{\Sigma dxdy - \frac{\Sigma dx \Sigma dy}{n}}{\Sigma d^{২}x - \frac{(\Sigma dx)^{২}}{n}}$$

$$= \frac{৪০২৫ - \frac{৫৫ \times ১১০}{১০}}{৩১৯০০ - \frac{(১১০)^{২}}{১০}} = \frac{৪০২৫ - ৬০৫}{৩১৯০০ - ১২১০} = \frac{৩৪২০}{৩০৬৯০} = .১১$$

$\therefore bxy$ = ০.১১

এবং $\bar{x}$ x=Ax+∑dx/১০

$= ২৭৫ + \frac{১১০}{১০} = ২৮৬$

এবং $\overline{y} = Ay + dy / ১০ = ১৪০ + \frac{৫৫}{১০} = ১৪৫.৫$

এখন $a = \overline{y} - b\overline{x}$

=১৪৫.৫-(০.১১)×২৮৬

=১৪৫.৫-৩১.৪৬ = ১১৪.০৪

∴ নির্ণেয় নির্ভরণ রেখাটি-

y_i = ১১৪.০৪ + ০,১১ xi

নিজে করুন: কোন বিজ্ঞাপিত ব্যয় (লক্ষ টাকায়) এবং পর্যায়ক্রমিক বিক্রয়ের (লক্ষ টাকায়) একটি তথ্য নিম্নে দেওয়া হল:

x বিজ্ঞাপিত ব্যয়	২০	২৫	২৮	৩২	৩৬
y পর্যায়ক্রমিক বিক্রয়	৪৮	৬০	৬৮	৭০	৭৫

বিজ্ঞাপিত ব্যয় ও পর্যায়ক্রমিক বিক্রয় এর নির্ভরণ রেখা নির্ণয় করুন।

সংশ্লেষণ ও নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্য

সংশ্লেষ ও নির্ভরণের মধ্যে কোন কোন ক্ষেত্রে মিল আছে আবার কোন কোন ক্ষেত্রে অনেক পার্থক্য বিদ্যমান। নিম্নে সংশ্লেষণ ও নির্ভরণের মধ্যে পার্থক্যের তুলনামূলক আলোচনা দেওয়া হল:

সংশ্লেষণ	নির্ভরণ
১। সংশ্লেষণ-এর মাধ্যমে দুই বা ততোধিক চলকের কোন সম্পর্ক আছে কিনা তাকে বুঝায়।	১। দুই বা ততোধিক স্বাধীন চলকের জন্য নির্ভরশীল চলকের গড় মান নির্ণয় করা বুঝায়।
২। সংশ্লেষণ-এ চলক সমূহের সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিশ্লেষণ করা যায় না।	২। নির্ভরণের প্রধান কাজ হল সম্পর্কের কারণ ও প্রভাব বিশ্লেষণ করা।
৩। সংশ্লেষণ-এ স্বাধীন চলক ও নির্ভরশীল চলকের ধারণা নেই।	৩। নির্ভরণে যে চলক প্রভাবিত হয় তাকে নির্ভরশীল চলক বলে। বাকি চলকগুলো স্বাধীন চলক।
৪। r_{xy} ও r_{yx} নির্ণয় করলে একই মান পাওয়া যায়।	৪। র্নিভরণের ক্ষেত্রে নির্ভরাংক $bxy \neq byx$
৫। সংশ্লেষাঙ্কের মান সর্বদা-১ ও +১ এর মধ্যে অবস্থিত।	৫। নির্ভরাঙ্কের মান- α থেকে $+\alpha$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।
৬। সংশ্লেষণ-এর ক্ষেত্রে প্রত্যেকটি চলকই দৈব বিবেচনা করা হয়।	৬। নির্ভরনের ক্ষেত্রে শুধু মাত্র নির্ভরশীল চলক দৈব চলক হিসাবে বিবেচিত।

নির্ভরাঙ্কের বৈশিষ্ট্য বা ধর্ম

নির্ভরাঙ্কের বৈশিষ্ট্য বা ধর্ম নিম্নে দেওয়া হল

১। নির্ভরাংক মূলবিন্দু পরিবর্তনের উপর স্বাধীন ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

২। $r_{xy} = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$

৩। দু'টি নির্ভরাঙ্কের গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে বড়।

ধর্মসমূহের প্রমানঃ

১। "নির্ভরাঙ্ক মুলবিন্দু পরিবর্তনের উপর স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল"

