ইউনিট ৩

কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ
(Measures of Central Tendency)

ভূমিকা

পূর্ব ইউনিট থেকে আমরা তথ্য উপস্থাপন কৌশল সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছি। তথ্যসমূহের তথ্য উপস্থাপন ছাড়াও সংখ্যাত্মক বিশ্লেষণ জানা প্রয়োজন। সংখ্যাগত বিশ্লেষণ জানতে তথ্যরাশির একটি প্রতিনিধিত্বকারী সংখ্যা জানা দরকার প্রতিনিধিত্বকারী সংখ্যা বের করার জন্য বিভিন্ন পদ্ধতি রয়েছে। যেমন, গড়, মধ্যক ও প্রচুরক ইত্যাদি প্রতিনিধিত্বকারী তথ্যমান। এ অধ্যায়ে আমরা প্রতিনিধিত্বকারী সংখ্যা নির্ণয় পদ্ধতি অর্থাৎ কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয় পদ্ধতিসমূহ নিয়ে আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

এ ইউনিট শেষে আপনি বলতে পারবেন–

- ☞ কেন্দ্রীয় প্রবণতার সংজ্ঞা;
- ☞ বিভিন্ন প্রকার গড়ের সংজ্ঞা ও সুবিধা অসুবিধাসমূহ;
- ☞ মধ্যমা নির্ণয় পদ্ধতি;
- ☞ প্রচুরক নির্ণয় পদ্ধতি;
- ☞ বিভিন্ন প্রকার সমস্যার সমাধান।

পাঠ-৩.১ গড় এবং এর পরিমাপ (Mean and its measurements)

ভূমিকা

তথ্যবিশ্ব থেকে প্রাপ্ত তথ্যসমূহের কেন্দ্রের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার একটা প্রবণতা থাকে। তথ্যসমূহের কেন্দ্রের দিকে যাওয়ার প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপক হল গড়, মধ্যক ও প্রচুরক। এ পাঠে আমরা গড় ও গড়ের ব্যবহার ইত্যাদি আলোচনা করবো।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন–

- ☞ গড়ের সংজ্ঞা;
- ☞ গড়ের প্রকারভেদ;
- ☞ গড়ের সুবিধা ও প্রয়োজনীয়তা;
- ☞ বিভিন্ন সমস্যার সমাধান ইত্যাদি।

গড়ঃ গড় বলতে আমরা এমন একটি প্রতিনিধিত্বকারী সংখ্যাকে বুঝি যা সংগৃহীত তথ্যের মধ্যবিন্দু বা কেন্দ্র বিন্দুতে অবস্থান করে। অর্থাৎ প্রাপ্ত তথ্যসমূহের যোগ ফলকে তথ্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে গড় বলে। গড় তিন প্রকার-

১। গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean)
২। গুনিতক গড় (Geometric Mean)
৩। তরঙ্গ গড় (Harmonic mean)

১। গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean)ঃ গণিতের সূত্র ব্যবহার করে গড় পরিমাপ করাকে গাণিতিক গড় বলে। এক্ষেত্রে গড় নির্ণয়ে প্রাপ্ত তথ্যকে সংখ্যা বানিয়ে গাণিতিক চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। ধরা যাক $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$; n টি তথ্য রয়েছে। অতএব গড়ের সংজ্ঞানুসারে তথ্য সমূহের যোগফলকে তথ্যসংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে গড় বলে। তথ্যসমূহের

$$\text{অর্থাৎ গড়} = \frac{\text{তথ্যসমূহের সমষ্টি}}{\text{তথ্য সংখ্যা}}$$

এখন, গাণিতিক গড়কে আমরা নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত করতে পারি-

$$\text{গাণিতিক গড়, AM} = \frac{x_১ + x_২ + x_৩ + \ldots + x_n}{n}$$

গাণিতিক গড়কে $\bar{x}$ দ্বারা প্রকাশ করলে গাণিতিক গড়, $\bar{x} = \dfrac{x_১ + x_২ + \ldots + x_n}{n}$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_n \text{ ; i=১, ২ ..... n।}$$

এখানে, $\sum$ (সামেশন) একটি গ্রীক বর্ণ, যা যোগফল প্রকাশ করে।

অতএব, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$; i =১, ২......... n।

অশ্রেণীকৃত তথ্যের গাণিতিক গড়।

উদাহরণঃ ১০ জন শ্রমিকের মুজুরী যথাক্রমে ৪৫, ৪০, ৫০, ৬০, ৯০, ৮০, ৭০, ৭৫, ৬০, ৬৫ হয় তবে শ্রমিকদের গড় মুজুরী নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ গড় মুজুরী, $\bar{x} = \frac{৪৫ + ৪০ + ৫০ + ৬০ + ৯০ + ৮০ + ৭০ + ৭৫ + ৬০ + ৬৫}{১০}$

$= \frac{৬৩৫}{১০} = ৬৩.৫$

অতএব, ১০ জন শ্রমিকের গড় মুজুরী হল ৬৩.৫।

নিজে করুনঃ ফিলিপস্ কোম্পানিতে মিনিটে বাল্বের উৎপাদন নিম্নে দেওয়া হল।

মিনিট	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮
উৎপাদিত বাল্বের সংখ্যা	৫০	৬০	৬৫	৬০	৭০	৫৫	৪০	৪৫

বাল্বের গড় উৎপাদন নির্ণয় করুন।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়:

যদি তথ্যমালায় তথ্য সংখ্যা অনেক বেশি হয় অথবা সংখ্যা গুলো অনেক বড় হয় সেসব ক্ষেত্রে গড় নির্ণয় বেশ জটিল হয় এবং সময় ও বেশি লাগে। এসব ক্ষেত্রে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

সংক্ষিপ্ত গড় নির্ণয়:

১। প্রথমে একটি আনুমানিক সংখ্যা বা আনুমানিক গড় বা তথ্য সারির মধ্যস্থানে যে সংখ্যাটি অবস্থান করে সেটাকে কল্পনায় আনতে হবে।

২। প্রতি তথ্য সংখ্যা থেকে উক্ত সংখ্যাটি বিয়োগ করে পার্থক্য নির্ণয় করতে হবে।

৩। প্রাপ্ত তথ্যগুলি যোগ করে মোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করতে হবে।

৪। এর পর প্রাপ্ত তথ্যের সাথে কল্পিত গড় বা আনুমানিক গড় যোগ করলে গড় পাওয়া যাবে।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গাণিতিক গড়ের সুত্রটি হল $\bar{x} = A + \frac{\sum (X_i - A)}{N}$; i = ১,২, ... N

যেখানে A = আনুমানিক গড়

X_i = তথ্য সারির মান

N = মোট তথ্য সংখ্যা

উদাহরন: চলিশীয়া গ্রামে বারটি পরিবারের মাসিক খরচের তথ্য নিম্নে দেওয়া হল:

পরিবারের সংখ্যা	মাসিক খরচ X_i (টাকা)	পরিবারের সংখ্যা	মাসিক খরচ X_i (টাকা)
১	৮২০৬	৭	৮২৫০
২	৭৯১২	৮	৭৯৫২
৩	৮৫০২	৯	৭৫২১
৪	৮২২০	১০	৮৩৫৭
৫	৭৫৩০	১১	৮৮৫০
৬	৮১২৩	১২	৮২১৩

সমাধান: আমরা সংক্ষিপ্ত গড়ের সূত্রটি থেকে পাই, $\bar{x} = A + \frac{\sum (X_i - A)}{N}; i = ১,২, ... ১২$

