ইউনিট ৪

সূচক ও লগারিদম
(Exponents and Logarithms)

ভূমিকা

কলাম এবং সারিতে বর্গাকারে সাজানো কোনো বস্তুর সংখ্যা নির্ণয় করতে হলে একই সংখ্যাকে বার বার গুণ করার প্রয়োজন হয়। এছাড়াও আরও অনেক ক্ষেত্রে একই সংখ্যার বহুগুণিতক প্রয়োজন। এ সকল সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে সূচকের ধারণা ও এর প্রতীক বিশেষভাবে উপযোগী।

সূচক থেকেই লগারিদমের সৃষ্টি। বড় বড় সংখ্যার গুণফল, ভাগফল বা মূলদ সূচকযুক্ত ঘাতের মান নির্ণয় করতে হলে লগারিদমের ব্যবহার প্রয়োজন। বর্তমানে ক্যালকুলেটর ও কম্পিউটার এর ব্যবহার প্রচলনের পূর্ব পর্যন্ত বৈজ্ঞানিক হিসাব গণনায় লগারিদমের ব্যবহার ছিল একমাত্র উপায়। তবে এখনও এগুলোর বিকল্প হিসেবে লগারিদমের ব্যবহার গুরুত্বপূর্ণ। এই ইউনিটে সূচক ও লগারিদম সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক সম্পর্কে বর্ণনা করতে পারবেন,
- লগারিদমের সূত্র লিখতে পারবেন,
- লগারিদমের সূত্রের মাধ্যমে সমস্যার সমাধান করতে পারবেন,
- লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১: সূচক, সূচকের ধর্ম ও সূত্রাবলি

পাঠ ২: লগারিদম

পাঠ ৩: সংখ্যার আদর্শ রূপ ও লগারিদম পদ্ধতি

পাঠ ১ সূচক, সূচকের ধর্ম ও সূত্রাবলি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- মূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ধনাত্মক পূর্ণ-সাংখ্যিক সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- ঋণাত্মক পূর্ণ-সাংখ্যিক সূচক ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- সূচকের সূত্রাবলি বর্ণনা ও তা প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন,
- n তম মূলকে সূচক আকারে প্রকাশ করতে পারবেন,
- n তম মূল ও মূলদ ভগ্নাংশ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সূচক, ঘাত, ভিত্তি

মূলপাঠ

সূচক (Exponents or Indices)

আমরা ষষ্ঠ শ্রেণীতে সূচকের ধারণা পেয়েছি এবং সপ্তম শ্রেণীতে গুণের ও ভাগের সূচক নিয়ম সম্পর্কে জেনেছি। সূচক ও ভিত্তি সংবলিত রাশিকে সূচকীয় রাশি বলা হয়।

ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সূচক

$2\times2\times2\times2\times2$ একই সংখ্যা বা রাশির ক্রমিক গুণ। একে 2^5 আকারেও লেখা যায়। এখানে 2 হলো ভিত্তি বা, base এবং 5 হল 2 এর ঘাত বা Power বা সূচক ।

শিক্ষার্থীর কাজ	$5\times5\times5\times5$ এটিকে সূচকীয় আকারে লিখুন এবং ঘাত নির্ণয় করুন। $b\times b\times b=b^3$ হলে, b এর ভিত্তি নির্ণয় করুন।

x যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে, n সংখ্যক x এর ক্রমিক গুণ, অর্থাৎ $x\times x\times x\times......\times x$ (n সংখ্যক বার x) কে x^n আকারে লেখা হয়। যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

$x\times x\times x\times......\times x$ (n সংখ্যক বার x) $=x^n$ । এখানে, n হলো সূচক বা ঘাত এবং x কে ভিত্তি বলা হয়। আবার বিপরীতভাবে, $x^n=x\times x\times x\times......\times x$ (n সংখ্যক বার x)

সূচক শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই নয়, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ধনাত্মক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশও হতে পারে।

অর্থাৎ ভিত্তি $x\in R$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং সূচক $n\in Q$ (মূলদ সংখ্যার সেট) এর জন্য সংজ্ঞায়িত। তবে বিশেষ ক্ষেত্রে $n\in N$ (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট) ধরা হয়।

সূচকের ধর্মাবলি (Rules for exponents)

মনে করুন, $x\in R$ এবং $m,n\in N$

১. যদি $m=n$ হয়, তবে $x^m=x^n$ হবে।

বিপরীতক্রমে $x^m=x^n$ হলে, $m=n$ হবে।

২. আবার, যদি $x=y$ হয়, তবে $x^m=y^m$ হবে।

বিপরীতক্রমে $x>0, y>0$ হলে, যদি $x^m=y^m$ হয়, তাহলে $x=y$ হবে।

সূচকের সূত্রাবলি (Formulae for exponents)

মনে করুন, $x \in R$ এবং $m, n \in N$

সূত্র ১: একই ভিত্তির শক্তির গুণ- $x^m \times x^n = x^{m+n}$

প্রমাণ: সংখ্যার সাহায্যে, $5^3 \times 5^5 = (5\times5\times5)\times(5\times5\times5\times5\times5)$
$= (5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5) = 5^8 = 5^{3+5}$

সাধারণভাবে, $x^m \times x^n = \underbrace{(x\times x\times x\times ....\times x)}_{[m \text{ সংখ্যক } x \text{ এর গুণ}]} \times \underbrace{(x\times x\times x\times .....\times x)}_{[n \text{ সংখ্যক } x \text{ এর গুণ}]}$

$= x^{m+n}$ (প্রমাণিত)

সূত্র ২: একই ভিত্তির শক্তির ভাগ-

$$\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n}, \text{ যখন } m > n \\ \dfrac{1}{x^{n-m}}, \text{ যখন } n > m \end{cases}$$

প্রমাণ: সংখ্যার সাহায্যে, $\frac{7^6}{7^3} = \frac{7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7} = 7\times7\times7 = 7^3 = 7^{6-3}$

সাধারণভাবে, $\frac{x^m}{x^n} = \frac{x\times x\times x\times x\times ......\times x}{x\times x\times x\times x\times ......\times x}$ [m সংখ্যক x এর গুণ] / [n সংখ্যক x এর গুণ]
$= x^{m-n}$ (প্রমাণিত)।

সূত্র ৩: ভিন্ন ভিত্তির গুণফলের শক্তি- $(x\times y)^n = x^n \times y^n$

প্রমাণ: সংখ্যার সাহায্যে, $(5\times3)^3 = (5\times3)\times(5\times3)\times(5\times3)$ $[\because x^3 = x\times x\times x; \quad x = 5\times3]$
$= (5\times5\times5)\times(3\times3\times3)$
$= 5^3\times3^3$

সাধারণভাবে, $(xy)^n$
$= xy\times xy\times xy\times ......\times xy$ [n সংখ্যক xy এর ক্রমিক গুণ]
$= x\times x\times x\times x\times ......\times x$ (n সংখ্যক x এর গুণ) $\times\, y\times y\times y\times ......\times y$ (n সংখ্যক y এর গুণ)
$= x^n y^n$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৪: ভিন্ন ভিত্তির ভাগফলের শক্তি- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, \quad y \neq 0$

