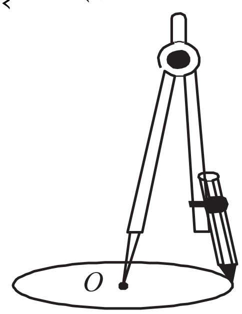
ইউনিট ১১

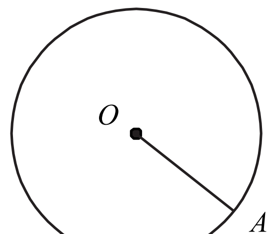
বৃত্ত
(Circle)

ভূমিকা

বৃত্ত একটি সমতলীয় জ্যামিতিক চিত্র। নিখুঁতভাবে বৃত্ত আঁকার জন্য পেন্সিল কম্পাস ব্যবহার করা হয়। কম্পাসের কাঁটাটি কাগজের উপর চেপে ধরে অপর প্রান্তে সংযুক্ত পেন্সিলটি কাগজের উপর চারদিকে ঘুরিয়ে আনলেই একটি বৃত্ত আঁকা হয়ে থাকে, যা চিত্র (ক)-তে দেখানো হয়েছে। তাহলে দেখা যাচ্ছে বৃত্ত আঁকার সময় নির্দিষ্ট একটি বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলোকে আঁকা হয়। এই নির্দিষ্ট বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র। কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী যেকোনো বিন্দুর দূরত্ব হলো বৃত্তের ব্যাসার্ধ। চিত্র (খ)-তে O হলো বৃত্তের কেন্দ্র এবং OA হলো বৃত্তের ব্যাসার্ধ। পূর্বে আমরা বৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন ধারণা যেমন কেন্দ্র, ব্যাস, ব্যাসার্ধ, জ্যা ইত্যাদি বিষয়ে জ্ঞান অর্জন করেছি। বর্তমান ইউনিটে সমতলে কোনো বৃত্তের জ্যা, চাপ, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভূজ, বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক সম্পর্কিত প্রতিজ্ঞার আলোচনা করা হবে।



চিত্র-ক



চিত্র-খ

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- বৃত্তচাপ, কেন্দ্রস্থ কোণ, বৃত্তস্থ কোণ, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভূজ ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।
- বৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সম্পাদ্য অঙ্কন, প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১ বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস সম্পর্কিত উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

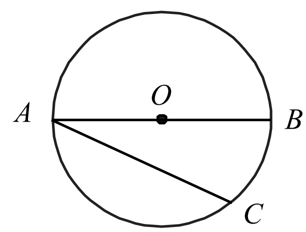
- বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস কি তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগে দক্ষতা অর্জন করবেন।

মূখ্য শব্দ	বৃত্তের জ্যা, বৃত্তের ব্যাস

মূলপাঠ

বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস (Chord and Diameter of a Circle)

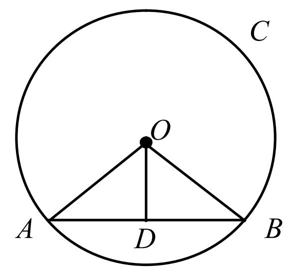
কোনো বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটির একটি জ্যা বলা হয়। কোনো বৃত্তের জ্যা যদি বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে জ্যাটিকে বৃত্তের ব্যাস বলা হয়, অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো জ্যা হলো ব্যাস। চিত্রে, বৃত্তটির কেন্দ্র O এবং AB ও AC বৃত্তটির দুইটি জ্যা। AB জ্যাটি ব্যাস; কারণ জ্যাটি বৃত্তটির কেন্দ্রগামী। OA ও OB বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ এবং O বিন্দুটি AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু। সুতরাং, বৃত্তের কেন্দ্র প্রত্যেক ব্যাসের মধ্যবিন্দু।



উপপাদ্য ১১.১

বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর উপর লম্ব।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত। AB ব্যাস ভিন্ন একটি জ্যা এবং এই জ্যা এর মধ্যবিন্দু D । O, D যোগ করুন। প্রমাণ করতে হবে যে, OD রেখাংশ AB জ্যা এর উপর লম্ব।



অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করুন।

প্রমাণ: ΔOAD এবং ΔOBD এ, $AD = BD$ [D, AB এর মধ্যবিন্দু]

$OA = OB$ [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং $OD = OD$ [সাধারণ বাহু]

সুতরাং, $\Delta OAD \cong \Delta OBD$ [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle ODA = \angle ODB$

যেহেতু কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ এবং তাদের পরিমাপ সমান।