পরিবারের সংখ্যা	$i = ১,২, ... ১২$ মাসিক খরচ (টাকা)		$X_i - A$	$\bar{x} = A + \frac{\sum (X_i - A)}{N}$
১	৮২০৬		-৪৪	গড়, $\bar{x}$
২	৭৯১২		-৩৩৮	=৮২৫০+(-১১৩.৩৪)
৩	৮৫০২		২৫২	=৮১৩৬.৬৭
৪	৮২২০		-৩০	
৫	৭৫৩০	A=৮	-৭২০	
৬	৮১২৩	২৫০	-১২৭	
৭	৮২৫০		০	
৮	৭৯৫২		-২৯৮	
৯	৭৫২১		-৭২৫	
১০	৮৩৫৭		১০৭	
১১	৮৮৫০		৬০০	
১২	৮২১৩		-৩৭	

$\therefore$ নির্ণেয় গড় = ৮১৩৬.৬৭

নিজে করুন: ফুলতলা থানার ১০টি দোকানের দৈনিক আয়ের তালিকা নিম্নে দেওয়া হল, সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করুন।

দোকানের সংখ্যা	আয় (টাকায়)	দোকানের সংখ্যা	আয় (টাকায়)

১	৫২৭০	৬	৯৯৭৫
২	১০,৫৭০	৭	৮৩২৫
৩	৯২৭৫	৮	৮৫৭৫
৪	৯৫৯০	৯	৯৫৮০
৫	১০,১১৫	১০	১০,১২২

ঘটনসংখ্যা নিবেশন বা শ্রেণীকৃত তথ্য থেকে গড় নির্ণয়: তথ্যসমূহ যদি অনেক হয় অর্থাৎ ৩০ এর উপরে হয় তখন সরাসরি গড় নির্ণয় করা কঠিন এসব ক্ষেত্রে ঘটন সংখ্যাবিন্যাস আকারে তথ্যকে সন্নিবেশিত করা হয়। এই সন্নিবেশিত তথ্যকে শ্রেণীকৃত তথ্য বলা হয়।

শ্রেণীকৃত তথ্য থেকে গড় নির্ণয়ের সূত্রটি হল, $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i x_i}{N = \sum\limits_{i=1}^{n} fi}$; $i =$ ১,২, ... N

যেখানে f_i=ঘটনসংখ্যা

x_i= তথ্যসংখ্যা

N= মোট তথ্যসংখ্যা

একটি উদাহরণের মাধ্যমে আমরা বিস্তারিত আলোচনা করবো। নিম্নের শ্রেণী তথ্য থেকে গড় নির্ণয় করতে হবে,

ঘন্টা প্রতি শ্রমিকের মুজুরীর শ্রেণীসীমা (টাকা)	শ্রমিকের সংখ্যা f_i	মধ্যবিন্দু x_i	$f_i x_i$	গড়
০-৫	১০	২.৫	২৫	$\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{N} = \dfrac{১২৫০}{১০০}$ =১২.৫০
৫-১০	২০	৭.৫	১৫০	
১০-১৫	৪০	১২.৫	৫০০	
১৫-২০	২০	১৭.৫	৩৫০	
২০-২৫	১০	২২.৫	২২৫	

$\therefore$ নির্ণেয় মুজুরীর গড় = ১২.৫০

নিজে করুন: ৬ ধরনের শ্রমিক কোন একটি কারখানায় নিয়োজিত আছে। তাদের দৈনিক আয়ের একটি তথ্য নিম্নে দেওয়া হল। গড় নির্ণয় করুন।

শ্রমিকের ধরন	শ্রমিকের প্রতি দিনের আয় (টাকায়)	শ্রমিকের সংখ্যা

মেকানিক	৯০-৯৫	২
ফিটার্স	৯৫-১০০	১৪
ইলেক্ট্রিশিয়ান	১০০-১০৫	২০
স্মিথ	১০৫-১১০	৭
ক্লার্ক	১১০-১১৫	৬
কারপেনটার	১১৫-১২০	১
মোট		৫০

শ্রেণীকৃত তথ্যের সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়: শ্রেণীকৃত তথ্য থেকে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের সূত্রটি হ'ল,

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times c; i = ১,২, ...N$$

যেখানে, $\bar{x}$ = যোজিত গড়

A= আনুমানিক গড়

c= শ্রেণী ব্যাপ্তি

d= $\frac{x_i - A}{c}$

f= প্রতি শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা

N= $\sum fi$ =ঘটন সংখ্যার যোগফল

উদাহরণ: যশোর জেলার কয়েকটি মার্কেটে প্রত্যেক দিনে মুরগীর বিক্রয় মূল্য ও সংখ্যার তথ্য নিম্নে দেওয়া হয়। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করুন।

বিক্রয় মূল্যের শ্রেণী ব্যবধান (টাকায়)	মুরগীর সংখ্যা
০<৭০	৫০৫
৭০-৭৫	১০০০
৭৫-৮০	১২০০
৮০-৮৫	৬০৮
৮৫-৯০	৫০০
৯০-৯৫	৩২৫
৯৫>	১২৫
মোট	৪২৬৩

সমাধান: তথ্যটি শ্রেণীকৃত। গড় নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিতভাবে মানগুলো বের করতে হবে:

বিক্রয় মূল্যের শ্রেণী ব্যবধান	মুরগীর সংখ্যা	মধ্যবিন্দু x_i X_i	$d_i=\frac{x_i - A}{c}$	fidi	$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times c$
<৭০	৫০৫	৬৭.৫	-৩	-১৫১৫	$\bar{x}$ =৮২.৫+$\left(\frac{-৩১৯০}{৪২৬৩}\right)\times ৫$
৭০-৭৫	১০০০	৭২.৫	-২	-২০০০	=৮২.৫+(-৩.৭৪১)
৭৫-৮০	১২০০	৭৭.৫	-১	-১২০০	=৮২.৫-৩.৭৪১
৮০-৮৫	৬০৮	৮২.৫	০	০	=৭৮.৭৫
৮৫-৯০	৫০০	৮৭.৫	১	৫০০	
৯৫-৯৫	৩২৫	৯২.৫	২	৬৫০	
৯৫>	১২৫	৯৭.৫	৩	৩৭৫	
মোট	N=৪২৬৩		$\sum di = 0$	$\sum fidi$ = -৩১৯০	

$\therefore$ নির্ণেয় মুরগীর গড় মূল্য = ৭৮.৭৫ টাকা

নিজে করুন: নিম্নের তথ্য থেকে গড় (সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে) নির্ণয় করুন:

শ্রমিকের ধরন	শ্রমিকের প্রতি দিনের আয় (টাকায়)	শ্রমিকের সংখ্যা
মেকানিক	৯০-৯৫	২
ফিটার্স	৯৫-১০০	১৪
ইলেক্ট্রিয়ান	১০০-১০৫	২০
স্মিথ	১০৫-১১০	৭
ক্লার্ক	১১০-১১৫	৬
কার পেনটার	১১৫-১২০	১
মোট		৫০

গানিতিক গড়ের বৈশিষ্ট্য : গাণিতিক গড়ের বৈশিষ্ট্যগুলি নিম্নে দেওয়া হল:

i) প্রতিটি তথ্য থেকে তথ্যের গড়ের বিচ্যুতির যোগফল “শুণ্য” সূত্রের সাহায্যে দেখালে আমরা পাই-

$\sum_{i=1}^{n}(xi - \bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ =তথ্যসমূহের গড়।

ii) গাণিতিক গড় মূল ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল।

যদি $X_১, X_২, ...X_n$; n টি তথ্য হয় এবং প্রতিটি তথ্য থেকে মূল æa” বিয়োগ এবং মাপনী æh দিয়ে ভাগ করলে নতুন যে তথ্য আমরা পাই সেই তথ্যের গড় মূল ও মাপনীর উপর নির্ভরশীল এ ক্ষেত্রে গড় $\bar{x}=a+\bar{u}h$; a=মুল

h=মাপনী এবং $\bar{u}$ = নতুন তথ্যর গড়

iii) ধ্রুবক সংখ্যার গড় সর্বদা ধ্রুবক। n টি k সংখ্যার গড় $= \frac{k + k + ... + k}{n} = \frac{nk}{n} = k$

