ইউনিট ৬

বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত
(Algebraic Ratio and Proportion)

ভূমিকা

আমরা প্রতিনিয়তই বাস্তব জীবনের নানা সমস্যা সমাধানে অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা ব্যবহার করে থাকি। নির্মাণ সামগ্রী ও খাদ্য সামগ্রী তৈরিতে, ভোগ্যপণ্য উৎপাদনে, কোন কিছুর আকার আয়তন দৃষ্টি নন্দন করতে এবং আরও নানাবিধ কাজে অনুপাতের ধারণা ব্যবহার করা হয়ে থাকে। এ ছাড়া গণিতের নানা সমস্যা সমাধানে অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা প্রয়োগ করা হয়ে থাকে। তাই অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা স্পষ্ট থাকা জরুরী। বর্তমান ইউনিটে বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অনুপাতের রূপান্তর বিধি বর্ণনা করতে পারবেন,
- সমানুপাত সংক্রান্ত বিভিন্ন রূপান্তর বিধি প্রয়োগ করতে পারবেন,
- অনুপাত ও সমানুপাত সংক্রান্ত সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১: অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা ও প্রয়োগ

পাঠ ২: সংখ্যার অনুপাতের রূপান্তর

পাঠ ৩: ধারাবাহিক অনুপাত ও সমানুপাতিক ভাগ

পাঠ ১ অনুপাত ও সমানুপাতের ধারণা ও প্রয়োগ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- অনুপাত ও সমানুপাত ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ক্রমিক সমানুপাতি ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- গাণিতিক সমস্যা সমাধানে তা প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	অনুপাত, সমানুপাত, ক্রমিক সমানুপাতিক

মূলপাঠ

অনুপাত (Ratio)

একই জাতীয় এবং একই এককে প্রকাশিত দুইটি রাশির পরিমাণের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই ভগ্নাংশকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।

যেমনঃ মাতার বয়স 50 বছর এবং পুত্রের বয়স 20 বছর। দুই জনের বয়সের অনুপাত 50 ঃ 20, বা $\frac{50}{20}$, বা $\frac{5}{2}$ ।

অনুপাতের ১ম রাশিকে **পূর্ব রাশি** এবং দ্বিতীয় রাশিকে **উত্তর রাশি** বলা হয়। অনুপাত বোঝাতে ঃ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

সমানুপাত (Proportion)

যদি চারটি রাশি এরূপ হয় যে, ১ম ও ২য় রাশির অনুপাত, ৩য় ও ৪র্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে সমানুপাত গঠিত হয়। যেমন : $a:b=c:d$

সমানুপাতের ১ম ও ৪র্থ রাশিকে প্রান্তীয় রাশি এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে মধ্য রাশি বলা হয়।

দুইটি ধনাত্মক সংখ্যা x এবং y এর অনুপাত $x:y$, যা $\frac{x}{y}$ এর সমান।

$x:y=\frac{x}{y}=\frac{kx}{ky}$, যেখানে k একটি ধনাত্বক সংখ্যা।

শতকরাও একটি অনুপাত, যার উত্তর রাশি 100, সুতরাং অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করতে হলে, উত্তর রাশিকে 100 তে রূপান্তর করতে হয়।

উদাহরণ 1: $3:4$ অনুপাত কে শতকরায় প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ $3:4 = \frac{3}{4} = \frac{3\times 25}{4\times 25} = \frac{75}{100} = 75\times\frac{1}{100} = 75\%$

শিক্ষার্থীর কাজ	$3:5,\ 5:8,\ 2:4$ অনুপাতগুলোকে শতকরায় প্রকাশ করুন।

উদাহরণ 2: $x:y=3:4$ হলে $2x:3y=$ কত?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $x:y=3:4$

