ইউনিট
৭

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ
(Simple Simultaneous Equations with Two Variables)

ভূমিকা

ইউনিট ৫-এ এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ সম্পর্কে আপনাদের সুস্পষ্ট ধারণা হয়েছে। সেখানে আপনারা প্রত্যক্ষ করেছেন, কীভাবে একটি মাত্র চলক দ্বারা সমীকরণ গঠিত হয়েছে। এক চলকবিশিষ্ট একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান কীভাবে করতে হয় এবং বাস্তব সমস্যাভিত্তিক বিভিন্ন সমস্যার সমাধান কীভাবে করতে হয় সে সম্পর্কে জ্ঞান অর্জন করেছেন। এই ইউনিটে দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ ও সমীকরণ জোটের সমাধান ও ব্যবহার সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের নির্ভরশীলতা ও সংগতিপূর্ণতার শর্ত সম্পর্কে বলতে পারবেন,
- বিভিন্ন পদ্ধতিতে দুই চলকবিশিষ্ট এক ঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান করার দক্ষতা অর্জন করবেন,
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান করার দক্ষতা অর্জন করবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১২ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১: দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা

পাঠ ২: সরল সহসমীকরণের সমাধান

পাঠ ৩: লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান

পাঠ ৪: সরল সহসমীকরণের ব্যবহার

পাঠ ১ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান যোগ্যতা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোট সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- সমীকরণ জোটের নির্ভরশীলতা ও সংগতিপূর্ণতা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সমাধানের প্রকৃতি বর্ণনা করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	চলক, সহসমীকরণ, সমীকরণ জোট, সংগতিপূর্ণ, অসংগতিপূর্ণ, নির্ভরশীল, অনির্ভরশীল

মূলপাঠ

সরল সহসমীকরণ (Simple simultaneous equations)

সরল সহসমীকরণ বলতে দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণকে বুঝায় যার অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের এরূপ মান চাওয়া হয় যা দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয়। সমীকরণ দুইটি দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটও বলা হয়। অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে সমস্ত মান যুগল দ্বারা সমীকরণ জোট সিদ্ধ হয় তাদেরকে ঐ সমীকরণ জোটের সমাধান বলা হয়। এই পাঠে বিভিন্ন পদ্ধতিতে সরল সহসমীকরণের সমাধান সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা হবে। দুই চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটকে সাধারনভাবে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়: $a_1x+b_1y=c_1$

$$a_2x+b_2y=c_2$$

উপরোক্ত সমীকরণ জোট সম্পর্কে নিম্নোক্ত সিদ্ধান্ত নেয়া যায়:

(ক) যদি $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ হয়, তবে সমীকরণ জোটের অন্তর্ভুক্ত সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল এবং বাস্তব সংখ্যায় সমীকরণ জোটের অসংখ্য সমাধান পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1: $2x-3y=5$

$$4x-6y=10$$

সমাধান : এখানে, $a_1=2,\ a_2=4,\ b_1=-3,\ b_2=-6,\ c_1=5,\ c_2=10$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2} \text{ এবং } \frac{c_1}{c_2}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{1}{2}$$

অতএব, সমীকরণ জোট পরস্পর নির্ভরশীল এবং অসংখ্য সমাধান রয়েছে। যেমন, $(4,1),(7,3),(10,5)$ ইত্যাদি।

(খ) যদি $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ হয়, তবে সমীকরণ জোট অসংগতিপূর্ণ এবং এক্ষেত্রে সমীকরণ জোটের কোন সমাধান থাকে না।

উদাহরণ 2: $3x+2y=5$

$$6x+4y=7$$

সমাধান: এখানে, $a_1=3,\ a_2=6,\quad b_1=2,\ b_2=4,\quad c_1=5,\ c_2=7$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{5}{7}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

সুতরাং সমীকরণ জোট অসংগতিপূর্ণ এবং এর কোন সমাধান নেই।

(গ) যদি সমীকরণ জোটের এক বা একাধিক অথচ নির্দিষ্ট সংখ্যক সমাধান থাকে তাহলে সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ।

(i) যদি $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হয়, তবে সমীকরণ জোট সর্বদা সংগতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সেক্ষেত্রে একটি মাত্র সমাধান পাওয়া যাবে।

(ii) যদি $c_1 = c_2 = 0$ হয়, তাহলে $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ হলে, সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ ও পরস্পর নির্ভরশীল এবং সেক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান পাওয়া যাবে। কিন্তু, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হলে সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সে ক্ষেত্রে একটি মাত্র সমাধান পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 3: $x + y = 6$

