ইউনিট ৮

সসীম ধারা
(Finite Series)

ভূমিকা

প্রতিদিন কোনো জিনিস সুন্দরভাবে সাজিয়ে রাখতে বা কোনো অনুষ্ঠানের ঘটনাবলি সাজাতে বা বইয়ের তাকে বইগুলো গুছিয়ে রাখতে ক্রমের ধারণা ব্যবহার করা হয়। 'ক্রম' শব্দটি বহুল প্রচলিত। যেমন, অনেক সময় কোনো কাজ সুন্দর, সহজ ও নান্দনিকভাবে সম্পাদন করতে আপনারা বড় থেকে ছোট বা ছোট থেকে বড়, হালকা থেকে ভারী, সহজ থেকে কঠিন, জানা থেকে অজানা ইত্যাদি ধরনের ক্রম ব্যবহার করেন। আবার, কতকগুলো সংখ্যা বা রাশি নির্দিষ্ট ক্রমে সাজাতে পারেন। এই ক্রমের ধারণা থেকেই বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক ধারার উদ্ভব হয়েছে। এই ইউনিটে অনুক্রম ও ধারার মধ্যে সম্পর্ক, সমান্তর ও গুণোত্তর ধারা সম্বন্ধে সম্যক ধারণা লাভ এবং এতদসংক্রান্ত বিষয়বস্তু উপস্থাপন করা হয়েছে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে ও তাদের পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবেন,
- সমান্তর ধারা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবেন এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবেন,
- স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের ও ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবেন,
- ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন,
- গুণোত্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন করতে পারবেন এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানের জন্য সমান্তর ও গুণোত্তর ধারা গঠনে আগ্রহী হবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১২ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১ অনুক্রম ও ধারা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অনুক্রম কী তা বলতে পারবেন,
- অনুক্রম ও ধারা বর্ণনা করতে পারবেন,
- অনুক্রম ও ধারার মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় করতে পারবেন,
- গুরুত্বপূর্ণ ধারা কয়টি তা বলতে পারবেন,
- সমান্তর ধারা বর্ণনা করতে পারবেন,
- গুণোত্তর ধারা বর্ণনা করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	অনুক্রম, ধারা, সমান্তর ধারা, গুণোত্তর ধারা

মূলপাঠ

অনুক্রম (Sequence)

কতকগুলো সংখ্যা বা রাশিকে যদি কোনো নির্দিষ্ট নিয়মে এবং নির্দিষ্ট ক্রমে অর্থাৎ প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ইত্যাদি ক্রমানুসারে সাজানো যায়, তবে এভাবে সাজানোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

যেমন, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$ সেটটি একটি অনুক্রম। এখানে প্রথম সংখ্যার পরের সংখ্যা এবং তার পরের সংখ্যা প্রতিটি একটি নিয়ম অনুসারে লেখা হয়েছে। অর্থাৎ প্রতিটি সংখ্যার সাথে 2 যোগ করলে পরের সংখ্যা পাওয়া যায়। কাজেই এখানে দেখা যাচ্ছে যে, সংখ্যাগুলোর সেটটি একটি নির্দিষ্ট নিয়মে এবং নির্দিষ্ট ক্রমে সাজানো হয়েছে।

যে সকল সংখ্যা বা রাশি নিয়ে অনুক্রম তৈরি করা হয়, তাদের প্রত্যেককে অনুক্রমের পদ (term) বলা হয়। অর্থাৎ, $\{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$ অনুক্রমটির প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 5, ...ইত্যাদি।

যেকোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম। 1, 3, 5, 7, ... অনুক্রমটির সাধারণ পদ $(2n-1)$ । আবার, 2, 4, 6, 8, ... অনুক্রমটির সাধারণ পদ $2n$। কাজেই সাধারণ পদের সাহায্যে অনুক্রম লেখার পদ্ধতি হলো $<2n-1>$ এবং $<2n>$ যেখানে, $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$।

নিচে অনুক্রমের তিনটি উদাহরণ দেওয়া হলো:

$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots$

$2, 4, 6, 8, \ldots\ldots, 2n, \ldots\ldots$

$1, 3, 5, 7, \ldots\ldots, (2n-1), \ldots\ldots$

শিক্ষার্থীর কাজ	অনুক্রমের সাধারণ পদ দেখে অনুক্রমটি লিখুন: (i) $\frac{1}{n+1}$, (ii) n^2 (iii) $3n-2$ (iv) $\frac{n}{n+1}$ যেখানে $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

ধারা (Series)

কোনো অনুক্রমের প্রত্যেকটি পদ যদি পরবর্তী পদের সাথে যোগ চিহ্ন (+) দ্বারা যুক্ত থাকে, তবে তাকে ধারা (Series) বলা হয়।

যেমন, 2, 4, 6, 8, ... একটি অনুক্রম হলে, 2 + 4 + 6 + 8 + ... একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের **পার্থক্য** সমান। আবার, 2, 4, 8, 16,............... একটি অনুক্রম হলে, 2 + 4 + 8 + 16 +............... একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের **অনুপাত** সমান। সুতরাং যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর ধারাটির বৈশিষ্ট্য নির্ভর করে।

যেকোনো ধারার প্রথমে লিখিত রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ, ইত্যাদি বলা হয়। যেমন, 1+3+5+7+ .... একটি ধারা এবং ধারাটির প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 5, ...ইত্যাদি। কোনো ধারার n -তম পদকে তার সাধারণ পদ বলা হয়।

ধারার প্রকারভেদ

ধারা অনেক প্রকার হতে পারে। এর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ দুইটি ধারা হলো:

(১) সমান্তর ধারা (Arithmetic Series)

(২) গুণোত্তর ধারা (Geometric Series)

সমান্তর ধারা (Arithmetic Series)

সমান্তর বলতে ‘সমান অন্তর’ বোঝায়। যে ধারার পাশাপাশি দুইটি পদের অন্তরফল বা বিয়োগফল একই সংখ্যা বা রাশি থাকে, তাকে সমান্তর ধারা বলা হয়। ধারায় প্রাপ্ত দুইটি পদের অন্তরফল বা বিয়োগফলকে ধারার সাধারণ অন্তর (Common difference) বলে। সাধারণ অন্তর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে।

যেমন, 1+4+7+10+...............+22, একটি সমান্তর ধারা। যার ১ম পদ 1, ২য় পদ 4, ৩য় পদ 7, ...

