ইউনিট

৪

অবিচ্ছিন্ন সম্ভাবনা বিন্যাস

Continuous Probability Distribution

ভূমিকা

গণনা করা যায় না এরূপ দৈব সম্ভাবনা বা একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের নির্দিষ্ট পরিসরের মধ্যে থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করতে অন্য এক ধরনের বিন্যাস প্রয়োজন হয় এবং ইহা অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের তাত্ত্বীক বিন্যাস নামে পরিচিত। এই বিন্যাসগুরোর মধ্যে সর্বাধিক ব্যবহৃত বিন্যাস হল পরিমিত বিন্যাস ও নমুনা বিন্যাস। পরিমিত বিন্যাস ও নমুনা বিন্যাস হল অবিচ্ছিন্ন চলকের বিন্যাস। এই ইউনিটে আমরা এই দুটি সম্ভাবনা বিন্যাস সম্পর্কে আলোচনা করব।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ০২ সপ্তাহ

এ ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৪.১ পরিমিত চলক, বিন্যাস ও রেখা
Normal Variate, Distribution and Curve

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরিমিত চলকের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন।
- আদর্শ পরিমিত চলক ও আদর্শ পরিমিত বিন্যাস ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- পরিমিত বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- পরিমিত রেখার ধর্ম বা বৈশিষ্ট্য বলতে পারবেন।

পরিমিত চলক
Normal Variate

দ্বিপদী পরীক্ষায় চেষ্টার সংখ্যা (n) খুব বেশি এবং প্রতিবার চেষ্টার সফলতা ও বিফলতার সম্ভাবনা প্রায় সমান ($p \cong q$) হলে, দ্বিপদী চলক পরিচিত চলকে রূপান্তরিত হয়। পরিচিত চলক একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক।

আদর্শ পরিমিত চলক (Standard Normal Variate) ঃ কোন পরিমিত চলক হতে এর গড় বিয়োগ করে তাকে পরিমিত ব্যবধান দ্বারা ভাগ করলে চলকটির প্রাপ্ত পরিবর্তিত রূপকে আদর্শ পরিমিত চলক বলে।

ধরা যাক, x একটি পরিমিত চলক যার গড় μ এবং পরিমিত ব্যবধান σ, তাহলে আদর্শ পরিমিত চলক, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

আদর্শ পরিমিত চলকের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকঃ কোন পরিমিত চলকের সম্ভাবনা ঘনত্ব ফাংশনের গড়, $\mu = 0$ এবং পরিমিত ব্যবধান $\sigma = 1$ হলে তা হবে আদর্শ পরিমিত চলকের সম্ভাবনা ঘনত্ব ফাংশন।

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

আদর্শ পরিমিত বিন্যাস (Standard Normal Distribution)

z চলকের বিন্যাসকে আদর্শ পরিমিত বিন্যাস বলে।

আদর্শ পরিমিত বিন্যাসর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকঃ

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z)^2}$$

ইহার বৈশিষ্ট্যসমূহ

ক. এটি অবিচ্ছিন্ন চলকের বিন্যাস

খ. এক্ষেত্রে চলকের মান - ∞ হতে ∞ পর্যন্ত

গ. এটি ঘন্টাকৃতির

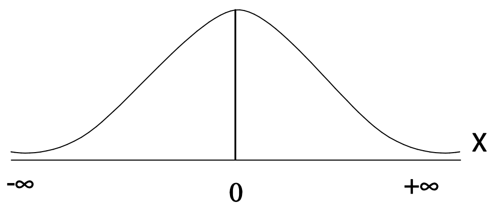
চ. এই সুষম বিন্যাস অর্থাৎ গড় = মধ্যমা = প্রচুরক

ঘ. এই বিন্যাসের পরামিতি μ এবং σ

ঙ. এই বিন্যাসের একক নেই।

ছ. এক্ষেত্রে গড়, $E(z) = 0$ এবং ভেদাংক $V(z) = 1$

এর চিত্ররূপ:



প্রয়োজনীয়তা : যেহেতু পরিমিত বিন্যাসে একক থাকে। তাই দুই বা ততোধিক বিন্যাসের মধ্যে সর্বদা তুলনা করা যায় না। এই সীমাবদ্ধতা দুর করার জন্য আদর্শ পরিমিত বিন্যাস প্রয়োজন হয়।

পরিমিত বিন্যাস

Normal Distribution

বৃটিশ গণিতবিদ আব্রাহাম ডি ময়ভার (A. De-Moivre) ১৭৩৩ খ্রীষ্টাব্দে দ্বিপদী বিন্যাস হতে পরিমিত বিন্যাস উদ্ভাবন করেন। পরবর্তীতে ১৭৭৪ সালে ল্যাপলাস প্যারা জ্যামিতিক বিন্যাস হতে এই বিন্যাস উদ্ভাবন করেন এবং ১৮০৯ খ্রীষ্টাব্দে গউস (Gauss) মহাকাশের বিভিন্ন গ্রহ উপগ্রহের কক্ষপথ নির্ণয়ে ভুলের বিন্যাস বর্ণনা করতে গিয়ে এই বিন্যাসটি উদ্ভাবন করেন। তাই এই বিন্যাসকে গউসিয়ান বিন্যাস ও বলা হয়।

পরিমিত বিন্যাস সংজ্ঞা (Definition of Normal Distribution)ঃ

দ্বিপদী বিন্যাসের একটি সীমায়িত রূপ (Limiting form) হচ্ছে পরিমিত বিন্যাস। দ্বিপদী বিন্যাসের চেষ্টার সংখ্যা (n) খুব বেশি এবং সফলতা ও বিপলতার সম্ভাবনা পরস্পর প্রায় সমান হলে দ্বিপদী বিন্যাসের সীমিত রূপকে পরিমিত বিন্যাস বলে।

