ইউনিট ২

সেট ও ফাংশন
(Set and Function)

ভূমিকা

সেট শব্দটি আমরা দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন প্রয়োজনে ব্যবহার করে থাকি। যেমন: একসেট বই, একসেট গহনা, ডিনার সেট, সোফাসেট ইত্যাদি। বস্তুর প্রকারভেদে বস্তুর সমষ্টি বোঝাতে সেট, গুচ্ছ, দল, পাল ইত্যাদি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ ব্যবহার করা হয়। দল, সংগ্রহ, সমষ্টি ইত্যাদি সমার্থক শব্দ দ্বারা সেট বর্ণনা করা হয়। গণিতের সব শাখায় সেটের ব্যবহার ব্যাপক। রুশ-জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (১৮৪৪-১৯১৮) সেট সম্পর্কে সর্বপ্রথম ধারণা ব্যাখ্যা করেন। তিনি অসীম সেটের যে ধারণা প্রদান করেন তা গণিত শাস্ত্রে ব্যাপক আলোড়ন সৃষ্টি করে। তাঁর প্রদত্ত ব্যাখ্যা গণিত শাস্ত্রে যে নতুন শাখার জন্ম দেয় তা "সেট তত্ত্ব" (Set Theory) নামে পরিচিত। সেট বিভিন্ন ধরনের হতে পারে যেমন: সসীম সেট, অসীম সেট, ফাঁকা সেট, উপসেট ইত্যাদি।

গণিত শাস্ত্রে অন্বয় ও ফাংশন অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হিসাবে অন্তর্ভূক্ত করা হয়েছে। দৈনন্দিন জীবনে প্রায়ই আমরা অন্বয় বা সম্পর্ক ও ফাংশন শব্দ দু'টোর প্রয়োগ করে থাকি। গণিত শাস্ত্রে এই শব্দ দু'টো একটু ভিন্ন অর্থে ব্যবহার হয়ে থাকে বটে কিন্তু এখানেও ফাংশন দু'টো সেটের সদস্যদের মধ্যে একটি বিশেষ ধরনের সম্পর্ক বোঝায়। এই ইউনিটে আমরা সেট, অন্বয় ও ফাংশন সম্পর্কিত বিষয়াবলি নিয়ে আলোচনা করব।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- বিভিন্ন ধরনের সেট ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সেটের কার্যবিধি ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজ কী তা বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অন্বয় ও ফাংশন কী তা বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অন্বয় ও ফাংশনের সম্পর্ক বর্ণনা ও ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ডোমেন ও রেঞ্জ কী তা বলতে পারবেন,
- ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১ সেট ও উপসেট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সেট ও উপসেট কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সেট প্রকাশের পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন,
- বিভিন্ন ধরনের সেট ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বিভিন্ন ধরনের সেটের মধ্যকার পার্থক্য নিরূপণ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সেট, উপসেট, সসীম সেট, অসীম সেট, ভেনচিত্র, শক্তিসেট, সেটের সমতা

মূলপাঠ

সেট (Set)

বস্তু জগতের বা চিন্তাজগতের বস্তু বা ধারণার যে কোন সুনির্ধারিত তালিকা, সংগ্রহ বা শ্রেণিকে সেট বলে। যেমনঃ টেবিল, চেয়ার, প্লেট, গ্লাস নিয়ে ডাইনিং সেট। সকল জোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট, পূর্ণ সংখ্যার সেট ইত্যাদি।

সাধারণত ইংরেজি বড় হাতের অক্ষর $A, B, C, ..., X, Y, Z, ...$ ইত্যাদি দ্বারা সেটের নামকরণ করা হয়। যেমনঃ 1, 3, 5, 7 সংখ্যা চারটির সেট $A=\{1, 3, 5, 7\}$

সেটের অন্তর্ভূক্ত প্রত্যেকটি বস্তু বা সদস্যকে উক্ত সেটের উপাদান (Element) বলা হয়। যোমনঃ $A=\{a, b, c\}$ হলে, A সেটের উপাদান a, b এবং c।

সেটের উপাদান বোঝার জন্য '$\in$' (গ্রীক অক্ষর ‘Epsilon) চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। এর অর্থ হল ‘belongs to’।

$\therefore a \in A$ এর অর্থ হল a, A এর সদস্য (a belongs to A); $x \in A$ হল x, A এর সদস্য।

আবার, b, A সেটের উপাদান না হলে '$\notin$' চিহ্নের দ্বারা প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ $b \notin A$ (b does not belong to A)

$\therefore y \notin A$ হল y, A এর সদস্য নয় (y does not belong to A)

সেট প্রকাশের পদ্ধতি (Method of describing sets)

সেটকে দুই পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়। যথা: (১) তালিকা পদ্ধতি (Roster Method বা Tabular Method) এবং (২) সেট গঠন পদ্ধতি (Set builder Method)

(১) তালিকা পদ্ধতিঃ এ পদ্ধতিতে সেটের সদস্য বা উপাদানগুলো সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনীর ভিতরে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদান থাকলে কমা (,) ব্যবহার করে উপাদানগুলোকে পৃথক করা হয়।

যেমনঃ একটি সেটের উপাদানগুলো হল 1, 2, 3, 4। সেটটিকে A দ্বারা সূচিত করলে, $A=\{1, 2, 3, 4\}$। তদ্রুপ $B=\{3, 5, 7, 9\}$, $C=$ {নীলা, মুনা, তিশা} ইত্যাদি।

(২) সেট গঠন পদ্ধতিঃ এ পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ না করে উপাদানের সাধারণ ধর্মের উল্লেখ করে সংক্ষিপ্ত আকারে সেটকে লেখা হয়।

যেমনঃ $A=\{x : x$ স্বাভাবিক জোড় সংখ্যা$\}$, $B=\{x : x,$ 20 এর গুণনীয়ক$\}$

এখানে ‘:’ চিহ্ন দ্বারা ‘এরূপ যেন’ বা ‘যেন’ (such that) বোঝায়। অনেক সময় ‘:’ চিহ্নের পরিবর্তে ‘|’ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেহেতু এ পদ্ধতিতে সেটের উপাদান নির্ণয়ের নিয়ম বা Rule বলে দেয়া হয়, এজন্য এ পদ্ধতিকে Rule Method-ও বলা হয়।

উদাহরণ 1: $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান: A সেটের উপাদানসমূহ 5, 10, 15, 20, 25

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 5 দ্বারা বিভাজ্য অর্থাৎ 5 এর গুণিতক এবং 25 এর বড় নয়।

$\therefore A = \{x : x,$ 5 এর গুণিতক এবং $0 < x \leq 25\}$

উদাহরণ 2: $B = \{x : x,$ 30 এর গুণনীয়ক$\}$, সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান: এখানে, $30 = 1\times30 = 2\times15 = 5\times6 = 3\times10$

$\therefore 30$ এর গুণনীয়ক সমূহ $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$

নির্ণেয় সেট $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

উদাহরণত 3: $C = \{x \in N : x^2 > 9$ এবং $x^3 < 130\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান: এখানে, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

এবং C হবে সে সকল স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গ যা 9 অপেক্ষা বড় এবং ঘন যা 130 অপেক্ষা ছোট তাদের সেট।

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1 \not> 9$ এবং $x^3 = 1 < 130$

$x = 2$ হলে, $x^2 = 4 \not> 9$ এবং $x^3 = 8 < 130$

$x = 3$ হলে, $x^2 = 9 \not> 9$ এবং $x^3 = 27 < 130$

$x = 4$ হলে, $x^2 = 16 > 9$ এবং $x^3 = 64 < 130$

$x = 5$ হলে, $x^2 = 25 > 9$ এবং $x^3 = 125 < 130$

$x = 6$ হলে, $x^2 = 36 > 9$ এবং $x^3 = 216 \not< 130$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $C = \{4, 5\}$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. $\{x : x$ পূর্ণ সংখ্যা এবং $x^2 < 18\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন। 2. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সসীম সেট (Finite set)

যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় অথবা উপাদান সংখ্যা নির্দিষ্ট বা সীমিত থাকে তাকে সসীম সেট বা সান্ত সেট বলে।

যেমন: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{p, q, r, s, t\}$, $C = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $20 < x < 40\}$ ইত্যাদি সসীম সেট। এখানে A সেটে 6 টি উপাদান, B সেটে 5 টি উপাদান এবং C সেটে 4 টি উপাদান আছে।

অসীম সেট (Infinite set)

যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না অথবা উপাদান সংখ্যা সীমিত নয় তাকে অসীম সেট বলে।

যেমন : $A = \{x : x$ জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা$\}$, পূর্ণসংখ্যার সেট $Z = \{....-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \{\frac{p}{q} : p$ ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0, p$ ও q সহমৌলিক$\}$ ইত্যাদি অসীম সেট।

উদাহরন 4: দেখান যে, সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

সমাধান: বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $A = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$

A সেট থেকে 3 এর গুণিতকসমূহের সেট, $B = \{3, 9, 12, ...\}$

A সেট থেকে 5 এর গুণিতকসমূহের সেট, $C = \{5, 10, 15, ...\}$

এখানে বিজোড় স্বভাবিক সংখ্যার সেট থেকে গঠিত সকল সেটসমূহের (সেট B ও C) উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না, ফলে A, B, C অসীম সেট। সুতরাং বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একটি অসীম সেট।

