ইউনিট ১৪

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometric Ratio)

ভূমিকা

গণিতের একটি ধারা বা বিভাগ হল ত্রিকোণমিতি। ত্রিকোণমিতি হল জ্যামিতির সম্প্রসারিত শাখা। অনেক ক্ষেত্রেই দূরত্ব বা উচ্চতা সোজাসুজি পরিমাপ করার উপায় ছিল না। ত্রিভুজের বিভিন্ন অংশ নির্ণয়ের মাধ্যমেই শুরু হয় এরূপ দূরত্ব বা উচ্চতাকে সূক্ষ্ম ও সঠিকভাবে পরিমাপের। এভাবেই উদ্ভব হয় ত্রিকোণমিতি বা Trigonometry। গ্রীক শব্দ Tri (তিন), Gon (কোণ) ও Metron (পরিমাপ) দ্বারা Trigonometry শব্দটি গঠিত। ত্রিকোণমিতিতে ত্রিভুজের বাহু ও কোণের মধ্যে সম্পর্ক বিষয়ে পাঠদান করা হয়। কোন কিছুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার হয়ে থাকে। গ্রীক পন্ডিত হিপার্কাস (Hipparchus: 190-120BC) প্রথম রীতিবদ্ধ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও সূত্রাবলি আবিষ্কার করেন। তাই তাকে ত্রিকোণমিতির জনক বলা হয়। পরবর্তীতে টলেমি (Ptolemy of Alexandria) হিপার্কাসের ধারণাসমূহ সংগঠিত করেন এবং অনেক সমস্যার সমাধান করেন। এ ইউনিটে সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও অনুপাতগুলোর সম্পর্ক এবং বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নিয়ে আলোচনা করা হবে।

হিপার্কাস (১৯০-১২০ বিসি)

টলেমি (৯০-১৬৮ এডি)

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবেন,
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	**ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন**

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১: সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও অনুপাতগুলোর সম্পর্ক

পাঠ ২: বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাঠ ১ সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও অনুপাতগুলোর সম্পর্ক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

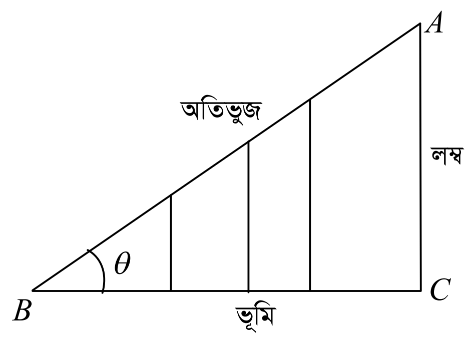
- সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর নামকরণ করতে পারবেন,
- সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাতসমূহের ধ্রুবতা যাচাই করে প্রমাণ ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবেন,
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বর্ণনা করতে পারবেন,
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রমাণ করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সমকোণী ত্রিভুজ, সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ, ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, ধ্রুবতা, ত্রিকোণমিতিক অভেদ

মূলপাঠ

সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর নামকরণ

যেকোনো একটি কোণের দুটি বাহু থাকে। কোনো একটি বাহুর উপর অসংখ্য বিন্দু চিহ্নিত করে এসব বিন্দু থেকে অপর বাহুটির উপর লম্ব টানলে অসংখ্য সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যায়। সমকোণের বিপরীত বাহুটিকে অতিভূজ, নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণটির বিপরীত বাহুটিকে লম্ব এবং অপর বাহুটিকে ভূমি বলে। অর্থাৎ সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে তিনটি ভিন্ন নামকরণ করা হয়। যথা- অতিভুজ, ভূমি ও লম্ব।



উপরের চিত্রে $\angle ABC = \theta$ কোণের জন্য অতিভূজ AB, ভূমি BC ও লম্ব AC।

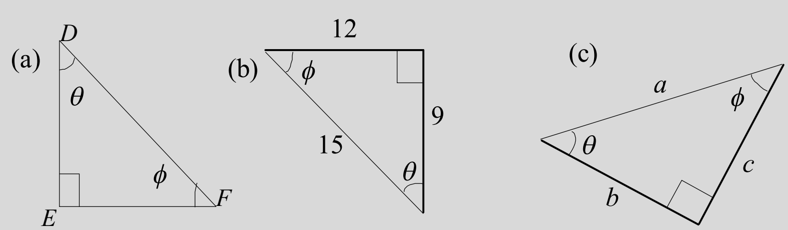
বিশেষ দ্রষ্টব্যঃ জ্যামিতিক চিত্রের শীর্ষবিন্দু চিহ্নিত করার জন্য ইংরেজি বড় হাতের বর্ণ ও বাহু নির্দেশ করতে ইংরেজি ছোট হাতের বর্ণ ব্যবহার করা হয়। কোণ নির্দেশের জন্য প্রায়শই গ্রিক বর্ণ ব্যবহৃত হয়। এসব বর্ণগুলোর ছয়টি বহুল ব্যবহৃত বর্ণ হলোঃ

alpha (α)	beta (β)	gamma (γ)	theta (θ)	phi (ϕ)	omega (ω)
আলফা	বিটা	গামা	থিটা	ফাই	ওমেগা

প্রাচীন গ্রিসের বিখ্যাত সব গণিতবিদদের হাত ধরেই জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতিতে গ্রিক বর্ণগুলো ব্যবহার হয়ে আসছে।

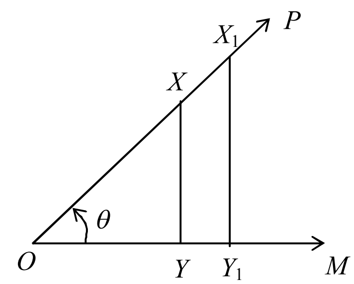
শিক্ষার্থীর কাজ

θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভূজ, ভূমি ও লম্ব নির্দেশ করুন।



সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাতসমূহের ধ্রুবতা

মনে করুন, $\angle POM$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OP বাহুতে যে কোন একটি বিন্দু X নিন। X থেকে OM বাহু পর্যন্ত XY লম্ব টানুন। ফলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ XOY গঠিত হলো। এই ΔXOY এর OX, OY ও XY বাহুগুলোর যে তিনটি অনুপাত পাওয়া যায় তাদের মান OP বাহুতে নির্বাচিত X বিন্দুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে না।



$\angle POM$ কোণের OP বাহুতে যে কোন বিন্দু X ও X_1 থেকে OM বাহু পর্যন্ত যথাক্রমে XY ও X_1Y_1 লম্ব অঙ্কন করলে ΔXOY ও ΔX_1OY_1 দুইটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভূজ গঠিত হয়।

এখন ΔXOY ও ΔX_1OY_1 সদৃশ হওয়ায়,

$$\frac{XY}{X_1Y_1} = \frac{OX}{OX_1} \text{ বা, } \frac{XY}{OX} = \frac{X_1Y_1}{OX_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

$$\frac{OY}{OY_1} = \frac{OX}{OX_1} \text{ বা, } \frac{OY}{OX} = \frac{OY_1}{OX_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

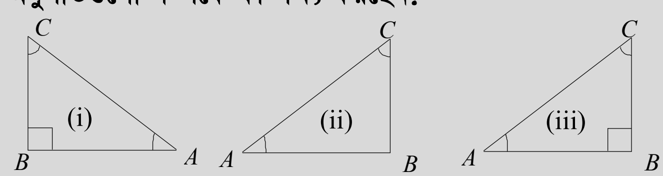
$$\frac{XY}{X_1Y_1} = \frac{OY}{OY_1} \text{ বা, } \frac{XY}{OY} = \frac{X_1Y_1}{OY_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iii)}$$

অর্থাৎ, অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি ধ্রুবক। এই অনুপাতসমূহকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলে।

> নির্দিষ্ট পরিমাণ কোণের জন্য যে কোন নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ধ্রুবক।

শিক্ষার্থীর কাজ

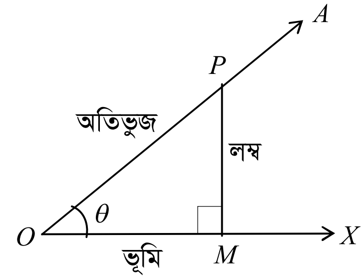
নিচের তিনটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে সারণিটি পূরণ করুন। ত্রিভুজের অনুপাতগুলো সম্পর্কে কী লক্ষ্য করছেন?



বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	AB	AC	BC/AC	AB/AC	BC/AB

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

একটি নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণের জন্য যে অসংখ্য সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যায় তাদের প্রত্যেকের বাহু তিনটির জন্য তিনটি অনুপাত; $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$, $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ এবং এদের বিপরীত তিনটিসহ মোট ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায়। এই অনুপাতগুলোকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলে।



কাজেই ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলতে সাধারণত একটি সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্য থেকে যেকোনো দুটি বাহু নিয়ে গঠিত অনুপাতকে বুঝায়।

এই অনুপাত সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ ব্যতীত অপর যেকোনো একটি কোণের প্রক্ষিতে গঠিত হয়।

ব্যাখ্যা: মনে করুন, $\angle AOX = \angle POM = \theta$ [θ একটি গ্রীক অক্ষর, কোণের প্রতীক হিসাবে ব্যবহৃত হয়।]
ΔPOM একটি সমকোণী ত্রিভুজ। θ কোণের সাপেক্ষে ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে নামকরণ করা হয়:
PM = লম্ব [θ কোণের বিপরীত বাহু], OM = ভূমি [θ কোণের সংলগ্ন বাহু] এবং OP = অতিভুজ [সমকোণের বিপরীত বাহু]।

এখন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সংজ্ঞানুযায়ী:

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PM}{OP}; \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{PM}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OM}{OP}; \qquad \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OP}{OM}$$

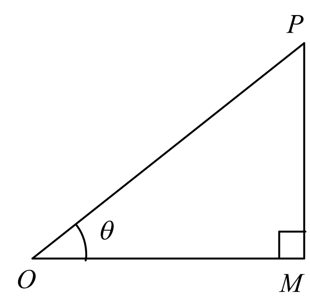
$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{PM}{OM}; \qquad \cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OM}{PM}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য: sine, cosine, tangent, cotangent, secant, cosecant-কে সংক্ষেপে যথাক্রমে sin, cos, tan, cot, sec, cosec লেখা হয়।

এখানে লক্ষ্য করুন যে, $\sin\theta$ প্রতীকটি θ কোণের sin-এর অনুপাতকে বুঝায়; sin ও θ এর গুণফলকে নয়। θ বাদে sin আলাদা কোন অর্থ বহন করে না। ত্রিকোণমিতিক অন্যান্য অনুপাতগুলোর ক্ষেত্রেও বিষয়টি প্রযোজ্য।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর সম্পর্ক

চিত্রে $\angle POM = \theta$
অতএব সংজ্ঞানুযায়ী,



(i) $\sin\theta = \dfrac{PM}{OP}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{OP}{PM}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{1}{\frac{OP}{PM}} = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

(ii) $\cos\theta = \dfrac{OM}{OP}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{OP}{OM}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{1}{\frac{OP}{OM}} = \dfrac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

(iii) $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM}$

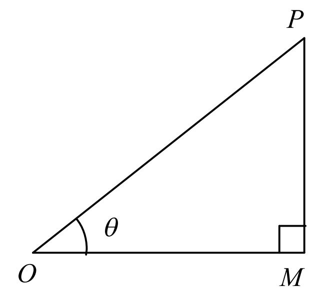
$\therefore \tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

(iv) $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ [লব ও হর উভয়কে OP দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

অনুরূপভাবে, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলী



(i) চিত্র হতে, পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা অনুযায়ী

$PM^2 + OM^2 = OP^2$

বা, $\dfrac{PM^2}{OP^2} + \dfrac{OM^2}{OP^2} = \dfrac{OP^2}{OP^2}$ [উভয় পক্ষকে OP^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\dfrac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\dfrac{OM}{OP}\right)^2 = 1$

