ইউনিট ১২

অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা
(Ratio, Similarity and Symmetry)

ভূমিকা

যদি দুইটি রাশির পরিমাপের একক একই হয় তবে তাদের পরিমাপের তুলনা করার জন্য তাদের অনুপাত বিবেচনা করা হয়। দুইটি রাশি P ও Q এর অনুপাতকে $P : Q$ বা $\frac{P}{Q}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। আবার দুইটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা যদি সমান হয়, তবে একটির শীর্ষবিন্দুকে ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুর সাথে এমনভাবে মিলানো যায় যে বহুভুজ দুইটির অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাতগুলো সমান হয়, তাহলে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ বহুভুজ বলা হয়। প্রতিসমতা একটি জ্যামিতিক ধারণা। এই ধারণাকে আমরা আমাদের প্রাত্যহিক জীবনে প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকি। আমাদের চারিপাশে প্রকৃতিতে এমন অনেক চিত্র আছে যেগুলোতে প্রতিসমতা বিদ্যমান। বর্তমান ইউনিটে জ্যামিতিক অনুপাত, সদৃশতা ও প্রতিসমতা এবং এই সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞাগুলোর প্রমাণ ও প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- অনুপাত সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞাগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- অনুপাত সম্পর্কিত সম্পাদ্যগুলো অঙ্কন ও প্রমাণ করতে পারবেন,
- সদৃশতা সম্পর্কিত বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- জ্যামিতিক প্রতিসমতা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১ অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অনুপাত ও সমানুপাতের ধর্ম ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- জ্যামিতিক সমানুপাত সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অনুপাত সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	অনুপাত, সমানুপাত, জ্যামিতিক সমানুপাত

মূলপাঠ

অনুপাত ও সমানুপাতের ধর্ম (Properties of Ratio and Proportion)

১. $a : b = b : a$ হলে $a = b$

২. $a : b = x : y$ এবং $c : d = x : y$ হলে, $a : b = c : d$

৩. $a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$ (একান্তরকরণ)

৪. $a : b = c : d$ হলে, $b : a = d : c$ (ব্যস্তকরণ)

৫. $a : b = c : d$ বা, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $ad = bc$ (আড়গুণন)

৬. $a : b = c : d$ বা $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $(a+b) : b = (c+d) : d$ বা $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (যোজন)

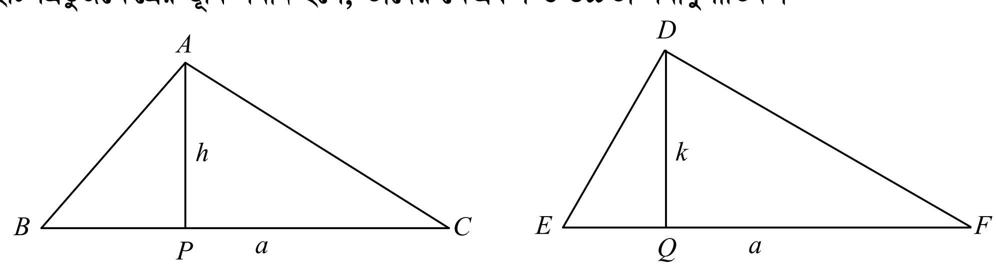
৭. $a : b = c : d$ বা $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $(a-b) : b = (c-d) : d$ বা $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (বিয়োজন)

৮. $a : b = c : d$ বা $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (যোজন ও বিয়োজন)

জ্যামিতিক সমানুপাত (Geometrical Proportion)

আমরা ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল থেকে আমরা দুইটি প্রয়োজনীয় মানুপাতের ধারণা তৈরি করতে পারি। নিম্নে তা দেখানো হলো।

১. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক।



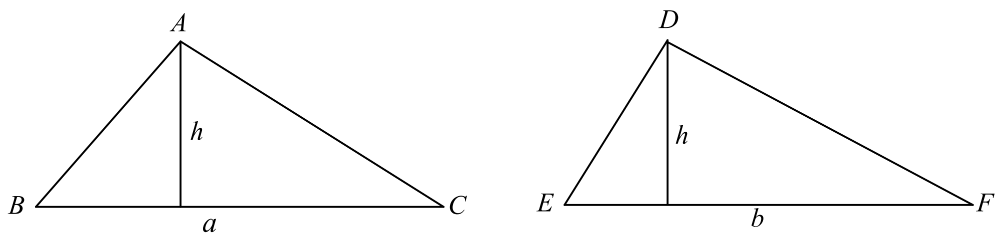
মনে করুন, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর উচ্চতা $AP = h$ এবং ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর উচ্চতা $DQ = k$ এবং উভয়ক্ষেত্রের ভূমি a অর্থাৎ $BC = EF = a$।

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a \times h$

এবং ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a \times k$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফল ঃ ত্রিভুজক্ষেত্র DEF-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a \times h : \frac{1}{2}a \times k = h : k = AP : DQ$ ।

২. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও ভূমি সমানুপাতিক।



মনে করুন, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ভূমি $BC = a$ এবং DEF এর ভূমি $EF = b$। উভয় ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা h।

সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a \times h$,

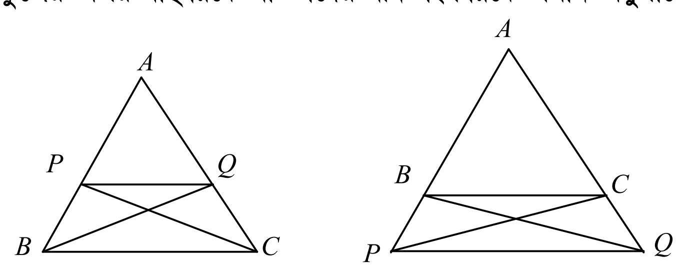
এবং ত্রিভুজক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}b \times h$

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফল ঃ ত্রিভুজক্ষেত্র DEF-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}a \times h : \frac{1}{2}b \times h = a : b = BC : EF$।

এখন অনুপাত সংক্রান্ত বিভিন্ন উপপাদ্য নিয়ে আলোচনা করা হবে।

উপপাদ্য ১২.১

ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল PQ রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AP : PB = AQ : QC$.