বা, $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$

বা, $\frac{x}{y}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

বা, $\frac{2x}{3y}=\frac{1}{2}$

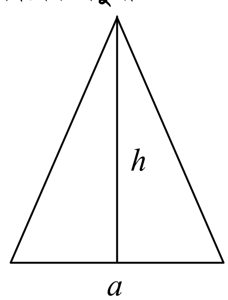
$\therefore\ 2x : 3y = 1 : 2$

উদাহরণ 3: $1.2 : 3.2$ কে $1 : a$ আকারে প্রকাশ করুন।

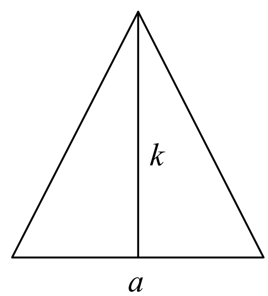
সমাধানঃ $1.2 : 3.2 = \frac{1.2}{3.2} = \frac{12}{32}$

$= \frac{3}{8} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2.67} = 1 : 2.67$

দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত



১ম চিত্র



২য় চিত্র

উপরের চিত্রে, ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা h ও k এবং উভয় ত্রিভুজের ভূমি a। মনে করুন, ১ম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল A এবং ২য় ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল D বর্গ একক।

আমরা লিখতে পারি,

$$\frac{A}{D} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}ak} = \frac{h}{k}$$

বা, $A : D = h : k$

অর্থাৎ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত, উচ্চতাদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

ক্রমিক সমানুপাতিক (Ordered proportional)

$a : b = b : c$ হলে ক্রমিক সমানুপাতি বুঝায়। a, b, c ক্রমিক সমানুপাতি হবে যদি এবং কেবল যদি $ac = b^2$ হয়।

উদাহরণ 4: দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a এবং b মিটার, হলে তাদের অনুপাত কত?

সমাধানঃ ধরুন, a বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল A বর্গ মিটার

এবং b ,, ,, ,, ,, B বর্গ মিটার

$\therefore \frac{A}{B} = \frac{a^2}{b^2} = a^2 : b^2$।

শিক্ষার্থীর কাজ	1. $x:y=4:5$ হলে $2x:3y=$ কত? 2. $3.5:5.6$ কে $1:a$ এবং $b:1$ আকারে প্রকাশ করুন।

উদাহরণ 5: দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3:4$ এবং ল.সা.গু. 144 । সংখ্যা দুইটি নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে সংখ্যাদ্বয়ের অনুপাত $3:4$

মনে করুন, একটি সংখ্যা $3x$ এবং অপর সংখ্যা $4x$, এখানে অনুপাতের সমাধান রাশি x ধরা হয়েছে।

সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু. $=3\times4\times x=12x$

প্রশ্নমতে, $12x=144$

$$\therefore x=\frac{144}{12}=12$$

অতএব, সংখ্যা দুইটির একটি $3x=3\times12=36$ এবং অপরটি $4x=4\times12=48$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা দুটি 36 এবং 48

উদাহরণ 6: যদি $a:b=b:c$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$.

সমাধান: দেওয়া আছে, $a:b=b:c$

বা, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$

বা, $b^2=ac$

বামপক্ষ $=\dfrac{a}{c}$

ডানপক্ষ $=\dfrac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{a^2+ac}{ac+c^2}=\dfrac{a(a+c)}{c(a+c)}=\dfrac{a}{c}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত) ।

সারসংক্ষেপ

- একই জাতীয় এবং একই এককে প্রকাশিত দুইটি রাশির পরিমাণের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই ভগ্নাংশকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।
- অনুপাতের ১ম রাশিকে **পূর্ব রাশি** এবং দ্বিতীয় রাশিকে **উত্তর রাশি** বলা হয়।
- অনুপাত বোঝাতে : চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।
- যদি চারটি রাশি এরূপ হয় যে, ১ম ও ২য় রাশির অনুপাত, ৩য় ও ৪র্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে সমানুপাত গঠিত হয়। যেমন : $a:b=c:d$
- সমানুপাতের ১ম ও ৪র্থ রাশিকে প্রান্তীয় রাশি এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে মধ্য রাশি বলা হয়।
- অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করতে হলে, উত্তর রাশিকে 100 তে রূপান্তর করতে হয়।
- $a:b=b:c$ হলে ক্রমিক সমানুপাতি বুঝায়। a,b,c ক্রমিক সমানুপাতি হবে যদি এবং কেবল যদি $ac=b^2$ হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.১

