ইউনিট

প্রাক্কলন

Estimation

৫

ভূমিকা

প্রাক্‌কলন পরিসংখ্যান তত্ত্বের একটি গুরুত্বপূর্ণ অধ্যায়। গবেষণার বিভিন্ন ক্ষেত্রে নমুনা নেওয়ার প্রয়োজন হয়। তথ্যবিশ্বে বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যের নমুনা অন্তর্ভূক্ত। তাই নমুনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনা তত্ত্বের উপর নির্ভর করে তথ্যবিশ্বের প্রকৃতি সম্বন্ধে ধারণা করা সহজ হয়। আবার অনেক সময় কোন গবেষক বা পরিসংখ্যানবিদ পরামান নির্ণয় সাপেক্ষ্যে তথ্যবিশ্বের ধারণা লাভ করেন। এ ইউনিটে কি ভাবে পরামান প্রাক্‌কলন করা হয় যে সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ০২ সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৫.১	ঃ	প্রাক্কলনের সংজ্ঞা ও প্রকারভেদ
পাঠ ৫.২	ঃ	প্রাক্কলনের বৈশিষ্ট্য
পাঠ ৫.৩	ঃ	নমুনা আকার ও সম্ভাবনা ত্রুটি
পাঠ ৫.৪	ঃ	গড় সম্পর্কিত সমস্যা ও সমাধান
পাঠ ৫.৫	ঃ	অনুপাত সম্পর্কিত সমস্যা ও সমাধান

পাঠ ৫.১ প্রাক্কলনের সংজ্ঞা ও প্রকারভেদ
Definition of Estimation and its Classification

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- প্রাক্কলনের সংজ্ঞা বলতে পারবেন।
- প্রাক্কলনের বিভিন্ন প্রকারভেদ সম্পর্কে লিখতে পারবেন।

প্রাক্কলনের সংজ্ঞা
Definition of Estimation

প্রাক্কলনের সংজ্ঞা মূলত প্রাক্কলক বা নিরূপক (Estimator) ও পরিসংখ্যানিক প্রাক্কলন বা নিরূপন (Statistical Estimation) এই দুটি বিষয়ের উপর নির্ভরশীল।

প্রাক্কলক বা নিরূপক (Estimator)ঃ যে সকল নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়, তাদেরকে প্রাক্কলক বা নিরূপক (Estimator) বলে। এরূপ প্রাক্কলকের নির্ণীত মানসমূহকে প্রাক্কলিত বা নিরূপিত মান (Estimate) বলে।

পরিসংখ্যানিক প্রাক্কলন বা নিরূপন (Statistical Estimation) ঃ যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতিতে নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়, তাকে পরিসংখ্যানিক প্রাক্কলন বা নিরূপন (Statistical Estimation) বলে।

প্রাক্কলনের প্রকারভেদ
(Classification of Estimation)

পরিসংখ্যানিক প্রাক্কলন বা নিরূপণ দুইভাবে করা যায়। যথাঃ

ক. বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপণ (Point Estimation)

খ. ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপণ (Interval Estimation)

ক. বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপন (Point Estimation)ঃ যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতিতে নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) -এর সম্পর্ক একটি নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে নিরূপণ করা হয়, তাকে বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপণ বলে। যেমন ঃ ঢাকা সিটি কলেজের ছাত্রছাত্রীর গড় বয়স জানতে সমস্ত ছাত্রছাত্রীর বয়স গণনা করা সম্ভব না হলে সমস্ত ছাত্রছাত্রীর মধ্যে কিছু সংখ্যাক ছাত্রছাত্রীর বয়স গণনা করে গড় বয়স 20 বৎসর পাওয়া গেলো। এখন, গড় বয়স 20 বৎসরকেই যদি ঢাকা সিটি কলেজের সমস্ত ছাত্রছাত্রীর গড় বয়স হিসেবে বিবেচনা করা হয়, তবে তা হবে বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপন (Point Estimation)।

উদাহরণঃ সাধারণ দৈব চয়নে 110 জন ভূমিহীন মজুরের দৈনিক গড় আয় 40.20 টাকা এবং পরিমিত ব্যবধান 7.15 টাকা। প্রদত্ত উপাত্ত অনুযায়ী সমগ্রক গড়ের বিন্দু প্রাক্কলিত মান কত?