অর্থাৎ $\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \cong q}}$ দ্বিপদী বিন্যাস = পরিমিত বিন্যাস

পরিমিত বিন্যাস সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকঃ

কোন একটি অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক x এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক,
কে পরিমিত বিন্যাস এর সম্ভাবনা অপেক্ষক বলে।

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

উক্ত অপেক্ষকের সাহায্যে নির্ণীত বিন্যাসকে পরিমিত বিন্যাস বলে।

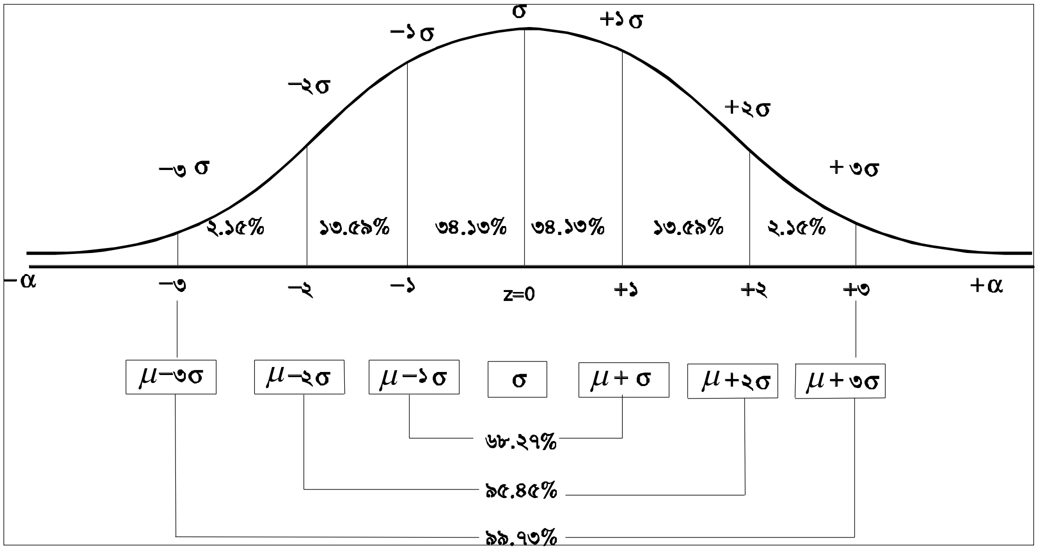
এখানে x = অবিচ্ছিন্ন দৈব চলক
$f(\mathrm{x})$ = x এর সম্ভাবনা অপেক্ষক
μ = সমগ্রকের গড়
σ = সমগ্রকের পরিমিত ব্যবধান
π = গাণিতিক ধ্রুবক (3.14)
e = গাণিতিক ধ্রুবক (2.71828)

পরিমিত রেখা

Normal Curve

পরিমিত চলকের মানের সম্ভাবনা পরিমিত বিন্যাসের সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষকের সাহায্যে নির্ণয় করে ছক কাগজে উপস্থাপন করে মুক্ত হস্তে যোগ করলে যে বক্র রেখা পাওয়া যায় তাকেই পরিমিত রেখা বলা হয়। এক কথায় পরিমিত বিন্যাসকে লেখে উপস্থাপন করলে যে বক্র রেখা পাওয়া যায় তাকেই পরিমিত রেখা বলা হয়।

পরিমিত রেখাটি দেখতে অনেকটা উল্টানো ঘন্টার ন্যায় এবং এর পুরো অংশের ক্ষেত্রফল এক হয়। আবার পরিমিত চলকের গড়, μ পরিমিত ব্যবধান σ হলো $\mu-\sigma$ থেকে $\mu+\sigma$ পর্যন্ত পরিসরের মধ্যে অবস্থিত অংশের ক্ষেত্রফল মোট ক্ষেত্র এক (১) এর ৬৮.২৭% অনুরূপভাবে $\mu-২\sigma$ থেকে $\mu+২\sigma$ এবং $\mu-৩\sigma$ থেকে$\mu+৩\sigma$ পরিসরের মধ্যে ক্ষেত্রফল, মোট ক্ষেত্রফল এক (১) এর যথাক্রমে ৯৫.৪৫% ও ৯৯.৭৩% নিম্নে পরিমিত রেখার বিভিন্ন অংশ শতকরা হিসেবে দেখানো হলঃ



পরিমিত রেখার ধর্মাবলী বা বৈশিষ্ট্য (Properties of Normal Curve):

১. পরিমিত রেখার মধ্যে অবস্থিত স্থানের ক্ষেত্রফল এক।
২. পরিমিত রেখাটি একটি সুষম রেখা।
৩. এই রেখার গড়, মধ্যমা ও প্রচুরকের মান সমান।
৪. এই রেখাটি কখনই (x) অক্ষের সাথে মিলিত হয় না।
৫. এই রেখাটি মধ্যম-সুঁচাল আকৃতির হয়।
৬. এই রেখাটির আকৃতি অনেকটা উল্টানো ঘন্টার মত।

আদর্শ পরিমিত রেখা (Standard Normal curve) ঃ আদর্শ পরিমিত বিন্যাসকে লেখছিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করলে যে বক্ররেখা পাওয়া যায় তাকে আদর্শ পরিমিত রেখা (Standard Normal curve) বলা হয়।