1. অনুপাতের ধারণা ব্যাখ্যা করুন।
2. চারটি রাশি সমানুপাতি হওয়ার শর্ত ব্যাখ্যা ব্যাখ্যা করুন।
3. ক্রমিক সমানুপাতি হওয়ার শর্ত কী ?
4. দুইটি ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার ও b মিটার এবং উচ্চতা h মিটার। ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় করুন।
5. এক ব্যক্তি মাসে p টাকা আয় করেন এবং q টাকা ব্যয় করেন। অপর এক ব্যক্তি মাসে r টাকা আয় করেন এবং s টাকা ব্যয় করেন। কেহই আয়ের বেশী ব্যয় করেন না। দুই ব্যক্তির আয় অনুযায়ী ব্যয়ের অনুপাত নির্ণয় করুন।

পাঠ ২ সংখ্যার অনুপাতের রূপান্তর

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- সংখ্যার অনুপাতের রূপান্তর বর্ণনা করতে পারবেন,
- সমানুপাত সম্পর্কিত বিভিন্ন রূপান্তর বিধি প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	ব্যস্তকরণ, একান্তরকরণ, যোজন, বিয়োজন, যোজন-বিয়োজন

মূলপাঠ

অনুপাতের রূপান্তর বিধি (Transformation of Ratio)

১। ব্যস্তকরণ (Invertendo)

$a : b = c : d$ হলে $b : a = d : c$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $ad = bc$

বা, $\frac{ad}{ac} = \frac{bc}{ac}$ [উভয় পক্ষকে ac দ্বরা ভাগ করে]

বা, $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

বা, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

অর্থাৎ $b : a = d : c$

২। একান্তরকরণ (Alternendo)

$a : b = c : d$ হলে $a : c = b : d$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে , $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $ad = bc$

বা, $\frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$ [উভয় পক্ষকে cd দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

অর্থাৎ $a : c = b : d$

৩। যোজন (Componendo)

$a : b = c : d$ হলে $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$

অর্থাৎ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

৪। বিয়োজন (Dividendo)

$a : b = c : d$ হলে $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে , $a : b = c : d$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$

অর্থাৎ $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

৫। যোজন-বিয়োজন (Componendo – Dividendo)

$a : b = c : d$ হলে $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ $(a \neq b,\ c \neq d)$

প্রমাণঃ $a : b = c : d$ হলে বিয়োজন করে পাওয়া যায়,

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

সুতরাং $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-d}$ .... (i) (ব্যস্তকরণ বিধির সাহায্যে)

আবার , $a \mathbin{:} b = c \mathbin{:} d$ হলে যোজন করে পাওয়া যায়,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ .... } (\text{ii})$$

(i) ও (ii) নং হতে পাওয়া যায়,

$$\frac{a+b}{b} \cdot \frac{b}{a-b} = \frac{c+d}{d} \cdot \frac{d}{c-d}$$

বা, $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

৬। $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = \dfrac{g}{h}$ **হলে, প্রত্যেকটি অনুপাত** $= \dfrac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

প্রমাণঃ মনে করুন, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = \dfrac{g}{h} = k$

$$\therefore a = bk,\ c = dk,\ e = fk,\ g = hk$$

এখন, $\dfrac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \dfrac{bk+dk+fk+hk}{b+d+f+h}$

$$= \frac{k(b+d+f+h)}{(b+d+f+h)}$$

$$= k$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k = \frac{a+c+e+f}{b+d+f+h}.$$

উদাহরণ 1: সমাধান করুন, $\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{3}$