$2x + y = 3$

সামধান : এখানে $a_1 = 1,\ a_2 = 2, \qquad b_1 = 1,\ b_2 = 1, \qquad c_1 = 6,\ c_2 = 3$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

অতএব সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং একক সমাধান রয়েছে। উপরোক্ত সমীকরনের একক সমাধান হল $(-3, 9)$

উদাহরণ 4: $2x - 5y = 0$

$4x - 10y = 0$

সমাধান: এখানে $a_1 = 2,\ a_2 = 4, \qquad b_1 = -5, b_2 = -10, \qquad c_1 = c_2 = 0$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

অতএব সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ ও পরস্পর নির্ভরশীল এবং অসংখ্য সমাধান পাওয়া যাবে। যেমন, $(5,2), (10,4), (15,6), ...$

উদাহরণ 5: $x + y = 0$

$x - y = 0$

সমাধান: এখানে $a_1 = 1,\ a_2 = 1, \qquad b_1 = 1,\ b_2 = -1, \qquad c_1 = c_2 = 0$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1} = 1, \qquad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-1} - -1$$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

অতএব, সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ, পরস্পর অনির্ভরশীল এবং অনন্য সমাধান রয়েছে। সমাধানটি হলো $(0,0)$

সারসংক্ষেপ

- সরল সহসমীকরণ বলতে দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণকে বুঝায় যার অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের এরূপ মান চাওয়া হয় যা দ্বারা সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ হয়।
- অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে সমস্ত মান যুগল দ্বারা সমীকরণ জোট সিদ্ধ হয় তাদেরকে ঐ সমীকরণ জোটের সমাধান বলা হয়।
- যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয় তবে সমীকরণ জোটের অন্তর্ভুক্ত সমীকরণদ্বয় পরস্পর নির্ভরশীল এবং বাস্তব সংখ্যায় সমীকরণ জোটের অসংখ্য সমাধান পাওয়া যায়।
- যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ হয় তবে সমীকরণ জোট অসংগতিপূর্ণ এবং এক্ষেত্রে সমীকরণ জোটের কোন সমাধান থাকে না।
- যদি $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হয়, তবে সমীকরণ জোট সর্বদা সংগতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সেক্ষেত্রে একটি মাত্র সমাধান পাওয়া যাবে।
- যদি $c_1 = c_2 = 0$ হয়,
  - তাহলে $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ হলে, সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ ও পরস্পর নির্ভরশীল এবং সেক্ষেত্রে অসংখ্য সমাধান পাওয়া যাবে।
  - কিন্তু, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ হলে সমীকরণ জোট সংগতিপূর্ণ ও পরস্পর অনির্ভরশীল এবং সে ক্ষেত্রে একটি মাত্র সমাধান পাওয়া যাবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন

1. নিচের কোন শর্তে $lx + my + n = 0$ এবং $px + qy + r = 0$ সমীকরণ জোট অসংগতিপূর্ণ ও অনির্ভরশীল হবে?

   (ক) $\frac{l}{p} = \frac{m}{q} = \frac{n}{r}$ (খ) $\frac{l}{p} = \frac{m}{q} \neq \frac{n}{r}$ (গ) $\frac{l}{p} = \frac{m}{q}$ (ঘ) $\frac{m}{q} = \frac{n}{r}$

পাঠ ২ সরল সহসমীকরণের সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- বিভিন্ন পদ্ধতিতে দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	প্রতিস্থাপন, অপনয়ন, আড়গুণন, বজ্রগুণন, লৈখিক

মূলপাঠ

বর্তমান পাঠে আমরা পরস্পর অনির্ভরশীল ও সংগতিপূর্ণ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করবো। এরূপ সমীকরণ জোটের একটিমাত্র (অনন্য) সমাধান পাওয়া যায়। এরূপ সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের চারটি পদ্ধতি আলোচিত হবে। পদ্ধতিগুলো হলো (১) প্রতিস্থাপন পদ্ধতি, (২) অপনয়ন পদ্ধতি, (৩) আড়গুণন পদ্ধতি বা বজ্রগুণন পদ্ধতি, (৪) লৈখিক পদ্ধতি।

বর্তমান পাঠে প্রথম তিনটি পদ্ধতি এবং পরবর্তী পাঠে চতুর্থ পদ্ধতিতে সরল সহসমীকরণের সমাধান নিয়ে আলোচনা করা হবে।

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Method of substitution)

