ইউনিট ৩

বীজগাণিতিক রাশি
(Algebraic Expressions)

ভূমিকা

পাটীগণিতে বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে সাধারণত কোন নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা দ্বারা যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করা হয়। বীজগণিতে নির্দিষ্ট মানের সংখ্যা ছাড়াও a, b, c, x, y, z, α, β প্রভৃতি ইংরেজি ও গ্রিক বর্ণমালার অক্ষর সমূহ অনির্দিষ্ট সংখ্যামানের প্রতীক হিসাবে ব্যবহৃত হয়। বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যে কোন সাধারণ নিয়ম বীজগণিতিক সুত্র নামে পরিচিত। বীজগণিতের সমস্যা সমাধানে অনেক সময় বীজগানিতিক সূত্র ব্যবহৃত হয়। বীজগাণিতিক বিশ্লেষণ করে উৎপাদকের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়। বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা বীজগাণিতিক সুত্রের সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সমাধান করা যায়। পূর্ববর্তী শ্রেণীতে বীজগাণিতিক সুত্রসমূহ এবং সংশ্লিষ্ট অনুসিদ্ধান্তগুলো বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। এই ইউনিটে বীজগণিতিক সুত্র অনুসিদ্ধান্তসহ পুনরুল্লেখ করাসহ উদাহরণের মাধ্যমে এদের কতিপয় প্রয়োগ দেখানো হবে। এ ছাড়াও এই ইউনিটে বর্গ ও ঘনের সম্প্রসারণ, ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ এবং বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগণিতীয় সুত্রের গঠন ও প্রয়োগ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- বীজগণিতের প্রধান সূত্রাবলী বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন এবং সুত্র প্রয়োগ করে বর্গ এবং ঘনের সম্প্রসারণ করতে পারবেন,
- বিভিন্ন রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- ভাগশেষ উপপাদ্য প্রয়োগ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- সূত্রাবলী প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন,
- বীজগণিতের সমস্যা সমাধানে সূত্রসমূহ প্রয়োগের দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১ বীজগাণিতিক সূত্রাবলী

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- বীজগণিতের প্রধান সূত্রগুলো বর্ণনা করতে পারবেন,
- সূত্রের সাহায্যে বীজগাণিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবেন,
- সূত্রগুলো ব্যবহারে দক্ষতা অর্জন করবেন।

মূখ্য শব্দ	বীজগাণিতিক রাশি, বীজগাণিতিক সূত্র, অনুসিদ্ধান্ত

মূলপাঠ

বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic Expressions)

প্রক্রিয়া চিহ্ন এবং সংখ্যা নির্দেশক অক্ষর প্রতীকের অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়। $a+3b+4c, 2a+5b+9c$ ইত্যাদি বীজগাণিতিক রাশি। বীজগাণিতিক রাশিতে $a, b, c \dots$ ইত্যাদি বর্ণমালার মাধ্যমে বিভিন্ন তথ্য প্রকাশ করা হয়। বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত সংখ্যাগুলি ধ্রুবক। এদের মান নির্দিষ্ট। অন্যদিকে বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষরগুলো চলক, এদের মান নির্দিষ্ট নয়।

বীজগাণিতিক সূত্র (Algebraic Formulae)

বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যে কোন সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগণিতিক সুত্র বলা হয়। বীজগাণিতের সমস্যা সমাধানে অনেক সময় বীজগানিতিক সূত্র ব্যবহৃত হয়। পূর্ববর্তী শ্রেণীতে বীজগাণিতিক সুত্রাবলী এবং সংশ্লিষ্ট অনুসিদ্ধান্তগুলো আলোচনা করা হয়েছে। এখানে পুনরালোচনা করে কতিপয় সূত্রের প্রয়োগ দেখানো হলো।

সুত্র ১: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

সুত্র ২: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

লক্ষ করুন সুত্র-১ এ b এর পরিবর্তে –b বসালে সুত্র-২ পাওয়া যায়।

$$\{a+(-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$

অর্থাৎ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

সুত্র-১ কে বর্ণনার সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ = প্রথম রাশির বর্গ + রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ + দ্বিতীয় রাশির বর্গ

সূত্রটি নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা যায়।

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

সুত্র-২ কে বর্ণনার সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায়।

দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ = প্রথম রাশির বর্গ – রাশি দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ + দ্বিতীয় রাশির বর্গ।

সুত্রটিকে নিম্নলিখিতভাবেও প্রকাশ করা যায়।

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

অনুসিদ্ধান্ত ১: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ২: $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

প্রমাণ: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

বা, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ [পক্ষান্তর করে]

বা $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

বা $a^2+b^2-2ab+2ab=(a-b)^2+2ab$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৩: $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

প্রমাণ: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$=a^2-2ab+2ab+2ab+b^2$

$=a^2-2ab+b^2+4ab=(a-b)^2+4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৪: $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

প্রমাণ: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=a^2+2ab-2ab-2ab+b^2$

$=a^2+2ab+b^2-4ab=(a+b)^2-4ab$

অনুসিদ্ধান্ত ৫: $a^2+b^2=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$

প্রমাণ: ১নং এবং ২নং সুত্র হতে আপনারা জানেন

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \\ \hline \end{array}$$

যোগ করে পাওয়া যায় $2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$

বা $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$

সুতরাং $a^2+b^2=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$

অনুসিদ্ধান্ত ৬: $ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$ অথবা, ab কে দুইটি বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ

প্রমাণ: ১নং এবং ২ নং সুত্র হতে আপনারা জানেন

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \\ a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \\ \hline \end{array}$$

বিয়োগ করে পাওয়া যায়; $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$

সুতরাং $ab=\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{(a-b)^2}{4}$

$=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$

সুত্র ৩: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

প্রমাণ: $(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$

$=a^2-ab+ba-b^2$

$=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$

অর্থাৎ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

সূত্র ৪: $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

অর্থাৎ $(x+a)(x+b)=x^2+(a$ ও b এর বীজগাণিতিক যোগফল$)x+(a$ ও b এর গুণফল$)$

তিনটি রাশির বর্গ নির্ণয়

সুত্র ১ এবং সুত্র ২ হতে আমরা দুইট রাশির যোগফল এবং বিয়োগফলের বর্গ নির্ণয় জেনেছি। এখন দুইটি রাশির স্থলে যদি তিনটি রাশি থাকে তাহলে তাদের বর্গ নির্ণয় করতে পারবেন। ধরুন, $a+b+c$ রাশিটির বর্গ নির্ণয় করতে হবে।

$a+b+c$ এর বর্গ $=(a+b+c)^2$

এখানে তিনটি রাশি রয়েছে কিন্তু পূর্বে আমরা দুইটি রাশির জন্য শিখেছি। যদি আমরা $a+b$ কে একটি রাশি কল্পনা করি তাহলে আমরা পাই

(i) $(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$

তখন সুত্র-১ প্রয়োগ করে সহজেই আমরা সমস্যাগুলো সমাধান করতে পারি। অর্থাৎ

$$\begin{aligned}\{(a+b)+c\}^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned}(a+b-c)^2&=\{(a+b)-c\}^2\\&=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca\end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned}(a-b-c)^2&=\{a+(-b)+(-c)\}^2\\&=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)+2(-b)(-c)+2(-c)(a)\ [\text{(i) এর সাহায্যে}]\\&=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca\end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2&=\{(a+b)+(c+d)\}^2\\&=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2\\&=a^2+2ab+b^2+2(ac+ad+bc+bd)+c^2+2cd+d^2\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd\end{aligned}$$

বর্গ সূত্রের সম্প্রসারণ

আমরা জানি, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

বা, $(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$

বা, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ [পক্ষান্তর করে]

আবার একইভাবে পক্ষান্তর করলে পাওয়া যায়

$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$$

এখন আমরা কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে দুইটি এবং তিনটি রাশির বর্গ নির্ণয় করতে চেষ্টা করবো।

উদাহরণ 1: $2x+3y$ এর বর্গ নির্ণয় করুন

সমাধান: $2x+3y$ এর বর্গ $=(2x+3y)^2=(2x)^2+2.2x.3y+(3y)^2$

$=4x^2+12xy+9y^2$

উদাহরণ 2: $4a-7b$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $4a-7b$ এর বর্গ $=(4a-7b)^2=(4a)^2-2.4a.7b+(7b)^2$

$$=16a^2-56ab+49b^2$$

উদাহরণ 3: $2a+3b+5c$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $2a+3b+5c$ এর বর্গ $=(2a+3b+5c)^2=\{(2a+3b)+(5c)\}^2$

$$=(2a+3b)^2+2.(2a+3b).5c+(5c)^2$$
$$=(2a)^2+2.2a.3b+(3b)^2+10c(2a+3b)+25c^2$$
$$=4a^2+12ab+9b^2+20ac+30bc+25c^2$$
$$=4a^2+9b^2+25c^2+12ab+30bc+20ca$$

উদাহরণ 4: $a+3b-5c$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $a+3b-5c$ এর বর্গ $=(a+3b-5c)^2=\{(a+3b)-5c\}^2$

$$=(a+3b)^2-2.(a+3b).5c+(5c)^2$$
$$=a^2+2.a.3b+(3b)^2-10c(a+3b)+25c^2$$
$$=a^2+6ab+9b^2-10ac-30bc+25c^2$$
$$=a^2+9b^2+25c^2+6ab-30bc-10ca$$

উদাহরণ 5: $a+2b+3c+4d$ এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $a+2b+3c+4d$ এর বর্গ $=(a+2b+3c+4d)^2=\{(a+2b)+(3c+4d)\}^2$

$$=(a+2b)^2+2(a+2b)(3c+4d)+(3c+4d)^2$$
$$=a^2+2.a.2b+(2b)^2+2(3ac+4ad+6bc+8bd)+(3c)^2+2.3c.4d+(4d)^2$$
$$=a^2+4ab+4b^2+6ac+8ad+12bc+16bd+9c^2+24cd+16d^2$$
$$=a^2+4b^2+9c^2+16d^2+4ab+6ac+8ad+12bc+16bd+24cd$$

উদাহরণ 6: $a+b=5$ এবং $ab=10$ হলে a^2+b^2 এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: কোন রাশিমালার মান নির্ণয় করার জন্য কোন্ সূত্র প্রয়োগ করতে হবে তা নির্ভর করে যে মানগুলো দেয়া থাকে তার উপর। এখানে a^2+b^2 রাশিটির মান নির্ণয়ের জন্য $a+b$ এবং ab এর মান দেয়া আছে। সুতরাং আমাদের a^2+b^2 এর মান নির্ণয়ের জন্য $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(5)^2-2.10$ [মান বসিয়ে]