গাণিতিক গড়ের সুবিধাঃ

- গাণিতিক গড় সহজ পরিমাপক
- অশ্রেনীকৃত তথ্য থেকে সহজে গাণিতিক গড় নির্ণয় করা যায়।
- গাণিতিক গড় গানিতিক ও বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া আরোপের উপযোগী।
- গাণিতিক গড়ের ব্যবহার সর্বাধিক
- নমুনার তারতম্য হলেও গাণিতিক গড় কম প্রভাবিত হয়।

অসুবিধাঃ

- গাণিতিক গড় অনুমানের উপর নির্ণয় করা যায় না।
- যে সব তথ্য মান খুব বড় এবং খুব ছোট মিশ্রিত সেসব ক্ষেত্রে গানিতিক গড় সঠিকভাবে প্রতিনিধিত্ব করতে পারে না।
- তথ্যসমূহের সীমারেখা জানা না থাকলে গড় নির্ণয় করা সম্ভব নয়
- গ্রাফের মাধ্যমে গানিতিক গড় নির্ণয় করা যায় না।
- গানিতিক গড় এমন একটি সংখ্যা মান হতে পারে যা তথ্যসমূহে বিদ্যমান নয়।

ব্যবহারঃ

ব্যবহারিক জীবনে গাণিতিক গড়ের ব্যবহার বিস্তৃত। তাছাড়া ব্যবহারিক প্রয়োজনে প্রতি ক্ষেত্রেই গাণিতিক গড়ের ব্যবহার অনস্বীকার্য। যেমন, মাসিক গড় আয়, গড় লেনদেন, কোম্পানির হিসাব-নিকাশ, কোন পণ্যের গড় আমদানী রপ্তানীর ও পণ্যের চাহিদা ইত্যাদিতে গাণিতিক গড় ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করা যায়।

২। **গুনিতক গড় (Geometric Mean):** গুনিতক গড় কেন্দ্রীয় প্রবনতার একটি বিশেষ পরিমাপক। সাধারণত আনুপাতিক হিসাব, শতকরা হিসাব এবং পরিবর্তনের হারের ক্ষেত্রে গুনিতক গড় ব্যবহার উপযোগী। তাছাড়া অর্থনৈতিক ও বাণিজ্যিক তথ্য বিশ্লেষণ যেমন সূচক সংখ্যা নির্ণয়ে গুণিতক গড় ব্যবহার করা হয়। গুনিতক গড়ের সংজ্ঞা অনুসারে আমরা পাইঃ

অশূণ্য ধনাত্মক n সংখ্যাক তথ্যের গুনফলের n তম মূলকে ঐ তথ্যের গুনিতক গড় বলে অর্থাৎ গুনিতক গড়

$$G.M = \sqrt[n]{x_১.x_২.x_৩........x_n}$$

$$= (x_১.x_২.x_৩........x_n)^{\frac{1}{n}}$$

উভয় পার্শ্বে log নিলে পাই-

$$\log(G.M) = \frac{১}{n}\log(x_১.x_২......x_n)$$

$$= \frac{১}{n}[\log x_১ + \log x_২ + ... + \log n]$$

$$= \frac{১}{n}\sum_{i=১}^{x}\log x_i ; i = ১,২.........n]$$

$$G.M=Antilog\left[\frac{১}{n}\sum_{i=১}^{x}\log x_i ; i=১,২,.........n\right]$$

উদাহরণ: ৫টি ঔষধ কোম্পানির লভ্যাংশের শতকরা হার এর তথ্য নিম্নে দেওয়া হল। কোম্পানিগুলির গুনিতক গড় নির্ণয় করুন:

তথ্য

কোম্পানী	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
লভ্যাংশের শতকরা হার	**২**	**৪**	**৮**	**৭**	**১০**

সমাধান: উপরের তথ্যগুলিকে সাজিয়ে লিখলে পাই:

কোম্পানী	**লভ্যাংশের হার x_i**	**log (xi)**	
A B C D E	২ ৪ ৮ ৭ ১০	.৩০১০ .৫৯৭৯ .৯৪৫১ .৮৪৫১ ১.০০০০	$G.M=Antilog\left[\sum_{i-১}^{৫}\frac{1}{n}\log x_i\right]$ $=antilog[.৭৩৭১]$ $=৫.৫১৯$
		$\sum logxi = ৩.৬৮৭১$	

$$\therefore G.M=Antilog[\frac{১}{৫}\times ৩.৬৮৭১]$$

$\therefore$ গুনিতক গড় G.M=৫.৫১৯

নিজে করুন: নিচের তথ্য থেকে গুনিতক গড় নির্ণয় করুন

তথ্য:	4, 16, 64, 256, 1024

শ্রেণীকৃত তথ্যসমূহের গুনিতক গড় নির্ণয়:

যদি x_i, i-তম শ্রেণীর মধ্যবিন্দু এবং ঘটনসংখ্যা f_i হয় তাহলে গুনিতক গড়কে নিম্নভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়

গুনিতক গড় (শ্রেণীকৃত তথ্যের), $GM=\left[x_১^{f_১}\ x_২^{f_২}\ x_৩^{f_৩}......x_k^{f_k}\right]^{\frac{১}{N}}$;

$$N=\sum_{i=১}^{n} fi; i=১,২,.....n$$

$$\therefore \log G.M = \frac{1}{N}\left[\log\left(x_১^{f_১}\ x_২^{f_২}\ x_৩^{f_৩}......x_k^{f_k}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{N}\left[f_১\log x_১ + f_২ logx_২ + ... + f_k logx_k\right]$$

$$=\frac{1}{N}\left[\sum_{i=১}^{k}\text{fi}\log x_i;i=১,২,........k\right]$$

$$\text{G.M} =\text{Antilog}\frac{1}{N}\left[\sum_{i=১}^{k}\text{fi}\log x_i\right];i=১২.....n$$

উদাহরণ: ১৯৮০ সালের সাথে বিভিন্ন বছরের চালের উৎপাদনের তুলনামূলক উৎপাদনের একটি পরিবর্তনের তথ্য নিম্নে দেওয়া হল। গুনিতক গড় নির্ণয় করুন।

শ্রেণী ব্যবধান (উৎপাদন পরিবর্তনের হার)	বৎসরের সংখ্যা
১০০-১২৫	৩
১২৫-১৫০	২
১৫০-১৭৫	৪
১৭৫-২০০	৫
২০০-২২৫	৩
২২৫-২৫০	২
২৫০-২৭৫	২
মোট	**২১**

সমাধান: তথ্যগুলো নিম্নে টেবিল অনুসারে সাজিয়ে পাই

শ্রেণী ব্যবধান (উৎপাদনের পরিবর্তনের হার)	বছরের সংখ্যা $f_১$	মধ্যবিন্দু x_i	$f_i\log x_i$	antilog $\left[\Sigma\frac{\log x}{N}\right]$
১০০-১২৫	৩	১১২.৫	৬.১৫৩৪৬	$=\text{Antilog}\left[\frac{1}{২১}\times ৪৭.২১০১৬\right]$
১২৫-১৫০	২	১৩৭.৫	৪.২৭৬৬১	$=\text{Antilog}(২.২৪৮১০৩)$
১৫০-১৭৫	৪	১৬২.৫	৮.৮৪৩৪১	$=১৭৭.০৫$
১৭৫-২০০	৫	১৮৭.৫	১১.৩৬৫০১	
২০০-২২৫	৩	২১২.৫	৬.৯৮২০৮	
২২৫-২৫০	২	২৩৭.৫	৪.৭৫১৩৩	
২৫০-২৭৫	২	২৬২.৫	৪.৮৩৮২৬	