সমীকরণ জোটের দুইটি সমীকরণের সুবিধামত একটি সমীকরণ হতে একটি চলকের মান অপর চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করে প্রাপ্ত মান সমীকরণ জোটের অপর সমীকরণে বসালে এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যায়। অতঃপর এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণটি সমাধান করে প্রাপ্ত মান সমীকরণ জোটের যে কোন সমীকরণে বসালে অপর চলকের মান পাওয়া।

উদাহরণ 1: প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করুন: $7x-3y=31$
$9x-5y=41$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়, $7x-3y=31 \ldots\ldots\ldots(1)$
$9x-5y=41 \ldots\ldots\ldots(2)$

(1) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়

$$7x=31+3y$$

$$\therefore x=\frac{1}{7}(31+3y)\ldots\ldots(3)$$

(3) নং সমীকরণ হতে x-এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\therefore 9\times\frac{1}{7}(31+3y)-5y=41$$

বা, $\dfrac{9\times31}{7}+\dfrac{9\times3}{7}y-5y=41$

বা, $\dfrac{279}{7}+\dfrac{27y}{7}-5y=41$

বা, $279+27y-5\times7y=41\times7$

বা, $279+27y-35y=287$

বা, $27y-35y=287-279$

বা, $-8y=8$

$\therefore y=-1$

এখন y এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$x=\frac{1}{7}\{31+3.(-1)\}=\frac{1}{7}(31-3)$$

$$=\frac{1}{7}.28=4$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(4,-1)$

উদাহরণ 2: প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করুন: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$

$$ax+by=a^2+b^2$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ ....(1)

$$ax+by=a^2+b^2 \text{ ....}(2)$$

(1) নং হতে পাওয়া যায়, $\frac{x}{a}=2-\frac{y}{b}$

বা $\frac{x}{a}=\frac{2b-y}{b}$

$\therefore x=a\left(\frac{2b-y}{b}\right)$.........(3)

(3) নং সমীকরণ হতে x-এর মান (2) নং বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$a.a\left(\frac{2b-y}{b}\right)+by=a^2+b^2$$

বা, $a^2\left(\frac{2b-y}{b}\right)+by=a^2+b^2$

বা, $a^2(2b-y)+b.by=b(a^2+b^2)$

বা, $2a^2b-a^2y+b^2y=a^2b+b^3$

বা, $-a^2y+by^2=a^2b+b^3-2a^2b$

বা, $(b^2-a^2)y=b^3+a^2b-2a^2b$

বা, $(b^2-a^2)y=b^3-a^2b$

বা, $y=\frac{b^3-a^2b}{b^2-a^2}$

বা, $y=\frac{b(b^2-a^2)}{b^2-a^2}$

$\therefore y=b$

এখন y এর মান (3) নং এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$x=a.\left(\frac{2b-b}{b}\right)=a.\frac{b}{b}=a$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(a,b)$

অপনয়ন পদ্ধতি (Method of elimination)

সমীকরণ জোটের একটি সমীকরণ বা প্রয়োজনবোধে দুইটি সমীকরণকে এমন সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হবে যেন গুণ করার পর উভয় সমীকরণের যে কোন একটি চলকের সহগের পরমমান সমান হয়। প্রাপ্ত নূতন সমীকরণ দুইটি যোগ বা বিয়োগ করলে সমান সহগ বিশিষ্ট চলকটি অপসারিত হয় এবং এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ পাওয়া যায়। সমীকরণটিকে সমাধান করলে বিদ্যমান চলকটির মান পাওয়া যায়। চলকটির প্রাপ্তমান সুবিধামত প্রদত্ত সমীকরণের যে কোন একটিতে বসালে অপর চলকের মান পাওয়া যায়।

উদাহারণ 3: আপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করুন: $x-y=5$
$5x+2y=4$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট, $x-y=5 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$5x+2y=4 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) নং সমীকরণকে 5 দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়,

$5x-5y=25 \ldots\ldots\ldots(3)$

এখন (3) নং সমীকরণ হতে (2) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাওয়া যায়,

$-7y=21$

বা, $y=-3$

এখন y এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$x-(-3)=5$

বা, $x+3=5$

বা, $x=5-3=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y)=(2, -3)$

উদাহরণ 4: অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করুন: $ax+by=ab$
$bx+ay=ab$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট, $ax+by=ab \ldots\ldots\ldots(1)$
$bx+ay=ab \ldots\ldots\ldots(2)$

(1) নং সমীকরণকে b এবং (2) নং সমীকরণকে a দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়,