$=25-20=5$

উদাহরণ 7: $x-y=7$ এবং $xy=9$ হলে x^2+y^2 এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি x^2+y^2 এর মান নির্ণয়ের জন্য $x-y$ এবং xy এর মান দেয়া আছে। সুতরাং আপনারা লক্ষ করুন x^2+y^2 এর মান নির্ণয়ের জন্য $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$ সূত্রটি প্রয়োগ করতে হবে।

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=7^2+2.9$ [মান বসিয়ে]

$=49+18=67$

উদাহরণ 8: $m+\frac{1}{m}=3$ হলে, $m^2+\frac{1}{m^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $m^2+\frac{1}{m^2}$

$$=\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-2.m.\frac{1}{m}$$
$$=(3)^2-2=9-2=7$$

উদাহরণ 9: $x-\frac{1}{x}=3$ হলে, $x^4+\frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $x^4+\frac{1}{x^4}$

$$=\left(x^2\right)^2+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2$$
$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2x^2.\frac{1}{x^2}$$
$$=\left\{(x)^2+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right\}^2-2$$
$$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2.x.\frac{1}{x}\right\}^2-2$$
$$=\left\{3^2+2\right\}^2-2=(9+2)^2-2$$
$$=(11)^2-2=121-2=119$$

উদাহরণ 10: $a+b+c=8$ এবং $a^2+b^2+c^2=36$ হলে, $ab+bc+ca$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ আমরা জানি, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

বা, $(8)^2=36+2(ab+bc+ca)$ [মান বসিয়ে]

বা, $64=36+2(ab+bc+ca)$

বা, $2(ab+bc+ca)=64-36$ [রাশিগুলো পক্ষান্তর করে]

বা, $2(ab+bc+ca)=28$

বা, $ab+bc+ca=\frac{28}{2}$

$\therefore ab+bc+ca=14$

উদাহরণ 11: $a+b+c=15$ এবং $ab+bc+ca=71$ হলে, $a^2+b^2+c^2$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ আমরা জানি, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

বা, $(15)^2=a^2+b^2+c^2+2.71$ [মান বসিয়ে]

বা, $225=a^2+b^2+c^2+142$

বা, $a^2+b^2+c^2=225-142$ [রাশিগুলো পক্ষান্তর করে]

$\therefore a^2+b^2+c^2=83$

উদাহরণ 12: $x+y+z=p$ এবং $xy+yz+zx=q$ হলে $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$

$$= x^2+2xy+y^2+y^2+2yz+z^2+z^2+2zx+x^2$$
$$= (x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)+(x^2+y^2+z^2)$$
$$= (x+y+z)^2+\{(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\}$$
$$= (p)^2+\{(p)^2-2.q\} \text{ [মান বসিয়ে]}$$
$$= p^2+p^2-2q = 2p^2-2q = 2(p^2-q)$$

উদাহারণ 13ঃ $x-y=2$ এবং $xy=8$ হলে $x+y$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : আমরা জানি, $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$$= (2)^2+4.8 \text{ [মান বসিয়ে]}$$
$$= 4+32 = 36$$
$$\therefore x+y = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

উদাহরণ 14ঃ $x-y=2$ এবং $xy=24$ হলে x^2-y^2 এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ আমরা জানি, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

এখানে লক্ষ করুন x^2-y^2 এর মান নির্ণয়ের জন্য $x+y$ এবং $x-y$ এর মান জানা দরকার। $x-y$ এর মান দেয়া আছে, কিন্তু $x+y$ এর মান দেয়া নেই। অতএব প্রথমে $x+y$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

আমরা জানি, $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$

$$= (2)^2+4.24 \text{ [মান বসিয়ে]}$$
$$= 4+96 = 100$$
$$\therefore x+y = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

এখন, $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$$= \pm 10.2 = \pm 20$$

উদাহরণ 15ঃ $x+y=18$ এবং $x-y=6$ হলে, x^2+y^2 এবং xy এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ আমরা জানি, $x^2+y^2=\frac{1}{2}\{(x+y)^2+(x-y)^2\}$

$$= \frac{1}{2}\{(18)^2+(6)^2\} \text{ [মান বসিয়ে]}$$
$$= \frac{1}{2}(324+36) = \frac{1}{2}\times 360 = 180$$

আবার জানি, $xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y^2}{2}\right)$

$$= \left(\frac{18}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2 \text{ [মান বসিয়ে]}$$
$$= (9)^2-(3)^2 = 81-9 = 72$$

উদাহরণ 16: $(x+7)(x+5)$ কে দুইটি বর্গের অন্তরফল রূপে প্রকাশ করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, $x+7=a$ এবং $x+5=b$

আমরা জানি, $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

a এর পরিবর্তে $x+7$ এবং b এর পরিবর্তে $x+5$ বসালে পাওয়া যায়,

$$(x+7)(x+5) = \left(\frac{x+7+x+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{x+7-x-5}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{2x+12}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2$$
$$= \left\{\frac{2(x+6)}{2}\right\}^2 - (1)^2 = (x+6)^2 - (1)^2$$

উদাহরণ 17: বর্গের সূত্র প্রয়োগ করে 995 এর বর্গ নির্ণয় করুন।

সমাধান: 995 এর বর্গ $= (995)^2 = (1000-5)^2$
$$= (1000)^2 - 2.1000.5 + (5)^2$$
$$= 1000000 - 10000 + 25$$
$$= 1000025 - 10000 = 990025$$

উদাহরণ 18: সরল করুন: $(3x+5y+4z)^2 + 2(3x+5y+4z)(5x-5y-4z) + (5x-5y-4z)^2$

সমাধান: মনে করুন, $3x+5y+4z = a$ এবং $5x-5y-4z = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= (3x+5y+4z)^2 + 2(3x+5y+4z)(5x-5y-4z) + (5x-5y-4z)^2$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$= (a+b)^2 = \{(3x+5y+4z) + (5x-5y-4z)\}^2$$
$$= (3x+5y+4z+5x-5y-4z)^2 = (8x)^2 = 64x^2$$

সারসংক্ষেপ

- প্রক্রিয়া চিহ্ন এবং সংখ্যা নির্দেশক অক্ষর প্রতীকের অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়।
- বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত সংখ্যাগুলি ধ্রুবক, এদের মান নির্দিষ্ট।
- বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষরগুলো চলক, এদের মান নির্দিষ্ট নয়।
- বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত যে কোন সাধারণ নিয়ম বা সিদ্ধান্তকে বীজগণিতিক সুত্র বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.১

1. সূত্রের সাহায্যে বর্গ নির্ণয় করুন:

   (i) $2x+3y$ (ii) $x+\frac{1}{x}$ (iii) $3x-4y$

   (iv) x^2-2y (v) $x+y+z$ (vi) $3x+2y+yz$

   (vii) 101 (viii) 998 (ix) 1007
2. $x-y=4$ এবং, $xy=60$ হলে, $x+y$ এর মান কত?
3. $x+y=7$ এবং, $xy=10$ হরে, $x-y$ এর মান কত?
4. $a+b=15$ এবং, $ab=40$ হলে, a^2+b^2 এর মান কত?

5. $x-y=p$ এবং $xy=q$ হলে, x^2+y^2 এর মান কত?
6. $x+\frac{1}{x}=6$ হলে, $x^2+\frac{1}{x^2}$ এর মান কত?
7. $x-\frac{1}{x}=4$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $x^4+\frac{1}{x^4}=322$
8. $x+\frac{1}{x}=2$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $x^2+\frac{1}{x^2}=x^4+\frac{1}{x^4}$
9. $x+y=\sqrt{7}$ এবং $x-y=\sqrt{5}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $8xy\left(x^2+y^2\right)=24$
10. $p=3+\frac{1}{p}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $p^4=119-\frac{1}{p^4}$
11. $x+\frac{1}{x}=5$ হলে, $\frac{x}{x^2+x+1}$ এর মান নির্ণয় করুন।
12. $x+y+z=15$ এবং $xy+yz+zx=71$ হলে $x^2+y^2+z^2$ এর মান নির্ণয় করুন।
13. $x+y+z=p$ এবং $xy+yz+zx=q$ হলে $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$ এর মান নির্ণয় করুন।
14. $x+y+z=6$ এবং $x^2+y^2+z^2=14$ হলে $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ এর মান নির্ণয় করুন।
15. $(x+7)(x-9)$ কে দুইটি বর্গের বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করুন।

পাঠ ২ ঘন সংবলিত সূত্রাবলী

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- ঘন নির্ণয়ের সূত্র বর্ণনা করতে পারবেন,
- বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক সমস্যা সমাধানে ঘন নির্ণয়ের সূত্র ব্যবহার করতে পারবেন।

মূলপাঠ

সূত্র ৫: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

প্রমাণ: $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2$

$$\begin{aligned}
&=(a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right)\\
&=a\left(a^2+2ab+b^2\right)+b\left(a^2+2ab+b^2\right)\\
&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\
&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\
&=a^3+b^3+3ab(a+b)
\end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত ৭: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

প্রমাণ: আমরা জানি, $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

বা, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ [পক্ষান্তর করে]

অনুসিদ্ধান্ত ৮: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

প্রমাণ: আমরা জানি, $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

বা, $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $a^3+b^3=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}$

$=(a+b)(a^2+2ab+b^2-3ab)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

সূত্র ৬: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

প্রমাণ: $(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2$

$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$=a^3-b^3-3ab(a-b)$

অনুসিদ্ধান্ত ৯: $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

প্রমাণ: আমরা জানি, $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

বা, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$ [রাশিগুলো পক্ষান্তর করে]

অনুসিদ্ধান্ত ১০: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

প্রমাণ: আমরা জানি, $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=(a-b)\{(a-b)^2+3ab\}$

$=(a-b)\{a^2-2ab+b^2+3ab\}$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

উদাহরণ 1: $3x+5y$ এর ঘন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $3x+5y$ এর ঘন $=(3x+5y)^3$

$=(3x)^3+3.(3x)^2.5y+3.3x.(5y)^2+(5y)^3$

$=27x^3+3.9x^2.5y+3.3x.25y^2+125y^3$

$=27x^3+135x^2y+225xy^2+125y^3$

উদাহরণ 2: $2x-3y$ ঘন নির্ণয় করুন।

সমাধান: $2x-3y$ এর ঘন $=(2x-3y)^3=(2x)^3-3.(2x)^2.3y+3.2x.(3y)^2-(3y)^3$

$=8x^3-3.4x^2.3y+3.2x.9y^2-27y^3$

$=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

উদাহরণ 3: $x+y=4$ এবং $xy=3$ হলে, x^3+y^3 এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$$= (4)^3 - 3.3.4 \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$
$$= 64 - 36 = 28$$