অঙ্কন: B, Q এবং C, P যোগ করুন।

প্রমাণ: ΔAPQ এবং ΔBPQ একই সরলরেখাস্থ ভূমি ও একই শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট বলে তারা একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

$\therefore \frac{\Delta APQ}{\Delta BPQ} = \frac{AP}{BP}$ [একই উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক]

আবার, ΔAPQ এবং ΔPQC একই সরলরেখাস্থ ভূমি ও একই শীর্ষবিন্দু বিশিষ্ট বলে তারা একই উচ্চতাবিশিষ্ট।

$\therefore \frac{\Delta APQ}{\Delta PQC} = \frac{AQ}{CQ}$ [একই উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল ভূমির সমানুপাতিক]

কিন্তু $\Delta BPQ = \Delta PQC$ [একই ভূমি PQ ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত]

সুতরাং $\frac{\Delta APQ}{\Delta BPQ} = \frac{\Delta APQ}{\Delta PQC}$

$\therefore \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AQ}{CQ}$

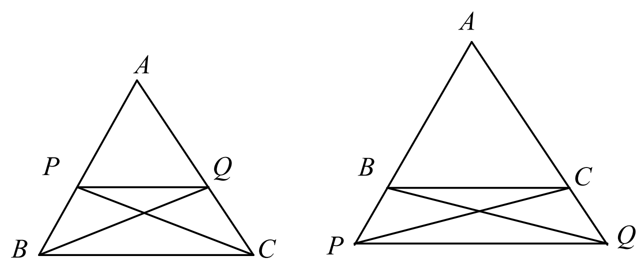
অর্থাৎ, $AP : PB = AQ : QC$. (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত ১: ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ এবং $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CE}$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২: ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য ১২.২

কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, PQ রেখাংশ ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে। অর্থাৎ $AP : PB = AQ : QC$ । প্রমাণ করতে হবে যে, PQ এবং BC সমান্তরাল।

অঙ্কন: B, Q এবং C, P যোগ করুন।

প্রমাণ: $\dfrac{\Delta APQ}{\Delta PQB} = \dfrac{AP}{PB}$ [ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট]

এবং $\dfrac{\Delta APQ}{\Delta PQC} = \dfrac{AQ}{QC}$ [ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট]

কিন্তু $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AQ}{QC}$ [স্বীকার]

$\therefore \dfrac{\Delta APQ}{\Delta PQB} = \dfrac{\Delta APQ}{\Delta PQC}$, অতএব $\Delta PQB = \Delta PQC$

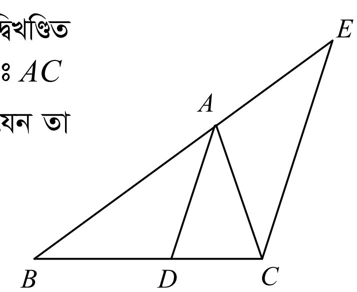
কিন্তু ΔPQB এবং ΔPQC একই ভূমি PQ এর একই পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ PQ এবং BC সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

দ্রষ্টব্য: উপপাদ্য ১২.২ কে উপপাদ্য ১২.১ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা বলা হয়।

উপপাদ্য ১২.৩

ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, AD রেখাংশ ΔABC এর অন্তঃস্থ $\angle BAC$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD : DC = BA : AC$

অঙ্কন: C বিন্দু দিয়ে DA রেখাংশের সমান্তরাল করে CE রেখাংশ অঙ্কন করুন, যেন তা বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: যেহেতু $DA \parallel CE$ এবং BC ও AC তাদের ছেদক [অঙ্কন]

$\therefore \angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$ [স্বীকার]

$\therefore \angle AEC = \angle ACE$

$\therefore AC = AE$ [উপপাদ্য ১২.১]

আবার, যেহেতু $DA \parallel CE,$

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AE}$

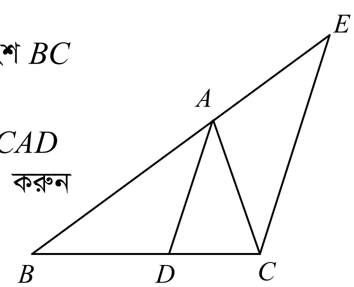
কিন্তু $AE = AC$

$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$

অর্থাৎ, $BD : DC = BA : AC$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১২.৪

ত্রিভুজের যেকোনো বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, বিভাগ বিন্দু থেকে বিপরীত শীর্ষ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ উক্ত শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ABC ত্রিভুজের A বিন্দু থেকে অঙ্কিত AD সরলরেখাংশ BC বাহুকে D বিন্দুতে এরূপে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে যে, $BD : DC = BA : AC$ প্রমাণ করতে হবে যে, AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ, $\angle BAD = \angle CAD$

অঙ্কন: DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে এরূপ CE রেখাংশ অঙ্কন করুন যেন তা BA বাহুর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: ΔBCE এর $DA \parallel CE$ [অঙ্কন]

$\therefore BA : AE = BD : DC$ [উপপাদ্য ১২.১]

কিন্তু $BD : DC = BA : AC$ [স্বীকার]

$\therefore BA : AE = BA : AC$

$\therefore AE = AC$

অতএব, $\angle ACE = \angle AEC$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]

কিন্তু $\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

এবং $\angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

অতএব, $\angle BAD = \angle CAD$

সুতরাং AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক। (প্রমাণিত)

সারসংক্ষেপ

- দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও উচ্চতা সমানুপাতিক।
- দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফল ও ভূমি সমানুপাতিক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.১

1. ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, $AC = 6EF$.
2. ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা AM ও DN হলে প্রমাণ করুন যে, $AM : DN = AB : DE$.
3. প্রমাণ করুন যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় তাদের ছেদবিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।

4. ΔABC এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং BE কে বর্ধিত করলে তা AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। দেখান যে, $AC = 3AF$ এবং $BE = 3EF$
5. ΔABC-এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, $BD : DC = BE : CF$
6. Δ-ক্ষেত্র ABC, তার ভুমি BC এর সমান্তরাল রেখা EF দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে। দেখান যে, $AE : AB = 1 : \sqrt{2}$