$abx+b^2y=ab^2 \ldots\ldots\ldots(3)$

$abx+a^2y=a^2b \ldots\ldots\ldots(4)$

এখন (3) নং সমীকরণ হতে (4) নং সমীকরণকে বিয়োগ করে পাওয়া যায়,

$b^2y-a^2y=ab^2-a^2b$

বা, $(b^2-a^2)y=ab(b-a)$

বা, $y=\dfrac{ab(b-a)}{b^2-a^2}$

$=\dfrac{ab(b-a)}{(b-a)(b+a)}$

$\therefore y=\dfrac{ab}{a+b}$

এখন y এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$ax+b.\left(\dfrac{ab}{a+b}\right)=ab$

বা, $ax(a+b)+b.ab=ab(a+b)$

বা, $a(a+b)x+ab^2=a^2b+ab^2$

বা, $a(a+b)x=a^2b+ab^2-ab^2$

বা, $a(a+b)x=a^2b$

বা, $x=\dfrac{a^2b}{a(a+b)}$

$\therefore x=\dfrac{ab}{a+b}$

$\therefore$ নির্ণয় সমাধান $(x, y)=\left(\dfrac{ab}{a+b}, \dfrac{ab}{a+b}\right)$

আড়গুণন পদ্ধতি (Method of crossmultiplication)

এই পদ্ধতিকে বজ্রগুণন পদ্ধতিও বলা হয়। আড়গুণন পদ্ধতিতে সমীকরণ জোটের সমাধান সরাসরি সূত্রের মাধ্যমে পাওয়া যায়। এ জন্য নিচের সমীকরণ দুইটি বিবেচনা করুন।

$a_1x+b_1y+c_1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$a_2x+b_2y+c_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

এখন (1) নং সমীকরণকে b_2 এবং (2) নং সমীকরণকে b_1 দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়,

$a_1b_2x+b_1b_2y+b_2c_1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

$a_2b_1x+b_1b_2y+b_1c_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

(3) নং সমীকরণ হতে (4) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাওয়া যায়,

$(a_1b_2-a_2b_1)x+b_2c_1-b_1c_2=0$

বা, $(a_1b_2-a_2b_1)x=b_1c_2-b_2c_1$

$\therefore \dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1} \ldots\ldots\ldots\ldots(5) \quad [a_1b_2-a_2b_1\neq 0]$

আবার, (1) নং সমীকরণকে a_2 এবং (2) নং সমীকরণকে a_1 দ্বারা গুণ করে পাওয়া যায়,

$a_1a_2x+a_2b_1y+a_2c_1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$

$a_1a_2x+a_1b_2y+a_1c_2=0 \ldots\ldots\ldots\ldots(7)$

সমীকরণ (6) হতে সমীকরণ (7) বিয়োগ করে পাওয়া যায়,

$(a_2b_1-a_1b_2)y+a_2c_1-a_1c_2=0$

বা, $(a_2b_1-a_1b_2)y=-a_2c_1+a_1c_2$

বা, $-(a_1b_2-a_2b_1)y=-(c_1a_2-c_2a_1)$

$\therefore \dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1} \ldots\ldots\ldots(8) \quad [a_1b_2-a_2b_1\neq 0]$

(5) নং সমীকরণ এবং (8) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

উপরের পদ্ধতিতে চলকের মান নির্ণয়ের কৌশলকে আড়গুণন পদ্ধতি বা বজ্রগুণন পদ্ধতি বলে।

x ও y উল্লিখিত সম্পর্ক হতে পাওয়া যায়-

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ বা, } x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

আবার, $\frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ বা, $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_1b_1}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সমাধান : $(x, y) = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \right)$

মনে রাখার চিত্র

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & & x \;— & y \;— & 1 \;— & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & & b_2 & c_2 \\ & & + & + & & + & \end{array}$$

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

উদাহরণ 5: আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করুন: $2x + y - 14 = 0$

$$-x + 3y - 21 = 0$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট, $2x + y - 14 = 0$

$$-x + 3y - 21 = 0$$

প্রদত্ত সমীকরণ জোটকে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

এর সাথে তুলনা করলে পাওয়া যায়,

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = -14$$
$$a_2 = -1 \quad b_2 = 3 \quad c_2 = -21$$

এখন, $\begin{array}{c|ccccc|c} & & x \;— & y \;— & 1 \;— & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & & b_2 & c_2 \\ & & + & + & & + & \end{array}$ এর স্থলে মান বসিয়ে পাওয়া যায়

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & & x \;— & y \;— & 1 \;— & & \\ 2 & 1 & -14 & 2 & & 1 & -14 \\ -1 & 3 & -21 & -1 & & 3 & -21 \\ & & + & + & & + & \end{array}$$