প্রমাণ: সংখ্যার সাহায্যে, $\left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{5}{3}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3} = \frac{5\times5\times5}{3\times3\times3} = \frac{5^3}{3^3}$

সাধারণভাবে, $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x}{y}\times\frac{x}{y}\times\frac{x}{y}\times......\times\frac{x}{y}$ [n সংখ্যক $\frac{x}{y}$ এর ক্রমিক গুণ]

$= \frac{x\times x\times x\times x\times ......\times x}{y\times y\times y\times ......\times y} = \frac{x^n}{y^n}$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৫: শূন্য শক্তি- $x^0 = 1, \quad (x \neq 0)$

প্রমাণ: $1 = \frac{x^n}{x^n} = x^{n-n} = x^0$

আবার, $\dfrac{x^n}{x^n} = \dfrac{x \times x \times x \times x \times \ldots\ldots \times x}{x \times x \times x \times x \times \ldots\ldots \times x}$ [লব ও হর উভয় ক্ষেত্রে n সংখ্যক x এর গুণ]

$= 1$

$\therefore x^{n-n} = x^0 = 1$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৬: ঋণাত্মক শক্তি- $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}, \quad (x \neq 0)$

প্রমাণ: $x^{-n} = \dfrac{x^{-n} \times x^n}{1 \times x^n}$ [লব ও হর কে x^n দ্বারা গুণ করে]

$= \dfrac{x^{-n+n}}{x^n} = \dfrac{x^0}{x^n} = \dfrac{1}{x^n}$

$\therefore x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

আবার, $\dfrac{1}{x^n} = \dfrac{x^0}{x^n} = x^{0-n} = x^{-n}$ (প্রমাণিত)

সূত্র ৭: শক্তির শক্তি- $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$

প্রমাণ: $\left(x^m\right)^n = x^m \times x^m \times x^m \times \ldots\ldots \times x^m$ [n সংখ্যক x^m এর ক্রমিক গুণ]

$= x^{m+m+m+\ldots+m}$ [ঘাতে n সংখ্যক সূচকের যোগফল]

$= x^{m \times n} = x^{mn}$

$\therefore \left(x^m\right)^n = x^{mn}$ (প্রমাণিত)

শিক্ষার্থীর কাজ	$\dfrac{a^5}{a^3}$ কে সরল করুন। $3^3 \times 3^? = 3^8$ দ্বিতীয় 3এর ঘাত কী হলে উভয় পক্ষ সমান হবে? $(-7)^0 =$ কত?

n তম মূল

লক্ষ্য করুন, $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2$

আবার, $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^{2 \times \frac{1}{2}} = 3$

$\therefore \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$

$3^{\frac{1}{2}}$ এর বর্গ (দ্বিতীয় ঘাত) $= 3$ এবং 3 এর বর্গমূল(দ্বিতীয় মূল) $= 3^{\frac{1}{2}}$

$3^{\frac{1}{2}}$ কে বর্গমূলের চিহ্ন $\sqrt{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt{3}$ আকারে লেখা হয়।

আবার, লক্ষ্য করুন- $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3$

আবার, $3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 3^{3\times\frac{1}{3}} = 3$

$\therefore \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3$

$3^{\frac{1}{3}}$ এর ঘন (তৃতীয় ঘাত) $= 3$ এবং 3 এর ঘনমূল (তৃতীয় মূল) $= 3^{\frac{1}{3}}$

$3^{\frac{1}{3}}$ কে ঘনমূলের চিহ্ন $\sqrt[3]{\ }$ এর মাধ্যমে $\sqrt[3]{3}$ আকারে লেখা হয়।

n তম মূলের ক্ষেত্রে

$x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}} \times \ldots\ldots. \times x^{\frac{1}{n}}$ [n সংখ্যক $x^{\frac{1}{n}}$ এর ক্রমিক গুণ]

$= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n$

আবার, $x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}} \times \ldots\ldots. \times x^{\frac{1}{n}}$

$= x^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\ldots.+\frac{1}{n}}$ [সূচকে n সংখ্যক $\dfrac{1}{n}$ এর যোগ]

$= x^{n\times\frac{1}{n}} = x$

$\therefore \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$

$x^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $= x$ এবং x এর n তম মূল $= x^{\frac{1}{n}}$

অর্থাৎ $x^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ এবং x এর n তম মূল $(x)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

x এর n তম মূল কে $\sqrt[n]{x}$ আকারে লেখা হয়।

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুন; (ক) $\dfrac{3^3}{3^5}$, (খ) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^3$, (গ) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

সমাধান: (ক) $\dfrac{3^3}{3^5} = 3^{3-5} = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$

(খ) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3+3} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^0 = 1$

(গ) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{27}$

উদাহরণ 2: সরল করুন; (ক) $\dfrac{\sqrt[3]{7^2}.\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$, (খ) $\dfrac{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$, (গ) $\left(\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right)^4$

সমাধান: (ক) $\dfrac{\sqrt[3]{7^2}.\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{7^{\frac{2}{3}}.7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = 7^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{2+1}{3}-\frac{1}{2}} = 7^{1-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

(খ) $\dfrac{2^{n+4}-4.2^{n+1}}{2^{n+2}\div 2}=\dfrac{2^n.2^4-4.2^n.2}{2^n.2^2\div 2}$

$=\dfrac{16.2^n-8.2^n}{\frac{2^n.2^2}{2}}=\dfrac{8.2^n(2-1)}{2^n.2}=\dfrac{8}{2}=4$

(গ) $\left(\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\times\left(\sqrt{3}\right)^4$

$=\left\{\left(\sqrt{2}\right)^2\right\}^2\times\left\{\left(\sqrt{3}\right)^2\right\}^2=(2)^2\times(3)^2$

$=(2\times 3)^2=6^2=36$

উদাহরণ 3: দেখান যে, $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}}.\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}}.\left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}=1$

সমাধানঃ $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}}.\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}}.\left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$=\dfrac{x^{\frac{a}{ab}}}{x^{\frac{b}{ab}}}.\dfrac{x^{\frac{b}{bc}}}{x^{\frac{c}{bc}}}.\dfrac{x^{\frac{c}{ca}}}{x^{\frac{a}{ca}}}$

$=\dfrac{x^{\frac{1}{b}}}{x^{\frac{1}{a}}}.\dfrac{x^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{b}}}.\dfrac{x^{\frac{1}{a}}}{x^{\frac{1}{c}}}$

$=\dfrac{x^{\frac{1}{a}}.x^{\frac{1}{b}}.x^{\frac{1}{c}}}{x^{\frac{1}{a}}.x^{\frac{1}{b}}.x^{\frac{1}{c}}}=1$