এখানে, দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ = 4 – 1 = 3

তৃতীয় পদ – দ্বিতীয় পদ = 7 – 4 = 3

চতুর্থ পদ – তৃতীয় পদ = 10 – 7 = 3, ইত্যাদি।

অর্থাৎ, ধারাটির সাধারণ অন্তর 3.

ধারাটির পদসংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ শেষ পদ দেওয়া আছে। কাজেই ধারাটি একটি সসীম বা সান্ত ধারা (Finite Series)।

যদি সমান্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট না থাকে অর্থাৎ শেষ পদ দেওয়া না থাকে, তবে তাকে অসীম বা অনন্ত ধারা (Infinite Series) বলে। যেমন,1 + 4 + 7 + 10 +........... একটি অসীম ধারা।

নিচে সমান্তর ধারার কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হলো:

(i) 2+ 4+ 6+ 8+ ....+20, এখানে সাধারণ অন্তর 2.

(ii) 1+ 5+ 9+ 13+ ....+33, এখানে সাধারণ অন্তর 4.

(iii) 1+ 3+ 5+ 7+ ...., এখানে সাধারণ অন্তর 2.

(iv) –2 – 7 – 12 – 17......................, এখানে সাধারণ অন্তর – 5.

(v) 6+ 3+ 0 – 3 – 6 – 9 ...., এখানে সাধারণ অন্তর –3.

শিক্ষার্থীর কাজ	নিচের ধারাগুলোর মধ্যে কোন্গুলো সমান্তর ধারা এবং কেন সেগুলো সমান্তর ধারা তা ব্যাখ্যা করুন। (i) 1 + 3 + 5 + 7 +................. + 21 (ii) 2 + 5 + 8 + 11 + ...+ 29 (iii) 3 + 7 +10 + 15 + 19 + ... + 35 (iv) 4 + 8 + 12 + 16 + ... (v) 2 + 3 + 5 + 8 + 12................ (vi) 1 + 6 + 11 + 16 + 21............

গুণোত্তর ধারা (Geometric Series)

যে ধারার যেকোনো পদের সাথে তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান হয় অর্থাৎ যেকোনো পদকে তার পূর্ববর্তী পদ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল সব সময় সমান হয়, সে ধারাকে গুণোত্তর ধারা বলে এবং ভাগফলকে সাধারণ অনুপাত (common ratio) বলে।

যেমন, $1 + 3 + 9 + 27 + ...+ 729$. ধারাটির প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 9, চতুর্থ পদ 27, ... ইত্যাদি। এখানে দ্বিতীয় পদের সাথে প্রথম পদের অনুপাত $= \frac{3}{1} = 3$, তৃতীয় পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত $= \frac{9}{3} = 3$, চতুর্থ পদের সাথে তৃতীয় পদের অনুপাত $= \frac{27}{9} = 3$।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান অর্থাৎ প্রথম পদ হতে পরবর্তী প্রতিটি পদ পূর্ববর্তী পদের 3 গুণ। কাজেই ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা এবং উল্লিখিত ধারার সাধারণ অনুপাত 3.

সুতরাং, গুণোত্তর ধারার যেকোনো পদকে সেই ধারার সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করলে তৎপরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

যে গুণোত্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট থাকে, অর্থাৎ শেষ পদ দেওয়া থাকে, তাকে সসীম গুণোত্তর ধারা বলে। উপরের ধারাটির পদসংখ্যা নির্দিষ্ট অর্থাৎ শেষ পদ দেওয়া আছে। কাজেই ধারাটি একটি সসীম গুণোত্তর ধারা। আবার, যে গুণোত্তর ধারার পদসংখ্যা নির্দিষ্ট থাকে না অর্থাৎ শেষ পদ নির্দিষ্ট নয়, তাকে অসীম গুণোত্তর ধারা বলে।

নিচে গুণোত্তর ধারার কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হলো:

(i) $1+ 2+ 4+ 8+ ....+64$, এখানে সাধারণ অনুপাত 2.

(ii) $4+ 12+ 36+ 108+ .... + 2916$, এখানে সাধারণ অনুপাত 3.

(iii) $3+ 6+ 12+ 24 +$ ...., এখানে সাধারণ অনুপাত 2.

(v) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+$........................., এখানে সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{2}$.

শিক্ষার্থীর কাজ	নিচের ধারাগুলোর মধ্যে কোন্‌গুলো গুণোত্তর ধারা এবং কেন তা ব্যাখ্যা করুন। (i) $2+ 4+ 8+ 16+$..................... (ii) $1 +3 + 5 + 7 + 9 +$.............. (iii) $1 + 4 +16 + 64 +$ .... (iv) $2 +4 + 10 + 14 +$................. (v) $3 + 9 + 27 + 81$...................