$\therefore \text{G.M}=১৭৭.০৫$

নিজে করুন: নিম্নের তথ্য থেকে গুনিতক গড় নির্ণয় করুন।

লাভের শতকরা হার	০-৫	৫-১০	১০-১৫	১৫-২০	২০-২৫
কোম্পানির	২	৪	৬	৩	২

সংখ্যা					

গুণিতক গড়ের সুবিধাঃ

গুনিতক গড়ের সুবিধা গুলি নিম্নে আলোচনা করা হলঃ

- গুণিতক গড়ের সংজ্ঞা যথেষ্ট স্পষ্ট
- তথ্যসমূহের শতকরা হার, অনুপাত ইত্যাদির ক্ষেত্রে গুনিতক গড় ব্যবহার সহজবোধ্য
- গুনিতক গড় মুল ও মাপনীর মানসমূহ দ্বারা প্রভাবিত হয়
- সুচক সংখ্যা তৈরিতে গুনিতক গড় ব্যবহার হয়

গুনিতক গড়ের অসুবিধাঃ

গুনিতক গড়ের অসুবিধাগুলি নিম্নে আলোচনা করা হলঃ

- গাণিতিক বিষয়ে জ্ঞান না থাকলে গুনিতক গড় নির্ণয় করা কঠিন
- তথ্য মানের মধ্যে শুন্য ও ঋনাত্মক মান থাকলে গুনিতক গড় নির্ণয় করা যায় না।
- লগ এর মাধ্যম ছাড়া গুনিতক গড় নির্ণয় কঠিন।

৩। তরঙ্গ গড় (Harmonic Mean)ঃ তরঙ্গ গড় কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের আর একটি বিশেষ পরিমাপক। কতকগুলো বিশেষ ক্ষেত্র যেমন, শেয়ার প্রতি আয়, টাকা প্রতি পণ্য ক্রয়ের পরিমান, প্রতি ঘন্টায় দুরত্ব অতিক্রম ইত্যাদি ধরনের তথ্যের গড় নির্ণয়ে তরঙ্গ গড় বিশেষভাবে উপযোগী। তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞা নিম্নে দেওয়া হলঃ

তথ্য মান সমূহের উল্টন মানগুলোর গাণিতিক গড়ের উল্টনকে তরঙ্গ গড় বলে। যদি $x_১, x_২, \ldots x_n$; n টি অশুন্য তথ্য হয় তাহলে তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞানুযায়ী পাই-

তথ্যসমূহের উল্টন মান, $\frac{1}{x_১}, \frac{1}{x_২}, \ldots \frac{1}{x_n}$ এর গাণিতিক গড়= $\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x_১}+\frac{1}{x_২}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right]$ এর উল্টন ফলকে তরঙ্গ গড় বলে।

অর্থাৎ $$H.M = \frac{১}{\frac{১}{n}\left[\frac{১}{x_১}+\frac{১}{x_২}+\ldots+\frac{১}{x_n}\right]}$$

$$= \frac{১}{\frac{১}{n}\left[\sum \frac{১}{x_1}; i = ১,২,\ldots n\right]}$$

$$= \frac{n}{\sum_{i=১}^{n} \frac{১}{x_i}}; i = ১,২,\ldots n$$

$\therefore$ তরঙ্গ গড়, $HM \; \frac{n}{\sum_{i=১}^{n} \frac{১}{x_i}}; i = ১,২,\ldots n$

উদাহরণ: ছয়টি সাবান কোম্পানীর শেয়ার প্রতি আয় দেওয়া হল

সাবান কোম্পানী	A	B	C	D	E	F
শেয়ার প্রতি আয় (টাকা)	৫	১০	২৫	২০	২৫	৩০

সমাধান: তথ্য গুলোকে সাজিয়ে আমরা পাই-

সাবান কোম্পানী	শেয়ার প্রতি আয়, x_i (টাকায়)	$\frac{১}{x_i}$	তরঙ্গ গড়= $\frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}$
A B C D E F	৫ ১০ ১৫ ২০ ২৫ ৩০	$\frac{১}{৫}=.২০$ $\frac{১}{১০}=.১০$ $\frac{১}{১৫}=.০৭$ $\frac{১}{২০}=.০৫$ $\frac{১}{২৫}=.০৪$ $\frac{১}{৩০}=.০৩৩$	$H.M=\frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}$ $=\frac{৫}{৫.৪৯৩}$ =১০.১৪১
		$\sum\frac{১}{x_i}=.৪৯৩$	

$\therefore$ নির্ণেয় তরঙ্গ গড় = ১০.১৪১

নিজে করুন: একটি কোম্পানিতে ৫টি ইউনিটে কাজ শেষ হয় যথাক্রমে A ইউনিটে ৪ মিনিটে, B ইউনিটে ৫ মিনিটে, C ইউনিটে ৬ মিনিটে, D ইউনিটে ১০ মিনিটে এবং E ইউনিটে ১২ মিনিটে। তরঙ্গ গড় নির্ণয় করুন।

শ্রেণীকৃত তথ্যের তরঙ্গগড় নির্ণয়:

শ্রেণীকৃত ঘটনসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে অর্থাৎ n সংখ্যক মানকে যদি k শ্রেণী বিশিষ্ট ঘটনসংখ্যা নিবেশনে রূপান্তরিত করা যায় অর্থাৎ যদি i তম শ্রেণীর মধ্যমান x_i এবং প্রতি শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা f_i হয় তাহলে তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞানুসারে পাই-

$$H.M=\frac{n}{\frac{f_১}{x_১}+\frac{f_2}{x_২}+.....+\frac{f_k}{x_k}}$$

$$=\frac{N}{\sum_{i=১}^{k}\frac{f_i}{x_i}};\ N=\sum_{i=১}^{k} fi;\quad i=১,২,...k$$

উদাহারণঃ নিচের তথ্য থেকে তরঙ্গ গড় নির্ণয় করুনঃ

শেয়ার প্রতি আয় (টাকায়)	কোম্পানির সংখ্যা
৫-১০	১
১০-১৫	২
১৫-২০	৩
২০-২৫	২
২৫-৩০	১
মোট	**৯**

তরঙ্গ গড়ের সুবিধাঃ
তরঙ্গ গড়ের সুবিধাগুলি নিম্নে দেওয়া হলঃ

- তরঙ্গ গড়ের সুত্র সহজভাবে বুঝা যায়।
- তরঙ্গ গড় সকল তথ্যমানের উপর ভিত্তি করে নির্ণয় করা হয়।
- তথ্যমান খুব বড় বা ছোট হলে তরঙ্গ গড় প্রভাবিত হয় না।
- শেয়ার প্রতি আয়, টাকা প্রতি পণ্য ক্রয়ের পরিমাপ, প্রতি ঘন্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব প্রভৃতি ক্ষেত্রে তরঙ্গ গড় ব্যবহার সুবিধা জনক।
- তরঙ্গ গড় গানিতিক পরিগননায় উপযোগী।

অসুবিধাঃ তরঙ্গ গড়ের অসুবিধাঃ

- ঘটনসংখ্যা নিবেশনের কোন শ্রেণীর প্রাপ্ত মান শূন্য হলে তরঙ্গ গড় নির্ণয় কঠিন
- তরঙ্গ গড়ের সুত্র বুঝতে অসুবিধা হয়।
- অর্থনেতিক বিশ্লেষণে তরঙ্গ গড় এর ব্যবহার সীমিত।