বিকল্প পদ্ধতিঃ $\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}}.\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}}.\left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$=\left(x^{a-b}\right)^{\frac{1}{ab}}.\left(x^{b-c}\right)^{\frac{1}{bc}}.\left(x^{c-a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$=x^{\frac{a-b}{ab}}.x^{\frac{b-c}{bc}}.x^{\frac{c-a}{ca}}$

$=x^{\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}}$

$=x^{\frac{c(a-b)+a(b-c)+b(c-a)}{abc}}$

$=x^{\frac{ac-bc+ab-ac+bc-ab}{abc}}$

$=x^0=1$

উদাহরণ 4: সরল করুন; (ক) $\dfrac{5^3.8}{2^4.125}$, (খ) $\dfrac{7^3\times 7^{-3}}{3\times 3^{-4}}$

সমাধানঃ (ক) $\dfrac{5^3.8}{2^4.125}=\dfrac{5^3.2^3}{2^4.5^3}$

$=2^{3-4}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

(খ) $\dfrac{7^3\times 7^{-3}}{3\times 3^{-4}}=\dfrac{7^{3+(-3)}}{3^{1+(-4)}}=\dfrac{7^{3-3}}{3^{1-4}}=\dfrac{7^0}{3^{-3}}=\dfrac{1}{3^{-3}}=\dfrac{1}{\frac{1}{3^3}}=3^3=27$

উদাহরণ 5: সরল করুন; (ক) $(-3)^3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$, (খ) $\left(2^{-1}+5^{-1}\right)^{-1}$, (গ) $\sqrt{7}\left(\sqrt{28}-\sqrt{7}\right)$, (ঘ) $8^{\frac{3}{4}}\div 8^{\frac{1}{2}}$

সমাধানঃ (ক) $(-3)^3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=(-3)\times(-3)\times(-3)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{27}{4}=-6\dfrac{3}{4}$

(খ) $\left(2^{-1}+5^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$=\left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{7}{10}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{7}{10}}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$

(গ) $\sqrt{7}\left(\sqrt{28}-\sqrt{7}\right)=\sqrt{7}\left(\sqrt{4.7}-\sqrt{7}\right)$

$=\sqrt{7}\left(\sqrt{7}.\sqrt{2^2}-\sqrt{7}\right)=\sqrt{7}.\sqrt{7}(2-1)$

$=7.1=7$

(ঘ) $8^{\frac{3}{4}}\div 8^{\frac{1}{2}}=\left(2^3\right)^{\frac{3}{4}}\div\left(2^3\right)^{\frac{1}{2}}$

$=2^{3.\frac{3}{4}}\div 2^{3.\frac{1}{2}}=2^{\frac{9}{4}}\div 2^{\frac{3}{2}}$

$=2^{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}}=2^{\frac{9-6}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

বিকল্প পদ্ধতি: $8^{\frac{3}{4}}\div 8^{\frac{1}{2}}=8^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}=8^{\frac{3-2}{4}}$

$=8^{\frac{1}{4}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

উদাহরণ 6: সমাধান করুন, $9.3^{x-1}=27^x$

সমাধান: $9.3^{x-1}=27^x$

বা, $3^2.3^{x-1}=\left(3^3\right)^x$

বা, $3^{2+x-1}=3^{3x}$

বা, $2+x-1=3x$

বা, $1+x=3x$

বা, $3x-x=1$

বা, $2x=1$

$\therefore x=\frac{1}{2}$

উদাহরণ 7: প্রমাণ করুন, $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r}\times\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p}\times\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}=1$

সমাধান: $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r}\times\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p}\times\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$

$=x^{(p-q)(p+q-r)}\times x^{(q-r)(q+r-p)}\times x^{(r-p)(r+p-q)}$

$=x^{(p-q)(p+q)-r(p-q)}\times x^{(q-r)(q+r)-p(q-r)}\times x^{(r-p)(r+p)-q(r-p)}$

$=x^{p^2-q^2-rp+rq}\times x^{q^2-r^2-pq+pr}\times x^{r^2-p^2-qr+pq}$

$=x^{p^2-q^2-rp+rq+q^2-r^2-pq+pr+r^2-p^2-qr+pq}$

$=x^0=1$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 8: সমাধান করুন, $\left(\sqrt{3}\right)^{x+1}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x-1}$

সমাধান: $\left(\sqrt{3}\right)^{x+1}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x-1}$

বা, $3^{\frac{x+1}{2}}=3^{\frac{2x-1}{3}}$

বা, $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{2x-1}{3}$

বা, $3(x+1) = 2(2x-1)$

বা, $3x+3 = 4x-2$

বা, $4x-2 = 3x+3$

বা, $4x-3x = 3+2$

বা, $x = 5$

$\therefore x = 5$

উদাহরণ 9: যদি $x = m^p, y = m^q$ এবং $m^2 = \left(x^q y^p\right)^r$ হয়, তবে দেখান যে, $pqr = 1$

সমাধানঃ $m^2 = \left(x^q y^p\right)^r$

বা, $m^2 = \left[\left(m^p\right)^q . \left(m^q\right)^p\right]^r$ [x ও y এর মান বসিয়ে]

বা, $m^2 = \left(m^{pq}.m^{pq}\right)^r$

বা, $m^2 = \left(m^{pq+pq}\right)^r$

বা, $m^2 = \left(m^{2pq}\right)^r$

বা, $m^2 = m^{2pqr}$

বা, $2pqr = 2$

$\therefore pqr = 1$ (প্রমাণিত)

সারসংক্ষেপ

যদি, $x \in R$ এবং $m, n \in N$ হয়, তাহলে

- $x \times x \times x \times \ldots\ldots \times x$ (n সংখ্যক বার x) $= x^n$
- সূত্র ১: একই ভিত্তির শক্তির গুণ- $x^m \times x^n = x^{m+n}$
- সূত্র ২: একই ভিত্তির শক্তির ভাগ-

$$\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n}, \text{ যখন } m > n \\ \dfrac{1}{x^{n-m}}, \text{ যখন } n > m \end{cases}$$

- সূত্র ৩: ভিন্ন ভিত্তির গুণফলের শক্তি- $(x \times y)^n = x^n \times y^n$
- সূত্র ৪: ভিন্ন ভিত্তির ভাগফলের শক্তি- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n},\ y \neq 0$
- সূত্র ৫: শূন্য শক্তি- $x^0 = 1, \quad (x \neq 0)$
- সূত্র ৬: ঋণাত্মক শক্তি- $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}, \quad (x \neq 0)$
- সূত্র ৭: শক্তির শক্তি- $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-10):

1. অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যা বা রাশিকে কিসের সাহায্যে অতি সহজে লিখে প্রকাশ করা যায়?
   (ক) সূচকের সাহায্যে (খ) + চিহ্নের সাহায্যে (গ) ভগ্নাংশের সাহায্যে (ঘ) = চিহ্নের সাহায্যে।
2. সূচকের নিয়ম অনুযায়ী : $a^m.a^0 =$ কত?
   (ক) $a^{m\times o}$ (খ) a^1 (গ) a^m (ঘ) 0
3. a যেকোনো অশূন্য বাস্তব সংখ্যা এবং $n > m$ হলে $\frac{a^m}{a^n} =$ কত?
   (ক) a^{m+n} (খ) $\frac{1}{a^{n-m}}$ (গ) a^{n-m} (ঘ) a^{mn}
4. সূচকের সাহায্যে–
   (i) অনেক বড় সংখ্যা বা রাশি লিখে প্রকাশ করা যায়;
   (ii) অনেক ছোট সংখ্যা বা রাশি লিখে প্রকাশ করা যায়;
   (iii) সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপে প্রকাশ করা যায়।
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) (i) (খ) (i) ও (ii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)
5. $a \neq 0$ এবং m, n যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে,
   (i) $a^m.a^n = a^{m+n}$ (ii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (iii) $\frac{a^m}{a^n} = (a^m)^n$
   উপরের তথ্যানুসারে নিচের কোনটি সঠিক?
   (ক) (ii) (খ) (i) ও (ii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

5^4 একটি সূচকীয় রাশি
উপরের তথ্যের ভিত্তিতে 6-9 নং প্রশ্নের উত্তর দিন

6. প্রদত্ত সূচকীয় রাশিটিতে ভিত্তি কত?
   (ক) 3 (খ) 4 (গ) 5 (ঘ) 6
7. প্রদত্ত সূচকীয় রাশিটিতে সূচক কত?
   (ক) 3 (খ) 4 (গ) 5 (ঘ) 6
8. প্রদত্ত সূচকীয় রাশির মান নিচের কোন্‌টি?
   (ক) 20 (খ) 125 (গ) 625 (ঘ) 25
9. প্রদত্ত সূচকীয় রাশির বর্গমূল নিচের কোন্‌টি?
   (ক) 5 (খ) 25 (গ) 20 (ঘ) 125
10. কোন শর্তে $x^0 = 1$
    (ক) $x = 0$ (খ) $x \neq 0$ (গ) $x > 0$ (ঘ) $x \neq 1$

সরল করুন (11-18):

11. $\frac{5^3.5^5}{5^7}$ 12. $3^5 \div 3^2$ 13. $(x^{-1}+y^{-1})^{-1}$ 14. $\left(\frac{3}{5}\right)^7 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{-7}$

15. $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^4$ 16. $\sqrt{a^{-1}b}.\sqrt{b^{-1}c}.\sqrt{c^{-1}a} \quad (a>0, b>0, c>0)$

17. $\dfrac{3^{n+1}}{\left(3^{n}\right)^{n-1}} \div \dfrac{9^{n+1}}{\left(3^{n-1}\right)^{n+1}}$ 18. $\dfrac{3.2^{n}-4.2^{n-2}}{2^{n}-2^{n-1}}$

প্রমাণ করুন (19-24):

19. $\left(\dfrac{x^{p}}{x^{q}}\right)^{r} . \left(\dfrac{x^{q}}{x^{r}}\right)^{p} . \left(\dfrac{x^{r}}{x^{p}}\right)^{q} = 1$

20. $\dfrac{2^{a+1}}{\left(2^{a}\right)^{(a-1)}} \div \dfrac{4^{a+1}}{\left(2^{a-1}\right)^{(a+1)}} = \dfrac{1}{4}$

21. $\left\{\dfrac{x^{(a+b)^2}}{x^{ab}}\right\}^{a-b} \left\{\dfrac{x^{(b+c)^2}}{x^{bc}}\right\}^{b-c} \left\{\dfrac{x^{(c+a)^2}}{x^{ca}}\right\}^{c-a} = 1$

22. $\dfrac{2^{m}\left(2^{m-1}\right)^{m} . 2^{2m}}{\left(2^{m+1}\right) . 2^{m-1} . \left(2^{m}\right)^{m}} = 1$

23. $\dfrac{3.2^{m}-4.2^{m-2}}{2^{n}-2^{n-1}} = 4$

24. $m - \left\{m^{-1} + \left(n^{-1} - m\right)^{-1}\right\}^{-1} = m^{2}n \ \ [mn \neq 1]$

25. যদি $x^{y} = y^{x}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}} = x^{\frac{x}{y}-1}$

সমাধান করুন (26-29):

26. $2^{x} + 2^{1-x} = 3$
27. $2^{2x+1} = 128$
28. $x^{-5} = 1$
29. $3^{2x+1} = 243$

পাঠ ২ লগারিদম ও লগারিদমের সূত্রাবলী

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লগারিদমের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন,
- লগারিদমের প্রকারভেদ লিখতে পারবেন,
- লগারিদমের সূত্র লিখতে ও প্রমাণ করতে পারবেন,
- লগারিদমের সূত্রের প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সূচক, লগারিদম, সূত্রাবলী

মূলপাঠ

লগারিদম (Logarithm)

গণিতে আমরা বিভিন্ন রকমের সংখ্যা নিয়ে কাজ করি। যখন কোনো সংখ্যা অনেক বড় হয়, তখন তার গুণফল, ভাগফল বা মূলদ সূচকযুক্ত ঘাতের মান নির্ণয় করার জন্য লগারিদম ব্যবহার করা হয়। লগারিদমকে সংক্ষেপে লগ (log) লেখা হয়।

আমরা জানি, $2^{4} = 32$; এই গাণিতিক উক্তিটি লগের মাধ্যমে লেখা হয় $\log_{2} 32 = 4$

আবার বিপরীতক্রমে $\log_2 32 = 4$ হলে, সূচকের মাধ্যমে লেখা যাবে $2^4 = 32$

একইভাবে $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{32}$ কে লগের মাধ্যমে লেখা যায় $\log_2 \frac{1}{32} = -4$

$x \in R$ হলে যদি $a^x = n,\ (a > 0,\ a \neq 1)$ হয়, তাহলে x কে n এর a ভিত্তিক লগারিদম বলা হয়। অর্থাৎ $a^x = n$ সূচকীয় পদ্ধতি হলে, লগারিদম পদ্ধতি হবে $x = \log_a n$ ।

x ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন, a^x সর্বদা ধনাত্মক। তাই শুধু ধনাত্মক সংখ্যারই লগের মান আছে যা বাস্তব। শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগের বাস্তব মান নেই।

লগারিদমের সূত্রাবলি (Formulae of Logarithms)

মনে করুন, $a > 0, a \neq 1; b > 0, b \neq 1$ এবং $M > 0, N > 0$

সূত্র ১: (ক) $\log_a 1 = 0, (a > 0, a \neq 1)$

(খ) $\log_a a = 1, (a > 0, a \neq 1)$

প্রমাণ: (ক) সূচকের সূত্র হতে জানি, $a^0 = 1$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞা হতে পাওয়া যায়, $\log_a 1 = 0$ (প্রমাণিত)

(খ) সূচকের সূত্র হতে জানি, $a^1 = a$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞা হতে পাওয়া যায়, $\log_a a = 1$ (প্রমাণিত)