বা, $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

$\boxed{\text{বা, } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

$\boxed{\sin^2\theta \text{ দ্বারা } \sin\theta \text{ এর বর্গ বুঝায় অর্থাৎ } \sin^2\theta = (\sin\theta)^2}$

(ii) $PM^2 + OM^2 = OP^2$

বা, $\dfrac{PM^2}{OM^2} + \dfrac{OM^2}{OM^2} = \dfrac{OP^2}{OM^2}$ [OM^2 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

বা, $\left(\dfrac{PM}{OM}\right)^2 + 1 = \left(\dfrac{OP}{OM}\right)^2$

বা, $(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

বা, $\boxed{\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1}$

(iii) আবার, $PM^2 + OM^2 = OP^2$

বা, $\dfrac{PM^2}{PM^2} + \dfrac{OM^2}{PM^2} = \dfrac{OP^2}{PM^2}$ [PM^2 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

বা, $1 + \left(\dfrac{OM}{PM}\right)^2 = \left(\dfrac{OP}{PM}\right)^2$

বা, $1 + (\cot\theta)^2 = (\operatorname{cosec}\theta)^2$

বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

বা, $\boxed{\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1}$

শিক্ষার্থীর কাজ

এবার আসুন শিক্ষার্থীবৃন্দ, নিচের ছকে বাম পাশের সাথে ডান পাশের মিল করুন।

1. $\tan\theta$	(a) 1
2. $\sin\theta$	(b) $\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$
3. $\cos\theta$	(c) $\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$
4. $\cot^2\theta$	(d) $\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$
5. $\sin^2\theta + \cos^2\theta$	(e) $1 + \tan^2\theta$
6. $\sec^2\theta$	(f) $\operatorname{cosec}^2\theta - 1$

উদাহরণ 1: θ সূক্ষ্মকোণ এবং $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ হলে, $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{a}{b}$

বা, $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{a^2}{b^2}$

বা, $\dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \dfrac{a^2}{b^2}$

বা, $b^2\sin^2\theta = a^2(1-\sin^2\theta)$

বা, $b^2\sin^2\theta = a^2 - a^2\sin^2\theta$

বা, $a^2\sin^2\theta + b^2\sin^2\theta = a^2$

বা, $(a^2+b^2)\sin^2\theta = a^2$

বা, $\sin^2\theta = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

আবার, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

বা, $\cos^2\theta = 1 - \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$

বা, $\cos^2\theta = \dfrac{a^2+b^2-a^2}{a^2+b^2} = \dfrac{b^2}{a^2+b^2}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

উদাহরণ 2: $\sin A = \dfrac{12}{13}$ হলে, $\cot A$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$

$$= \pm\frac{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}{\frac{12}{13}} = \pm\frac{\sqrt{1-\frac{144}{169}}}{\frac{12}{13}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{\frac{169-144}{169}}}{\frac{12}{13}} = \pm\frac{\sqrt{\frac{25}{169}}}{\frac{12}{13}} = \pm\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \pm\frac{5}{12}$$

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

সমাধান: $\sin^4\theta - \cos^4\theta = (\sin^2\theta)^2 - (\cos^2\theta)^2$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$

$= 1.(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = \sin^2\theta - \cos^2\theta$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4: $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ হলে, দেখান যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

সমাধান: $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$

$\Rightarrow (\cos A + \sin A)^2 = (\sqrt{2}\cos A)^2$

$\Rightarrow \cos^2 A + \sin^2 A + 2\cos A \sin A = 2\cos^2 A$

$\Rightarrow 1 + 2\cos A \sin A = 2\cos^2 A$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 A - \cos^2 A = -2\cos A \sin A$

$\Rightarrow \sin^2 A - \cos^2 A = -2\cos A \sin A$

$\Rightarrow \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos A \sin A$

$\Rightarrow (\cos A + \sin A)(\cos A - \sin A) = 2\cos A \sin A$

$\Rightarrow \sqrt{2}\cos A (\cos A - \sin A) = 2\cos A \sin A$

$\therefore \cos A - \sin A = \dfrac{2\cos A \sin A}{\sqrt{2}\cos A} = \sqrt{2}\sin A$ (প্রমাণিত)

বিকল্প প্রমাণ

$\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$

$\Rightarrow \sin A = \sqrt{2}\cos A - \cos A$

$\Rightarrow \sin A = (\sqrt{2} - 1)\cos A$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{\sin A}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{(\sqrt{2} + 1)\sin A}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$

$\Rightarrow \cos A = (\sqrt{2} + 1)\sin A = \sqrt{2}\sin A + \sin A$

$\Rightarrow \cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

উদাহরণ 5: দেখান যে, $\dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1} = \dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$

সমাধান: বামপক্ষ $= \dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$ $[\because \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1]$

$= \dfrac{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta) - (\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \dfrac{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta)(1 - \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$= \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 6: দেখান যে, $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}$

সমাধান: বামপক্ষ $= (\tan\theta + \sec\theta)^2 = \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$

$= \left(\dfrac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}\right)^2 = \dfrac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}$ $[\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta]$

$= \dfrac{(1 + \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)} = \dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}$ = ডানপক্ষ

$\therefore (\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$ (QED)

QED $\Rightarrow$ Quod Erat Demonstrandum (ল্যাটিন শব্দ) $\Rightarrow$ যা প্রমাণ করার কথা ছিল তা প্রমাণিত হল।

কর্মপত্র 1: $\tan A + \sin A = m$ এবং $\tan A - \sin A = n$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{(mn)}$

সমাধান: বামপক্ষ $= m^2 - n^2 = (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2$

$= 4\tan A \sin A \qquad [\because (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab]$

$= 4\sqrt{\tan^2 A \sin^2 A} = 4\sqrt{\tan^2 A(1-\cos^2 A)}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \tan^2 A\cos^2 A}$