সারসংক্ষেপ

বৃটিশ গণিতবিদ আব্রাহাম ডি ময়ভার (A. De-Moivre) ১৭৩৩ খ্রীষ্টাব্দে দ্বিপদী বিন্যাস হতে পরিমিত বিন্যাস উদ্ভাবন করেন। ১৭৭৪ সালে ল্যাপলাস প্যারা জ্যামিতিক বিন্যাস হতে এই বিন্যাস উদ্ভাবন করেন। ১৮০৯ খ্রীষ্টাব্দে গউস (Gauss) মহাকাশের বিভিন্ন গ্রহ উপগ্রহের কক্ষপথ নির্ণয়ে ভুলের বিন্যাস বর্ণনা করতে গিয়ে এই বিন্যাসটি উদ্ভাবন করেন। তাই এই বিন্যাসকে গউসিয়ান বিন্যাস ও বলা হয়। যখন নমুনার আকার বড় ($n \geq 30$) এবং সফলতা ও বিফলতার সম্ভাবনা প্রায় কাছাকাছি হয়, তখন দ্বিপদী বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসে পরিণত হয়।

পাঠ ৪.২ পরিমিত বিন্যাসের ধর্ম ও ব্যবহার
Properties and Uses of Normal Distribution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরিমিত বিন্যাস ধর্মগুলি লিখতে পারবেন।
- পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহারসমূহ বলতে পারবেন।

পরিমিত বিন্যাসের ধর্মাবলী
Properties of Normal Distribution

১. পরিমিত বিন্যাস অবিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস।

২. এটি একটি সুষম বিন্যাস।

৩. পরিমিত রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল =১।

৪. পরিমিত রেখা $x = \mu$ বিন্দুর রেখার আওতাধীন মোট ক্ষেত্রফলকে সমান দুভাগে ভাগ করে।

৫. $x = \mu$ বিন্দুতে পরিমিত রেখার বিন্দু মান সবচেয়ে বেশী। এ মান $y = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}$

৬. পরিমিত বিন্যাসে দুটি পরামান আছে। গড় = μ এবং ভেদাংক = σ^2

৭. পরিমিত বিন্যাসের গড় , মধ্যমা ও প্রচুরক সমান

৮. পরিমিত বিন্যাসের গড় কেন্দ্রিক বিজোড় পরিঘাত গুলির মান শুণ্য।

৯. পরিমিত বিন্যাসের বঙ্কিমতা শুন্য।

১০. এর সূচালতা $\beta_2 = 3$ অর্থাৎ মধ্যম সূচালো বিন্যাস।

১১. পরিমিত বিন্যাসের গড় বিচ্যুতি পরিমিত বিচ্যুতির ৪/৫ অংশ

১২. স্বাধীন পরিমিত চলকগুলির রৈখিক সংযোগ ও একটি পরিমিত চলক।

পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহারসমূহ
Uses of Normal Distribution

পরিসংখ্যান বিজ্ঞানে পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহারিক গুরুত্ব অপরিসীম। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ আলোচনা করা হল।

১. ব্যবহারিক বিশ্বে প্রায় সকল বিন্যাসই বিভিন্ন প্রকার শর্ত সাপেক্ষে পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়। তাছাড়া নমুনাজ বিন্যাসগুলিও নমুনার আকার বড় হলে পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়।

২. সম্ভাবনা তত্ত্বে পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহার খুবই গুরুত্বপূর্ণ ।

৩. গড় অভিমূখী তত্ত্বে নমুনার আকার বড় হলে আদর্শ পরিমিত বিন্যাস এর সাহায্যে সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়।

৪. পরিমিত বিন্যাসের অনুমান ব্যতিত নমুনাজ বিন্যাসগুলির অস্তিত্ত্ব থাকে না । তাই χ^2 , F, t নমুনাজ বিন্যাসগুলি পরিমিত বিন্যাসকে অনুমানে এনে নির্ণয় করা হয়।

৫. χ^2 , F, t পরীক্ষাগুলিতেও পরিমিত বিন্যাস ব্যবহার করা হয়।

৬. কোন বিন্যাসের গড় যাচাই করতে ব্যবহার করা হয়।

৭. দুটো বিন্যাসের গড়ের সমতা যাচাই করতে পরিমিত বিন্যাস ব্যবহার করা হয়।

৮. তাত্ত্বিক ও ব্যবহারিক পরিসংখ্যানের বিভিন্ন শাখায় পরিমিত বিন্যাসের ব্যাপক ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়।

৯. পরিমিত বিন্যাস কোন তথ্যের বন্টন অবস্থা পরীক্ষা করা হয়

১০. পরিমিত বিন্যাসের সাহায্যে নমুনাকে পরিমিত বিন্যাসের সংগে তুলনা করে উহার সমগ্রকের ধারনা নেয়া যায়।

১১. নমুনার আকার বড় হলে পরিমিত বিন্যাসের সাহায্য নিয়ে উহার সমাধান করা যায়।

১২. বিভিন্ন উৎপাদনের উৎকর্ষতা পরীক্ষা পরিমিত বিন্যাসের সাহায্যে করা হয়।

সারসংক্ষেপ

পরিমিত বিন্যাস অবিচ্ছিন্ন চলকের সম্ভাবনা বিন্যাস। এটি একটি সুষম বিন্যাস। পরিমিত রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানের ক্ষেত্রফল = ১ (এক)। ব্যবহারিক বিশ্বে প্রায় সকল বিন্যাসই বিভিন্ন প্রকার শর্ত সাপেক্ষে পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়। তাছাড়া নমুনাজ বিন্যাসগুলিও নমুনার আকার বড় হলে পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়। সম্ভাবনা তত্ত্বে পরিমিত বিন্যাসের ব্যবহার খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