সারসংক্ষেপ

- কতকগুলো সংখ্যা বা রাশিকে যদি কোনো নির্দিষ্ট নিয়মে এবং নির্দিষ্ট ক্রমে সাজানো যায়, তবে তাকে একটি অনুক্রম বলা হয়। যেমন, 2, 4, 6, 8, 10, ... একটি অনুক্রম।
- যে সকল সংখ্যা বা রাশি নিয়ে অনুক্রম তৈরি করা হয়, তাদের প্রত্যেককে অনুক্রমের পদ বলা হয়। অর্থাৎ 2, 4, 6, 8, ... অনুক্রমটির প্রথম পদ 2, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 6, ... ইত্যাদি।
- কোনো অনুক্রমের প্রত্যেকটি পদ যদি পরবর্তী পদের সাথে যোগ চিহ্ন (+) দ্বারা যুক্ত থাকে, তবে তাকে ধারা বলা হয়। যেমন, 2, 4, 6, 8, ... একটি অনুক্রম হলে $2+4+6+8+$........ একটি ধারা এবং ধারাটির প্রথম পদ 2, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 6, ... ইত্যাদি।
- কোনো ধারার n-তম পদকে সাধারণ পদ বলা হয়।
- কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে। ধারায় প্রাপ্ত পাশাপাশি দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর বলা হয়।
- যে ধারার যেকোনো পদের সাথে তার পরবর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান হয়, সে ধারাকে গুণোত্তর ধারা বলে এবং পাশাপাশি দুইটি পদের অনুপাতকে সাধারণ অনুপাত বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন:

1. নিচের কোনটি অনুক্রম?
   (ক) 1, 2, 4, 5, 7, 8, ... (খ) 1, 3, 5, 7, 9, ...
   (গ) 4, 6, 9, 12, ... (ঘ) 5, 8, 10, 14, ...
2. নিচের কোনটি সমান্তর ধারা?
   (ক) $2 + 5 + 8 + 11 + ... + 32$ (খ) $4 + 7 + 9 + 13 + ... + 22$
   (গ) $1 + 5 + 10 + 16 + ...$ (ঘ) $4 + 8 + 16 + 32 + ...$
3. (i) কোনো ধারার যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সর্বদা সমান হলে, সেই ধারাকে সমান্তর ধারা বলে।
   (ii) পাশাপাশি দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অনুপাত বলে।
   (iii) পাশাপাশি দুইটি পদের অনুপাতকে সাধারণ অনুপাত বলে।
   উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
4. $3 + 12 + 48 + 192 + ...$ ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?
   (ক) 3 (খ) 4 (গ) 9 (ঘ) 36

পাঠ ২ সমান্তর ধারা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবেন,
- প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবেন,
- প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবেন,
- প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সাধারণ পদ, সাধারণ অন্তর, ধারার সমষ্টি

মূলপাঠ

সমান্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়

মনে করুন, $3 + 7 + 11 + 15 + ...$একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অন্তর 4.
প্রদত্ত ধারার পদগুলোকে নিম্নলিখিত নিয়ম অনুসারে সাজানো যায়:

প্রথম পদ 3 $= 3 +$ (পদের ক্রমিক সংখ্যা -1) $. 4 = 3 + (1 - 1).4$

দ্বিতীয় পদ 7 $= 3+$ (পদের ক্রমিক সংখ্যা -1) . $4 = 3 + (2-1).4$
তৃতীয় পদ 11 $= 3+$ (পদের ক্রমিক সংখ্যা -1) . $4 = 3 + (3-1).4$
চতুর্থ পদ 15 $= 3+$ (পদের ক্রমিক সংখ্যা -1) . $4 = 3 + (4-1).4$
....
....
$\therefore$ n তম পদ $= 3+$ (পদের ক্রমিক সংখ্যা -1) . $4 = 3 + (n-1).4$
n তম পদকে সমান্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। এখানে n এর মান পরপর 1, 2, 3, ...বসিয়ে ধারাটির যেকোনো পদ নির্ণয় করা যায়।
কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হলে,

$$\boxed{n \text{ তম পদ} = a + (n-1)\,d}$$

উদাহরণ 1: 5 + 8 + 11 + 14 + ... ধারাটির 12তম পদ নির্ণয় করুন।
সমাধান: 5 + 8 + 11 + 14 + ... একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 5$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 8 - 5 = 3$
আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n-1)\,d.$

$\therefore$ 12 তম পদ $= 5 + (12-1).\,3 = 5 + 11 \times 3 = 5 + 33 = 38$

$\therefore$ 12 তম পদ $= 38$

উদাহরণ 2: 3 + 7 + 11 + 15 + ...ধারাটির কোন পদ 263?
সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 3$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 7 - 3 = 4 = 11 - 7$

$\therefore$ ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।
মনে করুন, ধারাটির n তম পদ $= 263$
আমরা জানি, n তম পদ $= a + (n-1)\,d.$

$\therefore\ a + (n-1)\,d = 263$
বা, $3 + (n-1).\,4 = 263$
বা, $4(n-1) = 263 - 3 = 260$
বা, $n - 1 = \dfrac{260}{4} = 65$
বা, $n = 65 + 1 = 66$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার 66 তম পদ $= 263$

শিক্ষার্থীর কাজ	কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অন্তর 5 হলে, ধারাটির প্রথম 7টি পদ, 20তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় করুন।

সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

মনে করুন, সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d, শেষ পদ l এবং n সংখ্যক পদের সমষ্টি S.