উদাহরণ 4: $x - y = 8$ এবং $xy = 6$ হলে $x^3 - y^3$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$
$$= (8)^3 + 3.6.8 \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$
$$= 512 + 144 = 656$$

উদাহরণ 5: $m + \frac{1}{m} = r$ হলে, $m^3 + \frac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $m^3 + \frac{1}{m^3} = \left(m + \frac{1}{m}\right)^3 - 3.m.\frac{1}{m}\left(m + \frac{1}{m}\right)$
$$= \left(m + \frac{1}{m}\right)^3 - 3.\left(m + \frac{1}{m}\right)$$
$$= (r)^3 - 3.r \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$
$$= r^3 - 3r$$

উদাহরণ 6: $x - y = 5$ এবং $xy = 4$ হলে, $(x^2 + y^2)(x^3 - y^3)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= (x^2 + y^2)(x^3 - y^3)$
$$= \{(x-y)^2 + 2xy\}\{(x-y)^3 + 3xy(x-y)\}$$
$$= \{(5)^2 + 2.4\}\{(5)^3 + 3.4.5\} \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$
$$= (25+8).(125+60) = 33 \times 185 = 6105$$

উদাহরণ 7: $x - y = 5$ এবং $xy = 3$ হলে $x^3 - y^3 + 8(x+y)^2$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $= x^3 - y^3 + 8(x+y)^2$
$$= \{(x-y)^3 + 3xy(x-y)\} + 8\{(x-y)^2 + 4xy\}$$
$$= \{(5)^3 + 3.3.5\} + 8\{(5)^2 + 4.3\} \quad \text{[মান বসিয়ে]}$$
$$= (125+45) + 8(25+12)$$
$$= 170 + 8 \times 37 = 170 + 296 = 466$$

উদাহরণ 8: $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$ হলে প্রমাণ করুন $x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0$

বা, $x^2 + 1 = \sqrt{3}x$

বা, $\frac{x^2+1}{x} = \sqrt{3}$

বা, $\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$$

প্রদত্ত রাশি $= x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ 9: যদি $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ হয়, তবে প্রমাণ করুন $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 18\sqrt{3}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2}$$

$$\therefore \frac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$

প্রদত্ত রাশি $= x^3 + \dfrac{1}{x^3}$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3.x.\frac{1}{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(2\sqrt{3}\right)^3 - 3.2\sqrt{3} = 2^3\left(\sqrt{3}\right)^3 - 6\sqrt{3}$$

$$= 8.3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \text{ (প্রমাণিত)}$$

উদাহরণ 10: সরল করুন: $(2x + y)^3 + 3(2x + y)^2(2x - y) + 3(2x + y)(2x - y)^2 + (2x - y)^3$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি = $(2x + y)^3 + 3(2x + y)^2(2x - y) + 3(2x + y)(2x - y)^2 + (2x - y)^3$

মনে করুন, $2x + y = a$ এবং $2x - y = b$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটি হবে, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= (a + b)^3$$

$$= (2x + y + 2x - y)^3 \text{ [মান বসিয়ে]}$$

$$= (4x)^3 = 64x^3$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.২

1. সূত্রের সাহায্যে ঘন নির্ণয় করুন:

   (i) $x+3y$ (ii) $3x^2+2y^2$ (iii) $x+2y+3z$

2. সরল করুন:

   (i) $(2x+y)^3+3(2x+y)^2(2x-y)+3(2x+y)(2x-y)^2+(2x-y)^3$

   (ii) $(7x+3y)^3-6x(7x+3y)(5x+3y)-(5x+3y)^3$

   (iii) $(x+y)^6-12xy(x^2-y^2)^2-(x-y)^6$

   (iv) $(x-15)^3+(16-x)^3+3(x-15)(16-x)$

3. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=3$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $x^3+\dfrac{1}{x^3}=0$

4. $x+\dfrac{1}{x}=3$ হলে, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

5. $a+b=m,\ a^2+b^2=n$ এবং $a^3+b^3=p^3$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $m^3+2p^3=3mn$

6. $m+\dfrac{1}{m}=a$ হলে, $m^3+\dfrac{1}{m^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

7. $x-\dfrac{1}{x}=1$ হলে, $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

8. $x+\dfrac{1}{x}=2$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)=4$

9. $x+y+z=0$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $x^3+y^3+z^3=3xyz$

10. $a=x+\dfrac{1}{x}$ এবং $b=x-\dfrac{1}{x}$ হলে, $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ এর মান নির্ণয় করুন।

11. $2x-\dfrac{2}{x}=3$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $8\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)=63$

12. $x=\sqrt{6}+\sqrt{5}$ হলে, $\dfrac{x^6-1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

13. $x^4-x^2+1=0$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $x^3+\dfrac{1}{x^3}=0$

14. $a+b+c=3s$ হলে, প্রমাণ করুন যে,
    $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$

15. $a+b+c=p,\ a^2+b^2+c^2=q^2$ এবং $abc=r^3$ হলে, $a^3+b^3+c^3$ এর মান p,q এবং r এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

পাঠ ৩ উৎপাদকে বিশ্লেষণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- দুইটি রাশির বর্গের অন্তরফল রূপের রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- $x^2 + px + q$ আকারে রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- $ax^2 + bx + c$ আকারের রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবেন।

মূলপাঠ

উৎপাদকে বিশ্লেষণ (Resolution into Factors)

কোন রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হলে, শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলা হয়। কোন বীজগাণিতিক রাশির সম্ভাব্য উৎপাদকগুলো নির্ণয় করার পর রাশিটিকে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফল রূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা বলা হয়। এই ইউনিটে বীজগণিতের বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে কিভাবে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হয়, সে সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

উৎপাদক নির্ণয়ের কতিপয় কৌশল

১। কোন বহুপদীর প্রত্যেক পদে সাধারণ উৎপাদক থাকলে তা প্রথমে বের করে নিতে হয়

উদাহরণ 1: $3x^2yz^3 + 9x^3y^2z + 12xy^3z^2 + 15x^2y^2z^2$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $3x^2yz^3 + 9x^3y^2z + 12xy^3z^2 + 15x^2y^2z^2$

$= 3xyz(xz^2 + 3x^2y + 4y^2z + 5xyz)$

উদাহরণ 2: $2ab(x-y) + bc(x-y) + 3ca(x-y)$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $2ab(x-y) + bc(x-y) + 3ca(x-y)$

$= (x-y)(2ab + bc + 3ca)$

উদাহরণ 3: $a^2bc(x-y) + b^2ca(x-y) + c^2ab(x-y)$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $a^2bc(x-y) + b^2ca(x-y) + c^2ab(x-y)$

$= abc(x-y)(a+b+c)$

২। একটি রাশিকে পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করে

কোন বহুপদীকে পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করে তারপর $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ সূত্রের মাধ্যমে রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হয়।

উদাহরণগুলো লক্ষ্য করলে আমরা স্পষ্ট ধারণা লাভ করতে পারি।

উদাহরণ 4: $9x^2 + 6x + 1$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2.3x.1 + (1)^2$

$= (3x+1)^2 = (3x+1)(3x+1)$

উদাহরণ 5: $4x^2 + 20xy + 25y^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $4x^2 + 20xy + 25y^2 = (2x)^2 + 2.2x.5y + (5y)^2$

$$= (2x+5y)^2 = (2x+5y)(2x+5y)$$

উদাহরণ 6: $16a^2 + 56ab + 49b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $16a^2 + 56ab + 49b^2 = (4a)^2 + 2.4a.7b + (7b)^2$

$$= (4a+7b)^2 = (4a+7b)(4a+7b)$$

৩। একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তর রূপে প্রকাশ করে

একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করে, তারপর $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ সূত্রটি প্রয়োগ করে রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। নিচের উদাহরণগুলো হতে আপনারা স্পষ্ট ধারণা পাবেন।

উদাহরণ 7: $a^2 - 16b^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $a^2 - 16b^2 = (a)^2 - (4b)^2$

$= (a+4b)(a-4b)$ [$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ সূত্র প্রয়োগ করে।]

উদাহরণ 8: $px^2 - 144py^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $px^2 - 144py^2 = p(x^2 - 144y^2)$

$$= p\{(x)^2 - (12y)^2\} = p(x+12y)(x-12y)$$

উদাহরণ 9: $(2x+y)^2 - 9(x+3y)^2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $(2x+y)^2 - 9(x+3y)^2 = (2x+y)^2 - \{3(x+3y)\}^2$

$$= \{(2x+y)+3(x+3y)\}\{(2x+y)-3(x+3y)\}$$
$$= (2x+y+3x+9y)(2x+y-3x-9y)$$
$$= (5x+10y)(-x-8y) = 5(x+2y)\{-(x+8y)\} = -5(x+2y)(x+8y)$$

উদাহরণ 10: $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + a - b - c$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + a - b - c$

অনেক সময় রাশিটি $a^2 - b^2$ আকারে থাকেনা সে ক্ষেত্রে পূর্বের বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে রাশিটি $a^2 - b^2$ রূপে প্রকাশ করা হয়।

লক্ষ্য করুন: $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc + a - b - c$

$$= a^2 - (b^2 + c^2 + 2bc) + a - b - c$$
$$= a^2 - (b+c)^2 + a - b - c$$
$$= \{a + (b+c)\}\{a - (b+c)\} + (a - b - c)$$
$$= (a+b+c)(a-b-c) + (a-b-c)$$
$$= (a-b-c)(a+b+c+1)$$

উদাহরণ 11: $x^4 + 64y^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^4 + 64y^4 = (x^2)^2 + (8y^2)^2$

$$= (x^2)^2 + (8y^2)^2 + 2.x^2.8y^2 - 2.x^2.8y^2$$
$$= (x^2)^2 + 2.x^2.8y^2 + (8y^2)^2 - 16x^2y^2$$
$$= (x^2 + 8y^2)^2 - (4xy)^2$$

$$= \{(x^2+8y^2)+4xy\}\{(x^2+8y^2)-4xy\}$$
$$= (x^2+4xy+8y^2)(x^2-4xy+8y^2)$$

উদাহরণ 12: $4x^4+8a^2x^2+9a^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $4x^4+8a^2x^2+9a^4$

$$= (2x^2)^2+2.2x^2.3a^2+(3a^2)^2-4a^2x^2$$
$$= (2x^2+3a^2)^2-(2ax)^2$$
$$= (2x^2+3a^2+2ax)(2x^2+3a^2-2ax)$$
$$= (2x^2+2ax+3a^2)(2x^2-2ax+3a^2)$$