আড়গুণন পদ্ধতি অনুসরণ করে পাওয়া যায়

$$\frac{x}{1 \times (-21) - 3 \times (-14)} = \frac{y}{(-14) \times (-1) - (-21) \times 2} = \frac{1}{2 \times 3 - 1 \times (-1)}$$

বা, $\frac{x}{-21 + 42} = \frac{y}{14 + 42} = \frac{1}{6 + 1}$

বা, $\dfrac{x}{21}=\dfrac{y}{56}=\dfrac{1}{7}$

$\therefore x=\dfrac{21}{7}=3$ এবং $y=\dfrac{56}{7}=8$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y)=(3, 8)$

উদাহরণ 6: আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করুন: $3x-5y+9=0$
$5x-3y-1=0$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট, $3x-5y+9=0$
$5x-3y-1=0$

আড়গুণন পদ্ধতি অনুসরণ করে পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{(-5)\times(-1)-(-3)\times 9}=\frac{y}{9\times 5-(-1)\times 3}=\frac{1}{3\times(-3)-5\times(-5)}$$

বা, $\dfrac{x}{5+27}=\dfrac{y}{45+3}=\dfrac{1}{-9+25}$

বা, $\dfrac{x}{32}=\dfrac{y}{48}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore x=\dfrac{32}{16}=2$ এবং $y=\dfrac{48}{16}=3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y)=(2, 3)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-7):

1. $x+y=5$ এবং $3y=6$ হলে, x এর মান নিচের কোন্‌টি?
   (ক) 2 (খ) 3 (গ) 5 (ঘ) 7
2. $2x+y=5$ এবং $3x-y=10$ হলে, (x, y) এর মান নিচের কোন্‌টি?
   (ক) $(2,-1)$ (খ) $(-2,1)$ (গ) $(3,-1)$ (ঘ) $(1,3)$
3. নিচের ছকের জন্য কোন্‌টি সঠিক?

x	-1	3	5	6	0
y	-7	1	5	7	-5

   (ক) $y=3x-1$ (খ) $y=2x-5$ (গ) $y=5x+2$ (ঘ) $y=2x+3$
4. $x+y=7$
   $x-y=3$
   $(x, y)=$ কত?
   (ক) $(5,2)$ (খ) $(2,5)$ (গ) $(4,5)$ (ঘ) $(3,4)$
5. $x+2y=5$
   $x-3=0$
   সমীকরণ জোটের সমাধান কত?
   (ক) $(-3,5)$ (খ) $-1, 3$ (গ) $(1,2)$ (ঘ) $(3,1)$

6. $x+2y=8$
$2x+y=7$
সমীকরণদ্বয়ের সমাধান কোনটি?
(ক) $(8,0)$ (খ) $(6,1)$ (গ) $4,2$ (ঘ) $(2,3)$

7. $x+y=a+b$
$ax+by=a^2+b^2$
সমীকরণদ্বয়ের সমাধান কোন্‌টি?
(ক) (a,b) (খ) $(-a,b)$ (গ) $(a,-b)$ (ঘ) $(-a,-b)$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করুন (8-11):

8. $7x-3y=31$
$9x-5y=41$

9. $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=6$
$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=5$

10. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$
$ax+by=a^2+b^2$

11. $2x+3y=5$
$3x+4y=7$

অপনয়ন পদ্ধতিতে সমাধান করুন (12-17):

12. $x-y=5$
$5x+2y=4$

13. $7x-8y=-9$
$5x-4y=-3$

14. $x-y=0$
$2x+y=3$

15. $3x+5y=-7$
$5x+4y=10$

16. $3x-2y=2$
$5x-3y=5$

17. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$
$2bx+ay=2ab$

আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করুন (18-23):

18. $2x+y=14$
$3x-y=21$

19. $x+2y=7$
$2x-3y=0$

20. $8x+3y=0$
$12x+6y=13$

21. $3x-y=7$
$2x+y=3$

22. $ax+by=a^2+b^2$
$2bx-ay=ab$

23. $ax-by=ab$
$bx-ay=ab$

পাঠ ৩ লৈখিক পদ্ধতিতে সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- লৈখিক পদ্ধতিতে সরল সহসমীকরণের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	লেখচিত্র, ছক কাগজ

মূলপাঠ

দুই চলকবিশিষ্ট একটি সরল সহসমীকরণে চলকদ্বয়ের সম্পর্ককে চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এই চিত্রকে চলকদ্বয়ের সম্পর্কের লেখচিত্র বলা হয়। এ জাতীয় সমীকরণের লেখচিত্রে অসংখ্য বিন্দু রয়েছে। বিন্দুগুলোকে যোগ করলে লেখচিত্র পাওয়া যায়। সরল সমীকরণের লেখচিত্র সরলরেখা। সরলরেখাটির প্রত্যেকটি বিন্দুর স্থানাংক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