$\therefore\ S = a + (a+d) + (a+2d) + ... + (l-2d) + (l-d) + l$ ....(i)
পদগুলো বিপরীতক্রমে সাজিয়ে লিখলে পাওয়া যায়,
$S = l + (l-d) + (l-2d) + ... + (a+2d) + (a+d) + a$ .... (ii)
সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করলে পাওয়া যায়,

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \text{.........} + (l-2d) + (l-d) + l \quad \text{...........(i)}$$

এবং $S = l + (l-d) + (l-2d) + \text{.........} + (a+2d) + (a+d) + a \quad \text{........ (ii)}$

যোগ করে, $2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \text{.........} + (a+l) + (a+l) + (a+l)$

বা, $2S = n(a+l)$ [$\because$ ধারাটির পদসংখ্যা n]

$$\therefore S = \frac{n(a+l)}{2} \quad \text{....... (iii)}$$

অর্থাৎ, সমষ্টি (যোগফল) $= \dfrac{\text{পদ সংখ্যা} \times (\text{প্রথম পদ} + \text{শেষ পদ})}{2}$

আবার, শেষ পদ $l = n$ তম পদ $= a + (n-1)d$

l এর মান (iii) নং সমীকরণে বসালে পাওয়া যায়,

$$S = \frac{n}{2}\{a + a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \quad \text{.............(iv)}$$

লক্ষ করুন, কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ l এবং পদ সংখ্যা n দেওয়া থাকলে (iii) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। আবার, প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d এবং পদ সংখ্যা n দেওয়া থাকলে (iv) নং সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়। অনেক সময় n সংখ্যক পদের সমষ্টি S এর পরিবর্তে S_n ও লেখা হয়।

উদাহরণ 3: 4 + 11 + 18 + 25 +...........ধারাটির 30টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

সমাধান: এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ $a = 4$, সাধারণ অন্তর $d = 11 - 4 = 7$, পদ সংখ্যা $n = 30$

আমরা জানি, সমষ্টি $S = \dfrac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

$$\therefore S = \frac{30}{2}\{2\times4 + (30-1)\times7\}$$

$$= 15\,(8 + 29\times7) = 15\,(8+203) = 15\times211 = 3165$$

$\therefore$ 30টি পদের সমষ্টি $= 3165$.

শিক্ষার্থীর কাজ	(i) 3 + 6 + 9 + 12 + ...ধারাটির 25 পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন। (ii) 7 + 12 + 17 + 22 + ... ধারাটির 20 পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয়

মনে করুন, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি S.

$\therefore S = 1 + 2 + 3 + \text{.............} + (n-2) + (n-1) + n \text{ ....(i)}$

পদগুলো বিপরীতক্রমে সাজিয়ে লিখলে পাওয়া যায়,

$S = n + (n-1) + (n-2) + \text{...............} + 3 + 2 + 1 \text{ .... (ii)}$

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করলে পাওয়া যায়,

$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \text{........}(n+1)$ [n সংখ্যক পদ]

বা, $2S = n\,(n+1)$

$$\therefore S = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{.................. (iii)}$$

অনেক ক্ষেত্রে, n সংখ্যক পদের সমষ্টি S এর পরিবর্তে S_n ও লেখা হয়।

উদাহরণ 4: প্রথম 35টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি, $S = \frac{n(n+1)}{2}$

এখানে, $n = 35$

$$\therefore S = \frac{35(35+1)}{2} = \frac{35\times 36}{2} = 35 \times 18 = 630$$

$\therefore$ প্রথম 35টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি 630.

উদাহরণ 5: $1+ 3+ 5+ 7 + \ldots\ldots\ldots n$ তম পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: এখানে প্রথম পদ, $a = 1$, সাধারণ অন্তর, $d = 2$, পদ সংখ্যা $= n$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি, $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2\times 1 + (n-1)\times 2\}$

$$= \frac{n}{2}\ (2+2n-2) = \frac{n}{2}\times 2n = n^2$$

$\therefore$ প্রথম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি $= n^2$

উদাহরণ 6: $2+ 4+ 6+ 8 + \ldots\ldots\ldots n$ তম পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে প্রথম পদ, $a = 2$, সাধারণ অন্তর, $d = 2$, পদ সংখ্যা $= n$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি , $S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}\}$

$$= \frac{n}{2}\ \{2\times 2 + (n-1)\times 2\} = \frac{n}{2}\ (4+2n-2)$$

$$= \frac{n}{2}\ (2n+2) = \frac{n}{2}\ \times 2\ (n+1) = n\ (n+1)$$

$\therefore$ প্রথম n সংখ্যক জোড় সংখ্যার সমষ্টি $= n\ (n+1)$

উদাহরণ 7: $5+ 11+ 17+ 23 + \ldots\ldots\ldots + 65 =$ কত?

সমাধান: এটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 5$, সাধারণ অন্তর, $d = 11 - 5 = 6$, শেষ পদ $= 65$

মনে করুন, ধারাটির n তম পদ $= 65$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n-1)\ d$

$\therefore\ a + (n-1)\ d = 65$

বা, $5 + (n-1) \times 6 = 65$

বা, $6(n-1) = 65 - 5 = 60$

বা, $n - 1 = \frac{60}{6} = 10$

$\therefore n = 10 + 1 = 11.$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$S = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

সুতরাং, ধারাটির 65 টি পদের সমষ্টি,

বিকল্প পদ্ধতি

আমরা জানি,

$$S = \frac{\text{পদ সংখ্যা} \times (\text{প্রথম পদ} + \text{শেষ পদ})}{2}$$

$$S=\frac{11}{2}\{2\times5+(11-1)\times6\}$$
$$=\frac{11}{2}(10+60)=\frac{11}{2}\times70=11\times35=385.$$

$$=\frac{11\times(5+65)}{2}=\frac{11\times70}{2}=11\times35=385$$

উদাহরণ 8: একটি সমান্তর ধারার 101 তম পদ 305 এবং 127 তম পদ 383 হলে, ধারাটির প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, 101তম পদ = 305 এবং 127 তম পদ = 383

মনে করুন, প্রথম পদ = a এবং সাধারণ অন্তর = d

আমরা জানি, n তম পদ = $a+(n-1)d$

$\therefore$ 101 তম পদ = $a+(101-1)d=305$

বা, $a+100d=305$ ....(i)

আবার, 127 তম পদ = $a+(127-1)d=383$.