সমাধান: মনে করি, ভূমিহীনদের দৈনিক আয়ের গড় $= \mu$

দেয়া আছে, $n = 110,\ \bar{x} = 40.20,\ s = 7.15,\ \alpha = 0.05$

সমগ্রকের নিরূপিত বিন্দু প্রাক্কলিত মান, $\hat{\mu} = \bar{x} = 40.20$ টাকা।

খ. ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপন (Interval Estimation): যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতিতে নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) -এর সম্পর্ক একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নিরূপণ করা হয়, তাকে ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপণ বলে। যেমন ঃ নাটোর সিটি কলেজের ছাত্রছাত্রীর গড় বয়স জানতে সমস্ত ছাত্রছাত্রীর বয়স গণনা করা সম্ভব না হলে সমস্ত ছাত্রছাত্রীর মধ্যে কিছু সংখ্যাক ছাত্রছাত্রীর বয়স গণনা করে গড় বয়স 20-22 বৎসর পাওয়া গেলো।

এখন, গড় বয়স 20-22 বৎসরকেই নাটোর সিটি কলেজের ছাত্রছাত্রীর গড় বয়স হিসেবে বিবেচনা করা হয়, তবে তা হবে ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপন (Interval Estimation)।

উদারহণ: সাধারণ দৈব চয়নে 110 জন ভূমিহীন মজুরের দৈনিক গড় আয় 40.20 টাকা এবং পরিমিত ব্যবধান 7.15 টাকা। প্রদত্ত উপাত্ত অনুযায়ী 95% আস্থা সীমায় ভূমিহীনদের দৈনিক আয়ের সীমা নির্দেশ করুন।

সমাধান: মনে করি, ভূমিহীনদের দৈনিক আয়ের গড় = μ

দেয়া আছে, $n = 110$, $\bar{x} = 40.20$, $s = 7.15$, $\alpha = 0.05$

$\therefore$ নির্ণেয় ভূমিহীনদের দৈনিক আয়ের সীমা,

$$\bar{x} - z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 40.20 - z_{\frac{0.05}{2}} \frac{7.15}{\sqrt{110}} \le \mu \le 40.20 + z_{\frac{0.05}{2}} \frac{7.15}{\sqrt{110}}$$

$$= 40.20\text{-}1.96 \times \frac{7.15}{10.49} \le \mu \le 40.20\text{+}1.96 \times \frac{7.15}{10.49}$$

$$= 40.20\text{-}1.34 \le \mu \le 40.20 + 1.34$$

$$= 38.86 \le \mu \le 41.54$$

অর্থাৎ, 95% আস্থা সীমায় ভূমিহীনদের দৈনিক আয়ের সীমা 38.86 টাকা হতে 41.54 টাকার মধ্যে।

বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপণ ও ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপণের মধ্যে পার্থক্য

(Distinguish between the point estimation and interval estimation)

বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপন ও ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপণের মধ্যে পার্থক্য নিম্নে দেওয়া হলেঅঃ

বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপণ (Point Estimation)	**ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপণ (Interval Estimation)**
১। যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতিতে নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) -এর সম্পর্ক একটি নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে নিরূপণ করা হয়, তাকে বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপণ বলে।	১। যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতিতে নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) -এর সম্পর্ক একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে নিরূপণ করা হয়, তাকে ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপণ বলে।
২। সমগ্রকের নিরূপিত বিন্দু প্রাক্কলিত মান, $\hat{\mu} = \bar{x}$	২। সমগ্রকের গড়ের আস্থা সীমা ঃ $\bar{x} \pm z \frac{s}{\sqrt{n}}$

সারসংক্ষেপ

যে সকল নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়, তাদেরকে প্রাক্কলক বা নিরূপক (Estimator) বলে। প্রাক্কলকের নির্ণীত মানসমূহকে প্রাক্কলিত বা নিরূপিত মান (Estimate) বলে।

আবার যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতিতে নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়, তাকে পরিসংখ্যানিক প্রাক্কলন বা নিরূপন (Statistical Estimation) বলে। এছাড়া যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতিতে নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) -এর সম্পর্ক একটি নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে নিরূপণ করা হয়, তাকে বিন্দু প্রাক্কলন বা বিন্দু নিরূপণ বলে এবং যে পরিসংখ্যানিক পদ্ধতিতে নমুনাজমানের ভিত্তিতে পরামিতি (সমগ্রকের মানসমূহের পরিমাপ) -এর সম্পর্ক একটি নির্দিষ্ট সীমার ভিত্তিতে নিরূপণ করা হয়, তাকে ব্যাপ্তি প্রাক্কলন বা ব্যাপ্তি নিরূপণ বলে।