ভার আরোপিত গড় (weighted mean): ভার আরোপিত গত গড় তথ্যসমূহের 'সবকয়টি মানকে সমান গুরুত্ব দিয়ে বের করা হয়। তারতম্যমুক্ত প্রতিনিধিত্বমূলক গড় পেতে হলে প্রতিটি তথ্যমানকে তার প্রাধান্যর অনুপাত দিয়ে গুন করে সমান গুরুত্ব সম্পন্ন তথ্যমান নির্ণয় করা হয়। অতপর তাদের সমষ্টিকে গুরুত্ব সমূহের মোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে যে মান পাওয়া যায় তাকে ভার আরোপিত গড় বলা হয়। ভার আরোপিত গড় নির্ণয়ের জন্য একটি সূত্র সংজ্ঞানুযায়ী লিখতে পারি-

ভার আরোপিত গড় কে $\bar{x}_w$ দ্বারা প্রকাশ করলে $\bar{x}_w=\frac{\sum(w\times x)}{\sum w}$

যেখানে W = প্রতিটি তথ্যের গুরুত্বের মান
x = প্রতিটি তথ্যের মান
$\sum w$ = গুরুত্বের সমষ্টি

উদাহরণ: ধরা যাক তিন ধরনের শ্রমিক দুই ধরনের উৎপাদন সম্পাদন করেছে। উৎপাদনের তথ্য নিম্নে দেওয়া হল:

শ্রমিকের ধরন	ঘন্টায় আয় (টাকায়)	উৎপাদন	
		উৎপাদন-১	উৎপাদন-২
অদক্ষ	৪০	১	৪
অর্ধদক্ষ	৬০	২	৩
দক্ষ	৯০	৫	৩

সমাধান: তথ্যগুলিকে সাজিয়ে লিখলে পাই

শ্রমিকের ধরণ	ঘন্টায় আয়	উৎপাদনের প্রয়োজন		
		উৎপাদন-১	উৎপাদন-২	
অদক্ষ	৪০	$\frac{১}{৮}$	$\frac{৪}{১০}$	$\bar{x}_{1w} = \frac{(৪০\times\frac{১}{৮}+৬০\times\frac{২}{৮}+৯০\times\frac{৫}{৮}}{(\frac{১}{৮}+\frac{২}{৮}+\frac{৫}{৮})} = \frac{৭৬.২৫}{১} = ৭৬.২৫$
অর্দদক্ষ	৬০	$\frac{২}{৮}$	$\frac{৩}{১০}$	
দক্ষ	৯০	$\frac{৫}{৮}$	$\frac{৩}{১০}$	$\bar{x}_{2w} = \frac{(৪০\times\frac{৪}{১০}+৬০\times\frac{৩}{১০}+৯০\times\frac{৩}{১০}}{\frac{৪}{১০}+\frac{৩}{১০}+\frac{৩}{১০}} = \frac{৪৭.৫}{১} = ৪৭.৫০$

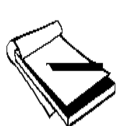
$\therefore$ শ্রমিকের প্রতি ঘন্টায় উৎপাদন-১ এর ভার আরোপিত গড়, $\bar{x}_{১w} = ৭৬.২৫$ টাকা এবং উৎপাদন-২ এর ক্ষেত্রে ভার আরোপিত গড় $\bar{x}_{২w} = ৪৭.৫$ টাকা।

নিজে করুণ: কোন একটি কোম্পানি প্রতি ব্যাগ ২০ কেজি হিসাবে কিছু সংখ্যক কয়লা অর্ধ বৎসরের জন্য ক্রয় করলো। নিম্নের দেওয়া তথ্য থেকে সরল গড় ও ভার আরোপিত গড় বের করুন।

মাস	প্রতি ব্যাগের দাম (টাকায়)	ক্রয়কৃত ব্যাগের সংখ্যা	মাস	প্রতি ব্যাগের দাম (টাকায়)	ক্রয়কৃত বাগের সংখ্যা
জানু' ২০০৫	৪২.০৫	২৫	এপ্রিল	৫২.০০	৫২
ফেব্রু	৫১.২৫	৩০	মে	৪৪.২৫	১০
মার্চ	৫০.০০	৪০	জুন	৫৪.০০	৪৫

সারসংক্ষেপ

তথ্য বিশ্ব থেকে প্রাপ্ত তথ্যসমূহ কেন্দ্রের কোন একটি মানের দিকে যাওয়ার প্রবণতা থাকে। তাই তথ্যের এ প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে। এ পাঠে শুধুমাত্র A.M.; G.M.; H.M. এবং W.M. নিয়ে আলোচনা করা হয়েছে।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন: ৩.১

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। কোনটি গানিতিক গড়ের সুত্র।

ক. $\sqrt{x_১ x_২ \ldots\ldots\ldots x_p}$

খ. $\frac{\sum x_i}{N}$

গ. $\frac{N}{\sum \frac{১}{x_i}}$

ঘ. $\sum \frac{\log x_i}{N}$

২। N সংখ্যক ধ্রুবক সংখ্যার গড় কত?

ক. N

খ. ধ্রুবক

গ. æO”

ঘ. ১

সত্য/মিথ্যা নির্ণয়

৩। তথ্য সমূহের যোগফলকে তথ্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে গড় পাওয়া যায়।

৪। গড় মূলত মাপনীয় উপর নির্ভরশীল।

শুন্যস্থান পূরণঃ

৫। $\bar{x} =$ ________ ।

৬। গুণিতক গড় নির্ণয়ে ________ মান প্রয়োজন।

বাক্য/শব্দ মিলানো

৭। সূচক তৈরি করতে গুনিতক	ক) গড়ের চেয়ে ছোট
৮। তরঙ্গ গড় সর্বদা গাণিতিক	খ) পরিমাপ
৯। গড় কেন্দ্রিয় প্রবণতার একটি	গ) গড় ব্যবহার করা হয়

পাঠ-৩.২ মধ্যমা ও এর পরিমাপ (Median and its Measurement)

ভূমিকা

মধ্যমা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপের একটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপক। মধ্যমা সাধারণত মধ্যক মানের একটি অবস্থান গত পরিমাপ। এ পাঠে মধ্যমা ও এর ব্যবহার, সুবিধা, অসুবিধা ইত্যাদি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন–

- মধ্যমার সংজ্ঞা
- মধ্যমার পরিমাপ পদ্ধতি
- শ্রেণীকৃত তথ্য থেকে মধ্যমার পরিমাপ
- বিভিন্ন গ্রাফ থেকে মধ্যমার পরিমাপ
- মধ্যমার সুবিধা, অসুবিধা ও ব্যবহার
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান ইত্যাদি।

মধ্যমা

মধ্যমা বলতে তথ্যসারির সর্ব মধ্যস্থানে অবস্থানকৃত তথ্যমানকে বুঝায়। তথ্যসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে সবচেয়ে মধ্য স্থানে যে তথ্যমানটি থাকে তাকে মধ্যমা বলে। অর্থাৎ দেখা যাচ্ছে মধ্যমা তথ্য সংখ্যার উপর নির্ভর করে। যদি তথ্যমান বিজোড় হয় তাহলে মধ্যবিন্দু হবে-

মধ্যবিন্দু= $\frac{n+১}{২}$ তম মান। এখানে তথ্যসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজাতে হবে আবার যদি তথ্য সংখ্যা জোড় হয় তাহলে একইভাবে তথ্য মানকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে মধ্যমানের অবস্থান নির্ণয় করতে হবে। মধ্যমানের অবস্থান বা মধ্য বিন্দু হবে=($\frac{n}{২}$ এবং $\frac{n}{২}+১$) তম মানদ্বয়ের গাণিতিক গড় মান।

উদাহরণ দ্বারা আলোচনা করা হল: যখন n বিজোড় সংখ্যা:

উদাহরণ-১ কোন কারখানায় ৭ জন শ্রমিকের প্রতি ঘন্টার মুজুরী নিম্নে দেওয়া হল।

মধ্যমা নির্ণয় করুন।

তথ্য:	১২, ১০, ১৫, ১৪, ১৭, ২০, ১৯

সমাধান: তথ্য সংখ্যা বিজোড়। তথ্যগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে পাই: ১০, ১২, ১৪, ১৫, ১৭, ১৯, ২৪।

মধ্যমার অবস্থান= $\frac{n+১}{২}=\frac{৭+১}{২}$ তম সংখ্যাটি = $\frac{৮}{২}=৪$ তম সংখ্যা অর্থাৎ মধ্যমা=১৫।

উদাহরণ-২: ৮ জন শ্রমিকের মজুরীর প্রতি ঘন্টার তথ্য দেওয়া হল:

তথ্য:	১২, ১০, ১৫, ১৪, ১৭, ২০, ১৯

মধ্যমা নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ এখানে তথ্য সংখ্যা n জোড়। তথ্যমানসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে পাওয়া যায়ঃ

১০, ১২, ১৩, ১৪, ১৫, ১৭, ১৯, ২০ এখানে মধ্যমার অবস্থান= $\frac{n}{২}$ তম পদ ও $\frac{n}{২}+১$ তম পদের গাণিতিক গড়

অর্থাৎ মধ্যমা ৪র্থ ও ৫ম সংখ্যার গাণিতিক গড়

$\therefore$ মধ্যমা= $\frac{১৪+১৫}{২}=\frac{২৯}{২}=১৪.৫$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা= ১৪.৫।

নিজে করুনঃ ১০ জন শ্রমিকের প্রতি ঘন্টার শ্রমের মুজুরী নিম্নে দেওয়া হলঃ

৮, ৯, ১০, ১১, ১৫, ৭, ১৩, ১৪, ৮, ১১ মধ্যমা নির্ণয় করুন।

শ্রেণিকৃত তথ্য থেকে মধ্যমা নির্ণয়ঃ

শ্রেণিকৃত তথ্য বিন্যাস থেকে মধ্যমা নির্ণয়ের সুত্রটি হল

$$Me = L+\frac{\frac{N}{2}-Fc}{fm}\times h$$ যেখানে

L = মধ্যমা শ্রেণীর নিম্নসীমা

N = তথ্য সংখ্যা

Fc = মধ্যমা শ্রেণীর পূর্ব শ্রেণীর যোজিত ঘটন সংখ্যা

fm = মধ্যমা শ্রেণীর ঘটন সংখ্যা

h = শ্রেণী ব্যবধান

$\frac{n}{২}$ • যোজিত ঘটন সংখ্যা, কে মধ্যমা শ্রেণী বলা হবে।

উদাহরণঃ কোন একটি গরুর ফার্মে দৈনিক দুধের পরিমান (K′S) এর তথ্য নিম্নে দেওয়া হলঃ

দুধের শ্রেণী ব্যবধান (K′S)	**গাভীর সংখ্যা**
<১০	১০
১০-১৫	২৫
১৫-২০	৪৮
২০-২৫	২১
২৫-৩০	১৬
৩০>	১৮

মধ্যমা নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ তথ্যগুলি মধ্যমা নির্ণয়ের জন্য সাজালে পাই-

দুধের শ্রেণী ব্যবধান	গাভীর সংখ্যা (f_i)	যোজিত ঘটন সংখ্যা (F_i)	
০<১০ ১০.১৫	১০ ২৫	১০ ৩৫	$Me = \dfrac{L + \dfrac{N}{2} - Fc}{fm} \times h$ $= \dfrac{১৫ + \dfrac{১৩২}{২} - ৩৫}{৪৮} \times ৫$ $=১৭.৭১$
১৫-২০	৪৮	৮৩	
২০-২৫ ২৫-৩০ ৩০>	২১ ১৬ ১২	১০৪ ১২০ ১৩২	
	N=১৩২		

এখানে $\dfrac{N}{২} = \dfrac{১৩২}{২} = ৬১ \leq ৮৩$ অর্থাৎ মধ্যমা শ্রেণী হল, ১৫-২০

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা=১৭.১৭ Kg.

নিজে করুণ: একটি কারখানায় ১৫০০ শ্রমিক নিয়োজিত আছে। তাদের বয়সের তথ্য দেওয়া হল। মধ্যমা নির্ণয় করুন।

তথ্য:

বয়স	শ্রমিকের সংখ্যা
১৮-২২	১২০
২২-২৬	১২৫
২৬-৩০	২৮০
৩০-৩৪	২৬০
৩৪-৩৮	১৮৪

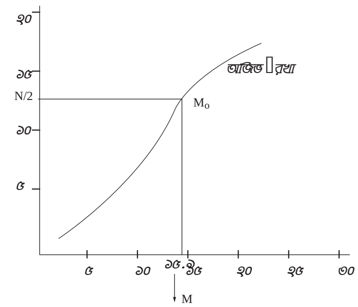
বয়স	শ্রমিকের সংখ্যা
৩৮-৪২	১৬২
৪২-৪৬	১৫৫
৪৬-৫০	৮৬
৫০-৫৪	৭৫
৫৪-৫৮	৫৩

লেখচিত্রের মাধ্যমে মধ্যমা নির্ণয়: লেখচিত্রের মাধ্যমে মধ্যমা নির্ণয় করা যায়। আমরা পূর্ব ইউনিট থেকে অজিভ রেখা অঙ্কন করতে শিখেছি। অজিভ রেখা থেকে মধ্যমা নির্ণয় করতে হলে নিম্নের পদক্ষেপগুলি নিতে হবে।

১। অজিভ রেখার X- অক্ষে থাকে শ্রেণীর উচ্চ সীমা এবং Y- অক্ষে থাকে যোজিত ঘটন সংখ্যা। ঘটন সংখ্যা সমষ্টি N- হলে $\dfrac{N}{2}$ এর অবস্থান প্রথমে Y- অক্ষে চিহ্নিত করতে হবে।

২। Y- অক্ষের $\dfrac{N}{2}$ বিন্দু থেকে X- অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কন করলে অজিভ রেখার যে বিন্দুতে ছেদ করবে সেখানে নির্দেশ করতে হবে Mo.

৩। ছেদ বিন্দু Mo থেকে X- অক্ষের উপর একটি লম্ব আঁকতে হবে যা X- অক্ষের M নির্দেশিত বিন্দুতে ছেদ করবে। X- অক্ষের উপর এই ছেদ বিন্দু M এর অবস্থানই হবে মধ্যমা। নিচের চিত্রটিতে লক্ষ্য করুন। এখানে মধ্যমা হল ১৪.৯।



চিত্রঃ মধ্যমা নির্ণয়

নিজে করুন: ৬০ জন শিক্ষার্থীর পরিসংখ্যান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বরের ঘটনসংখ্যা বিন্যাস নিম্নে দেওয়া হল। গ্রাফের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করুন।

প্রাপ্ত নম্বর	**৩০-৩৫**	**৩৫-৪০**	**৪০-৪৫**	**৪৫-৫০**	**৫০-৫৫**	**৫৫-৬০**	**৬০-৬৫**	**৬৫-৭০**
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	২	৬	২০	১৬	১০	৩	২	১

মধ্যমার সুবিধা:

মধ্যমার সুবিধাগুলি নিম্নে আলোচনা করা হলো:

- মধ্যমা নির্ণয় করা খুবই সহজ।
- মধ্যমা অবস্থান ভিত্তিক কেন্দ্রীয় প্রবনতায় পরিমাপ।
- মধ্যমা লেখ চিত্রের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়।
- সীমা বিহীন ঘটনসংখ্যা নিবেশনের ক্ষেত্রে মধ্যমা নির্ণয় করা যায়।
- তথ্য মান 'খুব ছোট' বা বড় হলে মধ্যমা খুব কম প্রভাবিত হয়।