পাঠ ২ সদৃশতা সম্পর্কিত উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

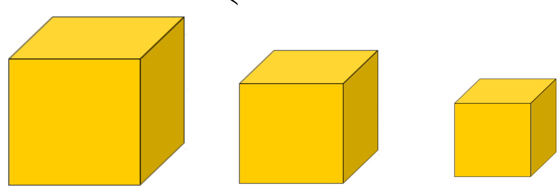
- সদৃশতা সম্পর্কে বর্ণনা পারবেন,
- সদৃশতা সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সদৃশতা, সদৃশকোণী বহুভুজ, সদৃশ বহুভুজ

মূলপাঠ

সদৃশতা (Similarity)

নিচের চিত্রগুলো লক্ষ্য করুন। এখানে চিত্রগুলো একই, কিন্তু আকারে ছোট-বড়। এদের বিভিন্ন অংশের আকার একই, কিন্তু অনুরূপ দুই বিন্দুর দূরত্ব সমান নয়। চিত্রগুলোকে সদৃশ চিত্র বলা হয়।



সদৃশ চিত্র একই আকৃতির কিন্তু আকারে সমান নাও হতে পারে। সদৃশ চিত্রের আকার সমান হলে তা সর্বসম চিত্রে পরিণত হয়। সুতরাং সর্বসমতা সদৃশতার বিশেষ রূপ। দুইটি চিত্র সর্বসম হলে সেগুলো সদৃশ; তবে চিত্র দুইটি সদৃশ হলে সেগুলো সর্বসম নাও হতে পারে।

দুইটি ত্রিভুজ বা বহুভুজ সদৃশ হলে-

- অনুরূপ কোণগুলো সমান হবে।
- অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।

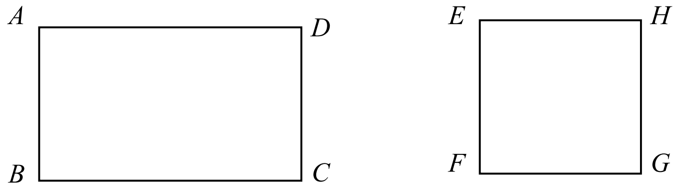
সদৃশকোণী বহুভুজ (Equiangular Polygons)

সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বলা হয়।

সদৃশ বহুভুজ (Similar Polygons)

সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ বাহুগুলোর

অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ বহুভুজ বলা হয়।



চিত্র লক্ষ্য করুন। এখানে $ABCD$ একটি আয়ত এবং $EFGH$ একটি বর্গ। উভয় চিত্রে বাহুর সংখ্যা 4 এবং আয়তের কোণগুলো ধারাবাহিকভাবে বর্গটির কোণগুলোর সমান (সবগুলো কোণ সমকোণ)। অতএব, $ABCD$ আয়ত ও $EFGH$ বর্গ সদৃশকোণী। কিন্তু চিত্রগুলোর অনুরূপ কোণগুলো সমান হলেও অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান নয়। ফলে সেগুলো সদৃশ নয় ।

তবে ত্রিভুজের ক্ষেত্রে এরকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হলে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়। অর্থাৎ, সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশকোণী এবং সদৃশকোণী ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।

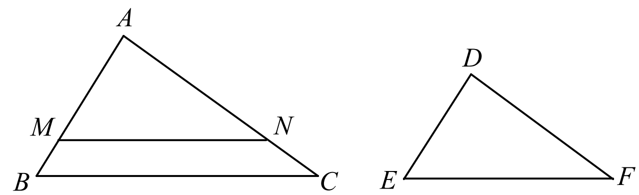
যদি দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হয় এবং তাদের যেকোনো এক জোড়া অনুরূপ বাহু সমান হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্মসম হয়। দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত ধ্রুবক। নিচে সদৃশতা সংক্রান্ত উপপাদ্যের প্রমাণ দেওয়া হলো।

উপপাদ্য ১২.৫

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$



অঙ্কন: মনে করুন $\Delta ABC > \Delta DEF$। ΔABC-এর AB বাহুতে M বিন্দু এবং AC বাহুতে N বিন্দু নিন যেন $AM = DE$ এবং $AN = DF$ হয়। M, N যোগ করুন।

প্রমাণ: ΔAMN ও ΔDEF-এর $AM = DE, AN = DF$ এবং $\angle A = \angle D$

অতএব, $\Delta AMN \cong \Delta DEF$ [বাহু-কোণ-বাহুর সর্মসমতা]

সুতরাং, $\angle AMN = \angle DEF = \angle ABC$ এবং $\angle ANM = \angle DFE = \angle ACB$.

অর্থাৎ, MN রেখাংশ ও BC বাহুকে AB বাহু ও AC বাহু ছেদ করায় অনুরূপ কোণযুগল সমান হয়েছে।

সুতরাং, $MN \parallel BC$

$\therefore \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$ বা, $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ [উপপাদ্য ১২.১]

একইভাবে BA বাহু ও BC বাহু থেকে যথাক্রমে ED রেখাংশ ও EF রেখাংশের সমান রেখাংশ কেটে নিয়ে দেখানো যায় যে, $\dfrac{BA}{ED} = \dfrac{BC}{EF}$ [উপপাদ্য ১২.১]

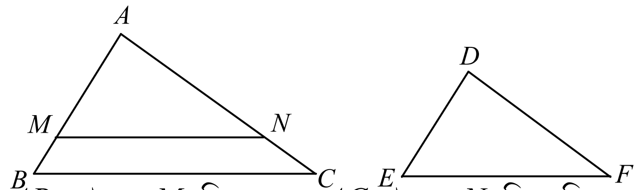
অর্থাৎ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$

$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১২.৫ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞাটিও সত্য।

উপপাদ্য ১২.৬

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF -এর $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$ । প্রমাণ করতে হবে যে,
$\angle A=\angle D, \angle B=\angle E, \angle C=\angle F$

অঙ্কন: মনে করুন, $\Delta ABC > \Delta DEF$। ΔABC-এর AB বাহুতে M বিন্দু এবং AC বাহুতে N বিন্দু নিন যেন $AM=DE$ এবং $AN=DF$ হয়। M, N যোগ করুন।