পাঠ ৫.২ প্রাক্কলনের বৈশিষ্ট্য
Properties of Estimator

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- উত্তম প্রাক্কলনের বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

পরিসংখ্যানিক প্রাক্কলক বা নিরূপকের বৈশিষ্ট্য
Properties of Statistical Estimator

একটি ভালো বা উত্তম পরিসংখ্যানিক প্রাক্কলক বা নিরূপকের বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নরূপঃ

ক. নিরপেক্ষতা বা পক্ষপাতহীনতা (Unbiasedness) ঃ যদি কোনো নমুনাজমানের নিরূপিত মান পরামিতির মানের সমান হয়, তবে সেই নমুনাজমানটিকে নিরপেক্ষ বা পক্ষপাতহীন নিরূপক বলা হয়। অর্থাৎ, কোন নমুনা গড় ($\bar{x}$) কে সমগ্রক গড় (μ) এর নিরপেক্ষ বা পক্ষপাতহীন নিরূপক বলা হয় যদি $E(\bar{x}) = \mu$ হয়।

খ. সামঞ্জস্যতা (Consistency) ঃ যদি নমুনার আকার বৃদ্ধির সাথে সাথে নিরূপকটি সমগ্রকের পরিমানের নিকটবর্তী হয়, তবে সেই নিরূপকটিকে সামঞ্জস্যতাপূর্ণ বলা হয়। অর্থাৎ, নমুনার আকার বৃদ্ধির ফলে নমুনাজমান পরামিতির সম্ভাব্য মানের দিকে ধাবিত হয়।

গ. দক্ষতা (Efficiency) ঃ যদি কোনো একটি পরামিতির একাধিক নিরপেক্ষ বা সামঞ্জস্যতাপূর্ণ নিরূপক থাকে, তবে যে নিরূপকের ভেদাঙ্ক সর্বনিম্ন তাকে দক্ষ নিরূপক বলা হয়। নিরূপকের এ ধরনের বৈশিষ্ট্যকে দক্ষতা বলা হয়। অর্থাৎ, কোন সমগ্রকের পরামিতি θ এর দুইটি নিরপেক্ষ বা সামঞ্জস্যতাপূর্ণ নিরূপক যথাক্রমে $\hat{\theta}_1$ এবং $\hat{\theta}_2$ হলে $\hat{\theta}_1$ কে দক্ষ নিরূপক বলা হবে যদি $V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$ হয়।

ঘ. পর্যাপ্ততা (Sufficiency) ঃ যে নিরূপক নমুনার সকল মান গ্রহণ করে নির্ণীত হয়, তাকে পর্যাপ্ত (Sufficient)নিরূপক বলে। গাণিতিকভাবে, সমগ্রক গড় (μ) এর পর্যাপ্ত (Sufficient) নিরূপক হলো নমুনা গড় ($\bar{x}$) কিন্তু মধ্যমা (Me) নয়। কারণ, নমুনার সকল মান গ্রহণ করে নমুনা গড় ($\bar{x}$) নির্ণীতক হয় কিন্তু নমুনার সকল মান গ্রহণ করে মধ্যমা (Me) নির্ণীত হয় না। নিরূপকের এ ধরণের বৈশিষ্ঠ্যকে পর্যাপ্ততা বলা হয়।

সারসংক্ষেপ

যদি কোনো নমুনাজমানের নিরূপিত মান পরামিতির মানের সমান হয়, তবে সেই নমুনাজমানটিকে নিরপেক্ষ বা পক্ষপাতহীন নিরূপক বলা হয়। আবার যদি নমুনার আকার বৃদ্ধির সাথে সাথে নিরূপকটি সমগ্রকের পরিমাপের নিকটবর্তী হয়, তবে সেই নিরূপকটিকে সামঞ্জস্যতাপূর্ণ বলা হয়। এছাড়া যদি কোনো একটি পরামিতির একাধিক নিরপেক্ষ বা সামঞ্জস্যতাপূর্ণ নিরূপক থাকে, তবে যে নিরূপকের ভেদাঙ্ক সর্বনিম্ন তাকে দক্ষ নিরূপক বলা হয়। যে নিরূপকের নমুনার সকল মান গ্রহণ করে নির্ণীত হয়, তাকে পর্যাপ্ত (Sufficient)নিরূপক বলে।