সূত্র ২: $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

প্রমাণ: মনে করুন, $\log_a M = x, \log_a N = y$

$\therefore M = a^x, N = a^y$

এখন, $MN = a^x.a^y = a^{x+y}$

$\therefore \log_a(MN) = x + y$

বা, $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ [x, y এর মান বসিয়ে]

$\therefore \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$ (প্রমাণিত)

মনে রাখার বিষয়:

$\log(MNP\ldots) = (\log_a M + \log_a N + \log_a P + \ldots)$

কিন্তু $\log_a(M \pm N) \neq \log_a M \pm \log_a N$

সূত্র ৩: $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

প্রমাণ: মনে করুন, $\log_a M = x,\ \log_a N = y$

$\therefore M = a^x, \quad N = a^y$

এখন, $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$\therefore \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = x - y$

$\therefore \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

সূত্র ৪: $\log_a M^r = r\log_a M$

প্রমাণ: মনে করুন, $\log_a M = x,\ \therefore M = a^x$

বা, $(M)^r = (a^x)^r$

বা, $M^r = a^{rx}$

$\therefore \log_a M^r = rx,$ বা, $\log_a M^r = r\log_a M$

$\therefore \log_a M^r = r\log_a M$ (প্রমাণিত)।

কিন্তু মনে রাখতে হবে, $(\log_a M)^r \neq r\log_a M$

সূত্র ৫: $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ (ভিত্তি পরিবর্তন)

প্রমাণ: মনে করুন, $\log_a M = x,\ \log_b M = y$

$\therefore a^x = M, b^y = M$

$\therefore a^x = b^y$

বা, $(a^x)^{\frac{1}{y}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$

বা, $b^{y\frac{1}{y}} = a^{x\frac{1}{y}}$

বা, $b = a^{\frac{x}{y}}$

$\therefore \frac{x}{y} = \log_a b$

বা, $x = y\log_a b$

বা, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ অথবা $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ [সূত্র ৫]

$M = a$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$\log_a a = \log_b a \times \log_a b$

বা, $1 = \log_b a \times \log_a b$

$\therefore \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

অথবা $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (প্রমাণিত)

শিক্ষার্থীর কাজ	$5^{-3} = \frac{1}{125}$, লগের মাধ্যমে প্রকাশ করুন। $3^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, লগের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

উদাহরণ 1: মান নির্ণয় করুন: (ক) $\log_{\sqrt{3}} 243$, (খ) $\log_{10} 1000$, (গ) $\log_2 \frac{1}{8}$, (ঘ) $\log_{2\sqrt{5}} 400$

সমাধান: (ক) $\log_{\sqrt{3}} 243 = \log_{\sqrt{3}} 3^5$

$= 5\log_{\sqrt{3}} 3 = 5\log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^2$

$= 5\times 2\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}$

$= 5\times 2$ [যেহেতু $\log_a a = 1$]

$= 10$

(খ) $\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3$

$= 3\log_{10} 10 = 3.1 = 3$

(গ) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$= \log_2 \left(2^{-1}\right)^3 = \log_2 (2)^{-3}$

$= -3\log_2 2 = -3.1 = -3$

(ঘ) $\log_{2\sqrt{5}} 400 = \log_{2\sqrt{5}} (4\times 100)$

$= \log_{2\sqrt{5}} \left(2^2 \times 10^2\right) = \log_{2\sqrt{5}} (2\times 10)^2$

$= 2\log_{2\sqrt{5}} (2\times 10) = 2\log_{2\sqrt{5}} (4\times 5)$

$= 2\log_{2\sqrt{5}} \left(2\times \sqrt{5}\right)^2 = 2\times 2\log_{2\sqrt{5}} \left(2\times\sqrt{5}\right)$

$= 4.1$ [$\because \log_a a = 1$]

$= 4$

উদাহরণ 2: (ক) $3\sqrt{3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ কত?

(খ) 1000এর লগ 3; ভিত্তি কত?

সমাধান: (ক) $3\sqrt{3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ $= \log_3 3\sqrt{3}$

$= \log_3 3^{1+\frac{1}{2}} = \log_3 3^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}.1$ [$\because \log_a a = 1$]

$= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

(খ) মনে করুন, ভিত্তি a

$\therefore$ প্রশ্নমতে, $\log_a 1000 = 3$

$\therefore a^3 = 1000$

বা, $(a)^3 = (10)^3$

$\therefore a = 10$ [$\because a^x = b^y$ হলে $a = b$]

$\therefore$ নির্ণেয় ভিত্তি $a = 10$

উদাহরণ 3: x এর মান নির্ণয় করুন: (ক) $\log_x \frac{1}{27} = -3$, (খ) $\log_x 324 = 4$, (গ) $\log_5 x = 3$

সমাধান: (ক) $\log_x \frac{1}{27} = -3$

$\therefore x^{-3} = \frac{1}{27}$

বা, $x^{-3} = \frac{1}{3^3}$

বা, $x^{-3} = 3^{-3}$

$\therefore x = 3$

(খ) $\log_x 324 = 4$

$\therefore x^4 = 324$

বা, $x^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$

বা, $x^4 = 3^4 \times 2^2$

বা, $x^4 = \left(3\sqrt{2}\right)^4$

$\therefore x = 3\sqrt{2}$

(গ) $\log_5 x = 3$

বা, $5^3 = x$

বা, $x = 5 \times 5 \times 5$

$\therefore x = 125$

উদাহরণ 4: দেখান যে, (ক) $3\log 3 + 3\log 4 - 5\log 2 - 2\log 5 = \log \frac{54}{25}$

(খ) $3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$

সমাধান: (ক) $3\log 3 + 3\log 4 - 5\log 2 - 2\log 5 = \log \frac{54}{25}$

বামপক্ষ $= 3\log 3 + 3\log 4 - 5\log 2 - 2\log 5$

$= \log 3^3 + \log 4^3 - \log 2^5 - \log 5^2$

$= \log(3^3 \times 4^3) - (\log 2^5 + \log 5^2)$

$= \log(27 \times 64) - \log(2^5 \times 5^2)$

$= \log(27 \times 64) - \log(32 \times 25)$

$= \log \frac{27 \times 64}{32 \times 25} = \log \frac{27 \times 2}{25} = \log \frac{54}{25} =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

(খ) $3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$

বামপক্ষ $= 3\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3 + \log_{10} 5$

$= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 5$

$= \log_{10}\left(2^3 \times 3^2 \times 5\right) = \log_{10}\left(2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5\right)$

$= \log_{10} 360 =$ ডানপক্ষ, (প্রমাণিত)

উদাহরণ 5: সরল করুন: (ক) $2\log\frac{16}{9}+3\log\frac{27}{4}-\log\frac{243}{4}$, (খ) $\log_5\left(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5}\right)-\log_3\sqrt[3]{3}+\log_5\sqrt{5}$