এখন আমরা উদাহরণের মধ্যমে লৈখিক পদ্ধতিতে কিভাবে সরল সহসমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করা যায়, তা আলোচনা করবো।

উদাহরণ 1: লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন: $2x-y=1$
$5x+y=13$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট $2x-y=1\ldots\ldots\ldots.(1)$
$5x+y=13\ldots\ldots\ldots.(2)$

(1) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়, $y=2x-1$

সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান নির্ণয় করে একটি ছক তৈরি করুন।

x	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3

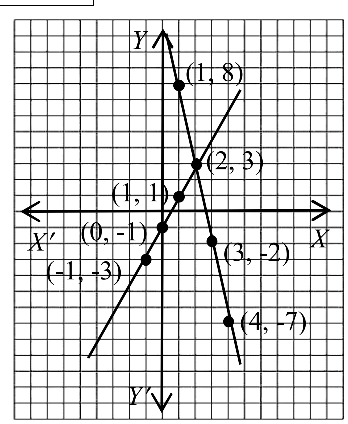
অতএব, সমীকরণটির লেখচিত্রের উপর চারটি বিন্দু $(-1,-3)$, $(0,-1)$, $(1,1)$ এবং $(2,3)$

আবার, সমীকরণ (2) হতে পাওয়া যায়, $y=13-5x$

সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি মান নিয়ে y-এর অনুরূপ মান নির্ণয় করে একটি ছক তৈরি করুন।

x	1	2	3	4
y	8	3	-2	-7

সমীকরণটির লেখচিত্রের উপর চারটি বিন্দু $(1,8)$, $(2,3)$, $(3,-2)$, $(4,-7)$



মনে করুন, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরুন। ছক কাগজে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1,-3),(0,-1),(1,1)$ এবং $(2,3)$ বিন্দুগুলো বসিয়ে পরস্পরকে সংযুক্ত করুন। লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে।

আবার সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত $(1,8),(2,3),(3,-2)$ এবং $(4,-7)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে পরস্পরকে সংযুক্ত করুন। লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে।

মনে করুন সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। লেখচিত্র হতে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাংক $(2,3)$।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(2,3)$

উদাহরণ 2: লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3$

$$x+\frac{y}{6}=3$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3 \ldots\ldots.(1)$

$$x+\frac{y}{6}=3 \ldots\ldots.(2)$$

(1) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়, $y=3\left(3-\frac{x}{2}\right)$

সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি সুবিধামত মান বসিয়ে y-এর অনুরূপ মান নির্ণয় করে একটি ছক তৈরি করুন।

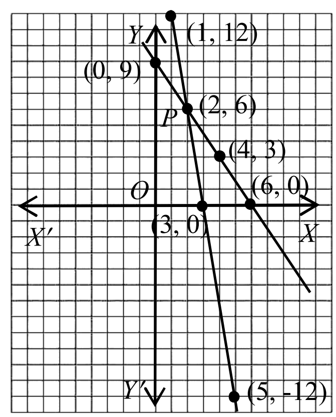
x	0	2	4	6
y	9	6	3	0

সমীকরণটির লেখচিত্রের উপর $(0,9),(2,6),(4,3)$ এবং $(6,0)$ চারটি বিন্দু।

আবার সমীকরণ (2) হতে পাওয়া যায়, $y=6(3-x)$

সমীকরণটিতে x-এর কয়েকটি সুবিধামত মান বসিয়ে y-এর অনুরূপ মান নির্ণয় করে একটি ছক তৈরি করুন।

x	1	2	3	5
y	12	6	0	-12



সমীকরণটির লেখচিত্রের উপর (1, 12), (2, 6), (3, 0) এবং (5, -12) চারটি বিন্দু।

মনে করুন, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরুন।

ছক কাগজে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত (0, 9), (2, 6), (4, 3) এবং (6, 0) বিন্দুগুলো বসিয়ে পরস্পরকে সংযুক্ত করুন। লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে। আবার, সমীকরণ (2) হতে প্রাপ্ত (1, 12), (2, 6), (3, 0) এবং (5, -12) বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে পরস্পরকে সংযুক্ত করুন। লেখচিত্রটি একটি সরলরেখা হবে।

মনে করুন সরলরেখাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। লেখচিত্র হতে দেখা যায়, P বিন্দুর স্থানাংক (2,6)।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y)=(2, 6)$।