পাঠ ৫.৩ সম্ভাবনা ত্রুটি ও নমুনা আকার

Probable Error and Sample size

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- সম্ভাবনা ত্রুটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- নমুনা আকার সম্পর্কে বলতে পারবেন।

সম্ভাব্য ত্রুটি

Probable Error

সমগ্রক গড় (μ) এর আস্থা সীমা $\bar{x} - z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ হলে $z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ কে গড় ($\bar{x}$) এর সম্ভাব্য ত্রুটি বলে। একে সংক্ষেপে P.E. দ্বারা লেখা হয়।

উদাহরণ (১) ঃ 300 টি আইটেমের একটি নমুনার গড় 16.0 পাওয়া গেল। এই নমুনাটি এমন একটি বৃহৎ সমগ্রক হতে নেয়া হয় যার গড় 16.8 এবং পরিমিত ব্যবধান 5.2। এরূপ নমুনার গড়ের 99% আস্থা সীমায় সম্ভাব্য ত্রুটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\bar{x} = 16.0$, $\mu = 16.8$, $\sigma = 5.2$, $n = 300$

1% যথার্থ মাত্রায় z এর সংশয় মান, $|z_{0.005}| = 2.58$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় 99\% আস্থা সীমায় সম্ভাব্য ত্রুটি, } P.E = z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$= 2.58 \times 0.3002 = .7745$$

আস্থা সীমা বা ব্যাপ্তি (Confidence Interval)ঃ

১৯৩৭ সালে প্রফেসর J. Neyman সর্বপ্রথম আস্থা সীমার ধারণা প্রদান করেন। কোনো পরিসংখ্যানিক পরীক্ষার নমুনা হতে প্রাপ্ত মানের ভিত্তিতে সমগ্রকের পরামিতির মান কোনো একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাবনাকে আস্থা সীমা বলে। একে সংক্ষেপে C.I দ্বারা লেখা হয়। সাধারণতঃ 95% বা 99% C.I ব্যবহার করা হয়।

বিভিন্ন আস্থার স্তরে আস্থার সহগ Zc এর মান নিম্নের সারণিতে দেওয়া হলোঃ

confidence level	99.73%	99%	98%	96%	95.45%	95%	90%	80%	68.27%	50%
Zc	3.00	2.58	2.33	2.05	2.00	1.96	1.645	1.28	1.00	0.6745

গুরুত্বের স্তর বা তাৎপর্য স্তর বা যথার্থতার মাত্রা (Level of Significance)ঃ

কোনো পরিসংখ্যানিক পরীক্ষায় নমুনা হতে প্রাপ্ত মানের ভিত্তিতে সমগ্রকের পরামিতির মান কোনো একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে না থাকার সম্ভাবনাকে গুরুত্বের স্তর বা তাৎপর্য স্তর বা যথার্থতার মাত্রা বলে। অন্যভাবে, কোন যথার্থতা যাচায়ে প্রথম ধরণের ভুল করার সর্বোচ্চ সম্ভাবনাকে যথার্থতার মাত্রা বলা হয়। কোন যাচায়ে যথার্থতার মাত্রা যদি উল্লেখ করা না থাকে তবে এর মান 0.05 ধরা হয়। যথার্থতার মাত্রা α (আলফা) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে, $\alpha = P(H_0$ বাতিল $|H_0$ সত্য)| কোন যাচায়ে যথার্থতার মাত্রা অনুল্লেখ থাকলে $\alpha = 0.05$ হয়। $\alpha = 0.05$ হলে প্রথম ধরণের ভুল করার সম্ভাবনা 0.05 বা 5% ; অর্থাৎ গৃহীত সিদ্ধান্তের যথার্থতা সম্পর্কে আমরা 0.95 বা 95% নিশ্চিত। সাধারণতঃ 1% বা 5% গুরুত্বের স্তর ব্যবহার করা হয়।

নমুনা আকার

Sample size

কোন সমগ্রক হতে নির্বাচিত ও গৃহীত নমুনায় নমুনা উপাদান (Sample unit) -এর মোট সংখ্যাকে ঐ নমুনার নমুনা আকার বলা হয়। নমুনা আকার যথার্থতা যাচায়ের একটি তাৎপর্যপূর্ণ বিষয়, কারণ নমুনা আকার ছোট ($n < 30$) বা বড় ($n \geq 30$) হওয়ার কারণে যথার্থতা যাচায়ে পদ্ধতি ভিন্ন হয়।