বা, $a+126d=383$ ....(ii)

সমীকরণ (ii) থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করে পাওয়া যায়,

$126d-100d=383-305$

বা, $26d=78$

$\therefore d=\frac{78}{26}=3$

সমীকরণ (i) -এ d এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$a+100\times3=305$

বা, $a=305-300=5$

$\therefore a=5$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রথম পদ = 5 এবং সাধারণ অন্তর = 3.

উদাহরণ 9: $2+4+6+8+$ ....ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 2550 হলে, n এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটি একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a=2$, সাধারণ অন্তর, $d=4-2=2$ এবং পদ সংখ্যা = n

আমরা জানি, সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2\times2+(n-1)\times2\}$$
$$=\frac{n}{2}\{4+(n-1).2\}=\frac{n}{2}(4+2n-2)$$
$$=\frac{n}{2}(2n+2)=n(n+1)=n^2+n$$

প্রশ্নানুসারে, $n^2+n=2550$

বা, $n^2+n-2550=0$

বা, $n^2+51n-50n-2550=0$

বা, $n(n+51)-50(n+51)=0$

বা, $(n+51)(n-50)=0$

সুতরাং, $n+51=0$ অথবা, $n-50=0$

$\therefore n=-51$ অথবা, $n=50$

কিন্তু পদ সংখ্যা ঋণাত্মক হয় না, কাজেই $n \neq -51$

$\therefore n = 50.$

শিক্ষার্থীর কাজ	(i) প্রথম 25টি স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় করুন। (ii) $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 99 =$ কত? (iii) $3 + 5 + 7 + \ldots\ldots$ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 440 হলে, n এর মান কত?

প্রথম *n* সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয়

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি অর্থাৎ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$ এর সমষ্টি নির্ণয় করতে হবে।

মনে করুন, $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$

আপনারা জানেন, $n^3 - (n-1)^3$

$$= n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) = n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 = 3n^2 - 3n + 1$$

$\therefore n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$

এখন, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots n$ বসালে পাওয়া যায়,

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$
$$4^3 - 3^3 = 3.4^2 - 3.4 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\underline{n^3 - (n-1)^3 = 3.n^2 - 3.n + 1}$$

যোগ করে, $n^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3\,(1+2+3+\ldots + n) + (1+1+1+\ldots+1)$

বা, $n^3 = 3.S - 3\,\dfrac{n(n+1)}{2} + n$ [যেহেতু, $1+2+3+\ldots\, n = \dfrac{n(n+1)}{2}$]

$$\therefore 3S = n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n^2 + 3n - 2n}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

উদাহরণ 10: প্রথম 15টি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, $S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

দেওয়া আছে, $n = 15$

$$\therefore S = \frac{15\,(15+1)(2 \times 15 + 1)}{6} = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = \frac{7440}{6} = 1240$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $= 1240.$

শিক্ষার্থীর কাজ	প্রথম 10 টি স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি নির্ণয়

মনে করুন, $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3$

আপনারা জানেন, $n^4 - (n-1)^4 = n^4 - (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1)$

বা, $n^4 - (n-1)^4 = n^4 - n^4 + 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

বা, $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$

এখন, $n = 1, 2, 3, ..., n$ বসালে পাওয়া যায়,

$$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$$
$$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4.4^3 - 6.4^2 + 4.4 - 1$$
....
....
....
$$n^4 - (n-1)^4 = 4.n^3 - 6n^2 + 4.n - 1$$

যোগ করে, $n^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 4(1+2+3+ ....+n) - (1+1+1+.....+1)$

বা, $n^4 = 4S - 6.\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{4n(n+1)}{2} - n$

[যেহেতু, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...\ n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ এবং $1+2+3+ ....+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$]

বা, $4S = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$

$= n^4 + n(2n^2 + n + 2n + 1) - 2n^2 - 2n + n$

$= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - n$

$= n^4 + 2n^3 + n^2$

$= n^2(n^2 + 2n + 1)$

$= n^2(n+1)^2$

$$\therefore S = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

লক্ষ করুন, $1+2+3+4+ ....+ n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$1^2+2^2+3^2+4^2+ ....+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+ ....+ n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{2} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\therefore 1^3+2^3+3^3+ ....+ n^3 = (1+2+3+ .... + n)^2$$

উদাহরণ 11: প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

সমাধান: প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নানুসারে, $\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 225 = (15)^2$

$\therefore \dfrac{n(n+1)}{2} = 15$

বা, $n^2 + n = 30$

বা, $n^2 + n - 30 = 0$

বা, $n^2 + 6n - 5n - 30 = 0$

বা, $(n+6)\ (n-5) = 0$

$\therefore n = 5$ [কেননা, n ঋণাত্মক হতে পারে না]

ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি $= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{5(5+1)(2.5+1)}{6} = \dfrac{5\times 6\times 11}{6} = 5\times 11 = 55$

শিক্ষার্থীর কাজ	প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

সারসংক্ষেপ

- $a+(a+d)+(a+2d)+$............একটি সমান্তর ধারা, যার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d. অতএব, n তম পদ $= a+(n-1)d$.
- কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, শেষ পদ l এবং পদসংখ্যা n দেওয়া থাকলে, n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S = \dfrac{n(a+l)}{2}$ সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।
- কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d এবং পদসংখ্যা n দেওয়া থাকলে, n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $S = \dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ সূত্রের সাহায্যে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় করা যায়।
- প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি, $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- 1+3+5+7+ ....সমান্তর ধারা হলে, প্রথম n সংখ্যক বিজোড় সংখ্যার সমষ্টি, $S = n^2$
- 2+4+6+8+ .... সমান্তর ধারা হলে, প্রথম n সংখ্যক জোড় সংখ্যার সমষ্টি, $S = n\ (n+1)$
- প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি, $S = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি, $S = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
- $1^3+2^3+3^3+ \ldots\ldots\ldots\ldots + n^3 = (1+2+3+ \ldots\ldots\ldots\ldots + n)^2$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন।

1. নিচের কোনটি সমান্তর ধারা?