সুতরাং, $\angle ODA = \angle ODB$ = এক সমকোণ।

অতএব, $OD \perp AB$. [প্রমাণিত]

অনুসিদ্ধান্ত ১: বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত ২: যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

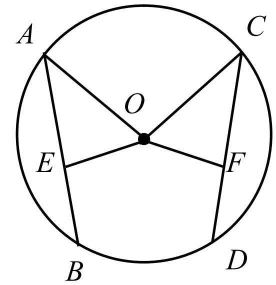
শিক্ষার্থীর কাজ	1. প্রমাণ করুন, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ইংগিত: এটি উপপাদ্য ১১.১ এর বিপরীত উপপাদ্য 2. দুইটি পরস্পরছেদী বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ তাদের সাধারণ জ্যা-কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উপপাদ্য ১১.২

বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, $ABDC$ বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে AB এবং CD জ্যাদ্বয় সমদূরবর্তী।

অঙ্কন: O থেকে AB এবং CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব আঁকুন। O, A এবং O, C যোগ করুন।



প্রমাণ: যেহেতু $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$

অতএব $AE = BE$, এবং $CF = DF$ [কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

অতএব, $AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$

এখন যেহেতু $AB = CD$ [কল্পনা], অতএব $AE = CF$

সুতরাং ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং $AE = CF$.

$\therefore\ \Delta OAE \cong \Delta OCF$

সুতরাং $OE = OF$.

কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB জ্যা এবং CD জ্যা এর দূরত্ব।

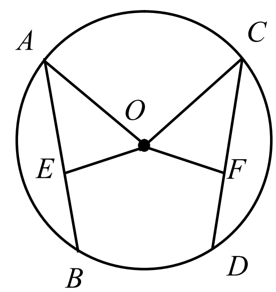
সুতরাং, AB এবং CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। [প্রমাণিত]

উপপাদ্য ১১.৩

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, $ABDC$ বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = CD$।

অঙ্কন: O থেকে AB এবং CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব আঁকুন। O, A এবং O, C যোগ করুন।



প্রমাণ: যেহেতু AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী এবং OE ও OF যথাক্রমে AB ও CD এর উপর লম্ব, অতএব $OE = OF$

আবার যেহেতু $OE \perp AB$, অতএব $AE = \frac{1}{2}AB$

অনুরূপভাবে $CF = \frac{1}{2}CD$

এখন ΔOAE ও ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং $OE = OF$

$\angle OEA = \angle OFC =$ এক সমকোণ।

$\therefore\ \Delta OAE \cong \Delta OCF$

$\therefore\ AE = CF$

অর্থাৎ $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

বা, $AB = CD$

অর্থাৎ কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান। (প্রমাণিত)

শিক্ষার্থীর কাজ	বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা, প্রমাণ করুন।

সারসংক্ষেপ

- কোনো বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটির একটি জ্যা বলা হয়।
- কোনো বৃত্তের জ্যা যদি বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে জ্যাটিকে বৃত্তের ব্যাস বলা হয়, অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো জ্যা হলো ব্যাস।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১১.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-2):

1. বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা কোন্‌টি?

   (ক) ব্যাসার্ধ (খ) ব্যাস (গ) চাপ (ঘ) পরিধি

2. বৃত্তের কেন্দ্র হতে বৃহত্তম জ্যা-এর লম্ব দূরত্ব ব্যাসার্ধের কত গুণ?

   (ক) 1 গুণ (খ) 2 গুণ (গ) $\frac{1}{2}$ গুণ (ঘ) 0 গুণ

3. প্রমাণ করুন, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতম।
4. প্রামণ করুন, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।
5. প্রমাণ করুন, বৃত্তের সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।
6. প্রমাণ করুন, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে কেন্দ্রের নিকটবর্তী জ্যা, দূরবর্তী জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর।
7. প্রমাণ করুন, বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।
8. প্রমাণ করুন, দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী হবে এবং জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব হবে।
9. প্রমাণ করুন, বৃত্তের ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হবে।
10. প্রমাণ করুন, বৃত্তের ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান হবে।

পাঠ ২ বৃত্তের চাপ সম্পর্কিত উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