প্রমাণ : যেহেতু $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$, সুতরাং $\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AN}$

$\therefore$ সুতরাং, $MN \parallel BC$ [উপপাদ্য ১২.২]

$\therefore \angle ABC=\angle AMN$ [AB ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACB=\angle ANM$ [AC ছেদক দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

$\therefore \Delta ABC$ ও ΔAMN সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{AB}{AM}=\frac{BC}{MN}$ বা, $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{MN}$. [উপপাদ্য ১২.৫]

আবার $\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}$ [কল্পনানুসারে]

$\therefore \frac{BC}{MN}=\frac{BC}{EF}$

$\therefore EF=MN$

সুতরাং, ΔAMN ও ΔDEF সর্বসম। [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle MAN=\angle EDF, \angle AMN=\angle DEF, \angle ANM=\angle DFE$

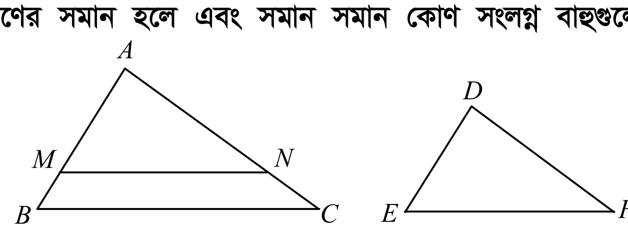
কিন্তু $\angle AMN=\angle ABC$ এবং $\angle ANM=\angle ACB$

$\therefore \angle MAN=\angle EDF, \angle ABC=\angle DEF, \angle ACB=\angle DFE$

অর্থাৎ, $\angle A=\angle D, \angle B=\angle E, \angle C=\angle F$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১২.৭

দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান হলে এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF-এর $\angle A=\angle D$ এবং $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

অঙ্কন: মনে করুন, $\Delta ABC > \Delta DEF$। ΔABC-এর AB বাহুতে M বিন্দু এবং AC বাহুতে N বিন্দু নিন যেন $AM=DE$ এবং $AN=DF$ হয়। M , N যোগ করুন।

প্রমাণ: ΔAMN ও ΔDEF এর $AM=DE, AN=DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle A$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle D$

$\therefore \Delta AMN \cong \Delta DEF$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle A = \angle D, \angle AMN = \angle E, \angle ANM = \angle F$

আবার, যেহেতু $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ সুতরাং, $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore MN \parallel BC$ [উপপাদ্য ১২.২]

সুতরাং $\angle ABC = \angle AMN$ এবং $\angle ACB = \angle ANM$

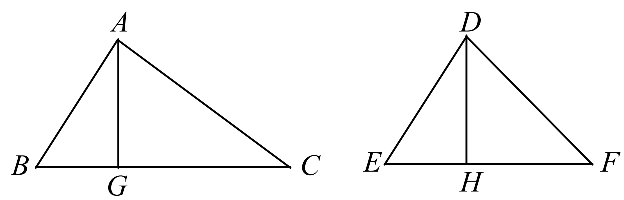
$\therefore \angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

অর্থাৎ, ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

সুতরাং ΔABC ও ΔDEF সদৃশ। (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ১২.৮

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং তাদের দুইটি অনুরূপ বাহু BC ও EF। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$

অঙ্কনঃ BC এবং EF এর উপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব আঁকুন।

প্রমাণঃ ΔABG এবং ΔDEH ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle B = \angle E$

$\angle AGB = \angle DHE =$ এক সমকোণ

$\therefore \angle BAG = \angle EDH$

$\therefore \Delta ABG$ ও ΔDEH সদৃশকোণী, তাই সদৃশ।

$\therefore \frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE}$

কিন্তু $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$

$\therefore \frac{AG}{DH} = \frac{BC}{EF}$

এখন ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} BC \times AG$

এবং ΔDEF -এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} EF \times DH$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AG}{\frac{1}{2} EF \times DH} = \frac{BC \times AG}{EF \times DH}$$

$$\therefore \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{BC}{EF} \times \frac{AG}{DH} = \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

অতএব $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$ (প্রমাণিত)

সারসংক্ষেপ

- সদৃশ চিত্র একই আকৃতির কিন্তু আকারে সমান নাও হতে পারে। সদৃশ চিত্রের আকার সমান হলে তা সর্বসম চিত্রে পরিণত হয়। সুতরাং সর্বসমতা সদৃশতার বিশেষ রূপ।
- দুইটি চিত্র সর্বসম হলে সেগুলো সদৃশ; তবে চিত্র দুইটি সদৃশ হলে সেগুলো সর্বসম নাও হতে পারে।
- দুইটি ত্রিভুজ বা বহুভুজ সদৃশ হলে-
    - অনুরূপ কোণগুলো সমান হবে।
    - অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।
- সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বলা হয়।
- সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ বহুভুজ বলা হয়।
- সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশকোণী এবং সদৃশকোণী ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।
- যদি দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হয় এবং তাদের যেকোনো এক জোড়া অনুরূপ বাহু সমান হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্মসম হয়।
- দুইটি সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত ধ্রুবক।

ৎ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.২

1. ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর $\angle B$ সমকোণ। B বিন্দু থেকে অতিভুজ AC এর উপর লম্ব টানলে দেখান যে, উৎপন্ন ত্রিভুজদ্বয় পরস্পর এবং মূল ত্রিভুজের সদৃশ হবে।
2. প্রমাণ করুন যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির একটি সূক্ষ্মকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।
3. ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$ । প্রমাণ করুন যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = AB.AC : DE.DF$।

পাঠ ৩ অনুপাত সম্পর্কিত সম্পাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- জ্যামিতিক উপায়ে কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত করতে পারবেন।