পাঠ ৪.৩ পরিমিত বিন্যাসের কতিপয় উপপাদ্য, সমস্যা ও সমাধান
Theorem, Problems and Solution of Normal Distribution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- পরিমিত বিন্যাস সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন।
- পরিমিত বিন্যাস সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

পরিমিত বিন্যাসের কতিপয় উপপাদ্য
Theorem of Normal Distribution

দেখান যে আদর্শায়িত পরিমিত চলকের গড় শূন্য এবং ভেদাংক এক।

Prove that the mean and Variance of Normal Distribution are Zero and One

আদর্শায়িত পরিমিত চলক, $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

গড় নির্ণয়: z এর গড়, $E(z) = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$= \frac{1}{\sigma} E\,(x-\mu)$$
$$= \frac{1}{\sigma} [E(x)-\mu)]$$
$$= \frac{1}{\sigma} (\mu-\mu)$$
$$= \frac{0}{\sigma}$$
$$\therefore\ E(Z) = 0$$

অর্থাৎ আদর্শায়িত পরিমিত চলকের গড় শূন্য।

ভেদাংক নির্ণয়: z এর ভেদাংক, $v(z) = v\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$$= \frac{1}{\sigma^2} v\,(x-\mu)$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} [v(x)-0)]$$
$$= \frac{1}{\sigma^2} (\sigma^2)$$
$$\therefore\ v(z) = 1$$

অর্থাৎ আদর্শায়িত পরিমিত চলকের ভেদাংক এক।

দ্বিপদী বিন্যাস ও পরিমিত বিন্যাসের সম্পর্ক
Relation Between Binomial and Normal Distribution

যদি নমুনার আকার বড় হয় $(n\rightarrow\infty)$ এবং সফলতা ও বিফলতার সম্ভাবনা প্রায় সমান হয় $\left(p \rightarrow \frac{1}{2}\right)$ তাহলে দ্বিপদী বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়। আরো স্পষ্টভাবে বলা যায় যে, $n \geq 30$ এবং $npq > 3$ হলে দ্বিপদী বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হয়। এক্ষেত্রে $\mu = np$ এবং $\sigma^2 = npq$ হবে।

লক্ষ্যনীয় যে, এক্ষেত্রে দ্বিপদী বিন্যাসের চলকের মানকে শুদ্ধিকরণ করতে হবে। নিময়টি হল সর্বনিম্ন মান হতে 0.5 বিয়োগ এবং সর্বোচ্চ মানের সাথে 0.5 যোগ করতে হয়।

পৈঁসু বিন্যাস ও পরিমিত বিন্যাসের সম্পর্ক

Relation Between Poisson and Normal Distribution

যদি $\lambda \rightarrow \infty$ হয় তাহলে পৈঁসু বিন্যাস পরিমিত বিন্যাসে রূপান্তরিত হবে

এক্ষেত্রে $\mu=\lambda$ এবং $\sigma^2=\lambda$ হবে।

পরিমিত বিন্যাসের সমস্যাবলী ও সমাধানসমূহ

Problems and Sulutions of Normal Distribution

উদাহরণ: পরিমিত সম্ভাবনা সারণী ব্যবহার করে পরিমিত সম্ভাবনা রেখার নিচের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর:

ক. $z = 0$, এবং $z = 1.2$

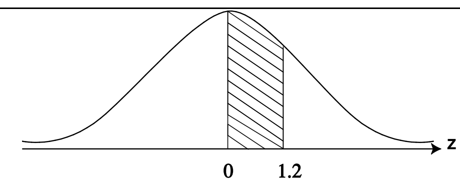
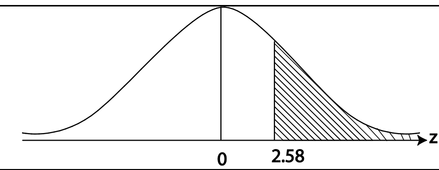
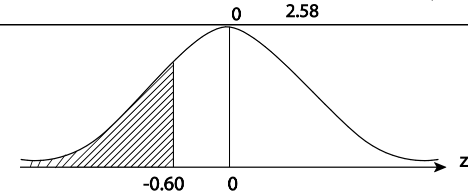
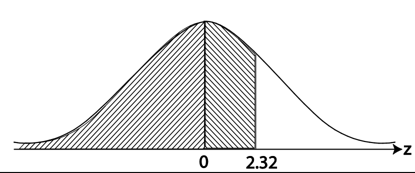
খ. $z \geq 2.58$ (বা $z = 2.58$ এর ডানে)

গ. $z \leq -0.60$ (বা $z = -0.60$ এর বামে)

ঘ. $z \geq -1.65$

ঙ. $z \leq 2.32$

সমাধান :

ক. $z = 0$, এবং $z = 1.2$ এর মধ্যে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $p\,(0 \leq z \leq 1.2)$ $= 0.3849$	
খ. $z \geq 2.58$ (বা $z = 2.58$ এর ডানে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $p\,(z \geq 2.58)$ $= 0.0049$	
গ. $z \leq -0.60$ বা $z = -0.60$ এর বামে নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $p\,(z \leq -0.60)$ $= 0.2743$	
ঘ. $z \geq -1.65$ এর নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $p\,(z \geq -1.65)$ $= p(-1.65 \leq z \leq 0) + p(0 \leq z \leq \infty)$ $= 0.4505+0.5$ $= 0.9505$	
ঙ. $z \geq 2.32$ এর নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $p\,(z \geq 2.32)$ $= p\,(-\infty \leq z \leq 0) + p(0 \leq z \leq 2.32)$ $= 0.5 + 0.4898$ $= 0.9898$	