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \dfrac{1}{3}$

বা, $\dfrac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}} = \dfrac{1+3}{1-3}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2}{-2\sqrt{1-x}} = \dfrac{4}{-2}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$

বা, $\sqrt{1-x} = \dfrac{1}{2}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\left(\sqrt{1-x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $1-x = \dfrac{1}{4}$

বা, $-x = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-4}{4} = \frac{-3}{4}$

$\therefore x = \frac{3}{4}$

নির্ণেয় সমাধান , $x = \frac{3}{4}$

উদাহরণ 2: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হলে প্রমাণ করুন, $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(b^2 + c^2 + d^2\right) = \left(ab + bc + cd\right)^2$

সমাধান: মনে করুন, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

বা , $a = bk$, $b = ck$, $c = dk$

এখন, $a = bk = ck.k = ck^2 = dk.k^2 = dk^3$

অনুরূপভাবে, $b = ck = dk.k = dk^2$

এবং $c = dk$

বামপক্ষ $= \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(b^2 + c^2 + d^2\right)$

$= \left\{\left(dk^3\right)^2 + \left(dk^2\right)^2 + \left(dk\right)^2\right\}\left\{\left(dk^2\right)^2 + \left(dk\right)^2 + \left(d^2\right)\right\}$ [$\because a = dk^3, b = dk^2,$ এবং $c = dk$]

$= \left(d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2\right)\left(d^2k^4 + d^2k^2 + d^2\right)$

$= d^2k^2\left(k^4 + k^2 + 1\right).\, d^2\left(k^4 + k^2 + 1\right) = d^4k^2\left(k^4 + k^2 + 1\right)^2$

ডানপক্ষ $= \left(ab + bc + cd\right)^2$

$= \left(dk^3.\, dk^2 + dk^2.dk + dk.d\right)^2$

$= \left(d^2k^5 + d^2k^3 + d^2k\right)^2 = \left\{d^2k\left(k^4 + k^2 + 1\right)\right\}^2 = d^4k^2\left(k^4 + k^2 + 1\right)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত) ।

উদাহরণ 3: যদি $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয়, তবে দেখান যে, $\frac{p-q}{q} = \frac{p+q}{a}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a+q}{a-q}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{p}{q} = \frac{a+q}{a-q}$ [$\because \frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a+q+a-q}{a+q-a+q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{2a}{2q}$

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a}{q}$

বা, $\dfrac{p+q}{a} = \dfrac{p-q}{q}$ [একান্তর করে]

সুতরাং, $\dfrac{p-q}{q} = \dfrac{p+q}{a}$

উদাহরণ 4: $\dfrac{x}{2a-b-c} = \dfrac{y}{2b-c-a} = \dfrac{z}{2c-a-b}$ হলে প্রমাণ করুন, $x+y+z=0$

সমাধান: মনে করুন, $\dfrac{x}{2a-b-c} = \dfrac{y}{2b-c-a} = \dfrac{z}{2c-a-b} = k$

$\therefore\ \dfrac{x}{2a-b-c} = k\ ,\ \ \dfrac{y}{2b-c-a} = k,\ \ \dfrac{z}{2c-a-b} = k$

$\therefore\ x = k(2a-b-c),\ y = k(2b-c-a),\ z = k(2c-a-b),$

এখন, $x+y+z \ = k(2a-b-c) + k(2b-c-a) + k(2c-a-b)$

$= k\ (2a-b-c+2b-c-a+2c-a-b)$

$= k\ (2a-2a+2b-2b+2c-2c) = k \times 0 = 0$

সারসংক্ষেপ

- ব্যস্তকরণ (Invertendo): $a:b = c:d$ হলে $b:a = d:c$
- একান্তরকরণ (Alternendo): $a:b = c:d$ হলে $a:c = b:d$
- যোজন (Componendo): $a:b = c:d$ হলে $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$
- বিয়োজন (Dividendo): $a:b = c:d$ হলে $\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$
- যোজন-বিয়োজন (Componendo – Dividendo): $a:b = c:d$ হলে $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}\ \ (a \neq b,\ c \neq d)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.২

1. b ধণাত্মক সংখ্যা এবং $\dfrac{4}{b} = \dfrac{b}{9}$ হলে, b এর মান কত?