সমাধান: (ক) $2\log\frac{16}{9}+3\log\frac{27}{4}-\log\frac{243}{4}$

$$=\log\left(\frac{16}{9}\right)^2+\log\left(\frac{27}{4}\right)^3-\log\frac{243}{4}$$

$$=\log\left\{\left(\frac{16}{9}\right)^2\times\left(\frac{27}{4}\right)^3\div\frac{243}{4}\right\}$$

$$=\log\left\{\left(\frac{2^4}{3^2}\right)^2\times\left(\frac{3^3}{2^2}\right)^3\div\frac{3^5}{2^2}\right\}$$

$$=\log\left(\frac{2^8}{3^4}\times\frac{3^9}{2^6}\times\frac{2^2}{3^5}\right)=\log\left(\frac{2^8\times3^9\times2^2}{3^4\times2^6\times3^5}\right)$$

$$=\log\left(2^{8+2-6}\times3^{9-4-5}\right)=\log\left(2^4\times3^0\right)$$

$$=\log\left(2^4\times1\right)=\log16$$

(খ) $\log_5\left(\sqrt[3]{5}.\sqrt{5}\right)-\log_3\sqrt[3]{3}+\log_5\sqrt{5}$

$$=\log_5 5^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{2}}-\log_3 3^{\frac{1}{3}}+\log_5 5^{\frac{1}{2}}$$

$$=\log_5 5^{\frac{5}{6}}-\log_3 3^{\frac{1}{3}}+\log_5 5^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{5}{6}\log_5 5-\frac{1}{3}\log_3 3+\frac{1}{2}\log_5 5$$

$$=\frac{5}{6}.1-\frac{1}{3}.1+\frac{1}{2}.1=\frac{5-2+3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

সারসংক্ষেপ

- $a^x=N,\ (a>0, a\neq1)$ হলে; $x=\log_a N$ কে N এর a ভিত্তিক লগ বলা হয়।

মনে করুন, $a>0,\ a\neq1;\ b>0,\ b\neq1$ এবং $M>0,\ N>0$

- সূত্র ১: (ক) $\log_a 1=0,\ (a>0,\ a\neq1)$
  (খ) $\log_a a=1,\ (a>0,\ a\neq1)$
- সূত্র ২: $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$
- $\log(MNP...)=(\log_a M+\log_a N+\log_a P+...)$
  কিন্তু, $\log_a(M\pm N)\neq\log_a M\pm\log_a N$
- সূত্র ৩: $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$
- সূত্র ৪: $\log_a M^r=r\ \log_a M$
  কিন্তু, $(\log_a M)^r\neq r\ \log_a M$
- সূত্র ৫: $\log_a M=\log_b M\times\log_a b$ (ভিত্তি পরিবর্তন)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-7):

1. $\sqrt[3]{3}$ এর 3 ভিত্তিক লগ কত?

(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{3}{2}$ (গ) 5.1 (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\log_{10} x = -3$ হলে x এর মান কত?

(ক) 100 (খ) 0.1 (গ) $\frac{1}{1000}$ (ঘ) $\frac{1}{10}$

3. 144 এর লগ 4 হলে এর ভিত্তি কত?

(ক) $2\sqrt{5}$ (খ) $5\sqrt{2}$ (গ) $3\sqrt{2}$ (ঘ) $2\sqrt{3}$

4. $\log_x \frac{1}{343} = -3$ হলে x এর মান কত?

(ক) 4 (খ) 5 (গ) 6 (ঘ) 7

5. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)$ এর মান কত?

(ক) -1 (খ) -2 (গ) 1 (ঘ) 2

6. কোন শর্তে $\log_a a = 1$

(ক) $a > 0$ (খ) $a \neq 1$ (গ) $a > 0, a \neq 1$ (ঘ) $a \neq 0, a > 1$

7. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন–

(i) $\log_a (n)^m = m \log_a n$

(ii) $3^3 = 27$ এবং $\log_3 27 = 3$ সমার্থক

(iii) $\log_a (m+n) = \log_a m + \log_a n$

উপরের কোন্ তথ্যগুলো সঠিক

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii), (iii)

8. মান নির্ণয় করুন:

(i) $\log_7 \sqrt[3]{7}$ (ii) $\log_{\sqrt{2}} 32$ (iii) $\log_4 2$

9. x এর মান নির্ণয় করুন:

(i) $\log_x 36 = 2$ (ii) $\log_5 x = -4$ (iii) $\log_{\sqrt{3}} 27 = x$

10. দেখান যে,

(i) $5\log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$

(ii) $\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2\log_{10} 7 = \log_{10} \frac{50}{147}$

11. সরল করুন:

(i) $5\log\frac{2}{3} - 3\log\frac{2}{5} + 2\log\frac{3}{4}$

(ii) $4\log 2 + 2\log\frac{3}{5} - \log\frac{4}{25}$

(iii) $\log\frac{x^2y^2}{z^2} + \log\frac{y^2z^2}{x^2} + \log\frac{z^2x^2}{y^2} - \log x^2y^2z^2$

পাঠ ৩ সংখ্যার আদর্শ রূপ ও লগারিদম পদ্ধতি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অনেক বড় ও অনেক ছোট সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ দিতে পারবেন,
- লগারিদম পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন,
- সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক নির্ণয় করতে পারবেন,
- সাধারণ লগারিদমের অংশক নির্ণয় করতে পারবেন,
- লগারিদম পদ্ধতি ব্যবহার করে সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ, স্বাভাবিক লগারিদম, সাধারণ লগারিদম, পূর্ণক, অংশক

মূলপাঠ

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ (Scientific or Standard form of Numbers)

বিজ্ঞান জগতে এমন কিছু সংখ্যা আছে যেগুলো অনেক বড়, আবার কিছু অনেক ছোট। যেমন, পৃথিবী থেকে সূর্যের গড় দূরত্ব 150000000 কিলোমিটার, আলোর গতিবেগ প্রতি সেকেন্ডে 300000000 মিটার, অক্সিজেনের পারমানবিক ব্যাসার্ধ 0.000000000048 মিটার, হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যাসার্ধ 0.0000000037 সেন্টিমিটার ইত্যাদি। সুবিধার জন্য ঐ সকল বড় বা ছোট সংখ্যাকে $a\times10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়, যেখানে $1\le a<10$ (অর্থাৎ a, 1 বা 1-এর চেয়ে বড় কিন্তু 10-এর চেয়ে ছোট) এবং n পূর্ণসংখ্যা (ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য) অর্থাৎ $n\in Z$ ।

কোনো সংখ্যার $a\times10^n$ রূপকে বলা হয় সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ। যেমন 600000 এর আদর্শ রূপ 6×10^5; 0.00008 এর আদর্শ রূপ 8×10^{-5} । কোনো ঋণাত্মক সংখ্যাকে আদর্শ রূপে প্রকাশ করতে হলে তার পরম মানের আদর্শ রূপের আগে '–' চিহ্ন দিতে হবে।

উদাহরণ 1: পৃথিবী থেকে সূর্যের গড় দূরত্ব 150000000 কিলোমিটার। একে আদর্শ রূপে প্রকাশ করুন।

সমাধান: 150000000 কি.মি. $=15\times10000000$ কি.মি.

$$=15\times10^7 \text{ কি.মি. } =\frac{15}{10}\times10\times10^7 \text{ কি.মি. } =1.5\times10^8 \text{ কি.মি.}$$

অতএব পৃথিবী থেকে সূর্যের গড় দূরত্ব $=1.5\times10^8$ কি.মি.