উদাহরণ 13: $x^4+x^2y^2+y^4$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^4+x^2y^2+y^4$

$$= (x^2)^2+2.x^2.y^2+(y^2)^2-x^2y^2$$
$$= (x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$= (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$
$$= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$$

৪। $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ সূত্র ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

x^2+px+q আকারের বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা সম্ভব যদি দুইটি পুর্ণসংখ্যা a এবং b নির্ণয় করা যায়, যেন $a+b=p$ এর $ab=q$ হয়। q এর দুইটি স্বচিহ্ন উৎপাদক নিতে হয় যাদের বীজগাণিতিক সমষ্টি p হবে। যদি $q>0$ হয়, তবে a এবং b একই চিহ্নযুক্ত এবং $q<0$ হয়, তবে a এবং b বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

উদাহরণ 14: $x^2+7x+12$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^2+7x+12$

লক্ষ্য করুন, এখানে 12 এর দুইটি উৎপাদক 3 ও 4 এবং $3+4=7$। অতএব প্রদত্ত রাশি হতে পাওয়া যায়

$$x^2+7x+12=x^2+(3+4)x+3.4=(x+3)(x+4)$$

উদাহরণ 15: $x^2+10x+21$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^2+10x+21=x^2+(3+7)x+21=(x+3)(x+7)$

উদাহরণ 16: x^2+x-6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^2+x-6=x^2+(3-2)x+(+3)(-2)=(x+3)(x-2)$

উদাহরণ 17: $x^2-9x+20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^2-9x+20=x^2+(-5-4)x+(-5)(-4)=(x-5)(x-4)$

উদাহরণ 18: $x^2-5x-24$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^2-5x-24$

$$= x^2+(-8+3)x+(-8)(+3)=(x-8)(x+3)$$

উদাহরণ 19: $x^2-x-(a^2+5a+6)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^2-x-(a^2+5a+6)=x^2-x-(a^2+2a+3a+6)$

$$= x^2 - x - \{a(a+2) + 3(a+2)\} = x^2 - x - (a+2)(a+3)$$
$$= x^2 + \{-(a+3) + (a+2)\}x + \{-(a+3)\}\{(a+2)\}$$
$$= \{x - (a+3)\}\{x + (a+2)\}$$
$$= (x - a - 3)(x + a + 2)$$

উদাহরণ 20: $x^2 - \left(\frac{2}{a} - 3a\right)x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^2 - \left(\frac{2}{a} - 3a\right)x - 6 = x^2 - \frac{2x}{a} + 3ax - 6$

$$= x^2 + \left(3a - \frac{2}{a}\right)x + (3a)\left(-\frac{2}{a}\right) = (x + 3a)\left(x - \frac{2}{a}\right)$$

৫। $ax^2 + bx + c$ আকারের বহুপদীর মধ্যপদ বিভক্তিকরণ পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

মনে করুন, $ax^2 + bx + c$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে $(px + q)$ এবং $(rx + s)$ হবে। সুতরাং $(px + q)$ এবং $(rx + s)$ এর গুণফলই হবে $ax^2 + bx + c$

$\therefore ax^2 + bx + c = (px + q)(rx + s)$

বা $ax^2 + bx + c = prx^2 + (ps + qr)x + qs$

অনুরূপ রাশি সমীকৃত করে,

$a = pr, \quad b = ps + qr, \quad c = qs$

সুতরাং $a \times c = pr \times qs = ps \times qr$

অতএব $ax^2 + bx + c$ আকারের বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে x^2-এর সহগ এবং x বর্জিত পদের গুণফলকে এমন দুইটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হবে, যাদের বীজগণিতীয় যোগফল x-এর সহগের সমান হয়।

উদাহরণ 21: $12x^2 - 38x + 20$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি

$12x^2 - 38x + 20$

এখানে, $12 \times 20 = 240 = 30 \times 8$ এবং $38 = 30 + 8$

সুতরাং, $12x^2 - 38x + 20$

$$= 12x^2 - (30 + 8)x + 20$$
$$= 12x^2 - 30x - 8x + 20$$
$$= 6x(2x - 5) - 4(2x - 5)$$
$$= (2x - 5)(6x - 4)$$
$$= 2(2x - 5)(3x - 2)$$

বিকল্প পদ্ধতি

প্রদত্ত রাশি $= 12x^2 - 38x + 20$

$$= 2(6x^2 - 19x + 10)$$

এখানে, $6 \times 10 = 60 = 15 \times 4$ এবং $19 = 15 + 4$

সুতরাং, $2(6x^2 - 19x + 10)$

$$= 2\{6x^2 - (15 + 4)x + 10\}$$
$$= 2(6x^2 - 15x - 4x + 10)$$
$$= 2\{3x(2x - 5) - 2(2x - 5)\}$$
$$= 2(2x - 5)(3x - 2)$$

উদাহরণ 22: $12x^2 + 17x + 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $12x^2 + 17x + 6$

এখানে, $12 \times 6 = 72 = 9 \times 8$ এবং $17 = 9 + 8$

সুতরাং $12x^2 + 17x + 6 = 12x^2 + 9x + 8x + 6$

$$= 3x(4x + 3) + 2(4x + 3) = (4x + 3)(3x + 2)$$

উদাহরণ 23: $(a+b)x^2-2ax+a-b$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $(a+b)x^2-2ax+a-b$

$$=(a+b)x^2-\{(a+b)+(a-b)\}x+(a-b)$$
$$=(a+b)x^2-(a+b)x-(a-b)x+(a-b)$$
$$=(a+b)x(x-1)-(a-b)(x-1)$$
$$=(x-1)\{(a+b)x-(a-b)\}$$
$$=(x-1)(ax+bx-a+b)$$

উদাহরণ 24: $3(x^2+2x)^2-22(x^2+2x)+40$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $3(x^2+2x)^2-22(x^2+2x)+40$

মনে করুন, $x^2+2x=a$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি হবে, $3a^2-22a+40 \ =3a^2-12a-10a+40$

$$=3a(a-4)-10(a-4) \ =(a-4)(3a-10)$$
$$=(x^2+2x-4)\{3(x^2+2x)-10\},\ [a \text{ এর মান বসিয়ে}]$$
$$=(x^2+2x-4)(3x^2+6x-10)$$

৬। একটি রাশিকে পূর্ণ ঘন আকারে প্রকাশ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

ঘন আকারের রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণের জন্য $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$ এবং $(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)$ সূত্র ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ 25: $8x^3+36x^2+54x+27$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $8x^3+36x^2+54x+27 \ =(2x)^3+3.(2x)^2.3+3.(2x).(3)^2+(3)^3$

$$=(2x+3)^3=(2x+3)(2x+3)(2x+3)$$

উদাহরণ 26: $27x^3+108x^2y+144xy^2+64y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $27x^3+108x^2y+144xy^2+64y^3$

$$=(3x)^3+3.(3x)^2.(4y)+3.(3x).(4y)^2+(4y)^3$$
$$=(3x+4y)^3=(3x+4y)(3x+4y)(3x+4y)$$

উদাহরণ 27: $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

$$=(3x)^3-3.(3x)^2.(2y)+3.(3x).(2y)^2-(2y)^3$$
$$=(3x-2y)^3=(3x-2y)(3x-2y)(3x-2y)$$

উদাহরণ 28: $125-225y+135y^2-27y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত রাশি, $125-225y+135y^2-27y^3$

$$=(5)^3-3.(5)^2.(3y)+3.(5).(3y)^2-(3y)^3$$
$$=(5-3y)^3=(5-3y)(5-3y)(5-3y)$$

৭। $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ এবং $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ সূত্র ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

উদাহারণ 29: $27x^3+8y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $27x^3+8y^3 = (3x)^3+(2y)^3$

$$= (3x+2y)\{(3x)^2-(3x).(2y)+(2y)^2\}$$

$$= (3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$$

উদাহারণ 30: a^6-64 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $a^6-64 = (a^3)^2-(8)^2 = (a^3+8)(a^3-8)$

$$= \{(a)^3+(2)^3\}\{(a)^3-(2)^3\}$$

$$= [(a+2)\{(a)^2-a.2+(2)^2\}]\ [(a-2)\{(a)^2+a.2+(2)^2\}]$$

$$= (a+2)(a^2-2a+4)(a-2)(a^2+2a+4)$$

$$= (a+2)(a-2)(a^2-2a+4)(a^2+2a+4)$$

উদাহরণ 31: $24x^4-3x$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $24x^4-3x = 3x(8x^3-1) = 3x\{(2x)^3-(1)^3\}$

$$= 3x[(2x-1)\{(2x)^2+2x.1+(1)^2\}]$$

$$= 3x(2x-1)(4x^2+2x+1)$$

উদাহরণ 32: $(x^2+y^2)^3+8x^3y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $(x^2+y^2)^3+8x^3y^3 = (x^2+y^2)^3+(2xy)^3$

$$= \{(x^2+y^2)+2xy\}\{(x^2+y^2)^2-(x^2+y^2).2xy+(2xy)^2\}$$

$$= (x^2+2xy+y^2)\{(x^2+y^2)^2-2xy(x^2+y^2)+4x^2y^2\}$$

$$= (x+y)^2\{x^4+2x^2y^2+y^4-2x^3y-2xy^3+4x^2y^2\}$$

$$= (x+y)(x+y)(x^4+6x^2y^2+y^4-2x^3y-2xy^3)$$

৮। ভগ্নাংশ সহগ যুক্ত রাশির উৎপাদক

ভগ্নাংশযুক্ত রাশির উৎপাদক বিভিন্ন ভাবে প্রকাশ করা যায়। নিম্নে উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো হলো।

উদাহরণ 33: $a^3-\frac{1}{8}$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $a^3-\frac{1}{8} = (a)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(a-\frac{1}{2}\right)\left\{a^2+a.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$

$$= \left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

অন্যভাবে, $a^3-\frac{1}{8} = \frac{8a^3-1}{8} = \frac{1}{8}\{(2a)^3-(1)^3\}$

$$= \frac{1}{8}[(2a-1)\{(2a)^2+2a.1+(1)^2\}]$$

$$=\frac{1}{8}(2a-1)(4a^2+2a+1)$$

উদাহরণ 34: $x^3+\frac{1}{27}$ রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $x^3+\frac{1}{27}=(x)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$$=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left\{(x)^2-x.\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}$$

$$=\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{9}\right)$$

উদাহরণ 35: $8x^3+\frac{y^3}{27}$ রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $8x^3+\frac{y^3}{27}=(2x)^3+\left(\frac{y}{3}\right)^3$

$$=\left(2x+\frac{y}{3}\right)\left\{(2x)^2-(2x)\left(\frac{y}{3}\right)+\left(\frac{y}{3}\right)^2\right\}$$

$$=\left(2x+\frac{y}{3}\right)\left(4x^2-\frac{2xy}{3}+\frac{y^2}{9}\right)$$

উদাহরণ 36: $27m^3+\frac{125}{n^3}$ রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত রাশি, $27m^3+\frac{125}{n^3}=(3m)^3+\left(\frac{5}{n}\right)^3$

$$=\left(3m+\frac{5}{n}\right)\left\{(3m)^2-(3m).\left(\frac{5}{n}\right)+\left(\frac{5}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\left(3m+\frac{5}{n}\right)\left(9m^2-\frac{15m}{n}+\frac{25}{n^2}\right)$$