মূলপাঠ

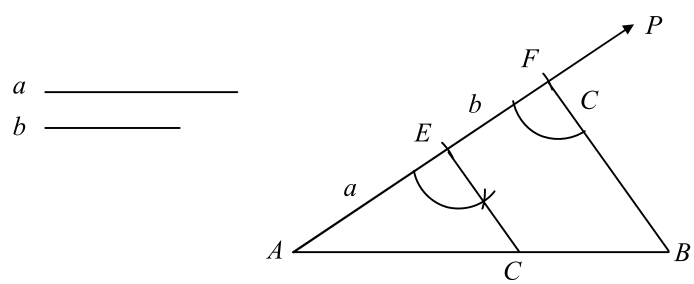
নির্দিষ্ট অনুপাতে রেখাংশের বিভক্তিকরণ

সমতলে দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B যোগ করলে AB রেখাংশ পাওয়া যায়। AB রেখাংশে এমন একটি অনন্য বিন্দু P আছে যে, P বিন্দুটি A ও B বিন্দুর অর্ন্তবর্তী এবং a ও b যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে আমরা স্বীকার করে নিই যে, $AP : PB = a : b$

উপরের চিত্রে, AB রেখাংশ P বিন্দুতে $a : b$ অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত হয়েছে। তাহলে $AP : PB = a : b$

সম্পাদ্য ১২.১

কোনো রেখাংশকে একটি নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, AB একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। AB-কে $a : b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে।

অঙ্কন: AB রেখাংশের A বিন্দু দিয়ে যেকোনো কোণে একটি রশ্মি AP আঁকুন। AP রশ্মি থেকে a এর সমান করে AE অংশ কাটুন। আবার EP থেকে b এর সমান করে EF অংশ কাটুন। F, B যোগ করুন। E বিন্দু দিয়ে FB এর সমান্তরাল EC রেখাংশ অঙ্কন করুন। মনে করুন EC, AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ C বিন্দুতে $a : b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

প্রমাণ: ΔABF-এ, $AC : CB = AE : EF$ [যেহেতু $EC \parallel FB$]

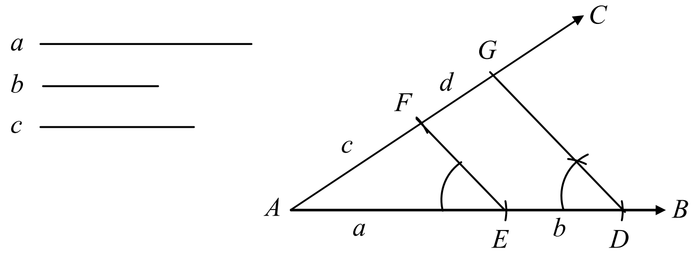
$= a : b$

অতএব, C বিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু যা AB কে $a : b$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করেছে।

শিক্ষার্থীর কাজ	বিকল্প পদ্ধতিতে কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্টি অনুপাতে অর্ন্তবিভক্ত করুন।

সম্পাদ্য ১২.২

তিনটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c । একটি রেখাংশ নির্ণয় করতে হবে যার দৈর্ঘ্য d এমন যে, $a : b = c : d$



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, a, b, c তিনটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। এরূপ একটি রেখাংশ d নির্ণয় করতে হবে যেন $a : b = c : d$ হয়।

অঙ্কন: AB ও AC দুইটি পরস্পরছেদী রশ্মি আঁকুন। AB থেকে a এর সমান করে AE অংশ এবং EB থেকে b এর সমান করে ED অংশ কাটুন। আবার AC হতে c এর সমান করে AF অংশ কাটুন। E, F যোগ করুন। D বিন্দু দিয়ে $EF \parallel DG$ আঁকুন। মনে করুন, DG, AC কে G বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, FG-ই হবে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য d।

প্রমাণ: ΔADG-এ $EF \parallel DG$

$\therefore AE : ED = AF : FG$

অর্থাৎ $a : b = c : d \quad [AE = a,\ ED = b,\ AF = c,\ FG = d]$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.৩

1. 6 সে.মি. একটি রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করুন।
2. একটি ত্রিভুজের যেকোনো বাহুস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে দুইটি সরলরেখা টেনে ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করুন।

পাঠ ৪ প্রতিসমতা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- প্রতিসমতা কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- প্রতিসাম্য রেখার সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- রেখা প্রতিসমতা, প্রতিফলন প্রতিসমতা, ঘূর্ণন প্রতিসমতা বর্ণনা করতে পারবেন,
- প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা, ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	রেখা প্রতিসমতা, প্রতিসাম্য রেখা, প্রতিফলন প্রতিসমতা, ঘূর্ণন প্রতিসমতা, ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা, ঘূর্ণন কোণ

মূলপাঠ

প্রতিসমতা (Symmetry)

আমরা প্রতিনিয়ত আমাদের চারিপাশে প্রতিসম চিত্রের বস্তু দেখে থাকি অর্থাৎ আমরা আমাদের চারিপাশে প্রকৃতিগত যা কিছু দেখি তার প্রায় সবকিছুর মধ্যে (যেমন: ঘরবাড়ি, চেয়ার-টেবিল, পশু-পাখি, কীট-পতঙ্গ, গাছের পাতা ইত্যাদি) প্রতিসমতা বিদ্যমান। প্রতিসমতার ধারণাকে শিল্পী, কারিগর, ডিজাইনার ইত্যাদি ব্যক্তিগণ প্রতিনিয়ত ব্যবহার করে থাকেন। অতএব আমরা বলতে পারি, প্রতিসমতা একটি প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক ধারণা যা প্রকৃতিতে বিদ্যমান এবং যা আমরা আমাদের কাজে-কর্মে ব্যবহার করে থাকি।

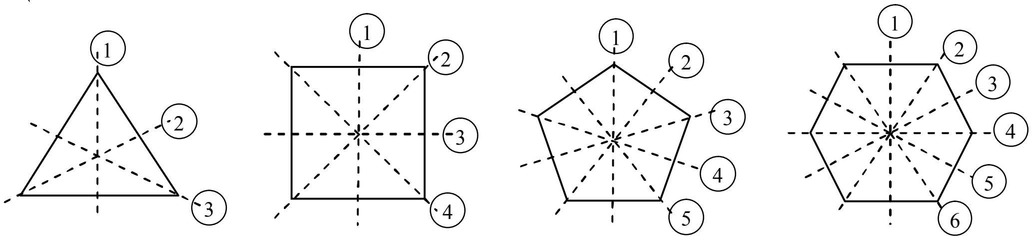
উপরের চিত্রগুলো লক্ষ্য করুন। প্রতিটি চিত্রকে যদি দাগ বরাবর ভাঁজ করা হয় তাহলে একটি অংশের সাথে অপর অংশ প্রায় সম্পূর্ণভাবে মিলে যায়। অর্থাৎ যদি কোনো সরলরেখা বরাবর কোনো চিত্র ভাঁজ করলে তার অংশ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় সেক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে প্রতিসাম্য রেখা বলা হয়। উপরের চিত্রগুলোর মধ্যে প্রথম ও শেষ চিত্রে একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।