শিক্ষার্থীর কাজ	নিচের সেটগুলো থেকে সসীম সেট ও অসীম সেট লিখুন: 1. $\{p, q, r, s\}$ 2. $\{1, 3, 3^2, 3^3, \ldots.., 3^9\}$ 3. $\{x \in z : x^2 > 5$ এবং $x^2 \leq 36\}$ 4. $\{\frac{p}{q} : p$ ও q পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1\}$ 5. $\{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x < 3\}$

ফাঁকা সেট (Empty set) / শূন্য সেট (Null set)

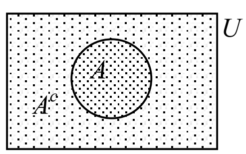
যে সেটের কোনো উপাদান বাস্তবে পাওয়া যায় না তাকে ফাঁকা সেট বলে। ফাঁকা সেটকে Φ অথবা { } দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন: $\Phi = \{\ \} = \{x \in N : x^2 = 3\}$, $\quad \Phi = \{\ \} = \{x \in N : 1 < x < 2\}$ এবং
$\Phi = \{\ \} = \{x \in N : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $23 < x < 29\}$ ইত্যাদি।
ফাঁকা সেটকে শূন্য সেট (Null set)-ও বলা হয়।

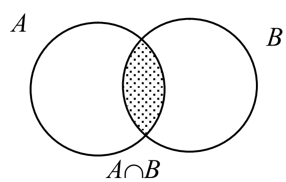
একদেহী সেট (Singleton set)

এক উপাদানবিশিষ্ট সেটকে একদেহী সেট বলে। যেমন: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{6\}$ ইত্যাদি।

ভেনচিত্র (Venn-Diagram)

সেটের সংযোগ, ছেদ ইত্যাদি প্রক্রিয়া এবং তাদের জন্য বলবৎ বিধিসমূহ জ্যামিতিক চিত্রে যেমন আয়তকার ক্ষেত্র, বৃত্তাকার ক্ষেত্র ও ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রে প্রদর্শন করলে তাকে ভেনচিত্র বলে। জন ভেন (১৮৩৪-১৮৮৩) সর্বপ্রথম সেটের কার্যবিধি চিত্রের সাহায্যে প্রবর্তন করেন। জন ভেনের নামানুসারে চিত্রগুলো ভেনচিত্র নামে পরিচিত।





উপসেট (Subset)

যদি একটি সেটের সকল সদস্য অপর একটি সেটের সদস্য হয়, তবে প্রথম সেটটিকে দ্বিতীয় সেটের উপসেট বলা হয়।
ধরা যাক, $A = \{x, y\}$ একটি সেট। A সেটের উপাদান থেকে $\{x, y\}, \{x\}, \{y\}$ সেটগুলো গঠন করা যায়। আবার, কোনো উপাদান না নিয়ে Φ সেট গঠন করা যায়।
এখানে, গঠিত $\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \Phi$ প্রত্যেকটি A সেটের উপসেট।
উপসেটের চিহ্ন '$\subset$'। যদি B সেট A এর উপসেট হয় তবে $B \subset A$ অর্থাৎ B, A এর উপসেট অথবা B is a subset of A। উপরের উপসেটগুলোর মধ্যে $\{x, y\}$ সেট A এর সমান।
সুতরাং প্রত্যেকটি সেট নিজের উপসেট। আবার, যেকোনো সেট থেকে Φ সেট গঠন করা যায়। সুতরাং Φ যেকোনো সেটের উপসেট।

প্রকৃত উপসেট (Proper Subset)

A সেটের প্রত্যেক উপাদান যদি B সেটে বিদ্যমান থাকে এবং B সেটে অন্তত এমন একটি উপাদান থাকে যা A সেটে নেই, তবে A কে B এর প্রকৃত উপসেট বলে।
যেমন: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{3, 4\}$ দুইটি সেট। এখানে, B এর সব উপাদান A সেটে বিদ্যমান। $\therefore B \subset A$ (B, A এর উপসেট)
আবার, B সেটের উপাদান সংখ্যা A সেটের উপাদান সংখ্যার চেয়ে কম।
$\therefore$ B, A এর একটি প্রকৃত উপসেট এবং $B \subseteq A$ দ্বারাও প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 5: $B = \{p, q, r\}$ সেটের উপসেট এবং প্রকৃত উপসেট নির্ণয় করুন।
সমাধান: এখানে $B = \{p, q, r\}$

$\therefore$ B সেটের উপসেটসমূহ হচ্ছেঃ $\{p, q, r\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \Phi$
$\therefore$ B সেটের প্রকৃত উপসেটসমূহ হচ্ছেঃ $\{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{p\}, \{q\}, \{r\}$

শক্তি সেট (Power sets)

$A = \{a, b\}$ একটি সেট, A সেটের যতগুলো উপসেট হয় তাদের সেটকে A সেটের শক্তি সেট বলা হয়।
A সেটের উপসেটসমূহ $\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \Phi$
A সেটের উপসেটসমূহের সেট $\{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \Phi\}$ কে A সেটের শক্তি সেট বলা হয়। A সেটের শক্তি সেটকে *P(A)* দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
A সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, *P(A)* এর উপাদান সংখ্যা হবে 2^n ।

উদাহরণ 6: $B = \{4,5,7\}$ হলে *P(B)* নির্ণয় করুন এবং দেখান যে, *P(B)* এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।
সমাধানঃ $B = \{4,5,7\}$
B সেটের উপসেটসমূহ হচ্ছেঃ $\{4,5,7\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \Phi$
$\therefore P(B) = \{\{4,5,7\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \Phi\}$
$\therefore P(B)$ এর উপাদান সংখ্যা 8
এখানে, B এর উপাদন সংখ্যা, $n = 3$
$\therefore P(B)$ এর উপাদান সংখ্যা $= 2^n = 2^3 = 8$
$\therefore P(B)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।

সেটের সমতা (Equality of sets)

দুই বা ততোধিক সেটের উপাদান একই হলে, এদেরকে সেটের সমতা বলা হয়। '=' চিহ্ন দ্বারা সেটের সমতা বোঝানো হয়।
A ও B সেট দু'টি সমতা হলে, A এর প্রত্যেকটি উপাদান B-তে আছে এবং B এর প্রত্যেকটি উপাদান A-তে আছে।
যেমনঃ $A = \{2,3,5\}$ এবং $B = \{3,5,2\}$ । $\therefore A = B$
আবার, $A = \{2,6,8\}$, $B = \{2,2,6,8\}$ এবং $C = \{2,6,6,8,8\}$ হলে *A,B* ও C সেট তিনটি সমতা বোঝায়, অর্থাৎ $A = B = C$। উল্লেখ যে, সেটের উপাদানগুলোর ক্রম বদলালে বা কোনো উপাদান পুনরাবৃত্তি ঘটলে সেটের কোন পরিবর্তন হয় না।

শিক্ষার্থীর কাজ

1. $X = \{a,b,c,d\}$ সেটের উপসেট এবং প্রকৃত উপসেট নির্ণয় করুন।
2. $Y = \{7,8,9,10\}$ হলে, *P(Y)* নির্ণয় করুন এবং দেখান যে, *P(Y)* এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।

সারসংক্ষেপ

- বস্তু জগতের বা চিন্তা জগতের বস্তু বা ধারণার যে কোন সুনির্ধারিত তালিকা, সংগ্রহ বা শ্রেণিকে সেট বলে।
- সেট প্রকাশের পদ্ধতি দু'টি যথা: (১) তালিকা পদ্ধতি ও (২) সেট গঠন পদ্ধতি।
- তালিকা পদ্ধতিতে সেটের সদস্য বা উপাদানগুলো সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ করে দ্বিতীয় বন্ধনীর ভিতরে আবদ্ধ করা হয় এবং একাধিক উপাদান থাকলে কমা (,) ব্যবহার করে উপাদানগুলোকে পৃথক করা হয়।
- সেট গঠন পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান সুনির্দিষ্টভাবে উল্লেখ না করে উপাদানের সাধারণ ধর্মের উল্লেখ করে সংক্ষিপ্ত আকারে সেটকে লেখা হয়।
- যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় তাকে সসীম সেট বলে।
- যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না তাকে অসীম সেট বলে।
- যদি একটি সেটের সকল সদস্য অপর একটি সেটের সদস্য হয়, তবে প্রথম সেটটিকে দ্বিতীয় সেটের উপসেট বলা হয়।
- A সেটের প্রত্যেক উপাদান যদি B সেটে বিদ্যমান থাকে এবং B সেটে অন্তত এমন একটি উপাদান থাকে যা A সেটে নেই, তবে A কে B এর প্রকৃত উপসেট বলে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-10):