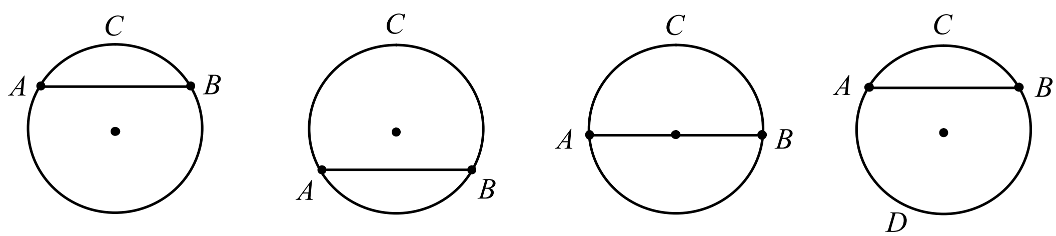
- বৃত্তের চাপ কি তা বলতে পারবেন,
- বিভিন্ন প্রকার বৃত্তচাপের বর্ণনা দিতে পারবেন,
- বৃত্তচাপ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	বৃত্তের চাপ, উপচাপ, অধিচাপ, অর্ধবৃত্ত, বৃত্তস্থ কোণ, কেন্দ্রস্থ কোণ

মূলপাঠ

বৃত্তচাপ (The arc of a circle)

কোনো বৃত্তের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের একপাশে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলে। কোনো বৃত্তে A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হলে A, B এবং AB একপাশে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলা হয়। A ও B এই চাপের প্রান্তবিন্দু এবং চাপের অন্য সকল বিন্দু তার অন্তঃস্থ বিন্দু। একটি চাপের অন্তঃস্থ বিন্দু C হলে চাপটিকে ACB চাপ বলা হয় এবং $\overset{\frown}{ACB}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। তবে কখনও কখনও তাদেরকে AB চাপও বলা হয়। নিচের প্রত্যেকটি চিত্রে $\overset{\frown}{ACB}$ একটি চাপ।



চিত্র-ক চিত্র-খ চিত্র-গ চিত্র-ঘ

'ক' চিত্রে $\overset{\frown}{ACB}$ চাপের অন্তঃস্থ বিন্দুসমূহ AB -এর যে পাশে কেন্দ্র আছে তার বিপরীত পাশে অবস্থিত। এক্ষেত্রে $\overset{\frown}{ACB}$ চাপকে উপচাপ বলা হয়।

'খ' চিত্রে $\overset{\frown}{ACB}$ চাপের সকল বিন্দু এবং কেন্দ্র AB -এর একই পাশে অবস্থিত। এক্ষেত্রে $\overset{\frown}{ACB}$ চাপকে অধিচাপ বলা হয়।

'গ' চিত্রে AB রেখাংশ কেন্দ্র দিয়ে যায়। তাই $\overset{\frown}{ACB}$ চাপকে অর্ধবৃত্ত বলা হয়।

'ঘ' চিত্রে $\overset{\frown}{ACB}$ চাপ ও $\overset{\frown}{ADB}$ চাপ উভয়েরই প্রান্ত বিন্দু AB এবং C ও D বিন্দু AB-এর উভয় পার্শ্বে অবস্থিত। তাই $\overset{\frown}{ACB}$ ও $\overset{\frown}{ADB}$ চাপ দুইটি একটি অপরটির অনুবন্ধী এবং একটি উপচাপ হলে অপরটি হবে অধিচাপ।

কোণ দ্বারা খণ্ডিত চাপ (Arc cut by an Angle)

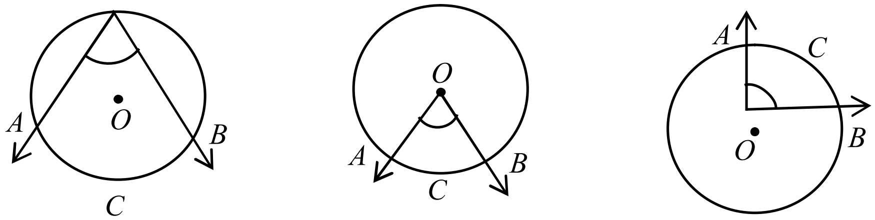
একটি কোণ কোনো বৃত্তে একটি চাপ খণ্ডিত বা ছিন্ন করে বলা হয় যদি

১. চাপটির প্রত্যেক প্রান্তবিন্দু কোণটির বাহুতে অবস্থিত হয়,

২. কোণটির প্রত্যেক বাহুতে চাপটির অন্তত একটি প্রান্তবিন্দু অবস্থিত হয় এবং

৩. চাপটির অন্তঃস্থ প্রত্যেকটি বিন্দু কোণটির অভ্যন্তরে থাকে।

চিত্রে প্রদর্শিত কোণটি O কেন্দ্রিক বৃত্তে ACB চাপ খণ্ডিত করে।

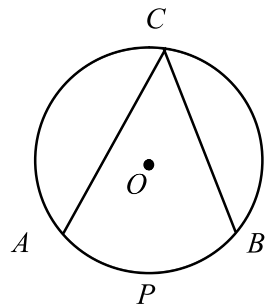


বৃত্তস্থ কোণ (Angle in a Circle)