$= 4\sqrt{\tan^2 A - \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\cos^2 A}$ (বাকী অংশ নিজে করুন)

কর্মপত্র 2: প্রমাণ করুন যে, $\sec\theta - \tan\theta = \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

ইঙ্গিত: বামপক্ষ $= \sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{\left(\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$ (বাকী অংশ নিজে করুন)

কর্মপত্র 3: দেখান যে, $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

ইঙ্গিত: বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}} = \dfrac{1-\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$

(বাকী কাজ নিজে করুন, প্রয়োজনে জোড়ায় বা দলীয়ভাবে করুন। একান্ত প্রয়োজনে শিক্ষকের সহায়তা নিন।)

কর্মপত্র 4: যদি $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

ইঙ্গিত: $\sin^2 A + \sin^4 A = 1 \Rightarrow \sin^4 A = 1 - \sin^2 A$

$\Rightarrow \sin^4 A = \cos^2 A \Rightarrow \dfrac{\sin^4 A}{\cos^4 A} = \dfrac{\cos^2 A}{\cos^4 A} \Rightarrow \tan^4 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$

(বাকী কাজ নিজে করুন, প্রয়োজনে জোড়ায় বা দলীয়ভাবে করুন। একান্ত প্রয়োজনে শিক্ষকের সহায়তা নিন।)

কর্মপত্র 5: যদি $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় করুন।

ইঙ্গিত: $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot A = \sqrt{3}$

প্রদত্ত রাশি, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A} = \dfrac{1+\cot^2 A - 1 - \tan^2 A}{1+\cot^2 A + 1 + \tan^2 A}$

(বাকী কাজ নিজে করুন, প্রয়োজনে জোড়ায় বা দলীয়ভাবে করুন। একান্ত প্রয়োজনে শিক্ষকের সহায়তা নিন।)

কর্মপত্র 6: $\cot A = \dfrac{a}{b}$ হলে, $\dfrac{b\sin A - a\cos A}{b\sin A + a\cos A}$ এর মান নির্ণয় করুন।

ইঙ্গিতঃ $\cot A = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a\cos A}{b\sin A} = \frac{a^2}{b^2}$ (বাকী অংশ নিজে করুন।)

সারসংক্ষেপ

- একটি নির্দিষ্ট সূক্ষ্মকোণের জন্য যে অসংখ্য সমকোণী ত্রিভুজ পাওয়া যায় তাদের প্রত্যেকের বাহু তিনটির জন্য তিনটি অনুপাত; $\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, $\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$, $\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ এবং এদের বিপরীত তিনটিসহ মোট ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায়। এই অনুপাতগুলোকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলে।
- $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$; $\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$; $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$; $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$; $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$; $\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ ।
- $\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$; $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$; $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$; $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$; $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$; $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$; $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$; $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

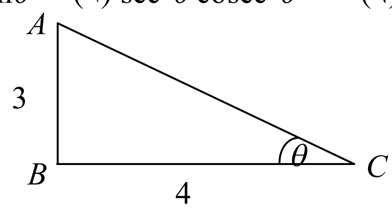
পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-10):

1. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন:
   (i) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
   (ii) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$
   (iii) $\cot^2\theta = 1 - \tan^2\theta$
   উপরের তথ্যের আলোকে নিম্নের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

2. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cot\theta$ এর মান কোন্‌টি?
   (ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (খ) 1 (গ) $\sqrt{3}$ (ঘ) 2

3. $(\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta)$ এর মান কত?
   (ক) $\cos\theta\sin\theta$ (খ) $\sec^2\theta\,\text{cosec}^2\theta$ (গ) $\cos\theta\,\text{cosec}\theta$ (ঘ) $\sin\theta\cos\theta$



চিত্র অনুযায়ী 4 ও 5 নং প্রশ্নের উত্তর দিন:

4. $\sin\theta$ এর মান কোন্‌টি?

(ক) $\frac{3}{4}$ (খ) $\frac{4}{3}$ (গ) $\frac{3}{5}$ (ঘ) $\frac{4}{5}$

5. $\cot\theta$ এর মান কোনটি?

(ক) $\frac{3}{4}$ (খ) $\frac{3}{5}$ (গ) $\frac{4}{5}$ (ঘ) $\frac{4}{3}$

6. $\sin\theta\sec\theta$ এর মান কত?

(ক) $\sin\theta$ (খ) $\cos\theta$ (গ) $\tan\theta$ (ঘ) $\cot\theta$

7. $\tan\theta\,\text{cosec}\,\theta =$ কত?

(ক) $\sin\theta$ (খ) $\cos\theta$ (গ) $\sec\theta$ (ঘ) $\text{cosec}\,\theta$

8. $1+\frac{\sin^2 A}{1-\sin^2 A} =$ কত?

(ক) $\cos^2 A$ (খ) $\sec^2\theta$ (গ) $\sin^2\theta$ (ঘ) $\text{cosec}^2 A$

9. $\cos A = \frac{12}{13}$ হলে, $\sin A =$ কত?

(ক) $\frac{5}{13}$ (খ) $\frac{5}{12}$ (গ) $\frac{12}{13}$ (ঘ) $\frac{13}{12}$

10. $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cos^2\theta =$ কত?