নমুনার আকার নিরূপণ (Estimation of Sample Size) **ঃ**

কোন সমগ্রক হতে নির্বাচিত ও গৃহীত নমুনায় নমুনা উপাদান (Sample unit) -এর মোট সংখ্যাকে ঐ নমুনার নমুনা আকার (Sample Size) বলা হয়। এখন, নমুনা আকার = n কাঙ্খিত আস্থা সীমায় z এর সংশয় মান (Standard normal value corresponding to the desired level of confidence.) = z, সমগ্রক পরিমিত ব্যবধানের নিরূপিত মান (Estimate for the population standard deviation) = s, সর্বোচ্চ যুক্তিসঙ্গত ত্রুটি (Maximum allowable error) = E, সমগ্রক অনুপাতের নিরূপিত মান (Estimate of the population proportion) = p হলে,

সমগ্রক গড় নিরূপনের জন্য নমুনার আকার $n = \left(\frac{zs}{E}\right)^2$

সমগ্রক অনুপাত নিরূপণের জন্য নমুনার আকার, $n = p\,(1\text{-}p)\left(\frac{z}{E}\right)^2$

তবে, নমুনার আকার কখনো ভগ্নাংশ হতে পারে না।

এখানে, n = নমুনার আকার

z = কাঙ্খিত আস্থা সীমার z এর সংশয় মান
(Standard normal value corresponding to the desired level of confidence)

s = সমগ্রক পরিমিত ব্যবধানের নিরূপিত মান
(Estimate for the population standard deviation)

E = সর্বোচ্চ যুক্তিসঙ্গত ত্রুটি (Maximum allowable error)

p = সমগ্রক অনুপাতের নিরূপিত মান (Estimate of the population proportion)

Note: নমুনার আকার কখনো ভগ্নাংশ হতে পারে না।

সারসংক্ষেপ

কোন সমগ্রক হতে নির্বাচিত ও গৃহীত নমুনায় নমুনা উপাদান (Sample unit) -এর মোট সংখ্যাকে ঐ নমুনার নমুনা আকার (Sample Size) বলা হয়। ১৯৩৭ সালে প্রফেসর J. Neyman সর্বপ্রথম আস্থা সীমার ধারণা প্রদান করেন। কোনো পরিসংখ্যাকি পরীক্ষার নমুনা হতে প্রাপ্ত মানের ভিত্তিতে সমগ্রকের পরামিতির মান কোনো একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকার সম্ভাবনাকে আস্থা সীমা বলে। একে সংক্ষেপে C.I দ্বারা লেখা হয়। সাধারণত 95% বা 99% C.I ব্যবহার করা হয়।

পাঠ ৫.৪ গড় সম্পর্কিত সমস্যা ও সমাধান
Problems and Solution Related to Mean

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- গড় সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা বর্ণনা করতে পারবেন।
- গড় সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

গড় সম্পর্কিত সমস্যা ও সমাধান
Problems and Solution Related to Mean

গড় সম্পর্কিত প্রাক্কলন নিম্নোক্তভাবে করা যেতে পারে:

১. সমগ্রক গড়ের বিন্দু প্রাক্কলিত মান, আদর্শ ত্রুটি এবং সীমা প্রাক্কলিত মান নির্ণয়

২. দুটি গড়ের মধ্যে পার্থক্যের বিন্দু প্রাক্কলিত মান ও সীমা প্রাক্কলিত মান নির্ণয়

৩. উপযুক্ত নমুনার আকার নির্ণয়

১. সমগ্রক গড়ের বিন্দু প্রাক্কলিত মান, আদর্শ ত্রুটি এবং সীমা প্রাক্কলিত মান নির্ণয়

নমুনা গড়ের পরিমিত ব্যবধান/ আদর্শ বিচ্যুতি, $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ [প্রশ্নে সমগ্রক পরিমিত ব্যবধান (σ) দেয়া থাকলে]

$= \frac{s}{\sqrt{n}}$ [প্রশ্নে নমুনা পরিমিত ব্যবধান (s) দেয়া থাকলে]