শিক্ষার্থীর কাজ	1. ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের অনুভূমিক প্রতিসাম্য রেখা আছে সেগুলো লিখে প্রতিসাম্য রেখা চিহ্নিত করুন। 2. ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের একাধিক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে সেগুলো লিখে প্রতিসাম্য রেখা চিহ্নিত করুন।

সুষম বহুভুজের প্রতিসাম্য রেখা (Lines of Symmetry of Regular Polygons)

কতকগুলো রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র হলো বহুভুজ । যেমন ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ, ষড়ভুজ, সপ্তভুজ, অষ্টভুজ ইত্যাদি জ্যামিতিক চিত্র হলো বহুভুজ। যে সমস্ত বহুভুজের রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য সমান এবং কোণগুলো সমান, তাকে সুষম বহুভুজ বলা হয়। ত্রিভুজ হলো সবচেয়ে কম সংখ্যক রেখাংশ দিয়ে গঠিত বহুভুজ। ত্রিভুজের মধ্যে শুধুমাত্র সমবাহু ত্রিভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। অতএব সমবাহু ত্রিভুজ হলো তিন বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ। আবার চতুর্ভুজের মধ্যে শুধুমাত্র

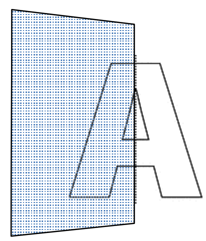
বর্গক্ষেত্রের বাহু ও কোণগুলো সমান । অতএব বর্গক্ষেত্র হলো চার বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজ। অনুরূপভাবে, সুষম পঞ্চভুজ ও সুষম ষড়ভুজের বাহু ও কোণগুলো সমান। প্রত্যেক সুষম বহুভুজ একটি প্রতিসম চিত্র। নিম্নের চিত্র হতে দেখা যায়, সুষম বহুভুজের অনেকগুলো বাহুর পাশাপাশি অনেক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।



শিক্ষার্থীর কাজ	উপরের চিত্র দেখে শূন্যস্থান পূরণ করুন; 1. ত্রিভুজের প্রতিসাম্য রেখা .... টি। 2. বর্গক্ষেত্রের প্রতিসাম্য রেখা .... টি। 3. পঞ্চভুজের প্রতিসাম্য রেখা .... টি। 4. ষড়ভুজের প্রতিসাম্য রেখা .... টি।

প্রতিফলন প্রতিসমতা (Reflection Symmetry)





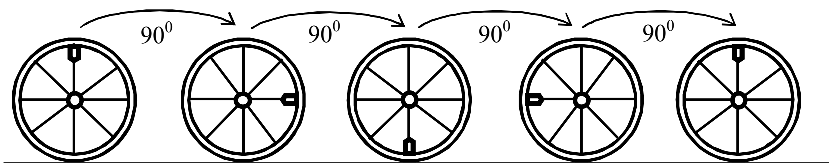
উপরের চিত্রগুলো লক্ষ্য করুন। প্রথম দুইটি চিত্রে পানিতে এবং তৃতীয় চিত্রে আয়নাতে প্রতিফলনের কারণে একই রকমের প্রতিচ্ছবি তৈরি হয়েছে। যে অবস্থানে প্রতিফলিত প্রতিবিম্ব তৈরি হয়েছে সে অবস্থান বরাবর প্রতিসাম্য রেখা কল্পনা করলে চিত্রগুলোর একটি অংশের সাথে অপর অংশ মিলে যায়। আবার আমরা জানি, কোনো জ্যামিতিক চিত্রের প্রতিসাম্য রেখা তখনই থাকে, যখন তার অর্ধাংশের প্রতিচ্ছবি বাকি অর্ধাংশের সাথে মিলে যায়। ফলে প্রতিসমতার ধারণার সাথে আয়নার প্রতিফলনের সম্পর্ক রয়েছে। এজন্য প্রতিসাম্য রেখা নির্ণয়ে কাল্পনিক আয়নার অবস্থান রেখার সাহায্য নেয়া হয়। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।

শিক্ষার্থীর কাজ	ইংরেজি বর্ণমালার যে সকল বর্ণের (ক) অনুভূমিক আয়না, (খ) উলম্ব আয়না, (গ) অনুভূমিক ও উলম্ব উভয় আয়না সাপেক্ষে প্রতিফলন প্রতিসমতা রয়েছে সেগুলো অঙ্কন করুন।

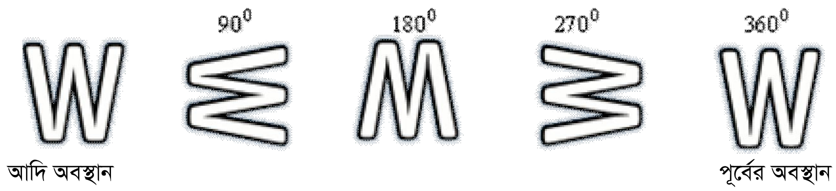
ঘূর্ণন প্রতিসমতা (Rotational Symmetry)