(ক) $\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{1}{4}$ (গ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ঘ) $\frac{3}{4}$

11. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, AB = 29 সে.মি, BC = 21 সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ এর মান নির্ণয় করুন।

12. প্রমাণ করুন, $\frac{1}{1+\tan^2 A}+\frac{1}{1+\cot^2 A}=1$

13. প্রমাণ করুন, $(1+\tan A - \sec A)(1+\cot A + \text{cosec}\,A) = 2$

14. প্রমাণ করুন, $\frac{\text{cosec}\,A}{\text{cosec}\,A-1}+\frac{\text{cosec}\,A}{\text{cosec}\,A+1}=2\sec^2 A$

15. প্রমাণ করুন, $\sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}}=\cot A+\text{cosec}\,A$

16. যদি $a^2\sec^2\theta - b^2\tan^2\theta = c^2$ হয়, তবে দেখান যে, $\text{cosec}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}$

17. $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $\cos^4 A + \cos^2 A = 1$

18. $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় করুন।

19. প্রমাণ করুন, $\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}=0$

20. প্রমাণ করুন, $\frac{1}{2-\sin^2 A}-\frac{1}{2+\tan^2 A}=1$

পাঠ ২ বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- প্রমিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন এবং তা প্রমাণ করতে পারবেন,
- পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, সমকোণ, পূরক কোণ

মূলপাঠ

প্রমিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios of Standard Angles)

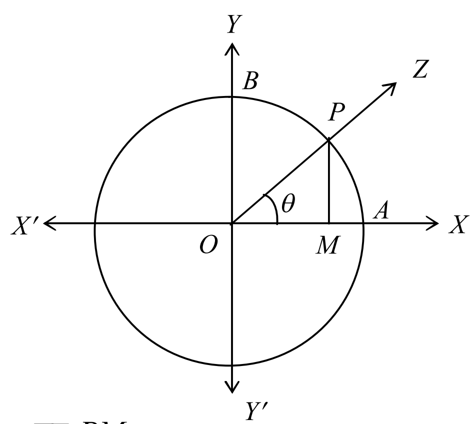
কাঁটা-কম্পাস ব্যবহার করে 30^o, 45^o, 60^o এবং 90^o পরিমাপের কোণগুলো অঙ্কন করা যায়। কম্পাসের সাহায্যে অঙ্কনযোগ্য কোণগুলোকেই প্রমিত বা আদর্শ কোণ বলা হয়। ত্রিকোণমিতি ভিত্তিক বাস্তব সমস্যা সমাধানের অধিকাংশ ক্ষেত্রেই এই নির্দিষ্ট কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান জানা আবশ্যক হয়।

জ্যামিতিক পদ্ধতিতে এই নির্দিষ্ট কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান অর্থাৎ $\sin60^o$, $\cos30^o$, $\tan45^o$ ইত্যাদির মান নির্ণয় করা যায়। এই মানগুলো মনে রাখার সহজ কৌশল আয়ত্ব করে ত্রিকোণমিতিক সমস্যাসমূহের সমাধান করা যেতে পারে।

ত্রিকোণমিতিক মানের বাস্তবভিত্তিক প্রয়োগের ক্ষেত্রে এই মানগুলো নির্ণয়ের পদ্ধতির চেয়ে মানগুলো মনে রাখা অধিকতর গুরুত্বপূর্ণ।

90^o ও 0^o কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

ধরা যাক, স্থানাংকিত তলে $\angle XOZ$ একটি সূক্ষ্মকোণ যার একবাহু OX, ধনাত্মক X-অক্ষ বরাবর এবং অপর OZ বাহু প্রথম ধনাত্মক চর্তুভাগে অবস্থিত। $\angle XOZ$-এর পরিমাপ 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, ও 0^o হলে, $\angle XOZ$ কে θ কোণের প্রমিত অবস্থান (Standard Position) বলা হয়। এরূপ অবস্থানে OX রশ্মিকে এই কোণের আদি বাহু (Initial Line) এবং OZ রশ্মিকে প্রান্তীয় বাহু (Terminal Line) বলা হয়।



এখন, মূলবিন্দু O কে কেন্দ্র করে 1 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন। অঙ্কিত বৃত্ত OX রশ্মিকে A বিন্দুতে, OY রশ্মিকে B বিন্দুতে ও OZ রশ্মিকে P বিন্দুতে ছেদ করে। উল্লেখ্য যে, P বিন্দু একটি ঘূর্ণায়মান বিন্দু।

$PM \perp OX$ আঁকুন। মনে করুন, P-এর স্থানাংক (x, y)

POM সমকোণী ত্রিভুজের $\angle POM = \theta$ বিবেচনায় নিলে, ভূমি $OM = x$, লম্ব $PM = y$।

সুতরাং $\cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{x}{1} = x$ [যেহেতু, $OP = 1$]

এবং $\sin\theta = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{y}{1} = y$;

P কে ঘুর্ণায়মান বিন্দু বিবেচনা করে, যখন P বিন্দু x-অক্ষের উপর অবস্থান করবে, তখন কোণ θ এর মান হয় শূন্য।
এ অবস্থানে লম্বের দৈর্ঘ্য শূন্য হবে এবং ভূমির দৈর্ঘ্য অতিভুজের সমান হবে।

অর্থাৎ $\theta = 0^o$ হলে, $PM = 0$, $OP = OM = x$ হবে।

$\therefore\ \cos 0^{o} = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{x}{x} = 1 \Rightarrow \cos 0^{o} = 1$

আবার, $\sin 0^{o} = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{0}{x} = 0 \Rightarrow \sin 0^{o} = 0$

P কে ঘূর্ণায়মান বিন্দু ধরে, যখন P বিন্দু y-অক্ষের উপর অবস্থান করবে, তখন ভূমির দৈর্ঘ্য শূন্য হবে এবং লম্ব অতিভূজের সমান হবে।

অর্থাৎ $\theta = 90^{o}$ হলে, $PM = OP = y,\ OM = 0$ হবে।

$\sin 90^{0} = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{y}{y} = 1 \Rightarrow \sin 90^{o} = 1$

আবার, $\cos 90^{o} = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{0}{y} = 0 \Rightarrow \cos 90^{o} = 0$

$\tan 90^{0} = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{0} \Rightarrow$ অনির্ণেয়/অসংজ্ঞায়িত (কখনও লেখা হয় অসীম ∞)।

কর্মপত্র 1: 0^{o} কোণের জন্য sin এবং cos অনুপাতের মান ব্যবহার করে অন্যান্য অনুপাতের মান নির্ণয় করুন।

কর্মপত্র 2: 90^{o} কোণের জন্য sin এবং cos অনুপাতের মান ব্যবহার করে অন্যান্য অনুপাতের মান নির্ণয় করুন।