2. $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$ হলে প্রমাণ করুন $a:b = c:d$

3. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ হলে প্রমাণ করুন

   (i) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} = \dfrac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

   (ii) $\dfrac{ma^2+nc^2}{mb^2+nd^2} = \dfrac{a^2}{b^2}$

   (iii) $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \dfrac{ac+bd}{ac-bd} = \dfrac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$

4. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ হলে , প্রমাণ করুন

(i) $\frac{(a+b+c)^2}{(a^2+b^2+c^2)}=\frac{a+b+c}{a-b+c}$ (ii) $\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

5. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ হলে, প্রমাণ করুন

(i) $\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}=\frac{a}{d}$ (ii) $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3}=\frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

6. $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ করুন $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$

7. $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$ হলে, প্রমাণ করুন $x+y+z=0$

8. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে, প্রমাণ করুন $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

9. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{3}{2}$ হলে, $\frac{x+y+z}{a+b+c}$ এর মান নির্ণয় করুন।

10. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হলে, প্রমাণ করুন

(i) $\frac{x^3+3xy^2}{3x^2y+y^3}=\frac{a^3+3ab^2}{3a^2b+b^3}$ (ii) $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$

11. ত্রিভজের বাহুগুলো a, b, c যা ক্রমিক সমানুপাতি

(i) দেখান যে, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{ab+bc}{ab-bc}$ (ii) দেখান যে, $a-2b+c=\frac{(a-b)^2}{a}=\frac{(b-c)^2}{c}$

(iii) প্রমাণ করুন যে, $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

পাঠ ৩ ধারাবাহিক অনুপাত ও সমানুপাতিক ভাগ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- ধারাবাহিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবেন,
- বাস্তব সমস্যা সমাধানে ধারাবাহিক অনুপাত ব্যবহার করতে পারবেন,
- সমানুপাতিক ভাগ ব্যাখ্যা করতে এবং সমস্যা সমাধানে প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	ধারাবাহিক অনুপাত, সমানুপাতিক ভাগ

মূলপাঠ

ধারাবাহিক অনুপাত (Successive Ratio)

মনে করুন, ক এর আয় 1000 টাকা, খ এর আয় 1500 টাকা এবং গ এর আয় 3500 টাকা।

এখানে ক এর আয় ঃ খ এর আয় $= 1000 : 1500 = 2 : 3$

খ এর আয় ঃ গ এর আয় $= 1500 : 3500 = 3 : 7$

$\therefore$ ক এর আয় ঃ খ এর আয় ঃ গ এর আয় $= 2 : 3 : 7$

দুইটি অনুপাত যদি ক ঃ খ এবং খ ঃ গ আকারের হয়, তবে তাদেরকে ক ঃ খ ঃ গ আকারে লেখা যায়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়।

উপরের উদাহরণে ধারাবাহিক অনুপাত ব্যাখ্যা করা হয়েছে। যে কোন দুইটি বা ততোধিক অনুপাতকে এই আকারে প্রকাশ করা যায়।

এখানে লক্ষণীয় যে, দুইটি অনুপাত ক ঃ খ এবং খ ঃ গ কে, ক ঃ খ ঃ গ আকারে প্রকাশ করতে হলে **১**ম অনুপাতটির উত্তর রাশি ২য় অনুপাতের পূর্ব রাশির সমান হতে হয়।

যেমন ঃ $2 : 3$ এবং $5 : 7$ অনুপাত দুইটি ক ঃ খ ঃ গ আকারে প্রকাশ করতে হলে **১**ম অনুপাতের উত্তর রাশি দ্বিতীয় অনুপাতের পূর্ব রাশির সমান করতে হবে। অর্থাৎ ঐ দুইটি রাশিকে তাদের ল.সা.গু এর সমান হতে হবে।