মধ্যমার অসুবিধা:

মধ্যমার অসুবিধা গুলি নিম্নে দেখানো হল:

- মধ্যমা সকল মানের উপর ভিত্তি করে করা যায় না শুধুমাত্র তথ্যমানের অবস্থানের উপর নির্ভর করে মধ্যমা নির্ণয় হয়।
- তথ্যমানসমূহের মধ্যমা জানা থাকলে এবং তথ্যমানের সংখ্যা জানা থাকলেও তথ্যসমূহের সমষ্টি বের করা যায় না।
- মধ্যমা নির্ণয় করতে তথ্যসমূহের মানের ক্রমানুসারে তথ্যগুলি সাজিয়ে মধ্যমা নির্ণয় করতে হয়। তথ্যসমূহ অনেক বড় এবং মানগুলো অধিক হলে তথ্যসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজান খুবই কঠিন হয়।
- মধ্যমা গাণিতিক প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যায় না।
- অনিয়মিত তথ্য সারির ক্ষেত্রে অনেক সময় মধ্যমা সঠিকভাবে প্রতিনিধিত্ব করতে পারে না।

সারসংক্ষেপ

মধ্যমা কেন্দ্রীয় পরিমাপের একটি জনপ্রিয় পরিমাপক। মধ্যমা সহজ ও সঠিক প্রতিনিধিত্বকারি পরিমাপক। লেখচিত্রের মাধ্যমেও মধ্যমা নির্ণয় করা যায়। মধ্যমা ব্যবসায়িক প্রতিষ্ঠানে ব্যাপক ব্যবহার করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়নঃ ৩.২

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নঃ

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। তথ্য সমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে মধ্যের বিন্দুকে বলে।

ক. গড় খ. মধ্যক

গ. প্রচুরক ঘ. ভেদাঙ্ক

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন

২। তথ্য সমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে সর্বাধিক ব্যবহৃত সংখ্যাকে প্রচুরক বলে।

৩। লেখ চিত্রের সাহায্যে মধ্যমা নির্ণয় করা যায় না।

শুন্যস্থান পূরণ করুন

৪। _____ গ্রফ তথ্যর ক্ষেত্রে Mediam = ____ ।

বাক্য/শব্দ মিলানো

১। লেখ চিত্রের সাহায্যে মধ্যমা ২। তথ্যসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে সবচেয়ে মধ্যস্থানে যে তথ্যটি থাকে তাকে	ক) কে মধ্যমা বলে খ) নির্ণয় করা যায়

পাঠ-৩.৩ প্রচুরক ও এর পরিমাপ (Mode and its uses)

ভূমিকা

প্রচুরক কেন্দ্রীয় প্রবণতা নির্ণয়ের একটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপক। প্রচুরক তথ্য সমূহের ঘনত্বের পরিমাপ করে। তথ্যের সর্বাধিক পুনরাবৃত্তিক সংখ্যাকে বলা হয় প্রচুরক। এ পাঠে প্রচুরক সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি বলতে পারবেন–

- প্রচুরকের সংজ্ঞা;
- প্রচুরকের ব্যবহার;
- শ্রেণীকৃত বিন্যাস থেকে প্রচুরক নির্ণয়;
- প্রচুরকের পরিমাপ পদ্ধতি;
- লেখ চিত্রের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয়;
- বিভিন্ন সমস্যার সমাধান ইত্যাদি।

প্রচুরক: তথ্যসমূহের যে সংখ্যাটি সর্বাধিক বার পুনরাবৃত্তি হয় সে তথ্যটিকে প্রচুরক বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় কোন গার্মেন্টস এর বিভিন্ন সাইজের শার্ট বাজারে এসেছে। দেখা গেল ক্রেতা একটি নির্দিষ্ট কাটিং এর শার্ট পছন্দের তালিকায় রেখেছে অর্থাৎ ঐ নির্দিষ্ট কাটিং এর শার্ট ক্রয় হল প্রচুরক। প্রচুরকের সংজ্ঞাটি নিম্নরূপে দেওয়া যায়-
প্রচুরক তথ্যসমূহকে মানের ক্রমানুসারে সাজালে যে মানটি সর্বাধিক পুনরাবৃত্তি হয়েছে তাকে প্রচুরক বলে।

উদাহরণ: মোল্লাহাট থানার কাহাদপুর গ্রামে কয়েকটি পরিবারে সন্তানের সংখ্যা জরিপের একটি তথ্য নিম্নে দিওয়া হল। প্রচুরক নির্ণয় করুন।

সন্তানের সংখ্যা	০	১	২	৩	৪	৫	৬
পরিবারের সংখ্যা	৫	১১	২৩	৩২	১৭	৮	৩

সমাধান: উপরের তথ্য থেকে দেখা, যাচ্ছে যে ৩ জন সন্তান সর্বাধিক পরিবারে রয়েছে তাই এখানে পরিবারের সন্তান সংখ্যার প্রচুরক হল ৩।
নিজে করুন: কোন কারখানায় ১০ জন শ্রমিকের প্রতি ঘন্টার মুজুরী হল: ১২, ১০, ১৫, ১০, ১৪, ১৭, ১৪, ১৪, ২০, ১৪। মুজুরির প্রচুরক নির্ণয় করুন।
শ্রেণীকৃত তথ্য থেকে প্রচুরক নির্ণয়: প্রচুরক নির্ণয়ে শ্রেণীকৃত তথ্য বিন্যাসের ক্ষেত্রে ব্যবহৃত সুত্রটি নিম্নে দেওয়া হল।

প্রচুরক $= L + \frac{\Delta_১}{\Delta_১ + \Delta_২} \times h$ যেখানে সবচেয়ে বেশি ঘটন সংখ্যাযুক্ত শ্রেণীকে প্রচুরক শ্রেণী বলা হয়।

L = প্রচুরক শ্রেণীর নিম্ন সীমা
$\Delta_১$ = প্রচুরক শ্রেনীর ঘটনসংখ্যা ও প্রচুরক শ্রেণীর পূর্বের ঘরের ঘটনসংখ্যার পার্থক্য।
$\Delta_২$ =প্রচুরক শ্রেণীর ঘটনসংখ্যা ও প্রচুরক শ্রেণীর পরের ঘরের ঘটনসংখ্যার পার্থক্য
h =শ্রেণী ব্যবধান

উদাহরণ: কোন শহরে ৩০ জন ক্রেতার বিভিন্ন সাইজের T.V পছন্দের তালিকার তথ্য নিম্নে দেওয়া হল। T.V সাইজের প্রচুরক নির্ণয় করুন।

TV সাইজ (ইঞ্চি)	ঘটন সংখ্যা
১০-১৭	৫
১৭-২৪	৮
২৪-৩০	১৩
৩০-৩৬	৪
মোট	৩০

সমাধান: প্রচুরক নির্ণয় সুত্রটি হল:

$$Mo = L + \frac{\Delta_১}{\Delta_১ + \Delta_২} \times h$$

এখানে, প্রচুরক শ্রেণী হল

	সাইজ (ইঞ্চিতে)	ঘটন সংখ্যা		
	১০-১৭ ১৭-২৪	৫ ৮	$Mo = L + \frac{\Delta_১}{\Delta_১ + \Delta_২} \times h$ $\Delta_১$ =১৩-৮=৫ $\Delta_২$ =১৩-৪=৯ h=৭	$\therefore Mo = ২৪ + \frac{৫}{৫+৯} \times ৭$ =২৬.৫
প্রচুরক শ্রেণী	২৪-৩০	১৩		
	৩০-৩৬	৪		
	মোট	৩০		