1. গণিত শাস্ত্রে সেট সম্বন্ধে সর্বপ্রথম ব্যাখ্যা প্রদান করেন কে?
   (ক) রুশ-জার্মান গণিতবিদ জর্জ ক্যান্টর (খ) সুইচ গণিতবিদ অয়লার
   (গ) ভারতীয় গণিতবিদ রামানুজন (ঘ) ইংরেজ গণিতবিদ জন ভেন
2. জর্জ ক্যান্টর জন্মগ্রহণ করেন কত সালে?
   (ক) 1845 (খ) 1844 (গ) 1945 (ঘ) 1918
3. জর্জ ক্যান্টরের সেটের ধারণা কী নামে পরিচিত?
   (ক) সংখ্যাতত্ত্ব (খ) সেট তত্ত্ব (গ) মূলদ তত্ত্ব (ঘ) অমূলদ তত্ত্ব
4. সেটের উপাদান প্রকাশের চিহ্ন কোনটি?
   (ক) X (খ) A (গ) $\in$ (ঘ) $<$
5. x; A সেটের উপাদান না হলে নিচের কোনটি সত্য?
   (ক) $x \notin A$ (খ) $x \in A$ (গ) $x < A$ (ঘ) $x \not\subset A$
6. সেটকে কতটি পদ্ধতিতে প্রকাশ করা হয়?
   (ক) দুই পদ্ধতি (খ) তিন পদ্ধতি (গ) চার পদ্ধতি (ঘ) পাঁচ পদ্ধতি
7. তালিকা পদ্ধতিতে সেটের সকল উপাদান কীভাবে উল্লেখ করা হয়?
   (ক) অনির্দিষ্টভাবে (খ) সুনির্দিষ্টভাবে (গ) এলোমেলোভাবে (ঘ) ইচ্ছেমতো
8. $A = \{x : x$ স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যা$\}$, সেটটি কোন্ পদ্ধতিতে প্রকাশিত রূপ?
   (ক) তালিকা পদ্ধতি (খ) সেট গঠন পদ্ধতি (গ) ভেনচিত্র পদ্ধতি (ঘ) উপসেট পদ্ধতি
9. $A = \{5,10,15,20\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করলে নিচের কোন্টি হবে?
   (ক) $A = \{5,10,15,20\}$ (খ) $A = \{x : x, 10$ এর গুণিতক এবং $x \geq 20\}$
   (গ) $A = \{x : x, 5$ এর গুণিতক এবং $x \geq 20\}$ (ঘ) $A = \{x : x; 5$ এর গুণিতক এবং $x \leq 20\}$
10. $\{x \in N : x^2 > 15$ এবং $x^3 < 100\}$ এর তালিকা পদ্ধতিতে সেট কোন্টি?
   (ক) $\{2\}$ (খ) $\{3\}$ (গ) $\{4\}$ (ঘ) $\{5\}$

11. সেট বলতে কী বোঝায়? সেটকে কী কী উপায়ে প্রকাশ করা যায় উদাহরণসহ ব্যাখ্যা করুন।
12. নিচের সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন:
   (i) $\{x \in N : x \leq 5$ এবং x মৌলিক সংখ্যা$\}$
   (ii) $\{x \in z : x^2 > 5$ এবং $x^3 \leq 6\}$
   (iii) $\{x \in N : x^2 > 7$ এবং $x^3 < 150\}$
   (iv) $\{x \in N : x^2 - 5x + 6 = 0\}$
   (v) $\{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক$\}$
13. নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন:
   (i) $\{3,6,9,12,15,18\}$ (ii) $\{5,6,7,8,9\}$
   (iii) $\{-9,-6,-3,3,6,9\}$ (iv) $\{3,5,7,9,11\}$
14. $A = \{4,5,6,7\}$ সেটের উপসেট এবং প্রকৃত উপসেট নির্ণয় করুন।
15. $B = \{2,3,4,5\}$ হলে, $P(B)$ নির্ণয় করুন এবং দেখান যে, $P(B)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।

পাঠ ২ সেটের সংযোগ, ছেদ, অন্তর, সার্বিক সেট ও পূরক সেট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সেটের কার্যবিধি ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সংযোগ সেট কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- ছেদ সেট কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- অন্তর সেট কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সার্বিক সেট ও পূরক সেট বলতে কী বোঝায় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সংযোগ সেট ও ছেদ সেটের গঠন ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সেটের সংযোগ, ছেদ, অন্তর, সার্বিক সেট ও পূরক সেট।

মূলপাঠ

সেটের কার্যাবিধি

সেটের কার্যাবিধিগুলো হলোঃ সেটের সংযোগ, সেটের ছেদ, অন্তর সেট, পূরক সেট ইত্যাদি।

সুতরাং সেটের কার্যবিধি বলতে সেটের সংযোগ, সেটের ছেদ, অন্তর সেট, পূরক সেট ইত্যাদি কার্যকে বোঝায়। সেটের কার্যবিধি কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ নিয়ম বা সূত্র মেনে চলে। যেমনঃ একক সূত্র (Idempotent Law), সহযোজন নিয়ম (Associative law), বিনিময় নিয়ম (commutative law), বন্টন নিয়ম (Distributive law) ইত্যাদি।

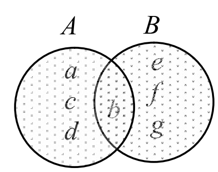
সংযোগ সেট (Union of Sets)

দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলে। A ও B সেটের সংযোগ সেটকে $A\cup B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় "A সংযোগ B" অথবা "A union B"। সেট গঠন পদ্ধতিতে $A\cup B = \{x{:}x\in A$ অথবা $x\in B\}$ ।

উদাহারণ 1ঃ $A=\{a,b,c,d\},\ B=\{b,e,f,g\}$ হলে $A\cup B$ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\{a,b,c,d\},\ B=\{b,e,f,g\}$

$\therefore A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}$



$A\cup B$

ছেদ সেট (Intersection of Sets)

দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলে। A ও B সেটের ছেদ সেটকে $A\cap B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় "A ছেদ B" অথবা "A intersection B"।

সেট গঠন পদ্ধতিতে $A\cap B=\{x : x\in A$ এবং $x\in B\}$

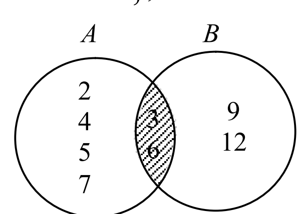
উদাহরণ 2ঃ $A=\{x\in N : 1<x<8\}$ এবং $B=\{x\in N : x$, 3 এর গুণিতক এবং $x\le 12\}$, হলে $A\cap B$ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A=\{x\in N : 1<x<8\}=\{2,3,4,5,6,7\}$

এবং $B=\{x\in N : x,3$ এর গুণিতক এবং $x\le 12\}=\{3,6,9,12\}$

$\therefore A\cap B=\{2,3,4,5,6,7\}\cap\{3,6,9,12\}=\{3,6\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট $\{3,6\}$



$A\cap B$

অন্তরসেট (Difference of Sets)

A ও B দু'টি সেট। A সেট থেকে সেট B এর উপাদানগুলো বাদ দিলে যে সেট গঠিত হয় তাকে অন্তর সেট বলে এবং তা লেখা হয় $A \backslash B$ বা $A - B$ দ্বারা।

সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \setminus B = \{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$

যেমন: $A = \{1,2,3,4\}$ এবং $B = \{3,5,6\}$

$\therefore A \setminus B = \{1,2,4\}$ এবং $B \setminus A = \{5,6\}$

উদাহরণ 3: $P = \{x \in N : x, 9$ এর গুণনীয়ক$\}$, এবং $Q = \{x \in N : 2 < x < 6\}$ হলে $P \backslash Q$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = \{x \in N : x,\ 9$ এর গুণনীয়ক$\} = \{1,3,9\}$

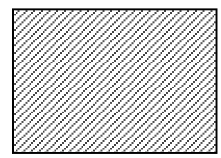
$Q = \{x \in N : 2 < x < 6\} = \{3,4,5\}$

$\therefore P \setminus Q = \{1,3,9\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,9\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট: $\{1,9\}$

সার্বিক সেট (Universal Set)

গণিত শাস্ত্রে আলোচনাধীন সকল সেট কোন নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সেটকে আলোচনাধীন সকল সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে। যেমন: $A = \{1,2\}$ সেটটি $B = \{1,2,3,5\}$ এর একটি উপসেট। এখানে B সেটকে A সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে।

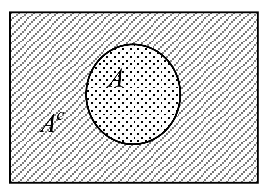


সার্বিক সেটকে সাধারণত U দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তবে অন্য প্রতীকের সাহায্যেও সার্বিক সেট প্রকাশ করা যায়।

যেমন: সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $X = \{1,3,5, ...\}$ এবং সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1,2,3,4,5, ...\}$ হলে, X সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট হবে N।

পূরক সেট (Complement of a Set)

সেট A সার্বিক সেট U এর একটি উপসেট। সেট A এর উপাদানগুলো বাদে সার্বিক সেটের অন্য সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A এর পূরক সেট বলে। A এর পূরক সেটকে A^c বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে



$A^c = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$

যেমন: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,3,5,7\}$ হলে

$A^c = U \setminus A$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{1, 3, 5, 7\} = \{2, 4, 6, 8\}$

উদাহরণ 4: $U = \{2, 3, 4, 5, 7\}$, $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{5, 7, 8\}$ হলে A^c ও B^c নির্ণয় করুন।

সমাধান:

$A^c = U \setminus A = \{2,3,4,5,7\} \setminus \{2,4,5\} = \{3,7\}$

এবং $B^c = U \setminus B = \{2,3,4,5,7\} \setminus \{5,7,8\} = \{2,3,4\}$

$\therefore$ নির্ণেয় সেট: $A^c = \{3,7\}$ এবং $B^c = \{2,3,4\}$

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Sets)

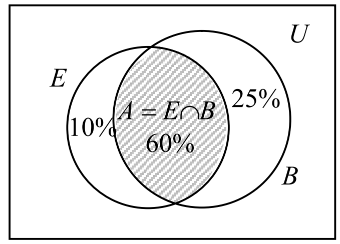
দুইটি সেটের মধ্যে যদি কোনো সাধারণ উপাদান না থাকে তবে সেই সেট দুইটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট।