সারসংক্ষেপ

আদর্শ পরিমিত চলকের গড় শূন্য এবং আদর্শ পরিমিত চলকের ভেদাংক এক।

পাঠ ৪.৪ নমুনায়ন বিন্যাস, আদর্শ ক্রুটি ও কেন্দ্রিয় সীমাতত্ত্ব

Sampling Distribution, Standard Errors Central Limit Theorem

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- নমুনায়ন বিন্যাসের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন।
- আদর্শ ক্রুটি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- কেন্দ্রিয় সীমাতত্ত্ব সম্পর্কে বলতে পারবেন।

নমুনায়ন বিন্যাস

Sampling Distribution

কোন সমগ্রক হতে প্রাপ্ত সম্ভাব্য সকল নমুনার সাহায্যে নমুনার পরামিতি (যেমন: নমুনা গড়, নমুনা অনুপাত ইত্যাদি) নির্ণয় করা যায়। এই নমুনার পরামিতিগুলো নিয়ে যে বিন্যাস তাকে নমুনায়ন বিন্যাস বলে।

আদর্শ ক্রুটি বা পরিমিত ভ্রান্তি

Standard Errors

কোন নমুনাজ মানের নমুনায়ন বিন্যাসের পরিমিত ব্যবধানকে ঐ নমুনাজের আদর্শ ক্রুটি বলে। যেমন নমুনা গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের পরিমিত ব্যবধান হচ্ছে নমুনা গড়ের আদর্শ ক্রুটি। নিম্নে কয়েকটি আদর্শ ক্রুটি উল্লেখ করা হল–

ক. গড়ের আদর্শ ক্রুটি, $\sigma_{\bar{x}}$ বা $s_e(\bar{x}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

খ. অনুপাতের আদর্শ ক্রুটি, $\sigma_{\bar{p}}$ বা $se(\bar{p}) = \sqrt{\dfrac{\overline{\wedge}\,(1-\overline{\wedge})}{n}}$

গ. মধ্যমার আদর্শ ক্রুটি, $\sigma_{Me} = \sqrt{\dfrac{\overline{\wedge}}{2}}\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.25\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ঘ. পরিমিত ব্যবধানের আদর্শ ক্রুটি, $\sigma_s = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ [যখন সমগ্রক পরিমিতভাবে বিন্যস্ত]

ঙ. গড়ের পার্থক্যের আদর্শ ক্রুটি, $\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

চ. অনুপাতের পার্থক্যের আদর্শ ক্রুটি, $\sigma_{\bar{p}_1-\bar{p}_2} = \sqrt{\dfrac{\bar{P}_1(1-\bar{P}_1)}{n_1}+\dfrac{\bar{P}_2(1-\bar{P}_2)}{n_2}}$

কেন্দ্রীয় সীমা তত্ত্ব
Central Limit Theorem

এটি পরিসংখ্যানের খুবই গুরুত্বপূর্ণ তত্ত্ব। এর সাহায্যে আদি বিন্যাস ও গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের সম্পর্ক কিরূপ হবে তা জানা যায়। এই তত্ত্বকে সংক্ষেপে CLT দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ধরি চলক X এর N সংখ্যক তথ্য হতে n সংখ্যক নমুনা নেয়া হল যার গড় $\bar{x}$ এবং পরিমিত ব্যবধান S। এক্ষেত্রে সমগ্রকের গড় μ এবং পরিমিত ব্যবধান σ। অতএব, গড়ের নমুনায়ন বিন্যাস নিম্নের বৈশিষ্ট্য সমূহ মেনে চলে–

ক. গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের গড় সর্বদা সমগ্রকের গড়ের সমান।

অর্থাৎ $E(\bar{x})$ বা $\mu_{\bar{x}} = \mu$

খ. i. যদি সমগ্রকের আকার জানা না থাকে কিংবা সমগ্রকের আকার জানা আছে কিন্তু নমুনা পুন:স্থাপন করে নেয়া হয় তাহলে গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের

ভেদাংক, $V(\bar{x})$ বা $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}$

ii. যদি সমগ্রকের আকার জানা আছে কিন্তু নমুনা পুন:স্থাপন না করে নেয়া হয়, তাহলে গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের ভেদাংক,

$V(\bar{x})$ বা $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n} \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$ হবে। [এক্ষেত্রে $\dfrac{n}{N} > 0.1$]

iii. নমুনার আকার যাই হউক না কেন সমগ্রকের আকৃতি পরিমিত হলে গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের আকৃতি পরিমিত হবে এবং নমুনার আকার ক্রমশ বড় ($n \rightarrow \infty$) হলে সমগ্রকের আকৃতি পরিমিত না হলেও গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের আকৃতি পরিমিত হবে।

উপরের বৈশিষ্ট্যসমূহ হতে গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের সাথে z বিন্যাসের সম্পর্ক পাওয়া যায়। যা হল-

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$$

সারসংক্ষেপ

গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের গড় সর্বদা সমগ্রকের গড়ের সমান। কেন্দ্রীয় সীমা তত্ত্বের সাহায্যে আদি বিন্যাস ও গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের সম্পর্ক কিরূপ হবে তা জানা যায়। এই তত্ত্বকে সংক্ষেপে CLT দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পাঠ ৪.৫ নমুনায়ন বিন্যাসের প্রকারভেদ
Classification of Sampling distribution

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- নমুনায়ন বিন্যাসের প্রকারভেদ সম্পর্কে জানতে পারবেন।

নমুনা বিন্যাসের প্রকারভেদ
Classification of Sampling distribution

নমুনা বিন্যাস বিভিন্ন রকমের হতে পারে:

১. নমুনা গড় ($\bar{x}$) এর নমুনাজ বিন্যাস
   (Sampling distribution of the sample mean)

২. দুইটি নমুনা গড়ের পার্থক্যের নমুনাজ বিন্যাস
   (Sampling Distribution of the difference between two means.)