এখন,

$$2 : 3 = \frac{2}{3} = \frac{2\times 5}{3\times 5} = \frac{10}{15} = 10 : 15$$

$$5 : 7 = \frac{5}{7} = \frac{5\times 3}{7\times 3} = \frac{15}{21} = 15 : 21$$

অতএব $2 : 3$ এবং $5 : 7$ অনুপাত দুইটি ক ঃ খ ঃ গ আকারে হবে $10 : 15 : 21$

উদাহরণ 1: ক, খ, গ এক জাতীয় রাশি এবং ক ঃ খ $= 2 : 5$, খ ঃ গ $= 3 : 7$ হলে ক ঃ খ ঃ গ = কত?

সমাধান: ক ঃ খ $= 2 : 5$

বা, $\frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{2}{5}$

বা, $\frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{2\times 3}{5\times 3} = \frac{6}{15}$

$\therefore$ ক ঃ খ $= 6 : 15$

আবার, খ ঃ গ $= 3 : 7$

বা, $\frac{\text{খ}}{\text{গ}} = \frac{3}{7}$

বা, $\frac{\text{খ}}{\text{গ}} = \frac{3\times 5}{7\times 5} = \frac{15}{35}$

$\therefore$ খ ঃ গ $= 15 : 35$

$\therefore$ ক ঃ খ ঃ গ $= 6 : 15 : 35$

উদাহরণ 2: একটি ত্রিভুজের তিন কোণের অনুপাত $2:3:4$ । কোণ তিনটিকে ডিগ্রিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান: আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180^{o}

মনে করুন, কোণ তিনটির পরিমাণ $2x$, $3x$, এবং $4x$

প্রশ্নমতে, $2x+3x+4x=180^{o}$

বা, $9x=180^{o}$

$$\therefore x=\frac{180^{o}}{9}=20^{o}$$

কোণ তিনটি হলো

$$2x=2\times 20^{o}=40^{o}$$
$$3x=3\times 20^{o}=60^{o}$$
$$4x=4\times 20^{o}=80^{o}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	ক : খ $=2:5$, খ : গ $=3:5$ হলে, ক : খ : গ $=$ কত?

সমানুপাতিক ভাগ (Proportional Division)

কোন রাশিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করা-কে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়।

S কে $a:b:c:d$ অনুপাতে ভাগ করতে হলে, প্রথমে S কে $(a+b+c+d)$ দ্বারা ভাগ করতে হবে।

অর্থাৎ $\dfrac{S}{a+b+c+d}$ করতে হবে। তারপর a, b, c, d পরিমাণে ভাগ করে নিতে হবে।

১ম অংশ $=S$ এর $\dfrac{a}{a+b+c+d}=\dfrac{Sa}{a+b+c+d}$

২য় ,, $=S$ এর $\dfrac{b}{a+b+c+d}=\dfrac{Sb}{a+b+c+d}$

৩য় ,, $=S$ এর $\dfrac{c}{a+b+c+d}=\dfrac{Sc}{a+b+c+d}$

৪র্থ ,, $=S$ এর $\dfrac{d}{a+b+c+d}=\dfrac{Sd}{a+b+c+d}$

এভাবে যে কোন রাশিকে যে কোন অনুপাতে ভাগ করা যায়।

উদাহরণ 3: তিন ব্যক্তির মধ্যে 4500 টাকা এরূপ ভাবে ভাগ করে দিন যেন ১ম ব্যক্তির অংশ : ২য় ব্যক্তির অংশ : ৩য় ব্যক্তির অংশ $=2:5:8$ হয় ।

সমাধান: অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল $=2+5+8=15$

১ম ব্যক্তির অংশ $=\overset{300}{\cancel{4500}}$ টাকা এর $\dfrac{2}{\cancel{15}}=300\times 2$ টাকা $=600$ টাকা