A ও B সেট পরস্পর নিশ্ছেদ বলা হয় যদি A ও B এর মধ্যে কোন সাধারণ উপাদান বিদ্যমান না থাকে অর্থাৎ যদি $A \cap B = \Phi$ হয়।

যেমন: $A = \{3,4,5,6\}$ এবং $B = \{7,8,9\}$ এখানে $A \cap B = \Phi$ অর্থাৎ A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সেট।

উদাহরণ 5: 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 70 জন ইংরেজিতে, 85 জন বাংলায় এবং 60 জন উভয় বিষয়ে পাশ করেছে। ভেনচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলো প্রকাশ করুন এবং কতজন শিক্ষর্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে, তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, ভেনচিত্রে আয়তকার ক্ষেত্রটি 100 জন শিক্ষার্থীর সেট U এবং ইংরেজি ও বাংলায় পাস শিক্ষার্থীদের সেট যথাক্রমে E ও B।



এখানে, উভয় বিষয়ে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট,

$A = E \cap B$, যার সদস্য সংখ্যা 60

শুধু ইংরেজিতে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট, C-এর সদস্য সংখ্যা $= 70 - 60 = 10$

শুধু বাংলায় পাশ শিক্ষার্থীদের সেট, D-এর সদস্য সংখ্যা $= 85 - 60 = 25$

এক এবং উভয় বিষয়ে পাশ শিক্ষার্থীদের সেট,

$A \cup C \cup D$ -এর সদস্য সংখ্যা $= 60+10+25 = 95$

সুতরাং উভয় বিষয়ে ফেল করা শিক্ষার্থীদের সেট, F-এর সদস্য সংখ্যা $= (100 - 95) = 5$

$\therefore$ উভয় বিষয়ে ফেল করেছে 5 জন শিক্ষার্থী।

শিক্ষার্থীর কাজ	$P = \{x \in N : x, 9$ এর গুণনীয়ক$\}$, $Q = \{x \in N : 2 < x < 6\}$ এবং $R = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 20\}$ হলে, (i) $P \cup Q$ (ii) $P \cap Q$ (iii) $P \backslash Q$ এবং (iv) $Q \backslash P$ নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোগ সেট বলে।
- দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে ছেদ সেট বলে।
- যদি A ও B দু'টি সেট হয় তবে সেট A থেকে সেট B এর উপাদানগুলো বাদ দিলে যে সেট গঠিত হয় তাকে অন্তর সেট বলে।
- গণিত শাস্ত্রে আলোচনাধীন সকল সেট কোন নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এক্ষেত্রে নির্দিষ্ট সেটকে আলোচনাধীন সকল সেটের সাপেক্ষে সার্বিক সেট বলে।
- যদি সার্বিক সেট U এবং A একটি সেট হয়, তবে সেট A এর উপাদানগুলো বাদে সার্বিক সেটের অন্য সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A এর পূরক সেট বলে।
- দুইটি সেটের মধ্যে যদি কোনো সাধারণ উপাদান না থাকে তবে সেই সেট দুইটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-8):

1. দুইটি সেটের সংযোগ এর প্রতীক কোনটি?
   (ক) $A \cap B$ (খ) $A \subset B$ (গ) $A \cup B$ (ঘ) $A = B$
2. সেট গঠন পদ্ধতিতে $A \cup B$ কী?
   (ক) $\{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ (খ) $\{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$
   (গ) $\{x : x^2 \in A$ এবং $x^2 \in B\}$ (ঘ) $\{x : x \notin A$ অথবা $x \in B\}$
3. দুই বা ততোধিক সেটের সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে কী বলে?
   (ক) ফাঁকা সেট (খ) সেটের অন্তর (গ) ছেদ সেট (ঘ) সেটের সমতা

4. $A\cap B$ কে পড়া হয় কীভাবে?
(ক) A সংযোগ B (খ) A ছেদ B (গ) A বাদ B (ঘ) B বাদ A
5. সেট গঠন পদ্ধতিতে $A\cap B$ কী?
(ক) $\{x : x^2 \in A$ এবং $x^2 \notin B\}$ (খ) $\{x : x^2 \in A$ অথবা $x \notin B\}$
গ) $\{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ (ঘ) $\{x : x^2 \notin A$ অথবা $x^2 \in B\}$
6. $A=\{1,2,3,4\},\ B=\{4,5\}$ হয় তবে $A\cap B$ কত?
(ক) $\{4,5\}$ (খ) $\{4\}$ (গ) $\{1,2,3,4,5\}$ (ঘ) Φ
7. $A=\{1,2,3\},\ B=\{3,a,b\}$ হলে $A\cap B$ এর মান কত?
(ক) $\{4\}$ (খ) $\{5\}$ (গ) $\{3\}$ (ঘ) $\{2\}$
8. $U=\{4,5,6,7,8\},\ A=\{4,5,6\},\ B=\{7,8\}$ হলে $A'\cup B'$ এর মান কত?
(ক) $\{4,5,6,7,8\}$ (খ) $\{4,5,6\}$ (গ) $\{7,8\}$ (ঘ) $\{8,9\}$

9. $A=\{3,4,5,6\},\ B=\{4,7,8,a\}$ এবং $C=\{4,8,9,b\}$ হলে নিচের সেটগুলো নির্ণয় করুন:
(i) $A\cup B$ (ii) $A\cap B$ (iii) $A\backslash B$
(iv) $A\cup(B\cup C)$ (v) $A\cap(B\cap C)$ (vi) $A\cup(B\cap C)$
(vii) $A\cap(B\cup C)$
10. $U=\{a,b,c,d,e,f\},\ A=\{b,e,g,h\},\ B=\{a,f,h,i\}$ এবং $C=\{a,b,e,f\}$ হলে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই করুন:
(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$
(iii) $(B\cap C)'=B'\cup C'$ (iv) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(B\cup C)$
(v) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$ (vi) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
11. যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 এবং 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে এদের সেট নির্ণয় করুন।
12. A ও B যথাক্রমে 346 এবং 556 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$ এবং $B-A$ নির্ণয় করুন।
13. $A=\{1,2,3\},\ B=\{1,2\},\ C=\{2,3\}$ এবং $D=\{1,3\}$ হলে,
(i) $A-B$ এবং $C-D$ নির্ণয় করুন
(ii) দেখান যে, $A\cup B=C\cup D$ কিন্তু $A\cap B\neq C\cap D$
(iii) প্রমান করুন যে, $P(A)=P(B\cup C)=P(C\cup D)$
14. নবম শ্রেণির 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোন পরীক্ষায় 55% শিক্ষার্থী বাংলায়, 65% শিক্ষার্থী গণিত এবং 30% শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে পাশ করেছে।
(i) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ উপরের তথ্যগুলোকে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখান।
(ii) শতকরা কতজন শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় করুন।
(iii) শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাশ করেছে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যাদ্বয়ের গুণনীয়ক সমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট নির্ণয় করুন।

পাঠ ৩ ক্রমজোড়, কার্তেসীয় গুণজ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ক্রমজোড় কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- কার্তেসীয় গুণজ কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- ক্রমজোড় ও কার্তেসীয় গুণজের ব্যবহারের মাধ্যমে বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	ক্রমজোড়, কার্তেসীয় গুণজ

মূলপাঠ

ক্রমজোড় (Ordered pair)

নবম শ্রেণির দৌড় প্রতিযোগিতায় দেখা গেল মামুন ও সুমন যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় হলো। প্রতিযোগিতার ফলাফল অনুসারে তাদেরকে (মামুন, সুমন) জোড়া আকারে লেখা যায়। এরূপ নির্দিষ্ট করে দেওয়া জোড়া একটি ক্রমজোড়।

সুতরাং একজোড়া উপাদানের মধ্যে কোনটি প্রথম অবস্থানে আর কোনটি দ্বিতীয় অবস্থানে থাকবে, তা নির্দিষ্ট করে জোড়া আকারে প্রকাশকে ক্রমজোড় বলা হয়।

যে কোনো উপাদান x, y নিয়ে x কে প্রথম এবং y কে দ্বিতীয় উপাদান বা পদ বিবেচনা করলে আমরা একটি ক্রমজোড় (x, y) পাই।

দু'টি ক্রমজোড় (x, y) এবং (a, b) সমান হবে অর্থাৎ $(x, y) = (a, b)$, যদি $x = a$ এবং $y = b$ হয়।

উদাহরণ 1: $(2x - y, 10) = (8, 3x - 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $(2x - y, 10) = (8, 3x - 2y)$

ক্রমজোড়ের শর্তানুসারে, $2x - y = 8 \ldots. (1)$

এবং $3x - 2y = 10 \ldots. (2)$

সমীকরণ (1) নং হতে পাওয়া যায়–

$2x - y = 8$

বা, $-y = 8 - 2x$

বা, $y = 2x - 8 \ldots. (3)$

সমীকরণ (2) এ y এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়–

$3x - 2(2x - 8) = 10$

বা, $3x - 4x + 16 = 10$

বা, $-x = 10 - 16$

বা, $x = 6$

সমীকরণ (3) এ x-এর মান বসিয়ে পাওয়া যায়,

$y = 2 \times 6 - 8$

বা, $y = 12 - 8$

বা, $y = 4$

$\therefore (x, y) = (6, 4)$

কার্তেসীয় গুণজ (Cartesian Product)

দু'টি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সকল ক্রমজোড়ের সেটই হলো উক্ত সেট দু'টির কার্তেসীয় গুণজ। ক্রমজোড়ের প্রথম সদস্য অবশ্যই প্রথম সেট হতে এবং দ্বিতীয় সদস্য অবশ্যই দ্বিতীয় সেট হতে নিতে হবে।

A ও B দু'টি সেট হলে A থেকে প্রথম উপাদান এবং B থেকে দ্বিতীয় উপাদান নিয়ে গঠিত সকল ক্রমজোড়ের সেট A ও B এর কার্তেসীয় গুণজ বলা হয়।

A ও B এর কার্তেসীয় গুণজ হবে $A\times B$

$A\times B$ কে পড়া হয় 'A ক্রস B' বা 'A cross B'.