৩. অনুপাতের নমুনায়ন বিন্যাস
   (Sampling Distribution of Proportion)

৪. দুইটি অনুপাতের মধ্যকার ব্যবধানের নমুনাজ বিন্যাস
   (Sampling Distrituion of the Difference between Two Proportions)

নিম্নে উপরোক্ত বিষয়গুলো নিয়মাবলিসহ গাণিতিক সমস্যা ও তার সমাধান দেয়া হলঃ

১. নমুনা গড় ($\bar{x}$) এর নমুনাজ বিন্যাস (Sampling distribution of the sample mean)

সমগ্রক গড়, $\mu = \frac{\Sigma x_i}{N}$ সমগ্রক পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{N}}$ নমুনার আকার, n নমুনাজ বিন্যাসের বৈশিষ্ট্যানুসারে,

(i) নমুনা গড় ($\bar{x}$) এর নমুনাজ বিন্যাসের গড়, $\mu_{\bar{x}} = \mu$

(ii) নমুনা গড় ($\bar{x}$) এর নমুনাজ বিন্যাসের পরিমিত বিচ্যুতি / আদর্শ ত্রুটি, $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ [n= sample size]

তবে, প্রশ্নে সমগ্রক আকার (N) এর মান দেয়া থাকলে, $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \frac{N-n}{N-1}$

এক্ষেত্রে, আদর্শ পরিমিত চলক, $z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}$

উদাহরণ-ঃ কোন একটি কারখানায় উৎপাদিত বৈদ্যুতিক বাল্বের আয়ুষ্কাল (life time) পরিমিতভাবে বিন্যস্ত, যেখানে গড় আয়ুষ্কাল 200 ঘন্টা এবং আয়ুষ্কালের পরিমিত ব্যবধান 25 ঘন্টা। যদি দৈবভাবে নির্বাচিত নমুনাটির আকার 49 হয় তবে নমুনার গড় 210 ঘন্টার বেশি হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান : দেওয়া আছে, সমগ্রক গড়, $\mu = 200$, সমগ্রক পরিমিত ব্যবধান, $\sigma = 25$ নমুনার আকার, $n = 49$

$\therefore$ গড়ের নমুনাজ বিন্যাসের বৈশিষ্ট্যানুসারে, গড় $\mu_{\bar{x}} = \mu = 200$

পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{49}} = \frac{25}{7} = 3.57$

আমরা জানি, আদর্শ পরিমিত চলক, $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$

$\therefore$ নমুনা গড় 210 ঘন্টার বেশি হওয়ার সম্ভাবনা

$= p\ (\bar{x} > 210)$

$= p\left[\frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} > \frac{210 - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right]$

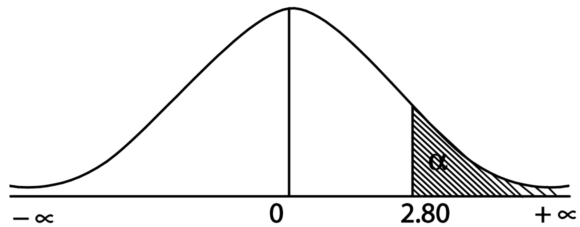
$= p\left[z > \frac{210 - 200}{3.57}\right]$

$= p\ [z > 2.80]$

$= p\ (0 \leq z < \infty) - p\ (0 \leq z \leq 2.80)$

$= 0.5 - 0.4974$

$= 0.0026$



২. দুইটি নমুনা গড়ের পার্থক্যের নমুনাজ বিন্যাস
Sampling Distribution of the difference between two means

$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ এর নমুনাজ বিন্যাস

(i) $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ এর নমুনাজ বিন্যাস গড়, $\mu_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$

(ii) $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ এর নমুনাজ বিন্যাসের পরিমিত বিচ্যুতি / আদর্শ ত্রুটি, $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$

$$= \sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}2}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

তবে, প্রশ্নে সমগ্রক আকার (N) এর মান দেয়া থাকলে, $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$

$$= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \times \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$$

• এক্ষেত্রে, আদর্শ পরিমিত চলক, $z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}{\sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}}$

উদাহরণ-ঃ 2003 ইং সালে একটি স্কুলে ভর্তিকৃত 300 জন ছাত্রের 50 জন মানসিক প্রতিবন্ধী। ঐ স্কুল হতে 60 জন ছাত্রের একটি নমুনা নেয়া হলো। ঐ বিদ্যালয়ে ভর্তিকৃত ছাত্রদের 20% এর বেশি মানসিক প্রতিবন্ধী আছে তার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ দেয়া আছে, M = 50, N = 300, n = 60

সমগ্রক অনুপাত, $\mu_p = \frac{M}{N} = \frac{50}{300} = 0.17 = \pi$ (ধরি)