উদাহরণ 2: অক্সিজেনের পারমানবিক ব্যাসার্ধ 0.000000000048 মিটার। একে বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ করুন (সেন্টিমিটার এককে)।

সমাধান: 0.000000000048 মিটার $=\dfrac{48}{1000000000000}$ মিটার

$$= \frac{48}{10^{12}} \text{ মিটার } = 48 \times 10^{-12} \text{ মিটার}$$

$$= \frac{48}{10} \times 10 \times 10^{-12} \text{ মিটার } = 4.8 \times 10^{-11} \text{ মিটার}$$

আমরা জানি, 1 মিটার = 100 সেন্টিমিটার

$\therefore 4.8 \times 10^{-11}$ মিটার $= 4.8 \times 10^{-11} \times 100$ সেন্টিমিটার $= 4.8 \times 10^{-9}$ সেন্টিমিটার

অতএর অক্সিজেনের পারমানবিক ব্যাসার্ধ $= 4.8 \times 10^{-9}$ সেন্টিমিটার

উদাহরণ 3: হাইড্রোজেন পরমাণুর ব্যসার্ধ 3.7×10^{-9} সেন্টিমিটার। সংখ্যার এই আদর্শ রূপকে স্বাভাবিক আকারে প্রকাশ করুন।

সমাধান: 3.7×10^{-9} সেন্টিমিটার $= 3.7 \times \frac{1}{10^{9}}$ সেন্টিমিটার

$$= \frac{37}{10} \times \frac{1}{10^{9}} \text{ সেন্টিমিটার } = \frac{37}{10^{10}} \text{ সেন্টিমিটার}$$

$$= \frac{37}{1000000000\,0} \text{ সেন্টিমিটার } = 0.0000000037 \text{ সেন্টিমিটার}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপে প্রকাশ করুন: (i) 300000000 (ii) 0.000321 (iii) 62705

লগারিদম পদ্ধতি (Logarithmic Systems)

লগারিদম পদ্ধতি দুই প্রকার:

(ক) স্বাভাবিক লগারিদম (Natural Logarithm)

e-ভিত্তিক লগারিদমকে স্বাভাবিক লগারিদম বলা হয়। স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (John Napier: 1550-1617) ১৬১৪ সালে e কে ভিত্তি ধরে প্রথম লগারিদম সম্পর্কিত বই প্রকাশ করেন। e একটি অমূলদ সংখ্যা এবং তার মান হলো, $e = 2.71828...$। তাঁর নামানুসারে এই লগারিদমকে নেপিয়ার লগারিদম বা e-ভিত্তিক লগারিদম বলা হয়। $\log_e x$ কে $\ln x$ আকারেও লেখা হয়।

(খ) সাধারণ লগারিদম (Common Logarithm):

10 ভিত্তিক লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম বলা হয়। ইংল্যান্ডের গণিতবিদ হেনরি ব্রিগস (Henry Briggs: 1561-1630) ১৬২৪ সালে 10কে ভিত্তি ধরে লগারিদমের টেবিল (লগ টেবিল বা লগ সারণি) তৈরি করেন। তার এই লগারিদমকে ব্রিগস লগারিদম বা 10 ভিত্তিক লগারিদম বা ব্যবহারিক লগারিদমও বলা হয়।

দ্রষ্টব্য: লগারিদমের ভিত্তি উল্লেখ না থাকলে বীজগণিতীয় রাশির ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10কে ভিত্তি হিসেবে ধরা হয়। লগ সারণিতে ভিত্তি 10ধরতে হয়।

সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদমের মধ্যে একটি সম্পর্ক বিদ্যমান। সম্পর্কটি হলো: $0.4343 \ln x = \log_{10} x$

সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক

(ক) পূর্ণক (Characteristics):

মনে করুন, একটি সংখ্যা N কে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রকাশ করে পাওয়া যায়,

$N = a \times 10^n$, যেখানে $N > 0, \quad 1 \le a < 10$ এবং $n \in Z$

উভয় পক্ষে 10 ভিত্তিতে লগ নিয়ে পাওয়া যায়,

$$\log_{10} N = \log_{10}(a \times 10^n)$$
$$= \log_{10} a + \log_{10} 10^n$$
$$= \log_{10} a + n \log_{10} 10$$
$$= n + \log_{10} a \quad [\because \log_{10} 10 = 1]$$
$$\therefore \log_{10} N = n + \log_{10} a$$

ভিত্তি 10 উহ্য রেখে পাওয়া যায়- $\log N = n + \log a$

এখানে, n কে বলা হয় $\log N$ এর পূর্ণক।

নিম্নে পূর্ণক নির্ণয় করা ছকের মাধ্যমে দেখানো হল:

ছক ১:

N	N এর $a \times 10^n$ আকার	সূচক	দশমিকের বামের অংশের অঙ্কসংখ্যা	পূর্ণক
5570	5.570×10^3	3	4	$4 - 1 = 3$
557.0	5.570×10^2	2	3	$3 - 1 = 2$
55.70	5.570×10^1	1	2	$2 - 1 = 1$
5.570	5.570×10^0	0	1	$1 - 1 = 0$
0.5570	5.570×10^{-1}	-1	0	$0 - 1 = -1$

উপরের ছক হতে লক্ষ্য করুন, প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশে যথাগুলো অংক থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে সেই অঙ্কসংখ্যার চেয়ে 1 কম এবং তা হবে ধনাত্মক।

ছক ২:

N	N এর $a \times 10^n$ আকার	সূচক	দশমিক ও এর পরবর্তী সার্থক অঙ্কের মাঝে 0 এর সংখ্যা	পূর্ণক
0.4305	4.305×10^{-1}	-1	0	$-(0+1) = -1$
0.04305	4.305×10^{-2}	-2	1	$-(1+1) = -2$
0.004305	4.305×10^{-3}	-3	2	$-(2+1) = -3$

অতএব উপরের ছক হতে লক্ষ্য করুন, প্রদত্ত সংখ্যার পূর্ণ অংশ না থাকলে দশমিক বিন্দু এর পরের প্রথম সার্থক অংকের মাঝে যতগুলো 0 (শূন্য) থাকবে, সংখ্যাটির লগারিদমের পূর্ণক হবে শূন্যের সংখ্যার চেয়ে 1 বেশি এবং তা হবে ঋণাত্মক।

মনে রাখার বিষয়

- পূর্ণক ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে, কিন্তু অংশক সর্বদা ধনাত্মক।
- কোনো পূর্ণক ঋণাত্মক হলে, পূর্ণকটির বামে '– ' চিহ্ন না দিয়ে পূর্ণকটির ওপরে '–' (বার চিহ্ন) দিয়ে লেখা হয়। যেমন পূর্ণক –5 কে লেখা হবে $\bar{5}$ দিয়ে। তা না হলে অংশকসহ লগের সম্পূর্ণ অংশটি ঋণাত্মক বুঝাবে।