সারসংক্ষেপ

- কোন রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফলের সমান হলে, শেষোক্ত রাশিগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত রাশির উৎপাদক বা গুণনীয়ক বলা হয়।
- কোন বীজগাণিতিক রাশির সম্ভাব্য উৎপাদকগুলো নির্ণয় করার পর রাশিটিকে লব্ধ উৎপাদকগুলোর গুণফল রূপে প্রকাশ করাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা বলা হয়।
- উৎপাদক নির্ণয়ের কতিপয় কৌশল

  ১। কোন বহুপদীর প্রত্যেক পদে সাধারণ উৎপাদক থাকলে তা প্রথমে বের করে নিতে হয়।

  ২। একটি রাশিকে পূর্ণবর্গ আকারে প্রকাশ করে।

  ৩। একটি রাশিকে দুইটি বর্গের অন্তর রূপে প্রকাশ করে।

৪। $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ সূত্র ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ।
৫। ax^2+bx+c আকারের বহুপদীর মধ্যপদ বিভক্তিকরণ পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ।
৬। একটি রাশিকে পূর্ণ ঘন আকারে প্রকাশ করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ।
৭। $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ এবং $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ সূত্র ব্যবহার করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ।
৮। ভগ্নাংশ সহগ যুক্ত রাশির উৎপাদক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন:

1. $a^2-ab-ac+bc$
2. $a^2+ab+ac+bc$
3. $9x^2+24x+16$
4. $a^2-b^2+4bc-4c^2$
5. a^4-27a^2+1
6. xa^8-x^9
7. a^4+a^2+1
8. $a^2-30a+216$
9. $a^6b^6-a^3b^3-6$
10. a^4+a^2-20
11. a^8-a^4-2
12. ax^4+4a^5
13. $9a^4-34a^2x^2+25x^4$
14. $12x^2-38x+20$
15. $a^2-51a+650$
16. $5-4x-x^2$
17. $x^2-x-(a+1)(a+2)$
18. $x^2+ax-(3a-2)(4a-2)$
19. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$
20. $8x^6-17x^3+27$
21. $a^3-\frac{1}{a^3}+36$
22. $a^3-\frac{1}{a^3}+4$
23. $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$
24. $x^3-6x^2+12x-9$
25. $4x^2+\frac{1}{4x^2}-2+4a-\frac{1}{a}$
26. $x^3+9x^2+26x+24$

পাঠ ৪ ভাগশেষ উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- ভাগশেষ উপপাদ্য বর্ণনা করতে পারবেন
- ভাগশেষ উপপাদ্য ব্যবহার করে বিভিন্ন রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে পারবেন,
- ভাগশেষ উপাপাদ্য ব্যবহারের দক্ষতা অর্জন করবেন।

মূলপাঠ

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

আপনারা নিচের উদাহরণটি লক্ষ করুন:

$6x^2-8x+5$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ও ভাগশেষ কত?

$6x^2-8x+5$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে পাওয়া যায়

$$
\begin{array}{l}
x-2)\,6x^2-8x\;\;+5\,(6x+4 \\
\quad\;\; 6x^2-12x \\
\quad\;\; - \quad\;\; + \\
\hline
\qquad\qquad 4x+5 \\
\qquad\qquad 4x-8 \\
\qquad\qquad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\quad 13
\end{array}
$$

এখানে, $x-2$ ভাজক, $6x^2-8x+5$ ভাজ্য, $6x+4$ ভাগফল এবং 13 ভাগশেষ।

আমরা জানি, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

যদি ভাজককে $(x-a)$, ভাজ্যকে $f(x)$, ভাগফলকে $g(x)$ এবং ভাগশেষকে r দ্বারা সূচিত করা হয় তাহলে উপরের সূত্রটি নিম্নরূপ হবে-

$f(x)=(x-a).g(x)+r$ এবং ইহা a এর সকল মানের জন্য সত্য।

উভয় পক্ষে $x=a$ বসিয়ে পাওয়া যায়

$f(a)=(a-a).g(a)+r$

বা $f(a)=0.g(a)+r$

$\therefore f(a)=r$

সুতরাং ভাগশেষ $r=f(a)$

উপরের আলোচনা হতে প্রমাণিত হলো $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$। এই সূত্র ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) নামে পরিচিতি। ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $x-a$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হলো ভাগশেষ উপপাদ্য। ভাজক $(x-a)$ এর মাত্রা 1, ভাজক যদি ভাজ্যের উৎপাদক হয়, তাহলে ভাগশেষ শূন্য হবে। আর যদি ভাজক ভাজ্যের উৎপাদক না হয় তবে ভাগশেষ থাকবে এবং তা হবে কোন অশূন্য সংখ্যা।

উপপাদ্য ১: যদি বহুপদী $f(x)$ এর মাত্রা যোগবোধক এবং $a\neq 0$ হয়, তবে $f(x)$ কে বহুপদী $(ax+b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ হয়।

প্রমাণঃ এখানে ভাজক $(ax+b)$, $a \neq 0$ এর মাত্রা 1। ভাগফল $g(x)$ এবং ভাগশেষ r হলে আমরা লিখতে পারি,

$$f(x)=(ax+b).g(x)+r$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right).a.g(x)+r$$

উপরের সমীকরণ হতে দেখা যায় যে, $f(x)$ কে $\left(x+\frac{b}{a}\right)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $a.g(x)$ এবং ভাগশেষ r হয়।

এখানে ভাজক $=\left\{x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}$

সুতরাং ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, ভাগশেষ $r=f\left(-\frac{b}{a}\right)$

সুতরাং $f(x)$ কে $(ax+b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f\left(-\frac{b}{a}\right)$।

উপপাদ্য ২ঃ $x-a$ বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $f(a)=0$ হয়।
প্রমাণঃ মনে করুন, $f(a)=0$।
সুতরাং ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী, বহুপদী $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য হবে। অর্থাৎ, $(x-a)$ বহুপদী $f(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।
বিপরীতক্রমে, মনে করুন, $(x-a)$ বহুপদী $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
অতএব, $f(x)=(x-a).g(x)$, যেখানে $g(x)$ বহুপদী।
উভয় পক্ষে $x=a$ বসিয়ে পাওয়া যায়,

$$\therefore f(a)=(a-a).g(a)=0.g(x)$$

$$\therefore f(a)=0$$

সুতরাং, কোন বহুপদী $f(x),(x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $f(a)=0$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) নামে পরিচিত।

উদাহরণ 1ঃ x^2-5x-6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।
সমাধানঃ মনে করুন, প্রদত্ত বহুপদীটি $f(x)$

$$\therefore f(x)=x^2-5x-6$$

বহুপদীর ধ্রুবকপদ -6 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm1, \pm2, \pm3$ এবং ±6
বহুপদীটিতে, $x=1$ বসালে $f(x)$ এর মান শূন্য হয় না। $[f(1)=1-5.1-6=-10\neq 0]$ কিন্তু $x=-1$ বসালে, $f(x)$ এর মান শূন্য হয়।
অর্থাৎ, $f(-1)=(-1)^2-5\times(-1)-6 \ =1+5-6=0$
সুতরাং $(x+1)$, $f(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক

$$\therefore f(x)=x^2-5x-6 \ = x^2+x-6x-6$$

$$=x(x+1)-6(x+1)=(x+1)(x-6)$$

উদাহরণ 2ঃ x^3+2x^2-5x-6 কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।
সমাধানঃ মনে করুন, প্রদত্ত বহুপদীটি $f(x)$

$$\therefore f(x)=x^3+2x^2-5x-6$$

বহুপদীর ধ্রুবকপদ -6 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ এবং ± 6 ।
বহুপদীটিতে $x=1$ বসালে $f(x)$ এর মান শূন্য হয় না।

$$\left[f(1)=1^3+2.1^2-5.1-6=-8\neq 0\right]$$

কিন্তু $x=-1$ বসালে, $f(x)$ এর মান শূন্য হয়।

অর্থাৎ, $f(-1)=(-1)^3+2.(-1)^2-5.(-1)-6$

$$=-1+2+5-6=-7+7=0$$

সুতরাং $(x+1)$ বহুপদী $f(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক

$$\therefore f(x)=x^3+2x^2-5x-6$$
$$=x^3+x^2+x^2+x-6x-6$$
$$=x^2(x+1)+x(x+1)-6(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2+x-6)$$
$$=(x+1)g(x)$$

এখন, $g(x)=x^2+x-6$

$g(x)$ বহুপদীর ধ্রুবকপদ -6 এর উৎপাদকগুলো হচ্ছে $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

বহুপদীটিতে $x=1,-1$ বসালে $g(x)$ এর মান শূন্য হয় না।

কিন্তু $x=2$ বসালে, $g(x)$ এর মান শূন্য হয়।

অর্থাৎ $g(2)=2^2+2-6=4+2-6=0$

সুতরাং $x-2$, বহুপদী $g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$$\therefore g(x)=x^2+x-6$$
$$=x^2-2x+3x-6$$
$$=x(x-2)+3(x-2)$$
$$=(x-2)(x+3)$$

সুতরাং, $f(x)=(x+1)g(x)$

বা, $f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$ [$g(x)$ এর মান বসিয়ে]

উদাহরণ 3: $x^3-7xy^2-6y^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বহুপদী $x^3-7xy^2-6y^3$