$\therefore$ নির্ণেয় প্রচুরক= ২৬.৫

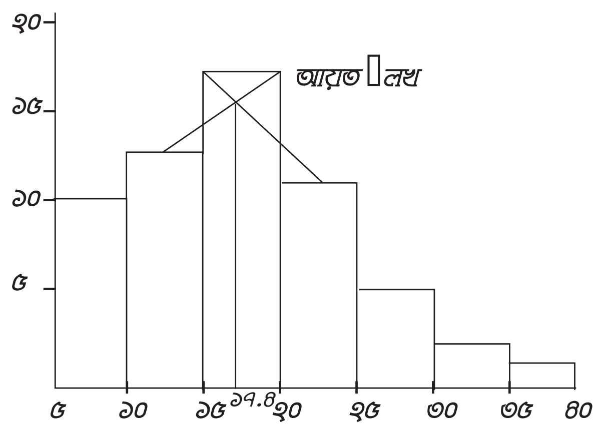
নিজে করুন: ১০০টি কোম্পানীর কোন দ্রব্য বিক্রয়ের তথ্য নিম্নে দেওয়া হল, বিক্রয়ের প্রচুরক নির্ণয় করুন।

দ্রব্য বিক্রয় (লক্ষ টাকার)	কোম্পানির সংখ্যা	দ্রব্য বিক্রয় (লক্ষ টাকায়)	কোম্পানীর সংখ্যা
$\angle$৬০	১২	৬৬-৬৮	১০
৬০-৬২	১৮	৬৮-৭০	৩
৬২-৬৪	২৫	৭০-৭২	২
৬৪-৬৬	৩০		

লেখচিত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয়ঃ লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় করতে আমরা আয়তলেখ এর সাহায্য নিই। প্রচুরক নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত পদক্ষেপগুলি নিতে হবে।

- আয়তলেখ আঁকার পর X-অক্ষের দিকে শ্রেণী মান এবং Y-অক্ষের দিকে ঘটনসংখ্যার মান নির্দেশিত থাকে।
- আয়তলেখের সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্রটি নির্বাচন করতে হবে। এখানেই প্রচুরক অবস্থান করে।
- সর্বোচ্চ আয়তক্ষেত্রের ডান ও বাম উভয় পার্শ্বের আয়তক্ষেত্র বিবেচনা করতে হবে।

- নিচের চিত্রনুযায়ী প্রচুরক শ্রেণীর নিম্নসীমায় অবস্থিত বাম পাশের আয়তক্ষেত্রে উচ্চতর বিন্দু A-এর সহিত প্রচুরক শ্রেণীর উচ্চ সীমার অবস্থিত উচ্চতম বিন্দু B- একটি সরল রেখা AB দ্বারা যোগ করতে হবে। আবার প্রচুরক শ্রেণীর নিম্নসীমায় অবস্থিত আয়তক্ষেত্রের উচ্চতম বিন্দু C এর সহিত প্রচুরক শ্রেণীর উচ্চ সীমায় অবস্তিত ডান পার্শ্বের আয়ত ক্ষেত্রের উচ্চতম বিন্দু D একটি সরলরেখা CD দ্বারা যোগ করতে হবে। AB এবং CD রেখা পরস্পর M বিন্দুতে ছেদ করে।
- M থেকে X- অক্ষের উপর লম্ব টানলে Mo বিন্দুতে ছেদ করবে। এই Mo এর অবস্থান থেকে প্রচুরক পাওয়া যাবে। প্রচুরক=১৭.৪।



চিত্রঃ প্রচুরক নির্ণয়

নিজে করুন: ১৫০০ শ্রমিকের আয়ের তথ্য নিম্নে দেওয়া আছে। আয়তলেখ অঙ্কন করুন অতপর প্রচুরক নির্ণয় করুন।

মাসিক আয় (হাজার টাকায়)	শ্রমিকের সংখ্যা
১৮-২০	১০
২০-২২	৩৫
২২-২৪	১৪০
২৪-২৬	৩০০
২৬-২৮	৩৭০

মাসিক আয় (হাজার টাকায়)	শ্রমিকের সংখ্যা
২৮-৩০	৩২০
৩০-৩২	২০০
৩২-৩৪	৭৫
৩৪-৩৬	৩৫
৩৬-৩৮	১৮

প্রচুরকের সুবিধাঃ

প্রচুরকের সুবিধাগুলি নিম্নে দেওয়া হলো:

- প্রচুরক নির্ণয় খুবই সহজ
- লেখচিত্রের সাহায্যে প্রচুরক নির্ণয় করা যায়
- শ্রেণী সীমা খোলা থাকলেও প্রচুরক নির্ণয় করা যায়।
- ব্যবসায়িক ক্ষেত্র প্রচুরকের বেশি ব্যবহার হয়।
- গুনবাচক বৈশিষ্ট্যের বর্ণনা করতে প্রচুরকের মাধ্যমে জানা সহজ হয়।

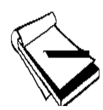
প্রচুরকের অসুবিধাঃ

প্রচুরকের অসুবিধা সমূহ নিম্নে দেওয়া হল:

- সর্বাধিক সংঘঠিত সংখ্যা একাধিক হলে প্রচুরক নির্ণয় সহজ হয় না
- প্রচুরক বীজগানিতিক গণনায় ব্যবহার করা যায় না।
- শ্রেণীবদ্ধকরনের প্রকৃতির উপর প্রচুরকের মানের প্রভাব থাকে।

সারসংক্ষেপ

প্রচুরক কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি গুরুত্বপূর্ণ পরিমাপক। প্রচুরক লেখচিত্রের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়। ব্যবসায়িক ক্ষেত্রে যেমন কোন কোম্পানীর উৎপাদিত দ্রব্যের ত্রুটিপূর্ণ দ্রব্যের সংখ্যা কতটা বেশী তা সহজে প্রচুরকের সাহায্য ধরা যায়।



পাঠোত্তর মূল্যায়নঃ ৩.৩

নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পার্শ্বে টিক (√) চিহ্ন দিন।

১। তথ্য সমূহের ঘনত্ব নির্ণয় করে নিচের কোনটি ____ ।

ক. মধ্যমা　　খ. প্রচুরক

গ. গড়　　ঘ. ভেদাঙ্ক

সত্য/মিথ্যা নির্ণয় করুন

২। প্রচুরক বীজগণিতিক গণনার ব্যবহার করা যায় না।

৩। প্রচুরক নির্ণয় খুবই কঠিন।

শুন্যস্থান পূরন করুন

৪। প্রচুরক M = L+ .... ।

৫। ____ নির্ণয়ে আয়তলেখ ব্যবহার করা হয়।

বাক্য/শব্দ মিলানো

১। শ্রেণীবদ্ধ করণের প্রকৃতির উপর	ক) গণনায় ব্যবহার করা যায় না
২। প্রচুরক বীজগাণিতিক	খ) প্রচুরকের মানের প্রভাব থাকে

চূড়ান্ত মূল্যায়ন-৩

১। কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ বলতে কি বুঝায়? ব্যাখ্যা করুন।

২। গাণিতিক গড়ের সংজ্ঞা লিখুন। গাণিতিক গড়ের সুবিধা ও অসুবিধা আলোচনা করুন।

৩। গাণিতিক গড়, গুণিতক গড় ও তরঙ্গ গড়ের সংজ্ঞা লিখুন এবং উহাদের মধ্যে সম্পর্ক আলোচনা করুন।

৪। মধ্যমার সংজ্ঞা লিখুন। গ্রাফের সাহায্যে কিভাবে মধ্যমা নির্ণয় করা যায় আলোচনা করুন।

৫। প্রচুরকের সংজ্ঞা লিখুন। গ্রাফের সাহায্যে কিভাবে প্রচুরক নির্ণয় করা যায় আলোচনা করুন।