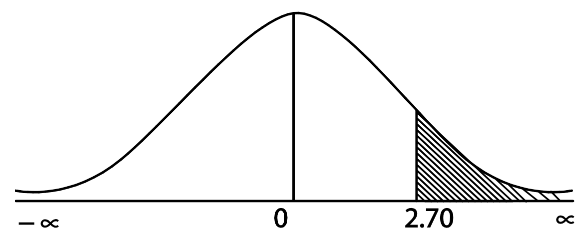
যেহেতু সমগ্রকটি সসীম,

সুতরাং পরিমিতি ব্যবধান, $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

$= \sqrt{\frac{0.17(1-0.17)}{60}} \times \sqrt{\frac{300-60}{300-1}}$

$= 0.048 \times 0.896 = 0.043$

আমরা জানি, আদর্শ পরিমিত চলক, $z = \frac{p-\pi}{\sigma_p}$



নির্ণেয় সম্ভাবনা = $P(p > 0.2)$

$= P\left(\frac{p-\mu_p}{\sigma_p} > \frac{0.2-\mu_p}{\sigma_p}\right)$

$= P\left[z > \frac{0.2-0.17}{0.043}\right]$

$= P[z > 0.70]$

$= P(0 < z < \infty) - P(0 \le z \le 0.70)$

$= 0.5 - 0.2580$

$= 0.242$

৩. অনুপাতের নমুনায়ন বিন্যাস (Sampling Distribution of Proportion)

নমুনাজ অনুপাত (Sample proportion), $p = \frac{m}{n}$

এখানে, m = সফলতার সংখ্যা (number of success) এবং

n = পর্যবেক্ষণের সংখ্যা (number of observation)

• **অসীম সমগ্রক হতে নমুনা নির্বাচিত হলে অনুপাতের গড়,** $\mu_p = \pi = \frac{M}{N}$

এবং পরিমিত বিচ্যুতি (standard error) বা পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ হবে।

• **সসীম সমগ্রক হতে নমুনা নির্বাচিত হলে সসীম সমগ্রক সংশোধন** (finite population correction) ব্যবহার করলে অনুপাতের গড় একই থাকবে। অর্থাৎ, $\mu_p = \pi$

এবং পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_p = \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ হবে।

এক্ষেত্রে, আদর্শ পরিমিত চলক, $z = \frac{p-\mu_p}{\sigma_p}$

উদাহরণঃ ধরা যাক, কোম্পানী B- তে উৎপাদিত বাল্বের আয়ুষ্কালের গড় 200 ঘন্টা এবং পরিমিত ব্যবধান 25 ঘন্টা। এবং কোম্পানী A-তে উৎপাদিত বাল্বের আয়ুষ্কালের গড় 250 ঘন্টা এবং পরিমিত ব্যবধান 20 ঘন্টা। যদি কোম্পানি A হতে 50টিবাল্বের একটি এবং কোম্পানি B-তে 60টি বাল্বের একটি নমুনা দৈবভাবে নেয়া হয়, তবে কোম্পানী A-তে উৎপাদিত বাল্বের গড় আয়ুষ্কাল কোম্পানী B-তে উৎপাদিত বাল্বের গড় আয়ুষ্কালের থেকে সর্বনিম্ন 40 ঘন্টা বেশি হবে তার সম্ভাবনা কত?

সমাধানঃ মরে করি, $\mu_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}$ দুইটি গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের গড়।
দেয়া আছে,
$\bar{x}_1$= কোম্পানীর A- তে উৎপাদিত বাল্বের গড় আয়ুষ্কাল = 250 ঘন্টা।
$\bar{x}_2$ = কোম্পানীর B - তে উৎপাদিত বাল্বের গড় আয়ুষ্কাল = 200 ঘন্টা।
এবং σ_1 = কোম্পানীর A- তে উৎপাদিত বাল্বের আয়ুষ্কালের পরিমিত ব্যবধান = 20 ঘন্টা।
σ_2 = কোম্পানীর B- তে উৎপাদিত বাল্বের আয়ুষ্কালের পরিমিত ব্যবধান = 25 ঘন্টা।
আমরা জানি, দুইটি গাণিতিক গড়ের ব্যবধানের বিন্যাসের গড়,
$\mu_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)} = \mu_1 - \mu_2 = (250-200)$ ঘন্টা = 50 ঘন্টা।

এবং পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)} = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}$

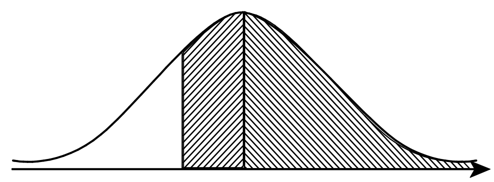
$$= \sqrt{\frac{400}{50} + \frac{625}{60}} \quad [n_1 = 50, n_2 = 60]$$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা, $P\,[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \geq 40]$

$$= P\left[\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}}{\sigma_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}}\right] \geq \frac{40 - \mu_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}}{\sigma_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}}$$

$$= P\left[z > \frac{40-50}{4.29}\right]$$

$= P\,[\,z \geq -2.33]$
$= P\,(-2.33 \leq z \leq 0) + P\,(0 \leq z < \infty)$
$= 0.4901 + 0.50$
$= 0.9901$



$\therefore$ কোম্পানি A- তে উৎপাদিত বাল্বের গড় আয়ুষ্কাল কোম্পানি B- তে উৎপাদিত বাল্বের আয়ুষ্কালের থেকে 40 ঘন্টা বেশি হবার সম্ভাবনা ০.9901।

৪. দুইটি অনুপাতের মধ্যকার ব্যবধানের নমুনাজ বিন্যাস
Sampling Distrituion of the Difference tetween Two Proportions

দুটি অনুপাতের মধ্যকার নমুনাজ বিন্যাসের গড়, $\mu_{(p_1-p_2)} = \pi_1 - \pi_2$

এবং পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_{(p_1-p_2)} = \sqrt{\dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