আমাদের চারিপাশে এমন অনেক জিনিস আছে যেগুলোকে আমরা ঘূরতে দেখি। যেমন, সিলিং ফ্যান, সাইকেলের চাকা ইত্যাদি। লক্ষ করলে দেখা যায়, এগুলো একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে ঘুরতে থাকে এবং ঘূর্ণনের কোনো এক মূহুর্তে অবস্থান আদি অবস্থানে ফিরে আসে। অতএব, কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণনের ফলে বস্তুর আকৃতি ও আকারের পরিবর্তন হয় না, তবে বস্তুর বিভিন্ন অংশের অবস্থানের পরিবর্তন হয়। ঘূর্ণনের ফলে বস্তুর নতুন অবস্থানে বস্তুর আকৃতি ও আকার আদি অবস্থানের ন্যায় একই হলে আমরা বলি বস্তুটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। সাইকেলের চাকার টিউবের মুখ ভুমি বরাবর রেখে ঘুরালে একটি অবস্থানে এসে তা আবার ভুমি বরাবর আসে এবং ঘূর্ণনের ফলে একাধিকবার মূল অবস্থানের সাথে মিলে যায়। চাকাটি ঘড়ির কাঁটার দিকেও ঘুরতে পারে আবার বিপরীত দিকেও ঘুরতে পারে। ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘূর্ণনকে ধনাত্মক দিক হিসাবে ধরা হয়।

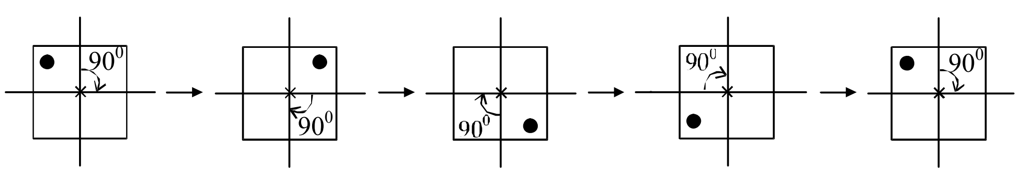
যে বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুটি ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কেন্দ্র। ঘূর্ণনের সময় যে পরিমাণ কোণে ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কোণ। একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের কোণের পরিমাণ 360°, অর্ধ্ব ঘূর্ণনের কোণের পরিমাণ 180°।
চিত্রে সাইকেলের চাকার 90° করে ঘূর্ণনের ফলে বিভিন্ন অবস্থান দেখানো হয়েছে। লক্ষ করুন, একবার পূর্ণ ঘূর্ণনে ঠিক চারটি অবস্থানে (90°, 180°, 270° ও 360° কোণে ঘূর্ণনের ফলে) সাইকেলের চাকাটি হুবহু একই রকম। এজন্য বলা হয় চাকাটির ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 4।



নিচের চিত্রে দেখা যায়, W-এর একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের (360° কোণে ঘূর্ণনের ফলে) অবস্থানে আকার হুবহু একই রকম এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা 4।



আবার নিচের চিত্র লক্ষ্য করুন। একটি বর্গের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দুকে ঘূর্ণন কেন্দ্র ধরে, ঘূর্ণন কেন্দ্রের সাপেক্ষে বর্গটির 90° কোণে ঘূর্ণনের ফলে যেকোনো কৌণিক বিন্দুর অবস্থান দ্বিতীয় চিত্রের ন্যায় হবে। এভাবে চারবার 90° কোণে ঘূর্ণনের ফলে বর্গটি আদি অবস্থানে ফিরে আসে। অতএব বলা যায়, বর্গের 4 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।



মনে রাখার বিষয়ঃ
যেকোনো চিত্র একবার পূর্ণ ঘূর্ণনের ফলে আদি অবস্থানে ফিরে আসে। তাই যেকোনো জ্যামিতিক চিত্রের ১ মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।
ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিচের বিষয়গুলো লক্ষ রাখতে হবে-
(ক) ঘূর্ণন কেন্দ্র (খ) ঘূর্ণন কোণ (গ) ঘূর্ণনের দিক (ঘ) ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা।

রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা

কোনো কোনো জ্যামিতিক চিত্রের শুধু রেখা প্রতিসমতা রয়েছে, আবার কোনো কোনো জ্যামিতিক চিত্রের শুধু ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। এমন অনেক জ্যামিতিক চিত্র আছে যেগুলোর রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা উভয়ই বিদ্যমান। যেমন: সমবাহু ত্রিভুজের যেমন 3টি প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে, তেমনি 3 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। আবার সুষম পঞ্চভুজের 5টি প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে এবং 5 মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে।
এমন অনেক জ্যামিতিক চিত্র আছে যেগুলোর অসংখ্য প্রতিসাম্য রেখা এবং অসংখ্য মাত্রার ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। উদাহরণস্বরূপ, বৃত্ত একটি আদর্শ প্রতিসম চিত্র। একই সময় বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো রেখা এর প্রতিসাম্য রেখা। সুতরাং, বৃত্তের অসংখ্য প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে। আবার বৃত্তকে এর কেন্দ্রের সাপেক্ষে যেকোনো কোণে ও যেকোনো দিকে ঘুরালে এর অবস্থানের পরিবর্তন লক্ষ করা যায় না। অতএব, বৃত্তের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা অসীম।

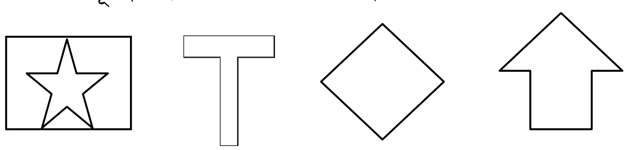
শিক্ষার্থীর কাজ	ইংরেজি বর্ণমালার এমন 5টি বর্ণ লিখুন যেগুলোর ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে এবং প্রতিসমতার মাত্রা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