মনে করুন, বহুপদীটির চলক x এবং y ধ্রুবক। অতএব, প্রদত্ত বহুপদীটি x এর বহুপদী।

মনে করুন, $f(x)=x^3-7xy^2-6y^3$

$$\therefore f(y)=y^3-7y.y^2-6y^3\neq 0$$

সুতরাং $(x-y)$ বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক নয়।

আবার, $f(-y)=(-y)^3-7(-y)y^2-6y^3$

$$=-y^3+7y^3-6y^3=0$$

$\therefore (x+y)$ বহুপদী $f(x)$ এর একটি উৎপাদক

এখন $x^3-7xy^2-6y^3$

$$=x^3+x^2y-x^2y-xy^2-6xy^2-6y^3$$
$$=x^2(x+y)-xy(x+y)-6y^2(x+y)$$

$= (x+y)(x^2 - xy - 6y^2)$
$= (x+y).g(x)$

এখানে বহুপদী $g(x) = x^2 - xy - 6y^2$

$g(y) = y^2 - y.y - 6y^2 = y^2 - y^2 - 6y^2 = -6y^2 \neq 0$

$g(2y) = (2y)^2 - (2y)y - 6y^2 = 4y^2 - 2y^2 - 6y^2 = -4y^2 \neq 0$

$g(-2y) = (-2y)^2 - (-2y).y - 6y^2$
$= 4y^2 + 2y^2 - 6y^2 = 0$

সুতরাং $(x+2y)$ বহুপদী $g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore g(x) = x^2 - xy - 6y^2$
$= x^2 + 2xy - 3xy - 6y^2$
$= x(x+2y) - 3y(x+2y)$
$= (x+2y)(x-3y)$

সুতরাং, $f(x) = (x+y).g(x)$

বা, $f(x) = (x+y)(x+2y)(x-3y)$ [g(x) এর মান বসিয়ে]

সারসংক্ষেপ

- ধনাত্মক মাত্রার কোনো বহুপদী $f(x)$ কে $x-a$ আকারের বহুপদী দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা ভাগ না করে বের করার সূত্রই হলো ভাগশেষ উপপাদ্য।
- যদি বহুপদী $f(x)$ এর মাত্রা যোগবোধক এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $f(x)$ কে বহুপদী $(ax+b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ হয়।
- $x-a$ বহুপদী $f(x)$ এর উৎপাদক হবে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $f(a) = 0$ হয়।
- কোন বহুপদী $f(x), (x-a)$ দ্বারা বিভাজ্য হবে যদি এবং কেবল মাত্র যদি $f(a) = 0$ হয়। এই সূত্র উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) নামে পরিচিত।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৪

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করুন:

1. $x^3 - 21x - 20$
2. $6x^2 - 7x + 1$
3. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
4. $3x^2 + 2x + 5$
5. $x^3 + 4x^2 + x - 6$
6. $x^3 + 3x + 36$
7. $x^3 - x^2 - 10x - 8$
8. $x^4 - 4x + 3$
9. $x^3 - 7x^2y + 7xy^2 - y^3$
10. $2x^4 - 3x^3 - 3x - 2$
11. $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$
12. $18x^3 + 15x^2 - x - 2$

পাঠ ৫ বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন ও প্রয়োগ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বাস্তব সমস্যা সমাধানে বীজগাণিতিক সূত্র গঠন করতে ও সূত্র প্রয়োগ করে সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মূলপাঠ

পূর্ববর্তী ইউনিট সমূহে আপনারা সংখ্যা, বীজগণিতের সূত্রাবলী, উৎপাদক ইত্যাদি সম্পর্কে ধারণা লাভ করেছেন। বাস্তব ক্ষেত্রে বীজগণিতের সূত্রগুলি বিভিন্নভাবে প্রয়োগ করা যায়। এই অধ্যায়ে আমরা বাস্তব সমস্যা সমাধান কল্পে বীজগাণিতিক সূত্রগুলি প্রয়োগ করার পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করব। এই আলোচনার ফলে আপনারা একদিকে যেমন বাস্তব জগতে গণিতের প্রয়োগ সম্পর্কে ধারণা লাভ করবেন, অন্যদিকে নিজেদের প্রত্যক্ষ জীবনে গণিতের সম্পৃক্ততা অনুধাবন করে গণিত শিক্ষার প্রতি আগ্রহী হবেন।

১। দেয় বা প্রাপ্য বিষয়ক সমস্যার সমাধান

দেয় বা প্রাপ্য, $A = qn$

যেখানে, $q =$ জন প্রতি দেয় বা প্রাপ্য টাকার পরিমাণ

$n =$ লোকের সংখ্যা

উদাহরণ 1: কোন স্কুলে S.S.C পরীক্ষার্থীদের বিদায় অনুষ্ঠান করার জন্য নবম শ্রেণীর শিক্ষার্থীরা 45,000 টাকার একটি বাজেট করলেন এবং সিদ্ধান্ত নিলেন যে, ঐ শ্রেণীর শিক্ষার্থীরাই শুধু চাঁদা দিবেন এবং প্রত্যেকে সমান চাঁদা দিবেন। কিন্তু 5 জন শিক্ষার্থী চাঁদা প্রদানে অপারগতা প্রকাশ করলেন। ফলে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর চাঁদা 15 টাকা বেড়ে গেল। ঐ শ্রেণীতে কতজন শিক্ষার্থী ছিল, নির্ণয় করুন।

সমাধান : মনে করুন, নবম শ্রেণীতে শিক্ষার্থীর সংখ্যা x জন এবং জন প্রতি দেয় চাঁদার পরিমান q টাকা।

$\therefore$ মোট চাঁদা $A = qx$ টাকা

কিন্তু শর্তমতে, চাঁদা প্রদানকারী শিক্ষার্থীর সংখ্যা হল $(x-5)$ জন এবং তাদের চাঁদার পরিমাণ $q+15$ টাকা।

এমতাবস্থায় মোট চাঁদার পরিমাণ হবে $(x-5)(q+15)$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $qx = 45000$ ....(1)

আবার, $qx = (x-5)(q+15)$ ....(2)

(2) নং সমীকরণ হতে পাওয়া যায়,

$qx = qx + 15x - 5q - 75$

বা $5q = 15x - 75$

বা $q = 3x - 15$

q এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়

$qx = 45000$

বা $(3x-15)x = 45000$

বা, $3x^2 - 15x = 45000$

বা, $x^2 - 5x = 15000$

বা, $x^2 - 125x + 120x - 15000 = 0$

বা, $x(x-125)+120(x-125)=0$
বা, $(x-125)(x+120)=0$
$\therefore x=125$ বা, $x=-120$
শিক্ষার্থীর সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।
সুতরাং $x=125$
$\therefore$ নবম শ্রেণীতে শিক্ষার্থীর সংখ্যা 125।

২। সময় ও কাজ বিষয়ক সমস্যার সমাধান

কাজের পরিমাণ, $w=qnx$

যেখানে, $q=$ একক সময়ে 1 জনের সম্পন্নকৃত কাজের অংশ
$n=$ কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা
$x=$ মোট সময়

উদাহরণ 2: ক একটি কাজ 20 দিনে, খ উহা 15 দিনে এবং গ উহা 12 দিনে করতে পারে। ক, খ এবং গ একত্রে কতদিনে কাজটি করতে পারবে?

সমাধান: মনে করুন, ক, খ এবং গ একত্রে কাজটি d দিনে সম্পন্ন করতে পারবে।
ক একটি কাজ 20 দিনে করতে পারে

$\therefore$ ক, d দিনে করতে পারবে $\frac{d}{20}$ অংশ

অনুরূপভাবে, খ, d দিনে করতে পারে $\frac{d}{15}$ অংশ

এবং গ, d দিনে করতে পারে $\frac{d}{12}$ অংশ

ক, খ এবং গ একত্রে d দিনে করতে পারে একটি কাজ

$$\therefore \frac{d}{20}+\frac{d}{15}+\frac{d}{12}=1$$
$$\Rightarrow d\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}\right)=1$$
$$\Rightarrow d.\left(\frac{3+4+5}{60}\right)=1$$
$$\Rightarrow d.\frac{12}{60}=1$$
$$\therefore d=\frac{60}{12}=5 \text{ দিন}$$

অতএব নির্ণেয় সময় = 5 দিন।

[বি.দ্র: $T=\frac{xyz}{xy+yz+zx}\times$ উল্লেখিত অংশ এর মাধ্যমে সমস্যাটি সমাধান করা যায়]

উদাহরণ 3: রহিম, করিম ও ছগীর একটি কাজ যথাক্রমে 15, 6 এবং 10 দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কত দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে?

সমাধান: মনে করুন, T দিনে কাজটি সম্পন্ন করতে পারবে।

$$\therefore T=\frac{xyz}{xy+yz+zx}\times \text{ উল্লেখিত অংশ}$$

এখানে, $x=15$, $y=6$, $z=10$

উল্লেখিত অংশ = 1

$\therefore$ সময় $T=\dfrac{15\times6\times10}{15\times6+6\times10+10\times15}\times1$ দিন

$=\dfrac{900}{90+60+150}$ দিন $=\dfrac{900}{300}$ দিন $=3$ দিন

অতএব নির্ণেয় সময় = 3 দিন।

৩। সময় ও দূরত্ব বিষয়ক সমস্যার সমাধান

সময় ও দূরত্ব বিষয়ক সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত বিষয়গুলো জানতে হবে:

- ❖ গতিবেগ = $\dfrac{\text{অতিক্রান্ত দূরত্ব}}{\text{সময়}}$ কি.মি./ঘন্টা
- ❖ অতিক্রান্ত দূরত্ব = বেগ$\times$সময়

উদাহরণ 4: 125 মিটার দীর্ঘ একটি প্লাটফরমকে 75 মিটার লম্বা একটি ট্রেন 36 সেকেন্ডে অতিক্রম করে। ট্রেনের গতিবেগ ঘন্টায় কত কিলোমিটার।

সমাধান: ট্রেনটি প্লাটফরম অতিক্রম করার দূরত্ব = (125+75) মিটার $=200$ মিটার $=\dfrac{200}{1000}$ কি.মি.

ট্রেনটি প্লাটফরম অতিক্রম করার সময় = 36 সেকেন্ড $=\dfrac{36}{60\times60}$ ঘন্টা

$\therefore$ গতিবেগ $=\dfrac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}}$ কি.মি./ঘন্টা $=\dfrac{\frac{200}{1000}}{\frac{36}{60\times60}}$ কি.মি./ঘন্টা $=\dfrac{200\times60\times60}{1000\times36}$ কি.মি./ঘন্টা $=20$ কি. মি./ঘন্টা

উদাহরণ 5: একজন মাঝি স্রোতের অনুকূলে x ঘন্টায় d দূরত্ব যেতে পারে। স্রোতের প্রতিকূলে ঐ দূরত্ব যেতে মাঝির y ঘন্টা সময় লাগে। স্রোতের বেগ এবং নৌকার বেগ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, নৌকার বেগ ঘন্টায় u কি.মি. এবং স্রোতের বেগ ঘন্টায় v কি.মি.