প্রমানঃ মনে করি $x_i; i =$ ১, ২ .... n চলকের a মুলবিন্দু ও h মাপনী

অতএব, নতুন চলক,

$$u_i = \frac{x_i - a}{h}; i = ১,২.........n$$

$$\Rightarrow x_i = a + hu_i \Rightarrow \bar{x} = a + h\bar{u}$$

$$\therefore x_i - \bar{x} = (a + hu_i - a - h\bar{u}) = h(u_i - \bar{u})$$

অনুরূপভাবে $v_i = \dfrac{y_i - b}{k}; i = 1,2........n$ চলকের মুলবিন্দু b এবং k মাপনী

$$\Rightarrow y_i = b + kv_i \Rightarrow b + k\bar{v} = \bar{y}$$

$$\therefore y_i - \bar{y} = (b + kv_i - b - k\bar{v}) = k(v_i - \bar{v})$$

আমরা জানি, নির্ভরাঙ্ক

$$bxy = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\Sigma h[(u_i - \bar{u}) \times k(v_i - \bar{v})]}{\Sigma[h(u_i - \bar{u})]^2}$$

$$= \frac{hk\Sigma k\Sigma u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{h^২\Sigma(u_i - \bar{u})^2}$$

$$= \frac{k}{h}\frac{\Sigma(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\Sigma(u_i - \bar{u}^২)}$$

$$= \frac{k}{h} buv$$

$\therefore bxy = \dfrac{k}{h} b_{av}$ অর্থাৎ নির্ভরাঙ্ক মুলবিন্দুর উপর স্বাধীন কিন্তু মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

২। সংশ্লেষাঙ্ক নির্ভরাঙ্কদ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান।

প্রমানঃ মনে করি $(x_i; y_i)$; i=১, ২ .... n; x ও y এর n জোড়া মান।

অতএব

সংশ্লেষাঙ্ক, $r_{xy} = \dfrac{sp(xy)}{\sqrt{ss(x)ss(y)}}$ এবং

নির্ভরাঙ্ক, $bxy=\frac{sp(xy)}{ss(x)}$

$byx=\frac{sp(xy)}{ss(y)}$

এখন, $bxy\ .byx=\frac{sp(xy).sp(xy)}{ss(x)ss(y)}$

$=r_{xy}\times r_{xy}$

$\Rightarrow r_{xy}^{2}=bxy\times byx$

$\Rightarrow\ r_{xy}=\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$

অতএব, সংশ্লেষাঙ্ক নির্ভরাঙ্কদ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান।

৩। দু'টি নির্ভরাঙ্কের গাণিতিক গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে বড় এবং উল্টন গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে ছোট

প্রমান: মনে করি-

$x_i;y_i;i$ = ১,২ .... n, x ও y এর n জোড়া মান

অতএব, সংশ্লেষাঙ্ক $r_{xy}=\frac{sp(xy)}{\sqrt{ss(x)ss(y)}}$

নির্ভরাঙ্ক, $bxy=\frac{sp(xy)}{ss(x)}$ এবং

$byx=\frac{sp(xy)}{ss(y)}$

আমরা জানি

গানিতিক গড় ≥ জ্যামিতিক গড়

এখন $(bxy+byx)\frac{১}{২}\geq\sqrt{bxy\times byx}$

or, $\frac{(bxy+byx)}{২}\geq r_{xy}$

অতএব, আমরা বলতে পারি নির্ভরাঙ্কের জ্যামিতিক গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে বড় আবার

আমরা জানি, উল্টন গড় • জ্যামিতিক গড়

$২\left[\frac{১}{bxy}+\frac{১}{byx}\right]\leq\sqrt{bxy\times byx}$

or, $২\left[\frac{১}{bxy}+\frac{১}{byx}\right]\leq r_{xy}$

অর্থাঃ নির্ভরাঙ্কদ্বয়ের উল্টন গড় সংশ্লেষাঙ্কের চেয়ে ছোট।

৪। নির্ভরাঙ্কের সাহায্যে সংশ্লেষাঙ্ক নির্ণয়:

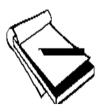
আমরা জানি নির্ভরাঙ্কদ্বয়ের জ্যামিতিক গড় হল সংশ্লেষাঙ্ক অর্থাৎ

সংশ্লেষাঙ্ক

$$rxy = \sqrt{bxy \times byx}$$

সারসংক্ষেপ

নির্ভরণ হচ্ছে একটি স্বাধীন চলকের উপর আর একটি নির্ভরণশীল চলকের নির্ভরণ। বিচ্যুতি সমূহের বর্গের সমষ্টি নুন্যতম করে যে পদ্ধতির মাধ্যমে নির্ভরাঙ্কের মান বের করা হয় তা নুন্যতম বর্গ পদ্ধতি বলে নির্ভরাঙ্ককে সাধারনত bxy দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন: ৫.৪