সংজ্ঞা: একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোণটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে বৃত্তস্থ কোণ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোণ বলা হয়। চিত্রে $\angle ACB$ একটি বৃত্তস্থ কোণ।

প্রত্যেক বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তে একটি চাপ খণ্ডিত করে। এই চাপ উপচাপ, অর্ধবৃত্ত অথবা অধিচাপ হতে পারে। একটি বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তে যে চাপ খণ্ডিত করে, কোণটি সেই চাপের ওপর দণ্ডায়মান এবং খণ্ডিত চাপের অনুবন্ধী চাপে অন্তর্লিখিত বলা হয়।

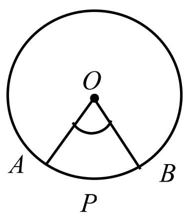
চিত্রে $\angle ACB$ বৃত্তস্থ কোণটি APB চাপকে খণ্ডিত করে। অতএব, $\angle ACB$, APB চাপের ওপর দণ্ডায়মান এবং ACB চাপে অন্তর্লিখিত একটি বৃত্তস্থ কোণ। এখানে APB ও ACB একে অপরের অনুবন্ধী চাপ।



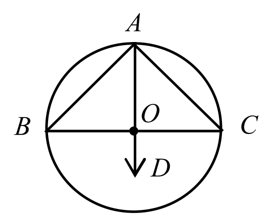
কেন্দ্রস্থ কোণ (Angle at the Centre)

সজ্ঞা: একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে, কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয়। চিত্র 'ক'-এ $\angle AOB$ একটি কেন্দ্রস্থ কোণ। কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তে যে চাপ খণ্ডিত করে সেই চাপের ওপর তা দণ্ডায়মান বলা হয়। অর্থাৎ চিত্রে $\angle AOB$, APB চাপের ওপর দণ্ডায়মান।

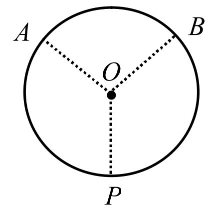
প্রত্যেক কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তে একটি উপচাপ খণ্ডিত করে। চিত্র 'ক'-এ APB একটি উপচাপ। বৃত্তের কোনো উপচাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বলতে এরূপ কোণকেই বোঝায় যার শীর্ষবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত এবং যার বাহুদ্বয় ঐ চাপের প্রান্তবিন্দু দুইটি দিয়ে যায়।



চিত্র-ক



চিত্র-খ



চিত্র-গ

চিত্র 'খ'-এ $\angle AOB + \angle AOC =$ সরল কোণ $\angle BOC$। সুতরাং অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রে কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$ সরলকোণ এবং বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$ সমকোণ।

চিত্র 'গ'-এ $\angle AOP + \angle BOP =$ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOB$। অতএব, কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ অধিচাপ APB উপর দণ্ডায়মান বলা হয়।

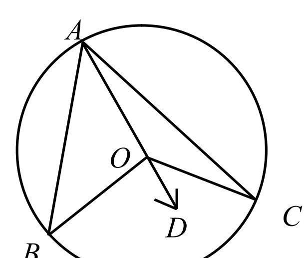
উপপাদ্য ১১.৪

বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং তার একই উপচাপ BC এর ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ $\angle BAC$ এবং কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOC$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 2\angle BAC$

অঙ্কন: মনে করুন, AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এ ক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ AD অঙ্কন করুন।

প্রমাণ: ΔAOB এর ক্ষেত্রে বহিঃস্থ $\angle BOD =$ অন্তঃস্থ $\angle BAO +$ অন্তঃস্থ



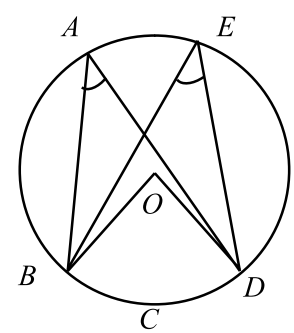
$\angle ABO$ [যেহেতু বহিঃস্থ কোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।]
আবার ΔAOB এ $OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
অতএব, $\angle BAO = \angle ABO$ [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভুমি সংলগ্ন কোণ দুইটি সমান]
অতএব $\angle BOD = \angle BAO + \angle BAO = 2\angle BAO$
একইভাবে ΔAOC থেকে আমরা পাই $\angle COD = 2\angle CAO$
এখন, $\angle BOD + \angle COD = 2\angle BAO + 2\angle CAO = 2(\angle BAO + \angle CAO) = 2\angle BAC$
আবার $\angle BOD + \angle COD = \angle BOC$
অতএব, $\angle BOC = 2\angle BAC$. [প্রমাণিত]