$\therefore$ স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ = $(u+v)$ কি.মি./ঘন্টা

এবং স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ = $(u-v)$ কি.মি./ঘন্টা

আমরা জানি, অতিক্রান্ত দূরত্ব = বেগ $\times$ সময়

$\therefore d=(u+v)x \qquad \Rightarrow u+v=\dfrac{d}{x}$..........(1)

এবং $d=(u-v)y \qquad \Rightarrow u-v=\dfrac{d}{y}$..........(2)

সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাওয়া যায়; $2u=\dfrac{d}{x}+\dfrac{d}{y}$

বা, $2u=d\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

$\therefore u=\dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

আবার সমীকরণ (1) নং হতে (2) নং বিয়োগ করে পাওয়া যায়

$$2v = \frac{d}{x} - \frac{d}{y}$$

বা, $2v = d\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$

$$\therefore v = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

$\therefore$ নৌকার বেগ ঘন্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ কি.মি. এবং স্রোতের বেগ ঘন্টায় $\frac{d}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ কি.মি.

৪। নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক সমস্যার সমাধান

নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক সমস্যা সমাধানের জন্য নিচের সূত্র জানা দরকার:

নির্দিষ্ট সময়ে চৌবাচ্চার পানির পরিমাণ, $Q(t) = Q_0 \pm qt$

যেখানে, $Q(t) = t$ সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ।

$Q_0 =$ নলের মুখ খুলে দেওয়ার সময় চৌবাচ্চায় জমা পানির পরিমাণ।

$q =$ প্রতি একক সময়ে নল দিয়ে যে পানি প্রবেশ করে অথবা বের হয়।

$t =$ অতিক্রান্ত সময়

পানি প্রবেশ হওয়ার শর্তে '+' চিহ্ন এবং পানি বের হওয়ার শর্তে '–' চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে।

উদাহরণ 6: একটি চৌবাচ্চার দুইটি নল দ্বারা যথাক্রমে 20 মিনিটে ও 30 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। নল দুইটি এক সংগে খুলে দিলে চৌবাচ্চাটি কত সময়ে পূর্ণ হবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, চৌবাচ্চাটি v লিটার পানি ধরে।

১ম নল দ্বারা 20 মিনিটে পূর্ণ হয় চৌবাচ্চাটি

$\therefore$ ১ম নল দ্বারা 1 মিনিটে পূর্ণ হয় $= \frac{v}{20}$ লিটার

অনুরূপভাবে, ২য় নল দ্বারা 1 মিনিটে পূর্ণ হয় $= \frac{v}{30}$ লিটার

অতএব ১ম ও ২য় নল একত্রে খোলা রাখলে 1 মিনিটে পূর্ণ হবে $\left(\frac{v}{20} + \frac{v}{30}\right)$ লিটার

$= \frac{(3+2)v}{60}$ লিটার $= \frac{5v}{60}$ লিটার $= \frac{v}{12}$ লিটার

আবার, মনে করুন, নলদ্বয় একত্রে খোলা রাখলে t সময়ে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়।

$\therefore$ নলদ্বয় একত্রে খোলা রাখলে 1 মিনিটে পূর্ণ হয় $\frac{v}{t}$ লিটার

অতএব, $\frac{v}{t} = \frac{v}{12}$ $\quad \therefore t = 12$ মিনিট

অতএব নির্ণেয় সময় $= 12$ মিনিট।

উদাহরণ 7: একটি নল দ্বারা 12 মিনিটে একটি চৌবাচ্চা পূর্ণ হয়। অপর নল দ্বারা 1 মিনিটে চৌবাচ্চা থেকে 15 লিটার পানি বের হয়ে যায়। চৌবাচ্চাটি খালি অবস্থায় নল দুইটি একত্রে খুলে দিলে তা 48 মিনিটে পূর্ণ হয়। চৌবাচ্চাটিতে কত লিটার পানি ধরে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, চৌবাচ্চাটিতে পানি ধরে p লিটার।

এবং ১ম নল দ্বারা প্রতি মিনিটে q লিটার পানি প্রবেশ করে।

শর্তমতে, ১ম নল দ্বারা 12 মিনিটে পূর্ণ হয় খালি চৌবাচ্চাটি।

$\therefore p = 12q$ ....(1)

আবার, দুইটি নল একত্রে খুলে দিলে চৌবাচ্চাটি 48 মিটিটে পূর্ণ হয়।

$\therefore p = 48q - 48 \times 15$ ....(2)

সমীকরণ (1) নং হতে p এর মান (2) নং এ বসিয়ে পাওয়া যায়

$\therefore 12q = 48q - 720$

বা, $36q = 720$

$\therefore q = \frac{720}{36} = 20$

q এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাওয়া যায়-

$p = 12q = 12 \times 20 = 240$

অতএব চৌবাচ্চাটিতে 240 লিটার পানি ধরে।

৫। শতকরা অংশ বিষয়ক সমস্যার সমাধান

উদাহরণ 8: এক হালি মুরগী $x\%$ ক্ষতিতে বিক্রয় করলে যে মূল্য পাওয়া যায় $2x\%$ লাভে বিক্রয় করলে তার থেকে $48x$ টাকা বেশী পাওয়া যায়। মুরগীগুলোর ক্রয়মূল্য নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, ক্রয়মূল্য $= t$ টাকা

$x\%$ ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য $= t\left(1 - \frac{x}{100}\right)$

$2x\%$ লাভে বিক্রয়মূল্য $= t\left(1 + \frac{2x}{100}\right)$

শতানুসারে, $t\left(1 + \frac{2x}{100}\right) - t\left(1 - \frac{x}{100}\right) = 48x$

বা, $t\left(1 + \frac{x}{50} - 1 + \frac{x}{100}\right) = 48x$

বা, $t\left(\frac{x}{50} + \frac{x}{100}\right) = 48x$

বা, $tx\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{100}\right) = 48x$

বা, $t\left(\frac{2+1}{100}\right) = 48$

বা, $t = \frac{48 \times 100}{3} = 1600$

$\therefore$ মুরগীগুলোর ক্রয়মূল্য $= 1600$ টাকা

উদাহরণ 9: ক্রয়মূল্য শতকরা কত হারে বাড়িয়ে লিখলে ক্রেতাকে $p\%$ কমিশন দিয়েও $q\%$ লাভ থাকবে। p=20 এবং q=10 হলে ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা কত হারে বাড়িয়ে মূল্য ধার্য্য করতে হবে, তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, ক্রয়মূল্য $= x$ টাকা

$\therefore q\%$ লাভে বিক্রয় মূল্য $= x\left(1 + \frac{q}{100}\right)$ টাকা

আবার, মনে করুন ধার্য মূল্য $= y$ টাকা

$\therefore p\%$ কমিয়ে বিক্রয় মূল্য $= y\left(1-\frac{p}{100}\right)$ টাকা

প্রশ্নানুসারে, $x\left(1+\frac{q}{100}\right)=y\left(1-\frac{p}{100}\right)$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{1+\frac{q}{100}}{1-\frac{p}{100}}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{100+q}{100-p}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{100-p+q+p}{100-p}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x}=1+\frac{p+q}{100-p}$$

$\therefore \frac{(p+q)100}{100-p}\%$ বাড়িয়ে লিখিত মূল্য ধার্য করতে হবে।

এখন p=20 এবং q=10 বসিয়ে পাওয়া যায়,

ক্রয়মূল্যের উপর ধার্য মূল্যের বৃদ্ধি $=\frac{(20+10)100}{100-20}\% =\frac{30\times 100}{80}\% =\frac{3\times 100}{8}\% =\frac{75}{2}\% =37\frac{1}{2}\%$

৬। লাভ ও ক্ষতি বিষয়ক সমস্যার সমাধান

লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য

ক্ষতি = ক্রয়মূল্য – বিক্রয়মূল্য

যদি ক্রয়মূল্য p এবং বিক্রয়মূল্য q হয় তবে

শতকরা লাভ $=\frac{q-p}{p}\times 100$

$\therefore$ লাভ $=\frac{q-p}{p}100\%$

শতকরা ক্ষতি $=\frac{p-q}{p}\times 100$

$\therefore$ ক্ষতি $=\frac{p-q}{p}\times 100\%$

উদাহরণ 10: এক ডজন কমলা 220 টাকায় ক্রয় করে 242 টাকায় বিক্রয় করলে শতকরা কত লাভ হবে, নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, লাভ $x=\frac{q-p}{p}\times 100\%$

এখানে p = ক্রয়মূল্য = 220 টাকা এবং q = বিক্রয়মূল্য = 242 টাকা

$$\therefore x=\frac{242-220}{220}\times 100\% =\frac{22\times 100}{220}\% =10\%$$

উদাহরণ 11: এক কাদি কলা 450 টাকায় ক্রয় করে 405 টাকায় বিক্রয় করলে শতকরা কত টাকা ক্ষতি হবে নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, ক্ষতি $y = \frac{p-q}{p} \times 100\%$

এখানে $p = 450$ টাকা এবং $q = 405$ টাকা

$$\therefore y = \frac{450-405}{450} \times 100\% = \frac{45}{450} \times 100\% = 10\%$$

৭। বিনিয়োগ ও মুনাফা বিষয়ক সমস্যার সমাধান

সরল মুনাফা নির্ণয়ের জন্য সূত্র হলো $I = Pnr$

যেখানে, $P =$ মূলধন

$n =$ সময় (বছরে)

$r =$ শতকরা হার

$I =$ মুনাফা

উদাহরণ 12: শতকরা বার্ষিক 7 টাকা মুনাফায় 750 টাকার 6 বছরের মুনাফা কত নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, মুনাফা $I = Pnr$

এখানে, $P = 750$ টাকা, $n = 6$ বছর এবং $r = 7\% = \frac{7}{100}$

$$\therefore I = 750 \times 6 \times \frac{7}{100} = \frac{75 \times 6 \times 7}{10} = \frac{3150}{10} = 315$$

সুতরাং মুনাফা 315 টাকা

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা

চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয়ের সূত্র হলো $C = P(1+r)^n$

যেখানে, $C =$ চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধি মূল

$P =$ আসল বা মূল

$r =$ একক সময়ে একক আসলের উপর মুনাফা

$n =$ সময় (বছরে)

উদাহরণ 13: শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 12000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল এবং চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, চক্রবৃদ্ধি মুনাফার ক্ষেত্রে $C = P(1+r)^n$

এখানে, $P = 12000$ টাকা, $r = 4\% = \frac{4}{100}$ এবং $n = 3$ বছর

$$\therefore C = P(1+r)^n = 12000\left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 = 12000\left(\frac{104}{100}\right)^3$$

$$= 12000\left(\frac{52}{50}\right)^3 = 12000 \times \frac{52}{50} \times \frac{52}{50} \times \frac{52}{50}$$

$$= \frac{12 \times 52 \times 52 \times 52}{5 \times 5 \times 5} = \frac{1687296}{125} = 13498.37$$