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। নির্ভরাঙ্ক নির্ণয় করতে কোন পদ্ধতির সাহায্যে নেওয়া হয়

ক. যোজন বিয়োজন পদ্ধতি   খ. ন্যূনতম বর্গ পদ্ধতি

গ. যোজন পদ্ধতি   ঘ. বিয়োজন পদ্ধতি

২। নিভরাঙ্কের মান পরিবর্তন নির্ভর করে কোনটির উপর

ক. মাপনীর উপর   খ. মূলের উপর

গ. মূল ও মাপনীর উপর   ঘ. কোনটিই নয়

৩। নির্ভরনের যে চলক প্রভাবিত হয় তাকে বলা হয়।

ক. স্বাধীন চলক   খ. অধীন চলক

গ. দৈব চলক   ঘ. নির্ভরশীল চলক

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন

৪। নির্ভরাঙ্কের মান $-\alpha$ থেকে $+\alpha$ পর্যন্ত হতে পারে।

৫। নির্ভরাঙ্কের মান মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

৬। নির্ভরণের ক্ষেত্রে স্বাধীন চলক দৈব চলক।

৭। নির্ভরাঙ্কের মান সর্বদাই ধনাত্মক।

৮। সংশ্লেষাঙ্ক নির্ভরাঙ্কদ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান।

শুন্যস্থান পূরন করুন

১০। নির্ভরণ হল স্বাধীন চলকের বিভিন্ন মানের জন্য নির্ভরশীল চলকের ____ বের করা।

১১। $r_{xy} = \sqrt{b_{xy} \times \ldots\ldots}$

বাক্য/শব্দ মিলানো

১২। অঙ্কিত নির্ভরণ রেখা হতে প্রতিটি বিন্দুর বিচ্যুতি বর্গের।	ক) গড় মানের দিকে আসা
১৩। নির্ভরণের শব্দগত অর্থ হল	খ) একটি চলকের যথার্থ গড় মান প্রকাশ করে।
১৪। নির্ভরন রেখা একটি চলকের গড় মানের বিপরীতে অন্য	গ) যোগফল হবে নূন্যতম।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৫

১। সংশ্লেষের সংজ্ঞা লিখুন। পিয়ারসনের সংশ্লেষাঙ্ক এর ফরমুলা লিখুন।

২। সংশ্লেষাঙ্কের সংজ্ঞা লিখুন। সংশ্লেষাঙ্কের ধর্মগুলি লিখুন।

৩। সংশ্লেষ কত প্রকার লিখুন। বিক্ষেপ চিত্রের সাহায্যে কিভাবে সংশ্লেষের ব্যাখ্যা করা যায় লিখুন।

৪। সংশ্লেষের সূত্রটি লিখুন। প্রমান করুন r এর মান সর্বদা -১ ও +১ এর মধ্যে অবস্থান করে।

৫। শূন্য সংশ্লেষের সংজ্ঞা লিখুন। প্রমান করুন দুইটি স্বাধীন চলকের ক্ষেত্রে সংশ্লেষাঙ্ক $r=0$।

৬। আনুক্রমিক সংশ্লেষাঙ্কের সংজ্ঞা লিখুন। নিম্নলিখিত মানগুলির অর্থ ব্যাখ্যা করুন

১. $r = o$ ২. $r \geq -1$ ৩. r • + ১

৭। সম্ভাব্য বিচ্যুতির সংজ্ঞা লিখুন। সম্ভাব্য বিচ্যুতির সাহায্যে সংশ্লেষাঙ্কের ব্যাখ্যা কিভাবে দেওয়া যায় লিখুন।

৮। নির্ভরণ রেখার সংজ্ঞা লিখুন। ন্যুনতম পদ্ধতির ধারণা লিখুন।

৯। নির্ভরণ রেখার পরিমান কিভাবে নির্ণয় করা যায় লিখুন। প্রক্কলিত রেখা নির্ণয় করুন।

১০। নির্ভরাঙ্কের সংজ্ঞা লিখুন। নির্ভরাঙ্কের সাথে সংশ্লেষাঙ্কের পার্থক্য নির্ণয় করুন।

১১। প্রমাণ করুন সংশ্লেষাঙ্ক নির্ভরাঙ্ক দ্বয়ের জ্যামিতিক গড়ের সমান।