উদাহারণ 3: সমাধান করুন এবং লেখচিত্রে দেখান: $3x-2y-2=0$

$$5x-3y-5=0$$

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ জোট $3x-2y-2=0 \ldots.(1)$

$$5x-3y-5=0 \ldots.(2)$$

আড়গুণন পদ্ধতি হতে পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{(-2)\times(-5)-(-3)\times(-2)}=\frac{y}{(-2)\times(5)-(-5)\times 3}=\frac{1}{3\times(-3)-5\times(-2)}$$

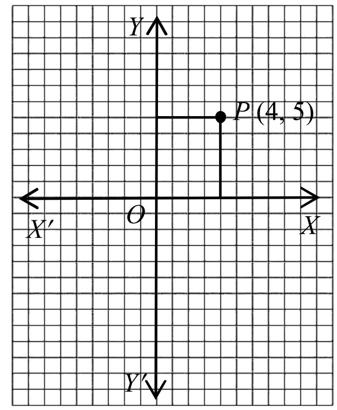
বা, $\frac{x}{10-6}=\frac{y}{-10+15}=\frac{1}{-9+10}$

বা, $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{1}{1}$

$\therefore x=\frac{4}{1}=4, \quad y=\frac{5}{1}=5$

নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 5)$

মনে করুন, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x -অক্ষ ও y -অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(4, 5)$ বিন্দুটি স্থাপন করুন।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৩

লেখচিত্রর সাহায্যে সমাধান করুন:

1. $x+y=6$
   $x-y=2$
2. $x+4y=11$
   $4x-y=10$
3. $4x+3y=11$
   $3x-4y=2$
4. $2x-y=5$
   $4x-2y=7$
5. $3x-2y=2$
   $5x-3y=5$
6. $3x+y=6$
   $5x+3y=12$
7. $3x+2y=4$
   $3x-4y=1$
8. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2$
   $2x+3y=13$

পাঠ ৪ সরল সহসমীকরণের ব্যবহার

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সরল সহসমীকরণ গঠন করতে ও তার সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলপাঠ

সরল সহসমীকরণের ধারণা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনে আমরা অনেক সমস্যার সমাধান করতে পারি। সমস্যা সমাধানের জন্য সরল সহসমীকরণ গঠন করতে হয়। সমস্যার শর্ত বা শর্তাবলী হতে দুইটি চলকের জন্য দুইটি প্রতীক ধরে দুইটি সমীকরণ গঠন করা হয়। সমীকরণদ্বয় সমাধান করে চলকদ্বয়ের মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1: একটি হল রুমের পরিসীমা 70 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 300 বর্গ মিটার হলে এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, হল রুমের দৈর্ঘ্য $= x$ মিটার এবং প্রস্থ $= y$ মিটার

$\therefore$ প্রথম শর্তানুসারে, হল রুমের পরিসীমা, $2(x+y)=70 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

এবং দ্বিতীয় শর্তানুসারে, হল রুমের ক্ষেত্রফল $xy=300 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়,

$$x+y=\frac{70}{2}$$

বা, $x+y=35$

$\therefore x=35-y \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

(3) নং সমীকরণ হতে x-এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$(35-y)y=300$$

বা, $35y-y^2=300$

বা, $y^2-35y+300=0$

বা, $y^2-20y-15y+300=0$

বা, $y(y-20)-15(y-20)=0$

বা, $(y-20)(y-15)=0$

হয় $y-20=0$ অথবা, $y-15=0$

$\therefore y=20$ $\therefore y=15$

এখন y-এর মান (3) নং এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

যখন $y=20$, তখন $x=35-20=15$

এবং যখন $y=15$, তখন $x=35-15=20$

যেহেতু দৈর্ঘ্য প্রস্থের চেয়ে ছোট হতে পারে না, সেহেতু $x = 15$ এবং $y = 20$ গ্রহণযোগ্য নয়।

অতএব হল রুমের দৈর্ঘ্য $= 20$ মিটার এবং প্রস্থ $= 15$ মিটার

উদাহারণ 2: 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, বর্তমানে পিতার বয়স $= x$ বৎসর এবং পুত্রের বয়স $= y$ বৎসর

প্রথম শর্তানুসারে, $x - 20 = 4(y - 20)$............(1)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $x + 4 = 2(y + 4)$.............(2)

(1) নং হতে পাওয়া যায়, $x = 20 + 4y - 80$

বা, $x = 4y - 60$...........(3)

(3) নং সমীকরণ হতে x -এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$4y - 60 + 4 = 2(y + 4)$