এক্ষেত্রে, আদর্শ পরিমিত চলক, $z = \dfrac{(p_1 - p_2) - \mu_{(p_1-p_2)}}{\sigma_{(p_1-p_2)}}$

উদাহরণঃ সিঙ্গার কোম্পানি কর্তৃক উৎপাদিত বাল্বের 12% এবং ফিলিপস কোম্পানি কর্তৃক উৎপাদিত বাল্বের 10% ত্রুটিযুক্ত। কোম্পানি দুটি হতে দৈবভাবে যথাক্রমে 200 এবং 250 আকারের একটি করে নমুনা নেয়া হলো। নমুনা অনুপাত দুটির মধ্যকার ব্যবধান 0.02 এর সমান বা কম হবার সম্ভাবনা বের কর।

সমাধান ঃ দেওয়া আছে, সিঙ্গার কোম্পানিতে ত্রুটিযুক্ত বাল্বের অনুপাত, $\pi_1 = 0.12$
ফিলিপস কোম্পানিতে ত্রুটিযুক্ত বাল্বের অনুপাত, $\pi_2 = 0.10$
সিঙ্গার থেকে গৃহীত নমুনা আকার, $n_1 = 200$
ফিলিপস থেকে গৃহীত নমুনা আকার, $n_2 = 250$

ধরি, p_1 = সিঙ্গারের ত্রুটিযুক্ত বাল্বের নমুনা অনুপাত এবং p_2= ফিলিপসের ত্রুটিযুক্ত বাল্বের নমুনা অনুপাত
আমরা জানি, দুই অনুপাতের মধ্যকার ব্যবধানের নমুনা বিন্যাসের গড়,

$$\mu_{p_1-p_2} = \pi_1-\pi_1$$
$$= 0.12 - 0.10 = 0.02$$

এবং পরিমিত ব্যবধান, $\sigma_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$

$= \sqrt{\frac{0.12\times.88}{200}+\frac{0.1\times.9}{250}}$

$= \sqrt{\frac{0.1056}{200}+\frac{0.09}{250}}$

$= \sqrt{0.000528+0.000369}$

$= 0.0298$

নমুনা অনুপাত দুটির
মধ্যকার ব্যবধান 0.02 এর সমান বা কম হবার সম্ভাবনা,

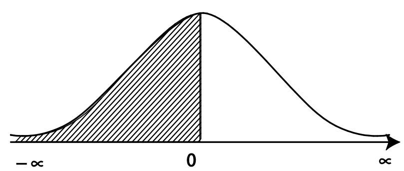
$P[(p_1-p_2) \le 0.02]$

$= P\left[\frac{p_1-p_2}{\sigma_{p_1-p_2}} \le \frac{0.02-(\pi_1-\pi_2)}{\sigma_{p_1-p_2}}\right]$

$= P\left[z \le \frac{0.02-0.02}{0.0298}\right]$

$= P[z \le 0]$

$= 0.5$



সারসংক্ষেপ

পরিমিতভাবে বিন্যস্ত কোনো একটি সমগ্রকের যে কোনো আকারের নমুনার জন্য নমুনা গড় পরিমিতভবে বিন্যস্ত হলে, তাকে গড়ের নমনায়ন বিন্যাস বলে। গড়ের নমুনাজ বিন্যাসের গড় সমগ্রকের গড়ের সমান। বড় আকারের নমুনার নমুনাজ বিন্যাস পরিমিত বিন্যাস হবে। পরিমিতভাবে বিন্যাস্ত কোনো একটি সমগ্রকের যে কোনো আকারের নমুনার জন্য নমুনার অনুপাতও পরিমিতভাবে বিন্যস্ত হয়, তবে তাকে অনুপাতের নমুনায়ন বিন্যাস বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন

রচনামূলক প্রশ্ন

১. পরিমিত বিন্যাস কি ?। এর বৈশিষ্ট্যগুলো লিখুন।
২. প্রমিত পরিমিত (Z) বিন্যাস কি ? এটি কেন প্রয়োজন হয়।
৩. দেখান যে, পরিমিত বিন্যাসের গড় = মধ্যমা = প্রচুরক।
৪. কখন দ্বিপদী বিন্যাস পরিমিত বিন্যাস রুপান্তরিত হয়।
৫. পরিমিত বিন্যাস ও পৈঁসু বিন্যাসের সম্পর্ক কিরুপ।
৬. অক্ষাভিসারী বিন্যাস কাকে বলে। এর বৈশিষ্ট্য লিখুন।
৭. দুটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ কর হলে=
   ক. উভয় ছক্কায় বেজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত ?
   খ. উভয় ছক্কার সংখ্যা দুটির সমষ্টি দশ হবার সম্ভবানা কত ?
   গ. উভয় ছক্কার সংখ্যা দুটির সমষ্টি কমপক্ষে দশ হবার সম্ভবতা কত ?
   ঘ. উভয় ছক্কায় একই ফলাফল আমার সম্ভাবনা কত ?
৮. নমুনায়ন বিন্যাস কাকে বলে।
৯. গড়ের নমুনায়ন বিন্যাস কাকে বলে।
১০. গড়ের নমুনায়ন বিন্যাসের সাথে পরিমিতভাবে বিন্যাসত সমগ্রক এবং অপরিমিতভাবে বিন্যাস্ত সমগ্রকের সম্পর্ক কিরুপ।
১১. কেন্দ্রীয় সীমা তত্ত্ব বর্ণনা করুন।
১২. অনুপাতের ও ভেদাংকের নমুনায়ন বিন্যাস বলতে কি বুঝেন ?
১৩. আদর্শ ত্রুটি কি ?