শিক্ষার্থীর কাজ	প্রমাণ করুন, একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।

উপপাদ্য ১১.৫

বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তের BCD চাপের ওপর দণ্ডায়মান $\angle BAD$ ও $\angle BED$ দুইটি বৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAD = \angle BED$



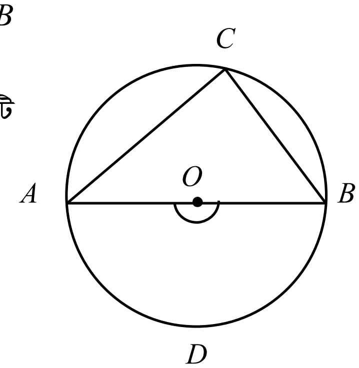
অঙ্কন: O, B এবং O, D যোগ করুন।

প্রমাণ: এখানে BCD চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ O-তে চিহ্নিত $\angle BOD$ ।
যেহেতু একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।
সুতরাং, $\angle BOD = 2\angle BAD$ এবং $\angle BOD = 2\angle BED$
$\therefore 2\angle BAD = 2\angle BED$
বা $\angle BAD = \angle BED$ [প্রমাণিত]

উপপাদ্য ১১.৬

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB =$ এক সমকোণ।

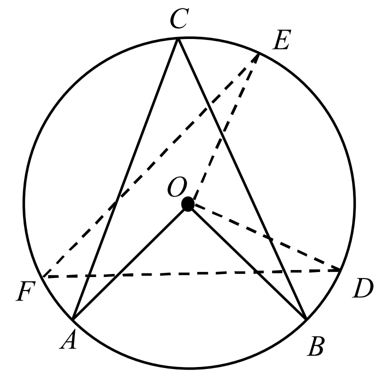


প্রমাণ: AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত, তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিন।
এখন ADB চাপের ওপর দণ্ডায়মান
বৃত্তস্থ $\angle ACB = \frac{১}{২}$ (কেন্দ্রস্থ সরল কোণ $\angle AOB$)
কিন্তু সরল কোণ $\angle AOB =$ দুই সমকোণ।
অর্থাৎ, $\angle ACB = \frac{১}{২}$ (দুই সমকোণ) = এক সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১: সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস ধরে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা সমকৌণিক শীর্ষবিন্দু দিয়ে যাবে।

উপপাদ্য ১১.৭

একই ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট সমান সমান বৃত্তচাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ বা বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের চাপ $AB =$ চাপ DE। AB চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ও কেন্দ্রস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle ACB$ ও $\angle AOB$। DE চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ ও কেন্দ্রস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle DFE$ ও $\angle DOE$।

প্রমাণ করতে হবে যে, (১) $\angle AOB = \angle DOE$ এবং (২) $\angle ACB = \angle DFE$

প্রমাণ: যেহেতু চাপ $AB =$ চাপ DE। সুতরাং চাপ দুইটির ডিগ্রি পরিমাপ সমান।

কিন্তু AB চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এর ডিগ্রি পরিমাপ

এবং DE চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = কেন্দ্রস্থ $\angle DOE$ এর ডিগ্রি পরিমাপ

$\therefore$ $\angle AOB$ এর ডিগ্রি পরিমাপ = $\angle DOE$ এর ডিগ্রি পরিমাপ

$\therefore \angle AOB = \angle DOE$ [১ প্রমাণিত]

যেহেতু কোনো চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ

সুতরাং $\angle AOB = 2\angle ACB$ এবং $\angle DOE = 2\angle DFE$

কিন্তু $\angle AOB = \angle DOE$

$\therefore 2\angle ACB = 2\angle DFE$

অর্থাৎ $\angle ACB = \angle DFE$ [২ প্রমাণিত]

শিক্ষার্থীর কাজ	
	1. প্রমাণ করুন, কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ সূক্ষ্মকোণ। 2. প্রমাণ করুন, কোনো বৃত্তের উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।