সেট গঠন পদ্ধতিতে $A\times B=\{(x,y): x\in A$ এবং $y\in B\}$

যেমন: $A=\{1,2,3\}$ এবং $B=\{4,5\}$ হলে

$A\times B=\{(1,4),(2,4),(3,4),(1,5),(2,5),(3,5)\}$

উদাহরণ 2: $A=\{3,5,6\},\ B=\{6,8\}$ এবং $C=A\cap B,\ D=A\cup B$ হলে $A\times C,\ C\times B,\ A\times D,\ D\times B$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A=\{3,5,6\},\ B=\{6,8\}$ এবং $C=A\cap B=\{3,5,6\}\cap\{6,8\}=\{6\}$

$D=A\cup B=\{3,5,6\}\cup\{6,8\}=\{3,5,6,8\}$

এখন $A\times C=\{3,5,6\}\times\{6\}=\{(3,6),(5,6),(6,6)\}$

$C\times B=\{6\}\times\{6,8\}=\{(6,6),(6,8)\}$

$A\times D=\{3,5,6\}\times\{3,5,6,8\}=\{(3,3),(3,5),(3,6),(3,8),(5,3),(5,5),(5,6),(5,8),(6,3),(6,5),(6,6),(6,8)\}$

$D\times B=\{3,5,6,8\}\times\{6,8\}=\{(3,6),(3,8),(5,6),(5,8),(6,6),(6,8),(8,6),(8,8)\}$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. $(x-1,y+2)=(y-2,2x+1)$ হলে, (x,y) নির্ণয় করুন। 2. $A=\{1,2,3\},\ B=\{1,2\},\ C=\{2,3\}$ হলে, (i) $A\times B$ এবং $A\times C$ নির্ণয় করুন। (ii) প্রমান করুন যে, $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

সারসংক্ষেপ

- একজোড়া উপাদানের মধ্যে কোনটি প্রথম অবস্থানে আর কোনটি দ্বিতীয় অবস্থানে থাকবে, তা নির্দিষ্ট করে জোড়া আকারে প্রকাশকে ক্রমজোড় বলে।
- দু'টি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সকল ক্রমজোড়ের সেটই হলো উক্ত সেট দু'টির কার্তেসীয় গুণজ। ক্রমজোড়ের প্রথম সদস্য অবশ্যই প্রথম সেট হতে এবং দ্বিতীয় সদস্য অবশ্যই দ্বিতীয় সেট হতে নিতে হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-7):

1. একজোড়া উপাদানের মধ্যে কোন্টি প্রথম অবস্থানে আর কোন্টি দ্বিতীয় অবস্থানে থাকবে, তা নির্দিষ্ট করে জোড়া আকারে প্রকাশকে বলা হয়-

   (ক) নিশ্চেদ সেট (খ) সংযোগ সেট (গ) ছেদ সেট (ঘ) ক্রমজোড়

2. যদি কোন ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান বা পদ x এবং দ্বিতীয় উপাদান বা পদ y হয়, তবে ক্রমজোড়টি কী হবে?

   (ক) (x,y^2) (খ) (x,y) (গ) $(x+y)$ (ঘ) $(x-y)$

3. $(x,y)=(a,b)$ হলে নিচের কোন সম্পর্কটি সত্য হবে?

   (ক) $x=a, y=b$ (খ) $x=y, a=b$ (গ) $x=b, y=a$ (ঘ) $x=a, a=b$

4. $(x,2)=(3,y)$ হলে, $(x,y)=$ কত?

(ক) $(2, 3)$ (খ) $(3, 2)$ (গ) (3) (ঘ) (2)

5. $(x+1, y-2)=(3, 5)$ হলে, $(x, y)=$ কত?
(ক) $(2, 3)$ (খ) $(2, 5)$ (গ) $(2, 7)$ (ঘ) $(4, 7)$

6. সেট গঠন পদ্ধতিতে $A\times B=$ কী?
(ক) $(x, y): x\notin A$ এবং $y\in B$ (খ) $\{(x, y): x\notin A$ এবং $y\in B\}$
(গ) $\{(x, y): x\in A$ এবং $y\in B\}$ (ঘ) $\{(x, y): x\notin A$ এবং $y\notin B\}$

7. $A=\{x, y\}$ এবং $B=\{1\}$ হলে, $A\times B=$ কত?
(ক) $\{(x, y), (x, y)\}$ (খ) $\{(x, 1), (y, 1)\}$ (গ) $\{(1, x), (1, y)\}$ (ঘ) $\{(x, y), (1, y)\}$

8. (i) $(x+3, y-1)=(y-4, 3x+2)$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় করুন।
(ii) $(2x-y, 6)=(2, x+2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় করুন
(iii) $(ax-cy, a^2+c^2)=(0, ay+cx)$ হলে, (x, y) নির্ণয় করুন।
(iv) $(4x+1, y-3)=(y+2, 2x+2)$ হলে, (x, y) নির্ণয় করুন।

9. (i) $P=\{a,b\}$, $Q=\{b,c\}$ হলে, $P\times Q$ এবং $Q\times P$ নির্ণয় করুন।
(ii) $A=\{5,6,7\}$, $B=\{5,7,8\}$ এবং $C=\{y,z\}$ হলে, $(A\cap B)\times C$ নির্ণয় করুন।
(iii) $X=\{a,b,c,d\}$, $Y=\{c,d\}$ এবং $Z=X\setminus Y$ হলে, $(X\cup Y)\times Z$ নির্ণয় করুন।

10. $A=\{a,b\}$, $B=\{2,3\}$ এবং $C=\{3,4\}$ হলে, দেখান যে, $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

11. $A=\{x+y\}$, $B=\{a-b\}$, $C=\{a+b\}$, $D=\{x-y\}$; $A\times B=C\times D$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪ অন্বয় ও ফাংশন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অন্বয় কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ফাংশন কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- অন্বয় ও ফাংশনের সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ডোমেন ও রেঞ্জ কী তা বলতে পারবেন,
- আন্বয় ও ফাংশন সম্পর্কীত বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

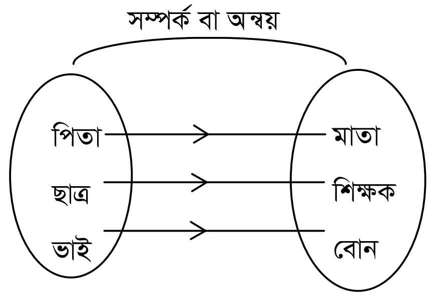
মূখ্য শব্দ	অন্বয়, ফাংশন, ডোমেন ও রেঞ্জ

মূলপাঠ

অন্বয় (Relation)

আমরা দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন সম্পর্কের কথা বলি। যেমন: পিতা-মাতা সম্পর্ক, ছাত্র-শিক্ষক সম্পর্ক, ভাই-বোন সম্পর্ক ইত্যাদি। এ সম্পর্ক হচ্ছে (পিতা-মাতা), (ছাত্র-শিক্ষক) ইত্যাদির অন্বয়। এরকম সম্পর্ক বর্ণনার জন্য প্রত্যেক ক্ষেত্রে দু'টি

সেট এবং এক সেটের কোন্ সদস্য অপর সেটের কোন্ সদস্যের সাথে সম্পর্কিত তা ম্যাপিং (Mapping) বা চিত্রণ অথবা কার্তেসীয় গুণজ সেটের মাধ্যমে নির্ধারণ করা যায়। উক্ত সম্পর্ককে সেট আকারে নিম্নরূপে দেখানো যায়:



যদি A ও B দু'টি সেট হয়, তবে সেটদ্বয়ের কার্তেসীয় গুণজ $A\times B$ সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলোর যে কোন অশূন্য উপসেট R কে A সেট হতে B সেটের একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়।
এখানে R সেট $A\times B$ সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ $R\subseteq A\times B$
যদি x, A সেটের একটি উপাদান ও y, B সেটের একটি উপাদান হয় এবং $(x, y)\in R$ হয় তবে উক্ত সম্পর্ককে xRy দ্বারা প্রকাশ করা যায় এবং $x\,R\,y$ কে পড়া হয় উপাদান x, উপাদান y এর সাথে R অন্বিত বা সম্পর্কযুক্ত (x related to y)
আবার, A সেট হতে A সেটের একটি অন্বয় অর্থাৎ $R\subseteq A\times A$ হলে R কে A এর অন্বয় বলা হয়।
সুতরাং A এবং B দু'টি সেটের উপাদানগুলোর মধ্যে সম্পর্ক দেওয়া থাকলে $x\in A$ এর সাথে সম্পর্কিত $y\in B$ নিয়ে যে সব ক্রমজোড় (x,y) পাওয়া যায়, এদের অশূন্য উপসেট হচ্ছে একটি অন্বয়।