সমগ্রকের নিরূপিত বিন্দু প্রাক্কলিত মান, $\hat{\mu} = \bar{x}$

সমগ্রক গড়ের আস্থা সীমাঃ (i) $\bar{x} \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ [যদি প্রশ্নে σ এর মান দেয়া থাকে]

(ii) $\bar{x} \pm z\frac{s}{\sqrt{n}}$ [যদি প্রশ্নে s-এর মান দেয়া থাকে এবং $n \geq 30$]

(iii) $\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$ [যদি প্রশ্নে s-এর মান দেয়া থাকে এবং $n < 30$]

$$\left[s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{n}\right)} \right]$$

উদাহরণঃ কোনো একটি পরীক্ষণে 120 জন মধ্যবর্তী ম্যানেজারের নমুনা নির্বাচন করা হলো। তাদের মাসিক আয়ের গড় 30,340 টাকা এবং পরিমিত ব্যবধান 1580 টাকা।

i) সমস্ত মধ্যবর্তী ম্যানেজার (সমগ্রক) এর গড় আয় নিরূপণ করুন। অর্থাৎ, বিন্দু প্রাক্কলিত মান কত?

ii) সমগ্রক গড়ের 95% আস্থা সীমা নির্ণয় করুন।

সমাধান:
দেওয়া আছে, $n = 120$, $\bar{x} = 30{,}340$ এবং $s = 1580$
i) সমগ্রকের নিরূপিত বিন্দু প্রাক্কলিত মান, $\hat{\mu} = \bar{x} = 30{,}340$ টাকা।

ii) নির্ণেয় সমগ্রক গড় (μ) এর 95% আস্থা সীমা = $\bar{x} \pm z\dfrac{s}{\sqrt{n}}$

$= 30.340 \pm 1.96 \times \dfrac{1580}{\sqrt{120}}$ [95% আস্থা সীমায় z-এর সারণিকৃত মান = 1.96]

$= 30{,}340 - 282.70$ এবং $30{,}340 + 282.70$
$= 30{,}057.30$ এবং 30622.70
অর্থাৎ, ৯৫% আস্থা সীমার সমগ্রক গড়ের মান 30,057 টাকা এবং 30,623 টাকার মধ্যে অবস্থান করবে।

২. দুটি গড়ের মধ্যে পার্থক্যের বিন্দু প্রাক্কলিত মান ও সীমা প্রাক্কলিত মান নির্ণয়

নমুনা গড়ের পার্থক্যের গড়, $\mu_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \mu_1 - \mu_2$

নমুনা গড়ের পার্থক্যের পরিমিত ব্যবধান/ আদর্শ বিচ্যুতি, $\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

সমগ্রকের গড়ের পার্থক্য ($\mu_1 - \mu_2$) এর জন্য আস্থা সীমা ঃ

(i) $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$ [যদি প্রশ্নে σ_1 ও σ_2 এর মান দেয়া থাকে]

(ii) $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}$

[যদি প্রশ্নে s_1ও s_2 এর মান দেয়া থাকে এবং $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$]

(iii) $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\frac{a}{2},(n_1+n_2-2)} \times s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}$

[যদি প্রশ্নে সমগ্রকের ভেদাংকদ্বয় সমান ও অজানা এবং $n_1 < 30$, $n_2 < 30$]

এখানে, $s = \sqrt{\dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ স্বাধীনতা মাত্রা, $df = n_1 + n_2 - 2$

(iv) $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\frac{a}{2},(n\ +n_2-2)} \times s\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}$

[যদি প্রশ্নে সমগ্রকের ভেদাংকদ্বয় অসমান ও অজানা এবং $n_1 < 30$, $n_2 < 30$]

উদাহরণঃ একটি সমান সুযোগ কমিটি তদন্ত করে প্রতিবেদন তৈরি করেন যে, তুলনামূলক চাকুরিতে পুরুষ ও মহিলাদের মধ্যে সমানভাবে পরিশোধ করা হয়। নিম্নে 75 জন পুরুষ ও 64 জন মহিলার তথ্য দেয়া হলোঃ

বেতন	পুরুষ	মহিলা
গড় (টাকায়)	11530	10620
পরিমিত ব্যবধান	780	750

গড় বেতনের মধ্যে পার্থক্যের জন্য ৯৫% আস্থা সীমা নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেয়া আছে, $n_1 = 75$, $\bar{x}_1 = 11530$ $s_1 = 780$