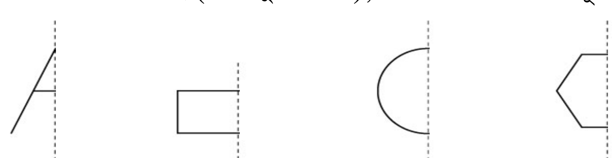
- যদি কোনো সরলরেখা বরাবর কোনো চিত্র ভাঁজ করলে তার অংশ দুইটি সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় সেক্ষেত্রে সরলরেখাটিকে প্রতিসাম্য রেখা বলা হয়।
- সুষম বহুভুজের অনেকগুলো বাহুর পাশাপাশি অনেক প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে।
- কোনো চিত্রের প্রতিফলনের ফলে যে প্রতিসমতা পাওয়া যায়, তা প্রতিফলন প্রতিসমতা। রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।
- কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে ঘূর্ণনের ফলে বস্তুর আকৃতি ও আকারের পরিবর্তন হয় না, তবে বস্তুর বিভিন্ন অংশের অবস্থানের পরিবর্তন হয়। ঘূর্ণনের ফলে বস্তুর নতুন অবস্থানে বস্তুর আকৃতি ও আকার আদি অবস্থানের ন্যায় একই হলে আমরা বলি বস্তুটির ঘূর্ণন প্রতিসমতা রয়েছে। যে বিন্দুর সাপেক্ষে বস্তুটি ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কেন্দ্র। ঘূর্ণনের সময় যে পরিমাণ কোণে ঘোরে তা হলো ঘূর্ণন কোণ।
- এমন অনেক জ্যামিতিক চিত্র আছে যেগুলোর রেখা প্রতিসমতা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা উভয়ই বিদ্যমান।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১২.৪

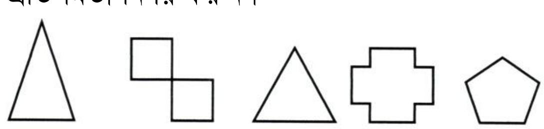
1. নিচের চিত্র সমূহের প্রতিসাম্য রেখা ও সংখ্যা নির্ণয় করুন।



2. প্রতিসাম্য রেখা দেওয়া আছে (ড্যাশযুক্ত রেখা), জ্যামিতিক চিত্র সম্পূর্ণ করুন।

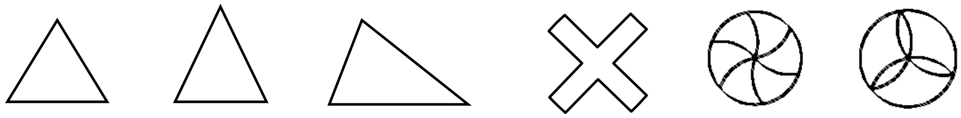


3. নিচের চিত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতা নির্ণয় করুন।



(ক) (খ) (গ) (ঘ) (ঙ)

4. ইংরেজি বর্ণমালার বর্ণে রেখা প্রতিসমতা আছে এরূপ 5টি ও ঘূর্ণন প্রতিসমতা আছে এরূপ 5টি বর্ণ নির্ধারণ করুন।
5. প্রতিসমতা নেই এমন চারটি চিত্র অঙ্কন করুন।
6. নিচের চিত্রগুলোর প্রতিসাম্য রেখার সংখ্যা এবং ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা নির্ণয় করুন।



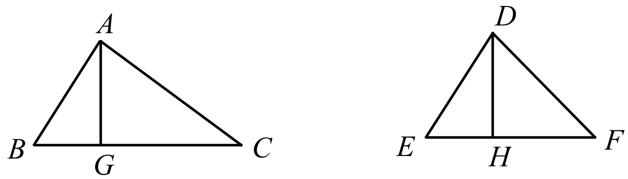
(ক) (খ) (গ) (ঘ) (ঙ) (চ)

৩ চূড়ান্ত মূল্যায়ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-7):

1. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো কী হবে?
   (ক) সমান (খ) সমানুপাতিক (গ) অসমান (ঘ) ব্যস্তানুপাতিক
2. একটি বর্গের মোট কতটি প্রতিসাম্য রেখা আছে?
   (ক) 10 টি (খ) 8 টি (গ) 6 টি (ঘ) 4 টি
3. ঘূর্ণন কোণ a হলে নিচের কোন্‌টি সত্য?
   (ক) $0^0 < a < 360^0$ (খ) $0^0 \leq a < 180^0$ (গ) $0^0 \leq a < 270^0$ (ঘ) $0^0 < a \leq 360^0$
4. একটি বর্গক্ষেত্রের ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা কত?
   (ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) 4
5. নিচের কোন্‌টির অসংখ্য প্রতিসাম্য রেখা ও ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্রা রয়েছে?
   (ক) বর্গক্ষেত্র (খ) বৃত্ত (গ) সুষম পঞ্চভুজ (ঘ) সুষম ষড়ভুজ
6. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য করুন:
   (i) দুইটি বহুভুজ সদৃশকোণী হলে সেগুলো সদৃশ নাও হতে পারে।
   (ii) সদৃশ ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশকোণী এবং সদৃশকোণী ত্রিভুজ সর্বদা সদৃশ।
   (iii) সদৃশ বহুভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।
   নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii
7. একটি বর্গক্ষেত্রের-
   (i) প্রতিসাম্য রেখা 4 টি।
   (ii) ঘূর্ণন প্রতিসমতার মাত্র 4
   (iii) ঘূর্ণন কোণ 90^o
   নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii
8. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য করুন:
   (i) প্রতিসমতার ধারণাকে ডিজাইনাররা প্রতিনিয়ত ব্যবহার করেন।
   (ii) রেখা প্রতিসমতাকে প্রতিফলন প্রতিসমতাও বলা হয়।
   (iii) ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘূর্ণনকে ঋণাত্মক দিক হিসেবে ধরা হয়।
   নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii
9. PQ রেখাংশ ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে। অর্থাৎ, $AP : PB = AQ : QC$.
   (ক) উদ্দীপক অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন করুন।
   (খ) প্রমাণ করুন যে, PQ এবং BC সমান্তরাল।
   (গ) উদ্দীপক অনুযায়ী চিত্রে $BPQC$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণ BQ ও PC পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করুন যে, $BO : OQ = CO : OP$

10.



ΔABC এবং ΔDEF সদৃশকোণী।

(ক) দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী ও সদৃশ হওয়ার শর্ত কী?

(খ) প্রমাণ করুন যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ ।

(গ) প্রমাণ করুন যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$ ।

11. যদি ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে এবং DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ BA বাহুর বর্ধিত অংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে

(ক) তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন করুন।

(খ) প্রমাণ করুন, $BD : DC = BA : AC$

(গ) BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করুন $BD : DC = BM : CN$ ।