কর্মপত্র 3: $\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sqrt{n}$ যখন, $\theta = 0^{o}, 30^{o}, 45^{o}, 60^{o}, 90^{o}$ এবং $n = 0, 1, 2, 3, 4.$

(ক) প্রদত্ত সূত্র থেকে আদর্শ কোণগুলোর sin অনুপাতের মান নির্ণয় করুন।

(খ) sin-এর মানগুলোকে বিপরীতক্রমে সাজানো হলে সংশ্লিষ্ট কোণের cos অনুপাতের মান পাওয়া যায়-এর কারণ কী? কোণগুলোর cos অনুপাতের মান লিখুন।

(গ) আদর্শ কোণগুলোর tan অনুপাতের মান নির্ণয় করুন।

কর্মপত্র 4: (ক) কী শর্তে $\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sqrt{n}$ সূত্রটি প্রযোজ্য তা উল্লেখ করুন।

(খ) এ সূত্র প্রয়োগ করে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় কৌশল বর্ণনা করুন।

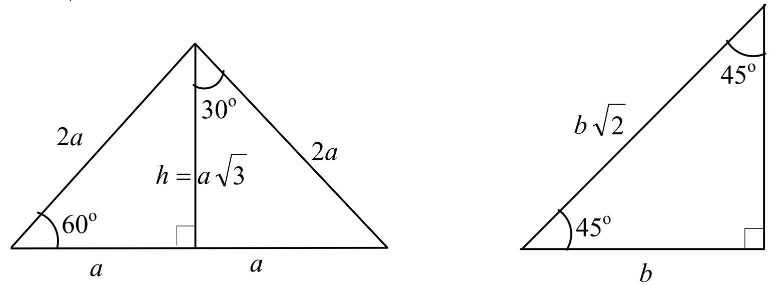
(গ) প্রদত্ত সূত্র থেকে আদর্শ কোণগুলোর cosec অনুপাতের মান নির্ণয় করুন।

$\Rightarrow$ এই sin, cos এবং tan অনুপাতের মানগুলোর গুণাত্মক বিপরীত (বা বিপরীত ভগ্নাংশের) মান হবে যথাক্রমে cosec, sec এবং cot অনুপাত বা ফাংশনের মান। তবে ভগ্নাংশের হরে শূন্য হলে তাকে অসংজ্ঞায়িত ধরা হয়; কখনওবা ∞ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

$\Rightarrow$ ∞ কে অসীম বলা হয়; এবং সাধারণ অর্থ হল, এমন একটি ভগ্নাংশ যার লবে যেকোনো অশূন্য সংখ্যা থাকতে পারে, তবে হরে থাকবে শূন্য।

ত্রিভুজ থেকে প্রমিত কোণের মান নির্ণয়

একটি সমবাহু ত্রিভুজ থেকে 30^{o} ও 60^{o} কোণের এবং সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ থেকে 45^{o} কোণের সকল ত্রকোণমিতিক অনুপাতের মান পাওয়া যায়।



সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণ 60^o। যেকোনো একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুতে লম্ব হয় এবং তাকে সমদ্বিখণ্ডন করে। এ লম্বের দৈর্ঘ্যই ত্রিভুজটির উচ্চতা h এর পরিমাপ। ত্রিভুজের প্রতি বাহুকে $2a$ ধরে পিথাগোরাসের সূত্র প্রয়োগ করে এর উচ্চতা দাঁড়ায়:

$a^2 + h^2 = (2a)^2 \Rightarrow a^2 + h^2 = 4a^2 \Rightarrow h^2 = 3a^2 \Rightarrow h = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$; (কারণ কী? ভেবে দেখুন)

h ত্রিভুজটির মধ্যমাও বটে। সমবাহু ত্রিভুজের অর্ধেক হিসেবে যে দুটি ত্রিভুজ হল, এগুলো কি ধরনের ত্রিভুজ? চিত্রে যে যে মান নির্দেশ করা হল, ব্যাখ্যা করুন।

যে কোণের অনুপাত নির্ণয় করতে হবে তা কোন্ সমকোণী ত্রিভুজে আছে বের করুন। সমকোণের বিপরীত বাহু সর্বদাই অতিভূজ হিসাবে বিবেচ্য। বিবেচ্য কোণের বিপরীত বাহুকে লম্ব এবং (অতিভুজ বাদে অপর) সংলগ্ন বাহুকে ভূমি ধরে অনুপাতের মান নিম্নোক্ত প্রশ্নের আলোকে নির্ণয় করার চেষ্টা করুন।

(i) 30^o এর সাইন মান নির্ণয় করার জন্য, সাইন অনুপাতে কোন্ বাহু লবে এবং কোন্ বাহু হরে থাকে?
(ii) যে কোণের মান নির্ণয় করতে হবে, সে কোণটি কোন্ সমকোণী ত্রিভুজে আছে?
(iii) যে ত্রিভুজে বিবেচ্য কোণটি আছে, তার অতিভুজ কত?

30^o কোণের বিপরীত বাহু (বা লম্ব) কত? সংলগ্ন বাহু কত?

$\sin 30^o = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{2a}{a} = \frac{1}{2}$, $\cos 30^o = \frac{\text{সংলগ্ন বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan 30^o = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সংলগ্ন বাহু}} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ইত্যাদি।

45^o এর অনুপাত নির্ণয় করার জন্য চিন্তা করুন: যে ত্রিভুজে 45^o কোণ আছে, তার অতিভুজ কত?
45^o কোণের বিপরীত বাহু কত? সংলগ্ন বাহু কত?
সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও লম্ব সমান (চিত্রে b ধরা হল) এবং সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের প্রতিটি 45^o।

$\therefore$ অতিভুজ $= \sqrt{b^2 + b^2} = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$;

$\tan 45^o = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সংলগ্ন বাহু}} = \frac{b}{b} = 1$ ইত্যাদি।

সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের একটি অপরটির দ্বিগুণ হলে ক্ষুদ্রতম বাহুটি অতিভুজের অর্ধেক হয়। এ ধারণাকে স্বীকার্য ধরেও 30^o ও 60^o কোণের অনুপাত সহজে নির্ণয় করা যায়।