$n_2 = 64$, $\bar{x}_2 = 10620$ $s_2 = 750$

গড় বেতনের মধ্যে পার্থক্যের জন্য 95% আস্থা সীমা

$$= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$= (11530 - 10620) \pm 1.96\sqrt{\frac{(780)^2}{75} + \frac{(750)^2}{64}}$$

$$= 910 \pm 1.96\sqrt{8112 + 8789.0625}$$

$$= 910 \pm 254.81$$

$= 655.19$ এবং 1164.81

২. **উপযুক্ত নমুনার আকার নির্ণয় (Determination of the appropriate sample size)**

সমগ্রক গড় নিরূপণের জন্য নমুনার আকার, $n = \left(\frac{zs}{E}\right)^2$

উদাহরণঃ কোনো প্রতিষ্ঠানের কর্মচারিদের আয়ের ভেদাংক 42। 95% আস্থা সীমার গড় আয়ের প্রাক্কলনের বিচ্যুতি 5 হলে নমুনার আকার কত?

সমাধানঃ দেয়া আছে,

ভেদাংক $s^2 = 42$, বা, পরিমিত ব্যবধান, $s = 6.48$

গড় আয়ের প্রাক্কলনের বিচ্যুতি, $E = 5$

95% আস্থা সীমায় z এর মান = 1.96

$\therefore$ নির্ণেয় নমুনার আকার, $n = \left(\frac{zs}{E}\right)^2$

$$= \left(\frac{1.96 \times 6.48}{5}\right)^2 = 6.5 = 7 \text{ (app.)}$$

সারসংক্ষেপ

সমগ্রক গড়ের সীমা, $\bar{x} - z_{\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} - z_{\frac{a}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ এছাড়া সমগ্রক গড়ের পার্থক্যের জন্য ৯৫% আস্থা সীমা= $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\frac{a}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

পাঠ ৫.৫ অনুপাত সম্পর্কিত সমস্যা ও সমাধান
Problems and Solution Related to Proportion

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- অনুপাত সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যা বর্ণনা করতে পারবেন।
- অনুপাত সম্পর্কিত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

অনুপাত সম্পর্কিত সমস্যা ও সমাধান
Problems and Solution Related to Proportion

অনুপাত সম্পর্কিত প্রাক্কলন নিম্নোক্তভাবে করা যেতে পারে;

১. সমগ্রক অনুপাতের বিন্দু প্রাক্কলিত মান, আদর্শ বিচ্যুতি ও সীমা প্রাক্কলিত মান নির্ণয়।
২. দুটি সমগ্রক অনুপাতের পার্থক্যের বিন্দু প্রাক্কলিত মান ও সীমা প্রাক্কলিত মান নির্ণয়।
৩. উপযুক্ত নমুনার আকার নির্ণয়

১. সমগ্রক অনুপাতের বিন্দু প্রাক্কলিত মান, আদর্শ বিচ্যুতি ও সীমা প্রাক্কলিত মান নির্ণয়।

মনে করি, সমগ্রক অনুপাত π

এখানে, নমুনা অনুপাত, $p = \dfrac{\text{কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের উপাদান সংখ্যা}}{\text{নমুনার উপাদান সংখ্যা}} = \dfrac{m}{n}$

নমুনা অনুপাতের গড়, $\mu_p = \pi$ এবং পরিমিত ব্যবধান/ আদর্শ বিচ্যুতি, $\sigma_p = \sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}$

সমগ্রকের অনুপাতের 95% (বা, 99%) আস্থা সীমা $= p \pm z\,\sigma_p = p \pm z\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$

উদাহরণ: 2003 ইং সালে একটি কলেজে ভর্তিকৃত ছাত্রছাত্রীদের মধ্যে 420 জনের একটি নমুনায় দেখা গেল যে, 220 জন ছাত্র। উক্ত কলেজে ভর্তিকৃত সমস্ত ছাত্রছাত্রীদের মধ্যে ছাত্রদের অনুপাতের 95% আস্থা সীমা নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করি, সমগ্রক অনুপাত π

এখানে, নমুনার আকার, $n = 420$ ছাত্রদের সংখ্যা, $m = 220$

নমুনার অনুপাত, $p = \dfrac{\text{কোন নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের উপাদান সংখ্যা}}{\text{নমুনার উপাদান সংখ্যা}} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{220}{420} = 0.524$