উদাহরণ 1: যদি $C=\{3,4\}$, $D=\{2,5\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x>y$, $x<y$ সম্পর্কে অন্বয় নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $C=\{3,4\}$, $D=\{2,5\}$
প্রশ্নানুসারে, $R=\{(x,y): x\in C,\ y\in D$ এবং $x>y\}$
এখানে, $C\times D=\{3,4\}\times\{2,5\}=\{(3,2),(3,5),(4,2),(4,5)\}$
$\therefore$ প্রদত্ত সম্পর্ক অনুসারে, $R=\{(3,2),(4,2)\}$
$\therefore$ নির্ণেয় অন্বয়: $\{(3,2),(4,2)\}$
আবার, প্রশ্নানুসারে, $R=\{(x,y): x\in C,\ y\in D$ এবং $x<y\}$
এখানে $C\times D=\{3,4\}\times\{2,5\}=\{(3,2),(3,5),(4,2),(4,5)\}$
$\therefore$ প্রদত্ত সম্পর্কে অনুসারে, $R=\{(3,5),(4,5)\}$
$\therefore$ নির্ণেয় অন্বয়: $\{(3,5),(4,5)\}$

উদাহরণ 2: যদি $A=\{3,4\}$, $B=\{2,5,6\}$ এবং A ও B উপাদানগুলোর মধ্যে $x+1<y$ ও $x=y-1$ সম্পর্কে অন্বয় নির্ণয় করুন।

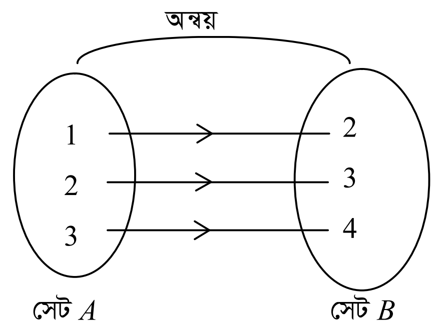
সমাধান: দেওয়া আছে, $A=\{3,4\}$, $B=\{2,5,6\}$
প্রশ্নানুসারে, $R=\{(x,y): x\in A,\ y\in B$ এবং $x+1<y\}$
এখানে, $A\times B=\{3,4\}\times\{2,5,6\}=\{(3,2),(3,5),(3,6),(4,2),(4,5),(4,6)\}$
প্রাপ্ত সম্পর্ক অনুসারে, $R=\{(3,5),(3,6),(4,6)\}$
$\therefore$ নির্ণেয় অন্বয়: $\{(3,5),(3,6),(4,6)\}$
আবার, প্রশ্নানুসারে, $R=\{(x,y): x\in A,\ y\in B,$ এবং $x=y-1\}$
এখানে, $A\times B=\{3,4\}\times\{2,5,6\}=\{(3,2),(3,5),(3,6),(4,2),(4,5),(4,6)\}$
প্রদত্ত সম্পর্ক অনুসারে, $R=\{(4,5)\}$
$\therefore$ নির্ণেয় অন্বয়: $\{(4,5)\}$

শিক্ষার্থীর কাজ	যদি $C=\{5,7,8\}$, $D=\{6,7\}$ এবং C ও D উপাদানগুলোর মধ্যে $x \geq y$ সম্পর্কে অন্বয় নির্ণয় করুন।

ফাংশন (Function)

ফাংশন একটি বিশেষ ধরনের অন্বয় বা সম্পর্ক। যখন A ও B দু'টি সেটের মধ্যে এমন একটি সম্পর্ক স্থাপন করা যায় যে, A সেটের প্রতিটি সদস্যের জন্য B সেটে **একটি মাত্র** সদস্য নির্ধারিত থাকে তখন সে অন্বয় বা সম্পর্ককে ফাংশন বলে।

নিম্নের A ও B সেটের অন্বয় লক্ষ করুন:



এখানে যখন $y=x+1$,

তখন $x=1$ হলে, $y=2$

$x=2$ হলে, $y=3$

$x=3$ হলে, $y=4$

অর্থাৎ x এর যে কোনো একটি মানের জন্য y এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায় যেখানে x ও y এর মধ্যে সম্পর্ক তৈরি হয় $y=x+1$ দ্বারা। সুতরাং দু'টি চলক x এবং y এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত যেন x এর যেকোনো একটি মানের জন্য y এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায়, তবে y কে x এর ফাংশন বলা হয়। x এর ফাংশনকে সাধারণত $y, f(x), g(x), F(x)$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

আবার বলা যেতে পারে, যদি কোনো অন্বয়ের একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দু'টি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে, তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।

উপরের A ও B সেটের অন্বয় $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

অন্বয়টি একটি ফাংশন। এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন।

উদাহরণ 3: $f(x)=x^2-8x+11$ হলে $f(-2)$ ও $f(2)$নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=x^2-8x+11$

$\therefore f(-2)=(-2)^2-8(-2)+11 = 4+16+11 = 31$

এবং $f(2)=(2)^2-8(2)+11 = 4-16+11 = 15-16 = -1$

উদাহরণ 4: যদি $f(x)=x^3+2x^2+px+10$ হয়, তবে p এর কোন্ মানের জন্য $f(-5)=0$ হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে,

$f(x)=x^3+2x^2+px+10$

$\therefore f(-5)=(-5)^3+2(-5)^2+p(-5)+10$

$=-125+50-5p+10 = -125+60-5p = -65-5p$

কিন্তু, $f(-5)=0$

$\therefore -65-5p=0$

বা, $-5p=65$

বা, $p=-\dfrac{65}{5}$

$\therefore p=-13$

সুতরাং $p=-13$ হলে, $f(-5)=0$ হবে।

ডোমেন (Domain) ও রেঞ্জ (Range)

মনে করুন, A সেট থেকে B সেটে R একটি অন্বয় অর্থাৎ $R \subseteq A \times B$ । R এ অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেটকে R এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেটকে R এর রেঞ্জ বলা হয়। R এর ডোমেনকে ডোম R এবং রেঞ্জকে রেঞ্জ R লিখে প্রকাশ করা হয়।

সুতরাং কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।

উদাহরণ 5: অন্বয় $R = \{(2,3), (3,4), (4,1), (4,5)\}$, অন্বয়টির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $R = \{(2,3), (3,4), (4,1), (4,5)\}$

R অন্বয়ে ক্রমজোড়গুলো প্রথম উপাদানসমূহ $2, 3, 4, 4$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ $3, 4, 1, 5$ ।

$\therefore$ ডোম $R = \{2,3,4\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{1,3,4,5\}$

উদাহরণ 6: $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ এবং $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$ হলে, R কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং ডোম R ও রেঞ্জ R নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং

$R = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

R এর শর্তানুসারে, $x + y = 1$

$\therefore y = 1 - x$

এখন, $x \in A$ এর সকল মানের জন্য $y = 1 - x$ এর মা নির্ণয় করুন-

x	-2	-1	0	1	2
y	3	2	1	0	-1

যেহেতু $3 \notin A$ $\quad \therefore (-2, 3) \notin R$

$\therefore R = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$

ডোম $R = \{-1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{2,1,0,-1\}$

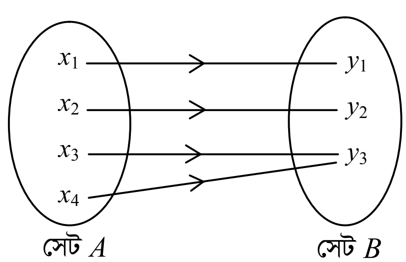
শিক্ষার্থীর কাজ

1. যদি $g(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $g(-2) = 0$ হবে
2. $g = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = 2x\}$, যেখানে $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ হলে, g কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং ডোম g ও রেঞ্জ g নির্ণয় করুন।

অন্বয় ও ফাংশনের সম্পর্ক

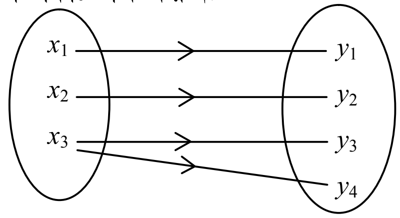
মনে করুন, একদল সন্তানের সেট A এবং একদল মায়ের সেট B ।

নিম্নে A ও B সেটের অন্বয় বা সম্পর্ক লক্ষ করুন:



সেট A (সন্তানের দল) সেট B (মায়ের দল)

এখানে, প্রত্যেক সন্তানের জন্য একটি করে মা আছে। অর্থাৎ উপরোক্ত অন্বয়-এ একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট দু'টি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই।
সুতরাং উপরোক্ত সন্তান ও মায়ের অন্বয় বা সম্পর্কটি একটি ফাংশন।
আবার মনে করুন, একদল মায়ের সেট A এবং একদল সন্তানের সেট B।
নিম্নে A ও B সেটের অন্বয় বা সম্পর্কটি লক্ষ করুন:



সেট A (মায়ের দল) সেট B (সন্তানের দল)

এখানে, একই মায়ের জন্য একাধিক সন্তান আছে অর্থাৎ উপরোক্ত অন্বয়-এ একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট দু'টি ভিন্ন ক্রমজোড় রয়েছে।
সুতরাং উপরোক্ত মা ও সন্তানের অন্বয় বা সম্পর্কটি ফাংশন নয়।
উপরোক্ত আলোচনা থেকে বলা যায়,

সব ফাংশন অন্বয় কিন্তু সব অন্বয় ফাংশন নয়।

উদাহরণ 7: নিচের অন্বয় বা সম্পর্কটি কি ফাংশন?