$\therefore$ সবৃদ্ধি মূল = 13498.37 টাকা

$\therefore$ চক্রবৃদ্ধি মুনাফা = (13498.37-12000) টাকা = 1498.37 টাকা

সারসংক্ষেপ

- দেয় বা প্রাপ্য বিষয়ক সমস্যার সমাধানঃ দেয় বা প্রাপ্য, $A = qn$

  যেখানে, $q =$ জন প্রতি দেয় বা প্রাপ্য টাকার পরিমাণ, $n =$ লোকের সংখ্যা
- সময় ও কাজ বিষয়ক সমস্যার সমাধানঃ কাজের পরিমাণ, $w = qnx$

  যেখানে, $q =$ একক সময়ে সম্পন্নকৃত 1 জনের কাজের অংশ, $n =$ কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা, $x =$ মোট সময়
- সময় ও দূরত্ব বিষয়ক সমস্যার সমাধান

  $$\text{গতিবেগ} = \frac{\text{অতিক্রান্ত দূ রত্ব}}{\text{সময়}} \text{ কি.মি./ঘন্টা}, \qquad \text{অতিক্রান্ত দূরত্ব} = \text{বেগ}\times\text{সময়}$$
- নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক সমস্যার সমাধানঃ নির্দিষ্ট সময়ে চৌবাচ্চার পানির পরিমাণ, $Q(t) = Q_0 \pm qt$

  যেখানে, $Q(t) = t$ সময়ে চৌবাচ্চায় পানির পরিমাণ, $Q_0 =$ নলের মুখ খুলে দেওয়ার সময় চৌবাচ্চায় জমা পানির পরিমাণ, $q =$ প্রতি একক সময়ে নল দিয়ে যে পানি প্রবেশ করে অথবা বের হয়, $t =$ অতিক্রান্ত সময়

  পানি প্রবেশ হওয়ার শর্তে '+' চিহ্ন এবং পানি বের হওয়ার শর্তে '–' চিহ্ন ব্যবহার করতে হবে।
- লাভ ও ক্ষতি বিষয়ক সমস্যার সমাধান

  লাভ = বিক্রয়মূল্য – ক্রয়মূল্য, ক্ষতি = ক্রয়মূল্য – বিক্রয়মূল্য

  ক্রয়মূল্য p এবং বিক্রয়মূল্য q হলে, লাভ $= \frac{q-p}{p}\times 100\%$ এবং ক্ষতি $= \frac{p-q}{p}\times 100\%$
- বিনিয়োগ ও মুনাফা বিষয়ক সমস্যার সমাধানঃ

  সরল মুনাফা নির্ণয়ের জন্য সূত্র হলো $I = Pnr$

  যেখানে, $P =$ মূলধন, $n =$ সময় (বছরে), $r =$ শতকরা হার, $I =$ মুনাফা

  চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্নয়ের সূত্র হলো $C = P(1+r)^n$

  যেখানে, $C =$ চক্রবৃদ্ধির ক্ষেত্রে সবৃদ্ধি মূল, $P =$ আসল বা মূল, $r =$ একক সময়ে একক আসলের উপর মুনাফা, $n =$ সময় (বছরে)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.৫

1. বনভোজনে যাওয়ার জন্য 5700 টাকায় বাস ভাড়া করা হল। প্রত্যেক যাত্রী সমান ভাড়া বহন করবেন বলে ঠিক করলেন। 5 জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া 3 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাসে যাত্রী সংখ্যা এবং মাথাপিছু ভাড়ার পরিমাণ নির্ণয় করুন।
2. শিক্ষা সফরে যাওয়ার জন্য বাস ভাড়া করা হল। আগ্রহী যাত্রীর সংখ্যা যত প্রত্যেককে তত টাকা বাস ভাড়া ধার্য করা হল। 12 জন যাত্রী না আসায় মাথাপিছু ভাড়া 15 টাকা বৃদ্ধি পেল। বাস ভাড়ার পরিমাণ নির্ণয় করুন।
3. একটি চৌবাচ্চার তিনটি নল আছে। ১ম ও ২য় নল দ্বারা 12 এবং 18 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং ৩য় নল দ্বারা খালি হয়। তিনটি নল একসংগে খুলে দিলে চৌবাচ্চাটি 36 মিনিটে পূর্ণ হয়। ৩য় নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি কত মিনিটে খালি হবে?
4. এক ব্যক্তি 20500 টাকায় দুইটি গরু ক্রয় করলেন। একই দামে গরু দুইটি বিক্রয় করে দেখলেন একটিতে 15% লাভ এবং আপরটিতে 10% ক্ষতি হয়েছে। গরু দুইটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় করুন।
5. ক্রয়মূল্যের শতকরা কত হারে বাড়িয়ে মূল্য ধার্য করলে ক্রেতাকে 10% কমিশন দিয়েও 20% লাভ থাকবে নির্ণয় করুন।
6. কোন মূলধন 6 বছরে দ্বিগুণ হয়। বার্ষিক মুনাফার হার নির্ণয় করুন।
7. শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফার 1250 টাকার 2 বৎসরের মুনাফামূল ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় করুন।
8. 12% হার মুনাফায় 750 টাকায় কত বৎসরের মুনাফা 450 টাকা হবে?
9. 300 টাকার 4 বছরের সরল মুনাফা ও 400 টাকার 5 বছরের সরল মুনাফা একত্রে 148 টাকা হলে, শতকরা মুনাফার হার নির্ণয় করুন।
10. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সরল মুনাফায় কত টাকার 13 বছরে সবৃদ্ধিমূল 985 টাকা হবে?

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. x^2-5x+6 এর উৎপাদক নিচের কোন্‌টি?
   (ক) $(x+2)(x+3)$ (খ) $(x-2)(x-3)$ (গ) $(x-2)(x+3)$ (ঘ) $(x+2)(x-3)$
2. $x+\frac{1}{x}=2$ হলে $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান কোন্‌টি?
   (ক) 10 (খ) 2 (গ) 14 (ঘ) 16
3. $a^4+a^2b^2+b^4=8$ এবং $a^2+ab+b^2=4$ হলে
   (ক) $a^2-ab+b^2=$ কত?
   (খ) $3a^2+3b^2$ এবং $5ab$ এর মান নির্ণয় করুন
   (গ) প্রমাণ করুন যে, $8(a^4-b^4)=24\sqrt{5}$
4. $x^2=5+2\sqrt{6}$ হলে
   (ক) প্রমাণ করুন, $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$
   (খ) $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।
   (গ) প্রমাণ করুন, $x^5+\frac{1}{x^5}=178\sqrt{3}$
5. $x^2-3x+1=0$ হলে

(ক) $x+\frac{1}{x}=$ কত?

(খ) $x^3-\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) প্রমাণ করুন, $x^5+\frac{1}{x^5}=123$

6. $x^2-1=3x$ হলে,

(ক) $x-\frac{1}{x}=$ কত?

(খ) প্রমাণ করুন, $x^4=119-\frac{1}{x^4}$

(গ) ii হতে প্রমাণ করুন যে, $x=3+\frac{1}{x}$

7. $a+b+c=6$ এবং $a^2+b^2+c^2=14$ হলে

(ক) $ab+bc+ca$ এর মান কত?

(খ) $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$ এর মান কত?

(গ) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ এর মান কত?

8. $a+b=\sqrt{7}$ এবং $a-b=\sqrt{5}$ হলে

(ক) a^2+b^2 এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) প্রমাণ করুন যে, $8ab(a^2+b^2)=24$

(গ) $(a+b)^3+(a-b)^3+6a(a^2-b^2)$ এর মান কত?

9. $a+b=m, a^2+b^2=n$ এবং $a^3+b^3=p^3$ হলে,

(ক) $m=\sqrt{3}$ এবং $ab=1$ হলে, $n=$ কত?

(খ) $m=-c$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$

(গ) প্রমাণ করুন যে, $m^3+2p^3=3mn$

10. $a+b=\sqrt{5},\quad (a-b)^2=3,\quad p^4=119-\frac{1}{p^4}$ হলে

(ক) a^2-b^2 এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) প্রমাণ করুন যে, $ab(a^2+b^2)=2$

(গ) প্রমাণ করুন যে, $p=3+\frac{1}{p}$

11. $x=\sqrt{\frac{x}{2}}+1$ হলে,

(ক) $x-\frac{1}{x}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) $x^2-\frac{1}{x^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) প্রমাণ করুন যে, $x^6-\frac{1}{x^6}=\frac{4191}{64}$

12. $x^2+\frac{1}{x^2}=10$ হলে,

(ক) $x^4+\frac{1}{x^4}=$ কত?

(খ) প্রমাণ করুন $x^2=5+2\sqrt{6}$

(গ) $x^8-\frac{1}{x^8}$ এর মান নির্ণয় করুন।

13. একজন মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে 3 ঘন্টায় 18 কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে উক্ত সময়ে 9 কি.মি. যেতে পারে। স্থির পানিতে নৌকার বেগ v কি.মি. এবং স্রোতের বেগ u কি.মি. হলে

(ক) স্রোতের অনুকূলের বেগ এবং প্রতিকূলের বেগ সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

(খ) উদ্দীপক হতে $8uv(v^2+u^2)$ এর মান নির্ণয় করুন।

(গ) কোন নির্দিষ্ট স্থান হতে 18 কি.মি. পথ অতিক্রম করে আবার ফিরে আসতে কত সময় লাগবে নির্ণয় করুন।

14. নির্দিষ্ট হার মুনাফায় কিছু টাকা এক বছরান্তে মূল 650 টাকা এবং দুই বছরান্তে চক্রবৃদ্ধিমূল 676 টাকা

(ক) উপরের তথ্যগুলো সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

(খ) মূলধন ও মুনাফার হার নির্ণয় করুন।

(গ) কত বছরে ঐ পরিমাণ মূলধন 5% চক্রবৃদ্ধি মুনাফার দ্বিগুণ হবে, নির্ণয় করুন।

15. জহির ও রায়হান একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% হার সরল মুনাফার আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ধার করে। জহির দুই বছরে মুনাফা-আসলে যত টাকা শোধ করে, রায়হান তিন বছরে মুনাফা-আসলে তত টাকা শোধ করে-

(ক) জহির ও রায়হানের ঋণের পরিমাণ x ও y টাকা হলে তাদের ঋণের সুদ কার কত টাকা হবে নির্ণয় করুন।

(খ) তাদের ঋণের অনুপাত কত?

(গ) মোট ঋণ 20,000 টাকা হলে, কার ঋণ কত টাকা হবে?