২য় ব্যক্তির অংশ $=4500$ টাকা এর $\dfrac{5}{15}=300\times 5$ টাকা $=1500$ টাকা

৩য় ব্যক্তির অংশ $=4500$ টাকা এর $\dfrac{8}{15}=300\times 8$ টাকা $=2400$ টাকা

$\therefore$ তিন ব্যক্তি যথাক্রমে 600 টাকা, 1500 টাকা এবং 2400 টাকা পাবে।

উদাহরণ 4: 1011 টাকাকে $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7}$ অনুপাতে বিভক্ত করুন।

সমাধান: এখানে, $\frac{3}{4} : \frac{4}{5} : \frac{6}{7}$

$$= \frac{3\times140}{4} : \frac{4\times140}{5} : \frac{6\times140}{7}$$ [$4, 5$ এবং 7 এর ল.সা.গু 140 দ্বারা গুণ করে]

$$= 3\times35 : 4\times28 : 6\times20$$

$$= 105 : 112 : 120$$

অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল $= 105+112+120 = 337$

১ম অংশ $= 1011$ টাকা এর $\frac{105}{337} = 3\times105$ টাকা $= 315$ টাকা

২য় অংশ $= 1011$ টাকা এর $\frac{112}{337} = 3\times112$ টাকা $= 336$ টাকা

৩য় অংশ $= 1011$ টাকা এর $\frac{120}{337} = 3\times120$ টাকা $= 360$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় টাকার অংশ 315 টাকা, 336 টাকা এবং 360 টাকা।

শিক্ষার্থীর কাজ	ক, খ ও গ এর বেতনের অনুপাত $p : q : r$ । ক, গ অপেক্ষা m টাকা বেশী পেলে কার বেতন কত? $p = 7, q = 5, \ r = 3$ এবং $m = 222$ হলে কার বেতন কত?

সারসংক্ষেপ

- দুইটি অনুপাত যদি ক ঃ খ এবং খ ঃ গ আকারের হয়, তবে তাদেরকে ক ঃ খ ঃ গ আকারে লেখা যায়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়।
- দুইটি অনুপাত ক ঃ খ এবং খ ঃ গ কে, ক ঃ খ ঃ গ আকারে প্রকাশ করতে হলে ১ম অনুপাতটির উত্তর রাশি ২য় অনুপাতের পূর্ব রাশির সমান হতে হয়।
- কোন রাশিকে নির্দিষ্ট অনুপাতে ভাগ করা-কে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৩

1. আপনার শ্রেণিতে 35 জন ছাত্র ও 25 জন ছাত্রী আছে। বনভোজনে খিচুরী খাওয়ার জন্য প্রত্যেক ছাত্র ও ছাত্রীর প্রদত্ত চাল ও ডালের অনুপাত যথাক্রমে $3:1$ এবং $5:2$ হলে, মোট চাল ও ডালের অনুপাত নির্ণয় করুন।
2. ক, খ, গ ও ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাগ করুন যেন, ক এর অংশ ঃ খ এর অংশ $= 2:3$, খ এর অংশ ঃ গ এর অংশ $=1:2$ এবং গ এর অংশ ঃ ঘ-এর অংশ $=3:2$ হয়।
3. m টাকাকে $\frac{p}{q}:\frac{q}{r}:\frac{r}{s}$ অনুপাতে বিভক্ত করুন। $m = 572,\ \ p = 3,\ q = 4,\ r = 5,\ s = 6$ হলে প্রত্যেক ভাগে টাকার পরিমাণ কত?
4. ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180° ।
   (ক) ত্রিভুজের তিন কোণের অনুপাত $5:3:2$ হলে, কোণ তিনটি কত নির্ণয় করুন।
   (খ) যদি ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{6}$ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম কোণ এবং বৃহত্তম কোণের পরিমাণ নির্ণয় করুন।
   (গ) ত্রিভুজের পরিসীমা 60 সে.মি. এবং বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত $5:12:13$ হলে, প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।