$$R = \{(0,1), (0,3), (2,4), (3,-5)\}$$

সমাধান: দেওয়া আছে, অন্বয় $R = \{(0,1), (0,3), (2,4), (3,-5)\}$
প্রদত্ত অন্বয় বা সম্পর্কটি ফাংশন নয়, কারণ একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট দু'টি ভিন্ন ক্রমজোড় রয়েছে।

সারসংক্ষেপ

- যদি A ও B দু'টি সেট হয়, তবে সেটদ্বয়ের কার্তেসীয় গুণজ $A \times B$ সেটের অন্তর্গত ক্রমজোড়গুলোর যেকোন অশূন্য উপসেট R কে A সেট হতে B সেটের একটি অন্বয় বা সম্পর্ক বলা হয়।
- যদি দু'টি চলক x এবং y এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত যেন x-এর যে কোনো একটি মানের জন্য y-এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায়, তবে y কে x-এর ফাংশন বলা হয়। x-এর ফাংশনকে সাধারণত $y, f(x), g(x), F(x)$ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৪

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-8):

1. সেট A হতে সেট B এ একটি সম্পর্ক R হলে, নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) $R \subset A \times B$ (খ) $R \subset A$ (গ) $R \subset B$ (ঘ) $(A \times B) \subset R$
2. $A = \{3\},\ B = \{4\},\ x = y$ বিবেচনায় A থেকে B এর অন্বয় কোন্‌টি?
   (ক) $\{(3,4)\}$ (খ) $(3\ 4)$ (গ) $\{\ \}$ (ঘ) কোনটিও নয়

3. যদি $f(x)=x^3+kx^2-4x-8$ হয়, তবে k এর কোন্ মানের জন্য $f(-2)=0$ হবে?
(ক) -2 (খ) 2 (গ) 0 (ঘ) k
4. $f(x)=x^2+2x+6$ হলে, $f(1)=$ কত?
(ক) 6 (খ) 9 (গ) 10 (ঘ) 3
5. R এর ক্রমজোড় সমূহের প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে কী বলে?
(ক) রেঞ্জ (খ) অন্বয় (গ) ডোমেন (ঘ) ফাংশন
6. R এর ক্রমজোড় সমূহের দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে কী বলে?
(ক) রেঞ্জ (খ) অন্বয় (গ) ডোমেন (ঘ) ফাংশন
7. $S=\{(1,5),(2,10),(3,15),(4,20)\}$ অন্বয়টির ডোমেন কত?
(ক) $\{1,2,3,4\}$ (খ) $(1,2,3,4)$ (গ) $\{5,10,15,20\}$ (ঘ) $(5,10,15,20)$
8. $S=\{(2,1),(2,2),(3,2),(4,5)\}$ অন্বয়টির রেঞ্জ নিচের কোনটি?
(ক) $\{2,3,4\}$ (খ) $\{2,2,3,4\}$ (গ) $\{1,2,5\}$ (ঘ) $(1,2,2,5)$

9. যদি $A=\{2,3,4\}$, $B=\{4,6,9\}$ এবং $C=\{3,6,7\}$ হয় তবে
(i) A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x^2=y$ সম্পর্কে অন্বয়টি নির্ণয় করুন।
(ii) A ও C এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x\le y$ সম্পর্কে অন্বয়টি নির্ণয় করুন।
10. যদি $A=\{1,3,4\}$ এবং $B=\{2,6\}$ হয়, তবে A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $y=2x$ সম্পর্কে অন্বয়টি নির্ণয় করুন।
11. যদি $A=\{3,4,5\}$, $B=\{2,3,4\}$ হয়,
(i) তবে A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x>y$ সম্পর্কে অন্বয়টি নির্ণয় করুন।
(ii) A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x=y$ সম্পর্কে অন্বয়টি নির্ণয় করুন।
12. $g(x)=x^2-6x+9$ হলে, $g(2)$ ও $g(5)$ এর মান নির্ণয় করুন।
13. $f(x)=x^2-5x+6$ হলে, $f(0)$ এবং $f(1)$ এর মান নির্ণয় করুন এবং x এর কোন্ মানের জন্য $f(x)=0$ হবে?
14. $f(t)=\dfrac{1+t^2+t^4}{t^2}$ হলে,
(i) $f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(1)$ এর মান নির্ণয় করুন।
(ii) দেখান যে, $f(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$
15. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ হলে,
(i) x এর কোন্ মানের জন্য $f(x)=\dfrac{1}{3}$ হবে?
(ii) $\dfrac{f\left(\frac{1}{2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{2}\right)-1}$ এর মান নির্ণয় করুন।

16. $g(x)=\dfrac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখান যে, $g\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=g\left(x^2\right)$
17. নিচের অন্বয়গুলো থেকে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন:
    (i) $R=\{(-3,-14),(3,0),(6,7),(9,14)\}$
    (ii) $S=\left\{\left(\dfrac{1}{2},0\right),(1,1),(1,-1),\left(\dfrac{5}{2},2\right),\left(\dfrac{5}{2},-2\right)\right\}$
18. নিচের অন্বয়গুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করুন:
    (i) $R=\{(x,y): x\in A,\ y\in A$ এবং $y=x+1\}$, যেখানে $A=\{0,1,2,3\}$
    (ii) $F=\{(x,y): x\in b,\ y\in B$ এবং $y=3x\}$, যেখানে $B=\{-1,0,1,2,3\}$
19. যদি $A=\{x_1,x_2\}$ এবং $B=\{y_1,y_2\}$ হয়, তবে $A\times B$ সেটের কার্তেসীয় গুণজ কী ফাংশন? ব্যাখ্যা করুন।

পাঠ ৫ ফাংশনের লেখচিত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

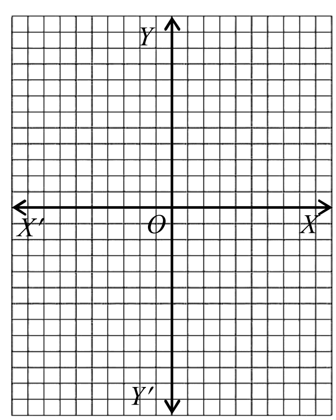
- লেখচিত্র কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- লেখচিত্র কিভাবে অঙ্কন করা যায় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ফাংশনের লেখ অঙ্কন করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	ফাংশনের লেখচিত্র, স্থানাংক, মূলবিন্দু, চতুর্ভাগ

মূলপাঠ

ফাংশনের লেখচিত্র

ফাংশন, অন্বয়, সমীকরণ বা অসমতার চলক সম্পর্কিত আপেক্ষিক চিত্ররূপ হলো লেখচিত্র। লেখচিত্র বিমূর্তকে মূর্ত করে তোলে। লেখচিত্রের সাহায্যে কোন তথ্য বা বিবৃতির সর্বায়ন করা সম্ভব। লেখচিত্রের সাহায্যে সমস্যার বা সমীকরণের সমাধান অত্যন্ত সহজেই করা সম্ভব। একটি রাশির পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অপর রাশির কী রকম পরিবর্তন হয় তা লেখচিত্রের সাহায্যে জানা যায়।

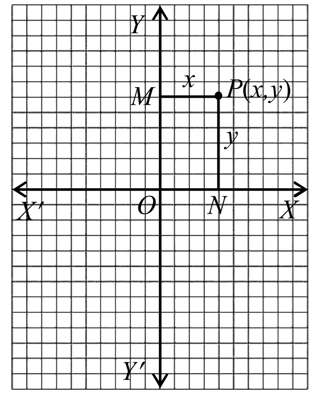


লেখচিত্রের মাধ্যমে গণিতের অন্যান্য শাখার সাথে জ্যামিতিক সম্পর্ক স্থাপিত হয়। ফরাসি দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্ত (Rene Descartes : 1596-1650) সর্বপ্রথম বীজগণিত ও জ্যামিতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনে অগ্রণী ভূমিকা পালন করেন। তিনি কোনো সমতলে পরস্পর লম্বভাবেছেদী দুইটি ফাংশনের সাহায্যে বিন্দুর অবস্থান সুনির্দিষ্টভাবে নির্ণয়ের মাধ্যমে সমতলীয় জ্যামিতিতে আধুনিক ধারা প্রবর্তন করেন। তিনি পরস্পর লম্বভাবেছেদী সরলরেখা দুইটিকে অক্ষরেখা হিসাবে আখ্যায়িত করেন এবং অক্ষদ্বয়ের ছেদ বিন্দুকে মূলবিন্দু বলেন।

কোনো সমতলে পরস্পর লম্বভাবেছেদী সরলরেখা দু'টির একটি আনুভূমিক রেখা XOX', যাকে বলা হয় x-অক্ষ এবং অপরটি উলম্ব রেখা YOY', যাকে বলা হয়

y-অক্ষ। অক্ষদ্বয়ের ছেদ বিন্দু O কে মূলবিন্দু বলা হয়। এই উভয় অক্ষধারী তলকে বলা হয় কার্তেসীয় তল।

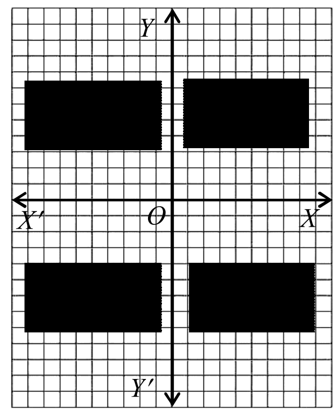
স্থানাংক (Coordinate)