   (ক) 1+2+4+6+ .... (খ) 2+5+9+14+............................

   (গ) 2+4+8+16+ .... (ঘ) 2+6+10+14+...........................

2. 2 – 5 – 12 –19 – ....ধারাটির সাধারণ অন্তর কত?

   (ক) –3 (খ) –7 (গ) 3 (ঘ) 7

3. কোনো সমান্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অন্তর d এবং পদসংখ্যা n হলে, n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র কোনটি?

   (ক) $a+(n-1)d$ (খ) $\frac{n(n+1)}{2}$ (গ) $\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$ (ঘ) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. 1+3+5+7+ ....ধারাটির n পদের সমষ্টি কত?

   (ক) $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ (খ) $\frac{n(n+1)}{2}$ (গ) $n(n+1)$ (ঘ) n^2

5. (i) $1+2+3+ \ldots\ldots + n = n(n+1)$

   (ii) $1+3+5+7+ \ldots\ldots + (2n-1) = n^2$

   (iii) $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   উপরের তথ্যের ভিত্তিতে কোন্‌টি সঠিক?

   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের ধারাটির ভিত্তিতে 6 ও 7 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন।

– 23 – 19 – 15 .... + 29 একটি সমান্তর ধারা।

6. ধারাটির সাধারণ অন্তর কত?

   (ক) 4 (খ) – 4 (গ) – 23 (ঘ) 29

7. ধারাটির সমষ্টি কত?

   (ক) 40 (খ) 42 (গ) – 42 (ঘ) – 34

পাঠ ৩ গুণোত্তর ধারা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয় করতে পারবেন,
- গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সাধারণ পদ, সাধারণ অনুপাত

মূলপাঠ

গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ নির্ণয়

মনে করুন, $3+6+12+24+ \ldots$একটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অনুপাত $=\dfrac{6}{3}=2.$

প্রদত্ত ধারার পদগুলোকে নিম্নলিখিত নিয়ম অনুসারে সাজানো যায়:

প্রথম পদ $3 = 3.2^{1-1}$

দ্বিতীয় পদ $6 = 3.2^{2-1}$

তৃতীয় পদ $12 = 3.2^{3-1}$

চতুর্থ পদ $24 = 3.2^{4-1}$

....

....

....

$\therefore n$ তম পদ $= 3.2^{n-1}$

n তম পদকেই গুণোত্তর ধারার সাধারণ পদ বলা হয়। এখানে n এর মান পরপর 1, 2, 3 ....বসিয়ে ধারাটির যেকোনো পদ নির্ণয় করা যায়।

অতএব, কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে,

$$\boxed{n \text{ তম পদ} = a.\, r^{n-1}}$$

উদাহরণ 1: $2+4+8+16+$ .... গুণোত্তর ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a=2$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\dfrac{4}{2}=2$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= a\,r^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির 8 তম পদ $= 2\times 2^{8-1} = 2\times 2^{7} = 256.$

উদাহরণ 2: কোনো গুণোত্তর ধারার ৩য় পদ 36 এবং ৪র্থ পদ 108 হলে, ধারাটির সপ্তম পদ পর্যন্ত নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে ৩য় পদ $= 36$ এবং ৪র্থ পদ $= 108$

$\therefore$ সাধারণ অনুপাত, $r=\dfrac{108}{36}=3.$

মনে করুন, ধারাটির প্রথম পদ $= a$

$\therefore$ ৩য় পদ $= ar^{3-1} = ar^{2}$

$\therefore 36 = ar^2 = a.3^2 = 9a$

$\therefore a = \dfrac{36}{9} = 4$

$\therefore$ প্রথম পদ $= 4$

দ্বিতীয় পদ $= ar = 4.3 = 12$

তৃতীয় পদ $= ar^2 = 4.3^2 = 4\times 9 = 36$

চতুর্থ পদ $= ar^3 = 4.3^3 = 4\times 27 = 108$

....

....

....

$\therefore$ সপ্তম পদ $= ar^{7-1} = 4.3^{7-1} = 4.3^6 = 4\times 729 = 2916$

$\therefore$ সপ্তম পদ $= 2916$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটি হবে, 4+12+36+108+..........+ 2916

মন্তব্য : কোনো গুণোত্তর ধারার যেকোনো দুইটি পাশাপাশি পদ (Two consecutive term) দেওয়া থাকলে, গুণোত্তর ধারাটি লেখা যায়।

উদাহরণ 3: $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2}$ ....ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?

সমাধান: এটি একটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$

মনে করুন, ধারাটির n তম পদ $= 8\sqrt{2}$

$\therefore n$ তম পদ $= ar^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8\times 2 = 16 = 2^4$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = (-\sqrt{2})^8$

বা, $n - 1 = 8$

$\therefore n = 9$

$\therefore$ ধারাটির নবম পদ $8\sqrt{2}$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. 4+12+36+................................. গুণোত্তর ধারাটির 10 তম পদ নির্ণয় করুন। 2. 128+64+32+ .... ধারাটির সপ্তম পদ কত?

গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয়

একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r হলে, n তম পদ পর্যন্ত ধারাটি হয়,

$a+ar+ar^2+ar^3+ \ldots\ldots\ldots\ldots+ar^{n-1}$

মনে করুন, এই গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি $= S$

$\therefore\ S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

সমীকরণ (i) এর উভয়পক্ষকে r দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়,

$Sr = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^n \ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

সমীকরণ (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাওয়া যায়,

$S - Sr = a - ar^n$

বা, $S(1-r) = a(1-r^n)$

$\therefore\ S = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, এখানে $r \neq 1$.

$r < 1$ হলে, $(1-r^n)$ ও $(1-r)$ উভয়ই ধনাত্মক এবং এক্ষেত্রে $S = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে।

আবার, সমীকরণ (ii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাওয়া যায়,

$Sr - S = ar^n - a$

বা, $S(r-1) = a(r^n-1)$

$\therefore\ S = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, এখানে $r \neq 1$.

$r > 1$ হলে, $(1-r^n)$ ও $(1-r)$ উভয়ই ঋণাত্মক এবং এক্ষেত্রে $S = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে।

$r = 1$ হলে, উপরের উভয় ক্ষেত্রে $S = \dfrac{0}{0}$ হয়, যা অর্থহীন। এজন্য $r = 1$ হলে, এ দুইটি সূত্রের কোনোটিই ব্যবহার করা যাবে না। সেক্ষেত্রে, $S = a + a + a + \ldots\ldots\ldots + a$ (n সংখ্যক পদ)

অর্থাৎ, $S = na$

উদাহরণ 4: $2+4+8+16+\ldots\ldots\ldots\ldots$ গুণোত্তর ধারাটির 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{4}{2} = 2 > 1$.

এখানে পদ সংখ্যা, $n = 10$

$\therefore$ সমষ্টি, $S = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$\therefore$ 10 টি পদের সমষ্টি, $S = \dfrac{2(2^{10}-1)}{2-1} = 2(2^{10}-1) = 2\,(1024-1) = 2 \times 1023 = 2046$

$\therefore S = 2046$.

উদাহরণ 5: $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ, $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\frac{1}{3}}{1} = \dfrac{1}{3} < 1$

এখানে পদ সংখ্যা, $n=5$

$$\therefore S=\frac{a\left(1-r^{n}\right)}{1-r}$$

$\therefore$ প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি, $S=\dfrac{1\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{1-\frac{1}{243}}{\frac{3-1}{3}}=\dfrac{\frac{242}{243}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{242}{243}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{121}{81}$

উদাহরণ 6: $5+x+y+135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ, $a=5$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\dfrac{x}{5}=\dfrac{y}{x}$ ....(i)

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির চতুর্থ পদ $=ar^{4-1}=ar^{3}$

বা, $135=5\times\left(\dfrac{x}{5}\right)^{3}$

বা, $\dfrac{x^{3}}{125}=\dfrac{135}{5}$ বা, $\dfrac{x^{3}}{125}=27$

বা, $x^{3}=125\times27=(5)^{3}\times(3)^{3}$

বা, $x^{3}=(5\times3)^{3}$

$\therefore$ $x=5\times3=15$

এখন $x=15$, সমীকরণ (i) এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$\dfrac{15}{5}=\dfrac{y}{15}$ বা, $\dfrac{3}{1}=\dfrac{y}{15}$ বা, $y=3\times15$ $\therefore y=45$

$\therefore x=15$ এবং $y=45$.

শিক্ষার্থীর কাজ	
	1. 2+6+18+ ....গুণোত্তর ধারাটির 8 পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।
	2. 3 – 6+12 – ....গুণোত্তর ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- 2+6+18+ 54+..............একটি গুণোত্তর ধারা, যার প্রথম পদ 2 এবং সাধারণ অনুপাত $=\dfrac{6}{2}=3$.
- কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে, n তম পদ $=ar^{n-1}$
- কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r এবং পদসংখ্যা n হলে, $S=\dfrac{a\left(1-r^{n}\right)}{1-r}, r\neq1$
- $r<1$ হলে, $(1-r^{n})$ ও $(1-r)$ উভয়ই ধনাত্মক এবং সেক্ষেত্রে $S=\dfrac{a\left(1-r^{n}\right)}{1-r}, r\neq1$ সূত্রটি ব্যবহার করা শ্রেয়।
- $r>1$ হলে, $(1-r^{n})$ ও $(1-r)$ উভয়ই ঋণাত্মক এবং সেক্ষেত্রে $S=\dfrac{a\left(r^{n}-1\right)}{r-1}, r\neq1$ সূত্রটি ব্যবহার করা শ্রেয়।
- $r=1$ হলে, $S=na$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৮.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন:

1. নিচের কোনটি গুণোত্তর ধারা ?
   (ক) 2+6+10+14+ .... (খ) 3+6+10+15+............................
   (গ) 3+6+12+24+ .... (ঘ) 2+6+12+36+............................

2. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} -$ ....ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?
   (ক) $-\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) $-\frac{1}{4}$ (ঘ) $\frac{1}{4}$

3. (i) কোনো গুণোত্তর ধারার যেকোনো পদকে সেই ধারার সাধারণ অনুপাত দ্বারা গুণ করলে, তৎপরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।
   (ii) কোনো গুণোত্তর ধারার যেকোনো দুইটি পাশাপাশি পদ দেওয়া থাকলে, গুণোত্তর ধারাটি লেখা যায়।
   (iii) কোনো গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে, n তম পদ $= ar^n$ ।
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+$............. একটি গুণোত্তর ধারা।
উপরের ধারাটির ভিত্তিতে 4 ও 5 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন।

4. প্রদত্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?
   (ক) 1 (খ) $-\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{1}{3}$ (ঘ) $\frac{1}{9}$

5. ধারাটির প্রথম পাঁচটি পদের সমষ্টি কত?
   (ক) $\frac{121}{81}$ (খ) $\frac{81}{29}$ (গ) $\frac{121}{243}$ (ঘ) $\frac{242}{243}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

সমান্তর ধারা (1-27):

1. 4 + 9 + 14 + 19 + ...ধারাটির 10 তম পদ নির্ণয় করুন।
2. 2 + 6 + 10 + 14 + ...ধারাটির 15 তম পদ নির্ণয় করুন।
3. 6 + 9 + 12 + ...ধারাটির 45 তম পদটি কত?
4. 2 – 5 – 12 – 19 –...................ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12 তম পদ নির্ণয় করুন।
5. 10 + 15 + 20 + ...ধারাটির 30 তম পদ কত?
6. 4 + 6 + 8 + ...ধারার কোন পদ 422?
7. 5 + 12 + 19 + 26 + ...ধারাটির কোন পদ 488?
8. 8 + 11 + 14 + 17 +..........................ধারার কোন পদ 392?
9. 4 + 7 + 10 + 13 +..........................ধারাটির কোন পদ 301?
10. 5 + 10 + 15 + ...ধারাটির n পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন?

11. $9 + 7 + 5 +$ .... ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি -144 হলে, n এর মান নির্ণয় করুন।
12. একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ 3 এবং সাধারণ অন্তর 4 হলে, এর 15 তম পদ কত?
13. একটি সমান্তর ধারার 5 তম পদ 11 এবং 4 তম পদ 14 হলে, ধারাটির 20 তম পদ নির্ণয় করুন।
14. কোনো সমান্তর ধারার a তম পদ a^2 এবং b তম পদ b^2 হলে, ধারাটির $(a + b)$ তম পদ কত?
15. কোনো সমান্তর ধারার p তম পদ p^2 এবং q তম পদ q^2 হলে, ধারাটির $(p - q)$ তম পদ কত?
16. $11 + 18 + 25 + 32 +$ ....ধারাটির 29টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।
17. $8 + 16 + 24 +$ ....ধারাটির প্রথম 9 টি পদের সমষ্টি কত?
18. একটি সমান্তর ধারার 12 তম পদ 77 হলে, এর প্রথম 23টি পদের সমষ্টি কত?
19. একটি সমান্তর ধারার 16 তম পদ -20 হলে, এর প্রথম 31 টি পদের সমষ্টি কত?
20. একটি সমান্তর ধারার প্রথম 12 পদের সমষ্টি 144 এবং প্রথম 20 পদের সমষ্টি 560 হলে, এর প্রথম 6 পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।
21. $5 + 11 + 17 + 23 + \ldots\ldots + 59 =$ কত?
22. $25 + 21 + 17 + \ldots\ldots - 27 =$ কত?
23. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + 40^2 =$ কত?
24. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + 15^3 =$ কত?
25. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots\ldots + 22^2 =$ কত?
26. $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3}{1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n} = 210$ হলে, n এর মান কত?
27. প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 784 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

গুণোত্তর ধারা (28-40):

28. $128 + 64 + 32 +$ .... ধারাটির দশম পদ কত?
29. $4 + 12 + 36 +$ ....গুণোত্তর ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় করুন।
30. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম ও দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে 100 এবং 50 হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ কত?
31. $84 + 42 + 21 +$ .... ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় করুন।
32. $2 - 4 + 8 - 16 +$ .... ধারাটির প্রথম 12টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।
33. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} +$ .... ধারাটির প্রথম ছয়টি পদের সমষ্টি কত?
34. একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে, ধারাটির প্রথম পদ নির্ণয় করুন।
35. $4 + x + y + 256$ একটি গুণোত্তর ধারা হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় করুন।
36. একটি গুণোত্তর ধারার চতুর্থ পদ 81 এবং অষ্টম পদ 6561 হলে, ধারাটির দ্বিতীয় পদ কত?
37. $7 + x + y + 189$ একটি গুণোত্তর ধারা হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় করুন।
38. $3 + x + y + z + 243$ একটি গুণোত্তর ধারা হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় করুন।
39. $\log 2 + \log 4 + \log 8 +$ ....ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

40. $2+4+8+16+$ ....ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

41. $\log 3+\log 9+\log 27+$ ....একটি ধারা।

(K) ধারাটির সাধারণ অন্তর নির্ণয় করুন।

(L) ধারটির 10 তম পদ কত?

(M) ধারাটির প্রথম 15টি পদের সমষ্টি কত?

42. একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির পঞ্চম পদ $3\sqrt{3}$ এবং অষ্টম পদ -27,

(K) উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

(L) ধারাটির 15 তম পদ নির্ণয় করুন।

(M) ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 11টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

43. সাবিহা তাঁর বেতন থেকে প্রথম মাসে 1500 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী মাসগুলোর প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন।

(K) তিনি n তম মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?

(L) তিনি প্রথম n সংখ্যক মাসে কত টাকা সঞ্চয় করেন?

(M) এক বছরে তিনি কত টাকা সঞ্চয় করেন?

44. কোনো সমান্তর ধারার n তম পদ $2n+4$

(K) ধারাটি নির্ণয় করুন।

(L) ধারাটির 12 তম পদ এবং 25টি পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।

(M) প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি করুন এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় করুন।