কর্মপত্র 5: আদর্শ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের একটি ছক আংশিক পূরণ করে দেওয়া হল। বাকি অংশ পূরণ করুন:

কোণ → অনুপাত ↓	**0^o**	**30^o**	**45^o**	**60^o**	**90^o**	**যেভাবে মান পাওয়া যায়**
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	ক্রমিক চতুর্থাংশকে বর্গমূল করে
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	সাইনের মান বিপরীতক্রমে সাজিয়ে
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত	সাইন-মানকে কস-মান দ্বারা ভাগ করে
cot						ট্যান মানের গুণাত্মক বিপরীত
sec						কস-মানের গুণাত্মক বিপরীত
cosec						সাইন-মানের গুণাত্মক বিপরীত

উদাহরণ 1: দেখান যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, যদি $A = 30^o$ হয়।

প্রমাণ: বামপক্ষ $= \cos 3A = \cos(3.30^o) = \cos 90^o = 0$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$= 4\cos^3 30^o - 3\cos 30^o$ [A এর মান বসিয়ে]

$$= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} = 4.\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ, অর্থাৎ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ (প্রমাণিত)

লক্ষণীয়: $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ এটি একটি অভেদ, A এর যে কোন মানের জন্যই এটি সত্য। $A = 0^o$ এর জন্য সত্যতা যাচাই করুন।

উদাহরণ 2: দেখান যে, $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$; যেখানে $A = 30^o$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $A = 30^o$,

বামপক্ষ $= \sin 2A = \sin(2.30^o) = \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \dfrac{2\tan A}{1+(\tan A)^2} = \dfrac{2\tan 30^o}{1+(\tan 30^o)^2}$

$$= \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ $\Rightarrow \sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (প্রমাণিত)

লক্ষণীয়: এটি একটি অভেদ, A এর যে কোন মানের জন্যই এটি সত্য। $A = 0^o$ এবং 45^o মানের জন্য এর সত্যতা যাচাই করুন।

উদাহরণ 3: $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, দেখান যে, $A = 45^o$ এবং $B = 15^o$ হবে।

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ।

$2\cos(A+B) = 1 \Rightarrow \cos(A+B) = \dfrac{1}{2} = \cos 60^o$ $\quad [\because \cos 60^o = \dfrac{1}{2}]$

$\therefore A + B = 60^o$ .... (i)

আবার, $2\sin(A-B) = 1 \Rightarrow \sin(A-B) = \dfrac{1}{2} = \sin 30^o$ $\quad [\because \sin 30^o = \dfrac{1}{2}]$

$\therefore A - B = 30^o$ .... (ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে, $2A = 90^o \Rightarrow A = 45^o$

(i) নং হতে (ii) নং বিয়োগ করে, $2B = 30^o \Rightarrow B = 15^o$

$\therefore A = 45^o$ এবং $B = 15^o$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4: সমাধান করুন: $\sin\theta + \cos\theta = 1$; যখন $0^o \le \theta \le 90^o$

প্রমাণ: $\sin\theta + \cos\theta = 1$

$\Rightarrow (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1^2$

$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta.\cos\theta = 1$
$\Rightarrow 1 + 2\sin\theta.\cos\theta = 1$
$\Rightarrow 2\sin\theta.\cos\theta = 0$
$\Rightarrow \sin\theta.\cos\theta = 0$
$\Rightarrow \sin\theta = 0$ অথবা, $\cos\theta = 0$
$\Rightarrow \sin\theta = \sin0^o$ অথবা, $\cos\theta = \cos90^o$
$\therefore\ \theta = 0^o$ অথবা $\theta = 90^o$

উদাহরণ 5: সমাধান করুন: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$, যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$
$\Rightarrow \cos^2\theta - \sin^2\theta - 2 + 5\cos\theta = 0$
$\Rightarrow \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) - 2 + 5\cos\theta = 0$
$\Rightarrow \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta - 2 + 5\cos\theta = 0$
$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$
$\Rightarrow 2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$
$\Rightarrow 2\cos\theta\,(\cos\theta + 3) - 1\,(\cos\theta + 3) = 0$
$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)\,(\cos\theta + 3) = 0$
$\Rightarrow 2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta + 3 = 0$
$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ অথবা, $\cos\theta = -3$

কিন্তু $\cos\theta$ এর মান 1 এর বেশি নয় এবং -1 এর কম নয়: $-1 \le \cos\,\theta \le 1$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \cos\,60^o$ $\quad [\because\ \cos\,60^o = \frac{1}{2}]$

$\therefore\ \theta = 60^o$

উদাহরণ 6: দেখান যে, $3\tan^2 30^o + \frac{1}{4}\sec60^o + 5\cot^2 45^o - \frac{2}{3}\sin^2 60^o = 6.$

প্রমাণ: আমরা জানি, $\tan\,30^o = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec60^o = 2$; $\cot45^o = 1$ এবং $\sin60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বামপক্ষ $= 3\tan^2 30^o + \frac{1}{4}\ \sec60^o + 5\cot^2 45^o - \frac{2}{3}\ \sin^2 60^o$

$= 3(\tan\,30^o)^2 + \frac{1}{4}\ \sec60^o + 5(\cot45^o)^2 - \frac{2}{3}\ (\sin60^o)^2$

$= 3\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}\times 2 + 5\times(1)^2 - \frac{2}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= 3\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 5 - \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$

$= 1 + \frac{1}{2} + 5 - \frac{1}{2} = \frac{2+1+10-1}{2} = \frac{12}{2} = 6 =$ ডানপক্ষ

$\therefore\ 3\tan^2 30^o + \frac{1}{4}\sec60^o + 5\cot^2 45^o - \frac{2}{3}\sin^2 60^o = 6$ (প্রমাণিত)