দুইটি অক্ষের সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অক্ষদ্বয়ের লম্ব দূরত্বের যথাযথ চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে ঐ বিন্দুর স্থানাংক বলা হয়।

মনে করুন, সমতলস্থ P যে কোন বিন্দু। P বিন্দু থেকে XOX' এবং YOY' এর উপর যথাক্রমে PN ও PM লম্ব টানুন। ফলে, $PM = ON = YOY'$ হতে P এর লম্ব দূরত্ব এবং $PN = OM = XOX'$ হতে P এর লম্ব দূরত্ব। PM ও PN কে P বিন্দুর স্থানাংক বলে। যদি $PM = x$ এবং $PN = y$ হয় তবে P এর স্থানাংক x এবং y অথবা $P(x, y)$। এখানে x-কে ভুজ বা x স্থানাংক এবং y-কে কোটি বা y স্থানাংক বলা হয়।

চতুর্ভাগ (Quadrant)



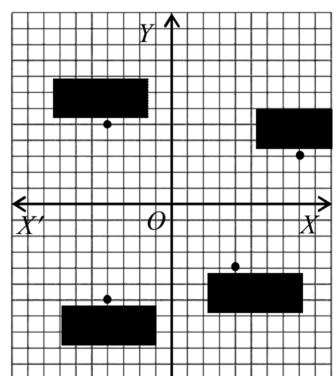
স্থানাংকের অক্ষদ্বয় সমতলকে চারভাগে ভাগ করে। এই চারভাগের প্রত্যেক ভাগকে একটি চতুর্ভাগ বলা হয়। $XOY, YOX', X'OY'$ ও $Y'OX$ এই চারটি ভাগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলা হয়।

চতুর্ভাগ	স্থানাংক
১ম চতুর্ভাগ	ভুজ ও কোটি উভয়ই ধনাত্মক: $x > 0, y > 0$
২য় চতুর্ভাগ	ভুজ ঋণাত্মক ও কোটি ধনাত্মক: $x < 0, y > 0$
৩য় চতুর্ভাগ	ভুজ ও কোটি উভয়ই ঋণাত্মক: $x < 0, y < 0$
৪র্থ চতুর্ভাগ	ভুজ ধনাত্মক ও কোটি ঋণাত্মক: $x > 0, y < 0$

কোন বিন্দুর স্থানাংক দেওয়া থাকলে স্থানাংকগুলো xy সমতলের নির্দিষ্ট চতুর্ভাগে স্থাপন করে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1: ছক কাগজে $A(8,3), B(-4,5), C(-4,-6), D(4,-4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করুন।

সমাধান: ছক কাগজে XOX', YOY' অক্ষদ্বয় আঁকুন এবং অক্ষদ্বয় পরস্পর মূলবিন্দু O তে ছেদ করেছে। ছক কাগজে প্রতি ক্ষুদ্র বর্গের বাহুকে একক ধরে বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করুন।



A বিন্দুর স্থানাংক $A(8,3)$ অর্থাৎ ১ম সংখ্যাটি ধনাত্মক যা x-অক্ষ বরাবর ডানে 8 একক দূরে অবস্থিত। আবার, ২য় সংখ্যাটি ধনাত্মক যা y-অক্ষ বরাবর উপরে 3 একক দূরে অবস্থিত। অতএব A বিন্দুটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করবে যা চিত্রে নির্দেশিত হলো।

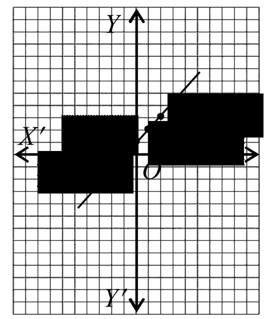
B বিন্দুর স্থানাংক $B(-4,5)$ অর্থাৎ ১ম সংখ্যাটি ঋণাত্মক যা x-অক্ষ বরাবর বামে 4 একক দূরে অবস্থিত। আবার, ২য় সংখ্যাটি ধনাত্মক যা y-অক্ষ বরাবর উপরে 5 একক দূরে অবস্থিত। অতএব B বিন্দুটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে যা চিত্রে নির্দেশিত হলো।

C বিন্দুর স্থানাংক $C(-4,-6)$ অর্থাৎ ১ম সংখ্যাটি ঋণাত্মক যা x-অক্ষ বরাবর বামে 4 একক দূরে অবস্থিত। আবার, ২য় সংখ্যাটি ঋণাত্মক যা y-অক্ষ বরাবর নিচে 6 একক দূরে অবস্থিত।
অতএব C বিন্দুটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে যা চিত্রে নির্দেশিত হলো।

D বিন্দু স্থানাংক $D(4,-4)$ অর্থাৎ ১ম সংখ্যাটি ধনাত্মক যা x-অক্ষ বরাবর ডানে 4 একক দূরে অবস্থিত। আবার, ২য় সংখ্যাটি ঋণাত্মক যাহা y-অক্ষ বরাবর নিচে 4 একক দূরে অবস্থিত।
অতএব D বিন্দুটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে যা চিত্রে নির্দেশিত হলো।

উদাহরণ 2: ছক কাগজে $(-1,0), (0,1), (1,2)$ এবং $(2,3)$ বিন্দু চারটি স্থাপন করে দেখান যে, বিন্দু চারটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান: ছক কাগজে প্রতি ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকে একক ধরে বিন্দুগুলো স্থাপন করা হলো। বিন্দুগুলো হলো A, B, C, D । তখন A, B, C, D যোগ করুন। তাহলে দেখা যাচ্ছে বিন্দুগুলো একই সরলরেখায় অবস্থিত।

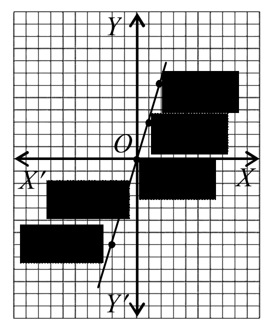


উদাহরণ 3: $y = 3x$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

সমাধান: x-এর কয়েকটি মানের জন্য y-এর কয়েকটি মান নির্ণয় করে তালিকা তৈরি করুন-

x	0	1	-1	2	-2	3
y	0	3	-3	6	-6	9

ছক কাগজে প্রতি ক্ষুদ্র বর্গের বাহুকে একক ধরে, তালিকার বিন্দুগুলো চিহ্নিত করুন এবং বিন্দুগুলো যোগ করুন।



শিক্ষার্থীর কাজ	
	1. ছক কাগজে $A(-5,3), B(10,-12), C(11,13)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করুন।
	2. $y = 2-3x$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করুন, যেখানে $-3 \le x \le 3$

সারসংক্ষেপ

- ফাংশন, অন্বয়, সমীকরণ বা অসমতার চলক সম্পর্কিত আপেক্ষিক চিত্ররূপ হলো লেখাচিত্র। লেখচিত্র বিমূর্তকে মূর্ত করে তোলে।
- দুইটি অক্ষের সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অক্ষদ্বয়ের লম্বদূরত্বের যথাযথ চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে ঐ বিন্দুর স্থানাংক বলা হয়।
- স্থানাংকের অক্ষদ্বয় সমতলকে চারভাগে ভাগ করে। এই চারভাগের প্রত্যেক ভাগকে একটি চতুর্ভাগ বলা হয়। $XOY, YOX', X'OY'$ ও $Y'OX$ এই চারটি ভাগকে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলা হয়।
- কোন বিন্দুর স্থানাংক দেওয়া থাকলে স্থানাংকগুলো xy সমতলের নির্দিষ্ট চতুর্ভাগে স্থাপন করে বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করা যায়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ২.৫

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-7):

1. ফাংশনের চিত্ররূপকে কী বলা হয়?
   (ক) লেখচিত্র (খ) মানচিত্র (গ) খন্ডচিত্র (ঘ) রংচিত্র
2. সর্বপ্রথম বীজগণিত ও জ্যামিতির মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনে অগ্রণী ভূমিকা পালন করেন কে?
   (ক) লিবনীজ (খ) নিউটন (গ) রেনে দেকার্ত (ঘ) জন ভেন
3. মূলবিন্দুর স্থানাংক কত?
   (ক) (x,y) (খ) $(0,0)$ (গ) 0 (ঘ) 1
4. x-অক্ষের উপর কোনো বিন্দুর কোটি কত?
   (ক) 1 (খ) 0 (গ) X (ঘ) y
5. y-অক্ষের উপর কোনবিন্দুর ভুজ কত?
   (ক) 1 (খ) 0 (গ) x (ঘ) y
6. দুইটি অক্ষের সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে অক্ষদ্বয়ের লম্ব দূরত্বের যথাযথ চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে ঐ বিন্দুর কী বলা হয়?
   (ক) রেখা (খ) চিত্র (গ) মানচিত্র (ঘ) স্থানাংক
7. $y=2x$ ফাংশনের লেখচিত্র কেমন হবে?
   (ক) ত্রিভুজ (খ) সরলরেখা (গ) বক্ররেখা (ঘ) বৃত্ত

8. ছক কাগজে $A(1,3), B(2,6)$ ও $C(-2,-6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করুন।
9. ছক কাগজে $(-1,9), (5,10), (3,7)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে নির্ণয় করুন যে, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত কি না?
10. নিম্নলিখিত ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করুন।
    (i) $x=4$ (ii) $y=5$
    (iii) $y=6x$ (iv) $y=6-2x$
    (v) $y=2x+5$ (vi) $y=x-7$
    (vii) $x+y=2$
11. দেখান যে, $(0,2), (8,4)$ এবং $(5,7)$ বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।