ছাত্রদের অনুপাতের 95% আস্থা সীমা $= p \pm z\,\sigma_p$

$$= p \pm z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$= 0.524 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.524(1-0.524)}{420}}$$

$$= 0.524 \pm 0.048$$

$= 0.476$ এবং 1.048

২. দুটি সমগ্রক অনুপাতের পার্থক্যের বিন্দু প্রাক্কলিত মান ও সীমা প্রাক্কলিত মান নির্ণয়।

সমগ্রকের অনুপাতদ্বয়ের মধ্যে পার্থক্যের গড়, $\mu_{(p_1-p_2)} = \pi_1 - \pi_2$

এবং পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_{(p_1-p_2)} = \sqrt{\dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1} \qquad p_2 = \frac{m_2}{n_2}$$

সমগ্রক অনুপাতদ্বয়ের পার্থক্যের আস্থা সীমা, $(p_1\text{-}p_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

উদাহরণ ঃ ঢাকা সিটিতে 1000 জনের একটি দৈব নমুনা নিয়ে দেখা গেল যে, 400 জন গমের ক্রেতা। খুলনা সিটিতে 800 জনের একটি দৈব নমুনা নিয়ে দেখা গেল যে, 400 জন গমের ক্রেতা। সমগ্রক অনুপাতদ্বয়ের মধ্যে পার্থক্যের 95% আস্থা সীমা নির্ণয় করুন।

দেয়া আছে, $n_1 = 1000$, $m_1 = 400$

$n_2 = 800$, $m_2 = 400$

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{400}{1000} = 0.4 \qquad p_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{400}{800} = 0.5$$

5% যথার্থ মাত্রায় z এর সংশয় মান, $|z_{0.025}| = 1.96$

সমগ্রকের অনুপাতদ্বয়ের মধ্যে পার্থক্যের 95% আস্থা সীমা = $\left[(p_1 - p_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \dfrac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right]$

$$= \left[(0.4-0.5) \pm 1.96\sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{1000} + \frac{0.5(1-0.5)}{800}}\right] = [-0.1461, -0.0539]$$

3. উপযুক্ত নমুনার আকার নির্ণয় (Determination of the appropriate sample size)

সমগ্রক অনুপাত নিরূপণের জন্য নমুনার আকার, n = $p(1-p)\left(\dfrac{z}{E}\right)^2$

উদাহরণঃ 95% আস্থা সীমায় 0.05 এর যোগ বা বিয়োগের মধ্যে সমগ্রক অনুপাত নিরূপণ করা হয়। সমগ্রক অনুপাতের শ্রেষ্ঠ নিরূপক 0.5 করতে হলে সর্বোচ্চ নমুনা কত হওয়া উচিত?

সমাধানঃ দেয়া আছে,

নিরূপিত সমগ্রক অনুপাত (The estimated population proportion), p = 0.15

সর্বোচ্চ যুক্তিসঙ্গত ত্রুটি (Maximum allowable error) = 0.05

95% আস্থা সীমায় z এর মান = 1.96

$\therefore$ নির্ণেয় সর্বোচ্চ নমুনার আকার (The required large sample size) n $= p(1-p)\left(\dfrac{z}{E}\right)^2$

$$= 0.15 \times 0.85 \times \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2$$

$= 195.9216$

$= 196$ (app.)

সারসংক্ষেপ

সমগ্রকের অনুপাতের 95% (বা, 99%) আস্থা সীমা = $p \pm z\,\sigma_p = p \pm z\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ এবং সমগ্রক অনুপাতদ্বয়ের

পার্থক্যের আস্থা সীমা, $(p_1 - p_2) \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

রচনামূলক প্রশ্ন

২. প্রাক্কলক, প্রাক্কলিত মান ও প্রাক্কলন বলতে কি বুঝেন ?
৩. একটি উত্তম প্রাক্কলনের বৈশিষ্ট্যসমূহ বর্ণনা করুন।
৪. বিন্দু ও সীমা প্রাক্কলিত মানের মধ্যে পার্থক্য লিখুন।
৪. সম্ভাব্য ত্রুটি বলতে কি বোঝেন।
৫. গড়ের আস্থা সীমা বর্ণনা করুন।
৬. প্রাক্কলনের সর্বাধিক সম্ভাবনা পদ্ধতি বর্ণনা করুন ?
৭. পরিসংখ্যানিক অনুমান কি ?
৮. ব্যাখ্যা করুন-
   ক. অনুসিদ্ধান্ত যাচাই, খ. পরীক্ষার ক্ষমতা।