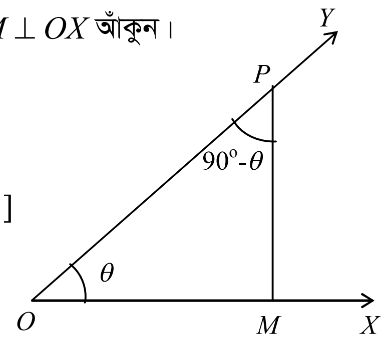
কর্মপত্র 6: সমাধান করুন: $\tan^2\theta-\left(1+\sqrt{3}\right)\tan\theta+\sqrt{3}=0 \quad 0\le\theta<90^\circ$
(এটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যাকে এক মাত্রিক উৎপাদকে প্রকাশ করা যায়।)

পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

আমরা জানি যে, দুইটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে, তাদের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়। যেমন 30° ও 60° এবং 15° ও 75° পরস্পর পূরক কোণ।

সাধারণভাবে, θ কোণ ও $\left(90^\circ-\theta\right)$ কোণ পরস্পরের পূরক কোণ।

মনে করুন, $\angle XOY=\theta$ এবং P এই কোণের OY বাহুর উপর একটি বিন্দু। $PM\perp OX$ আঁকুন।



যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ,
অতএব, POM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PMO=90^\circ$
এবং $\angle OPM+\angle POM=$ এক সমকোণ $=90^\circ$
$\therefore\ \angle OPM=90^\circ-\angle POM=90^\circ-\theta$ [যেহেতু $\angle POM=\angle XOY=\theta$]

$$\therefore\ \sin\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{OM}{OP}=\cos\angle POM=\cos\theta$$

$$\cos\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{PM}{OP}=\sin\angle POM=\sin\theta$$

$$\tan\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{OM}{PM}=\cot\angle POM=\cot\theta$$

$$\cot\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{PM}{OM}=\tan\angle POM=\tan\theta$$

$$\sec\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{OM}{PM}=\text{cosec}\angle POM=\text{cosec}\,\theta$$

$$\text{cosec}\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{OP}{OM}=\sec\angle POM=\sec\theta$$

উপরের সূত্রগুলো নিম্নলিখিতভাবে কথায় প্রকাশ করা যায়:
পূরক কোণের sine = কোণের cosine;
পূরক কোণের cosine = কোণের sine;
পূরক কোণের tangent = কোণের cotangent, ইত্যাদি।

শিক্ষার্থীর কাজ	$\sec\left(90^\circ-\theta\right)=\frac{5}{3}$ হলে, $\text{cosec}\,\theta-\cot\theta$-এর মান নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- 0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$ এবং $\sin 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়।
- 4, 3, 2, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cos 0^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 60^\circ$ এবং $\cos 90^\circ$ এর মান পাওয়া যায়।
- 0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\tan 0^\circ$, $\tan 30^\circ$, $\tan 45^\circ$ এবং $\tan 60^\circ$ এর মান পাওয়া যায়। (উলেখ্য যে, $\tan 90^\circ$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

- 9, 3, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে cot 45°, cot 60°, cot 90° এর মান পাওয়া যায়। (উলেখ্য যে, cot 0° সংজ্ঞায়িত নয়)।
- secant এর মান cosine এর মানের গুণাত্মক বিপরীত।
- cosecant এর মান sine এর মানের গুণাত্মক বিপরীত।
- $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$; $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$; $\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta$;
  $\cot(90^\circ-\theta)=\tan\theta$; $\sec(90^\circ-\theta)=\operatorname{cosec}\theta$; $\operatorname{cosec}(90^\circ-\theta)=\sec\theta$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১৪.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-6):

1. $\sin 30^\circ$ এর মান নিচের কোন্‌টি?

   (ক) 0 (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 1 (ঘ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=$ কত?

   (ক) 0 (খ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (গ) $\sqrt{3}$ (ঘ) 1

3. A = 30° হলে, $\sin\frac{3A}{2}=$ কত?

   (ক) 0 (খ) 1 (গ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ঘ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\frac{1-\cot^2 60^\circ}{1+\cot^2 60^\circ}=$ কত?

   (ক) $-\frac{1}{2}$ (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) $\frac{1}{4}$ (ঘ) $\frac{2}{3}$

5. $\theta=30^\circ$ হলে, $3\sin\theta-4\sin^3\theta=$ কত?

   (ক) $\cos 3\theta$ (খ) $\tan 3\theta$ (গ) $\sec 3\theta$ (ঘ) $\sin 3\theta$

6. $A=15^\circ$ হলে, $\tan 3A=$ কত?

   (ক) 0 (খ) 1 (গ) $\sqrt{3}$ (ঘ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

মান নির্ণয় করুন (7-10):

7. $\sin^3 30^\circ+4\cot^2 45^\circ-\sec^2 60^\circ$
8. $(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)(\cos 60^\circ+\cos 45^\circ)+\frac{1}{4}$
9. যদি $\tan^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}=x\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করুন।
10. $5\sin 90^\circ+3\cos 0^\circ-6\tan 45^\circ-\sec^2 45^\circ$

প্রমাণ করুন (11-14):

11. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$,যদি $A = 30^0$ হয়।
12. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 30^{\circ}}{1-\cos 30^{\circ}}} = \sec 60^{\circ} + \tan 60^{\circ}$
13. $\dfrac{1+2\sin 60^{\circ}\cos 60^{\circ}}{\sin 60^{\circ}+\cos 60^{\circ}} + \dfrac{1-2\sin 60^{\circ}\cos 60^{\circ}}{\sin 60^{\circ}+\cos 60^{\circ}} = \dfrac{1}{2}\left(\sin 60^{\circ} - \cos 60^{\circ}\right)$
14. যদি $\theta = 45^0$ হয় তবে
    $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
    $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

সমাধান করুন (১৫-১৬):

15. $\sqrt{3}(\tan\theta + \cot\theta) = 4$, যখন $0^{\circ} \le \theta \le 90^{\circ}$
16. $\sec^2\theta - 2\tan\theta = 0,$ যখন $0^{\circ} \le \theta \le 90^{\circ}$