বা, $4y - 56 = 2y + 8$

বা, $4y - 2y = 56 + 8$

বা, $2y = 64$

$\therefore y = 32$

এখন y -এর মান (3) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$x = 4 \times 32 - 60$

$= 128 - 60$

$\therefore x = 68$

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স 68 বৎসর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স 32 বৎসর।

উদাহরণ 3: একটি আয়তাকার পুকুরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 মিটার কম এবং পরিসীমা 100 মিটার।

(i) পুকুরের দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার ধরে সমীকরণ জোট গঠন করুন।

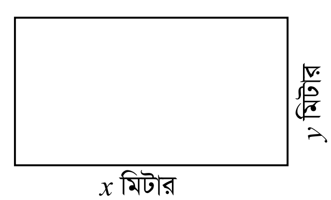
(ii) পুকুরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।

(iii) পুকুরের সীমানার বাহিরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া রাস্তা রয়েছে। রাস্তাটি পাকা করতে প্রতি বর্গ মিটারে খরচ হয় 330 টাকা। রাস্তাটি পাকা করতে কত টাকা খরচ হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: (i) মনে করুন, আয়তাকার পুকুরের দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার

প্রথম শর্তানুসারে, $x + 10 = 2y$ ....(1)

এবং দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $2(x + y) = 100$ ....(2)



(ii) (1) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়।

$x = 2y - 10$ ....(3)

(3) নং সমীকরণ হতে x-এর মান (2) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$2(2y-10+y)=100$$

বা, $2(3y-10)=100$

বা, $6y-20=100$

বা, $6y=100+20$

বা, $6y=120$

$$\therefore y=\frac{120}{6}=20$$

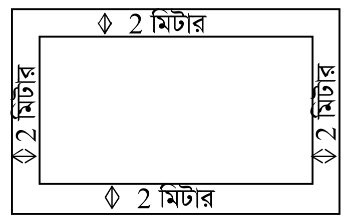
এখন y এর মান (3) নং এ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$x=2\times 20-10$$

বা, $x=40-10$

$\therefore x=30$

সুতরাং পুকুরের দৈর্ঘ্য 30 মিটার এবং প্রস্থ 20 মিটার



(iii) রাস্তাসহ পুকুরের দৈর্ঘ্য= (30+2+2) মিটার = 34 মিটার

রাস্তাসহ পুকুরের প্রস্থ (20+2+2) মিটার = 24 মিটার

অতএব, রাস্তাসহ পুকুরের ক্ষেত্রফল = 34 মিটার × 24 মিটার

= 816 বর্গমিটার

এবং পুকুরের ক্ষেত্রফল = 30 মিটার × 20 মিটার

= 600 বর্গমিটার

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল = রাস্তাসহ পুকুরের ক্ষেত্রফল – পুকুরের ক্ষেত্রফল

= $(816-600)$ বর্গমিটার

= 216 বর্গমিটার

প্রতি বর্গমিটার রাস্তা পাকা করতে খরচ হয় 330 টাকা।

$\therefore$ রাস্তাটি পাকা করতে খরচ হবে = 216×330 টাকা

= 71280 টাকা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৪

1. দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার এককের অংক দশকের অংক অপেক্ষা 3 বেশী। সংখ্যাটি অংকদ্বয়ের সমষ্টির তিনগুণ অপেক্ষা 4 বেশী। সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।
2. দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অংকদ্বয়ের অন্তর 4 । সংখ্যাটির অংকদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার এবং মূল সংখ্যাটির যোগফল 110 । সংখ্যাটি নির্ণয় করুন।
3. একটি ঘরের পরিসীমা 70 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার হলে ঐ ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।
4. 20 বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল। 4 বছর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে কার বয়স কত?
5. মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চার গুণ। 5 বছর পরে মাতার বয়স কন্যাদের বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। বর্তমানে মাতার বয়স কত নির্ণয় করুন।
6. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বেয়ে 10 ঘন্টায় 80 মাইল গেল এবং স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় বেয়ে ফিরে আসতে 40 ঘন্টা লাগল। দাঁড়ের বেগ এবং স্রোতের বেগ নির্ণয় করুন।
7. একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে স্রোতের অনুকূলে ঘন্টায় 15 কি.মি. যায় এবং স্রোতের প্রতিকূলে ঘন্টায় 5 কি.মি. যায়। নৌকার ও স্রোতের বেগ নির্ণয় করুন।
8. একটি আয়তকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 6 মিটার বেশি। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়কে 2 মিটার করে বৃদ্ধি করলে এর ক্ষেত্রফল 64 বর্গমিটার বৃদ্ধি পায়। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করুন।