উদাহরণ 4: নিচের সংখ্যাগুলোর লগের পূর্ণক নির্ণয় করুন:

(i) 6237 (ii) 63.70 (iii) 0.6237 (iv) 0.0000639

সমাধান: (i) $6237 = 6.237 \times 1000 = 6.237 \times 10^3$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3

অন্যভাবে, 6237 সংখ্যাটিতে অংকের সংখ্যা 4 টি

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= 4 - 1 = 3$

$\therefore$ 6237 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 3

(ii) $63.70 = 6.370 \times 10^1$

$\therefore$ সংখ্যাটির পূর্ণক 1

অন্যভাবে 63.70 সংখ্যাটির দশমিকের বামে, অর্থাৎ পূর্ণ অংশে 2টি অংক আছে

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= 2 - 1 = 1$

$\therefore$ 63.70 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক 1

(iii) $0.6237 = 6.237 \times 10^{-1}$

$\therefore$ সংখ্যাটির পূর্ণক -1

অন্যভাবে, 0.6237 সংখ্যার দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী প্রথম সার্থক অঙ্ক 6 এর মাঝে কোনো 0 (শূন্য) নেই। অর্থাৎ শূন্যটি 0 আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির পূর্ণক $= -(0 + 1) = -1 = \bar{1}$

$\therefore$ 0.6237 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $\bar{1}$

(iv) $0.0000639 = 6.39 \times 10^{-5}$

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক -5 বা $\bar{5}$

অন্যভাবে সংখ্যাটির দশমিক বিন্দু ও এর পরবর্তী প্রথম সার্থক অঙ্ক 6 এর মাঝে 4 টি 0 (শূন্য) আছে।

$\therefore$ সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $= -(4 + 1) = -5 = \bar{5}$

$\therefore$ 0.0000639 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক $\bar{5}$

(খ) অংশক (Mantissa):

কোনো সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। এটি মূলতঃ অমূলদ সংখ্যা। একটি নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত অংশকের মান নির্ণয় করা হয়।

কোনো সংখ্যার লগের অংশক লগ তালিকা থেকে বের করা যায়। আবার তা ক্যালকুলেটরের সাহায্যেও নির্ণয় করা যায়। এখন আমরা ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সংখ্যার লগের অংশক নির্ণয় করবো।

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সংখ্যার সাধারণ লগ নির্ণয়:

উদাহরণ 5: $\log 3213$ এর পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করুন।

সমাধান: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করুন

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{Log}}$ $\boxed{3213}$ $\boxed{=}$ 3.50691

$\therefore \log 3213$ এর পূর্ণক 3 এবং অংশক .50691

উদাহরণ 6: $\log 55.63241$ এর পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করুন।

সমাধান: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করুন:

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{Log}}$ $\boxed{55.63241}$ $\boxed{=}$ 1.74532

$\therefore \log 55.63241$ এর পূর্ণক 1 এবং অংশক .74532

উদাহরণ 7: 0.00625 এর লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করুন।

সমাধান: ক্যালকুলেটর ব্যবহার করুন:

$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{Log}}$ $\boxed{0.00625}$ $\boxed{=}$ -3.79588

$\therefore \log 0.00625$ এর পূর্ণক -3 বা $\bar{3}$ এবং অংশক .79588

শিক্ষার্থীর কাজ	ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের সংখ্যাগুলোর 10 ভিত্তিক ও e ভিত্তিক লগ নির্ণয় করুন: (i) 0.7296 (ii) 0.0005321 (iii) 3290

সারসংক্ষেপ

- অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে প্রকাশ করা হয়, যেখানে $1 \le a < 10$ এবং $n \in Z$। কোন সংখ্যার $a \times 10^n$ রূপকে বলা হয় সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ।
- e ভিত্তিক লগারিদমই স্বাভাবিক লগারিদম যা $\log_e x$ বা $\ln x$ আকারে লেখা হয়।
- পূর্ণক (Characteristics): $\log N = n + \log a$, এখানে n কে বলা হয় $\log N$ এর পূর্ণক।
- কোনো সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক 1 অপেক্ষা ছোট একটি অঋণাত্মক সংখ্যা। এটি মূলত: অমূলদ সংখ্যা।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-5):

1. একটি সংখ্যাকে $a \times 10^n$ আকারে লেখার জন্য শর্ত কোন্‌টি?

   (ক) $1 < a < 10$ (খ) $1 \le a \le 10$ (গ) $1 \le a < 10$ (ঘ) $1 < a \le 10$

0.000625 সংখ্যাটি বিবেচনা করে নিচের 2-5 নং প্রশ্নগুলোর উত্তর দিন:

2. সংখ্যাটির a^n আকার নিচের কোন্‌টি?

   (ক) $(2.5)^2$ (খ) $(.25)^2$ (গ) $(0.025)^2$ (ঘ) $(0.0025)^2$

3. সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক আকার নিচের কোন্‌টি?

   (ক) 6.25×10^{-4} (খ) 625×10^{-4} (গ) 62.5×10^{-3} (ঘ) 6.25×10^{-3}

4. সংখ্যাটির সাধারণ লগের পূর্ণক কত?

(ক) $\bar{4}$ (খ) $\bar{3}$ (গ) $\bar{2}$ (ঘ) $\bar{1}$

5. সংখ্যাটির সাধারণ লগের অংশক কোন্‌টি?

(ক) 0.79858 (খ) 0.79885 (গ) 0.79888 (ঘ) 0.79588

6. বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ করুন:

(i) 15000 (ii)) 0.000512 (iii) 37500000 (iv) 0.00000014

7. সাধারণ দশমিক রূপে প্রকাশ করুন:

(i) 10^6 (ii) 3.526×10^4 (iii) 7.219×10^{-5} (iv) 5.32×10^{-3}

8. নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক নির্ণয় করুন (ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে):

(i) 45.70 (ii) 0.000435 (iii) 5692 (iv) 0.0045 (v) 0.000532

9. ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিচের সংখ্যাগুলোর সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করুন:

(i) 63.147 (ii) 0.00456 (iii) 0.0235 (iv) 37 (v) 1.405

10. গুণফল অথবা ভাগফলগুলোর সাধারণ লগ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) নির্ণয় করুন:

(i) 3.5×5.7 (ii) 0.73×0.92 (iii) $43.236\div3.45$ (iv) $0.19926\div32.4$

11. যদি $\log 2 = 0.30103$, $\log 3 = 0.47712$, $\log 5 = 0.69897$ ও $\log 7 = 0.84510$ হয় তবে নিচের রাশিগুলোর মান নির্ণয় করুন:

(i) $\log 4$ (ii) $\log 6$ (iii) $\log 15$ (iv) $\log 28$