সারসংক্ষেপ

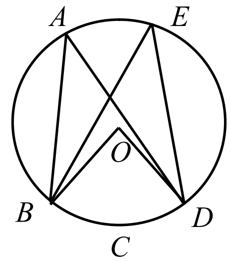
- কোনো বৃত্তের দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের একপাশে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলে।
- একটি কোণ কোনো বৃত্তে একটি চাপ খণ্ডিত বা ছিন্ন করে বলা হয় যদি
  - চাপটির প্রত্যেক প্রান্তবিন্দু কোণটির বাহুতে অবস্থিত হয়,
  - কোণটির প্রত্যেক বাহুতে চাপটির অন্তত একটি প্রান্তবিন্দু অবস্থিত হয় এবং
  - চাপটির অন্তঃস্থ প্রত্যেকটি বিন্দু কোণটির অভ্যন্তরে থাকে।
- একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে, কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয়।
- বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।
- অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১১.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-4):

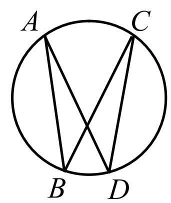
1. যদি কোন চাপ অর্ধবৃত্ত হয়, তাহলে চাপটির পরিমাপ কত ডিগ্রী?
   (ক) 0^o (খ) 90^o (গ) 180^o (ঘ) 360^o
2. কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ-
   (ক) স্থূলকোণ (খ) সূক্ষ্মকোণ (গ) সমকোণ (ঘ) সরল কোণ

নিচের চিত্রটি লক্ষ্য করুন এবং 3 ও 4 নং প্রশ্নের উত্তর দিন



(i) $\angle BOD = 2\angle BAD$
(ii) $\angle BOD = 2\angle BED$
(iii) $\angle BED = \angle BAD$

3. উপরের কোন্ তথ্য সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii
4. উপচাপ BD এবং অধিচাপ BD দ্বারা তৈরি মোট কোণের পরিমাণ কত ডিগ্রী?
   (ক) 180^o (খ) 270^o (গ) 300^o (ঘ) 360^o
5. চিত্রে $AB = CD$, প্রমাণ করুন, $AD = BC$



6. AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করুন যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।

পাঠ ৩ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

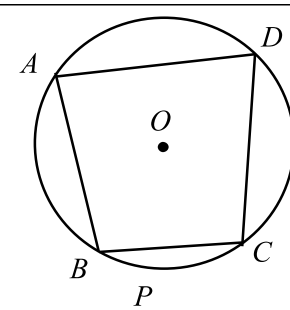
এই পাঠ শেষে আপনি-

- বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের সংজ্ঞা বলতে পারবেন,
- বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ

মূলপাঠ

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ (Quadrilateral inscribed in a circle)



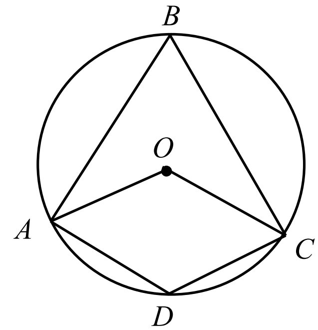
সংজ্ঞা: যদি কোনো চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে চতুর্ভুজটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়েছে বলা হয়। সেক্ষেত্রে বৃত্তটিকে চতুর্ভুজটির পরিবৃত্ত বলা হয়।

চিত্রে $ABCD$ চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়েছে। বৃত্তটি চতুর্ভুজ $ABCD$-এর পরিবৃত্ত। এক্ষেত্রে $ABCD$-এর শীর্ষবিন্দুগুলো সমবৃত্ত হয়েছে বলা হয় অর্থাৎ A, B, C, D সমবৃত্ত।

মন্তব্য: সমরেখ নয় এমন তিনটি বিন্দু দিয়ে সবসময় একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। সুতরাং প্রত্যেক ত্রিভুজকে বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যায়। কিন্তু ত্রিভুজ ব্যতীত অন্য কোনো বহুভুজকে সবসময় বৃত্তে অর্ন্তলিখিত করা যায় না।

উপপাদ্য ১১.৮

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে $ABCD$ চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ এবং $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন: O, A এবং O, C যোগ করুন।

প্রমাণ: একই চাপ ADC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ABC$)

অর্থাৎ, $\angle AOC = 2\ \angle ABC$

আবার, একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ADC$), অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2\ \angle ADC$

$\therefore\ \angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2\ (\angle ABC + \angle ADC)$

কিন্তু $\angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC =$ চার সমকোণ

$\therefore\ 2(\angle ABC + \angle ADC) =$ চার সমকোণ

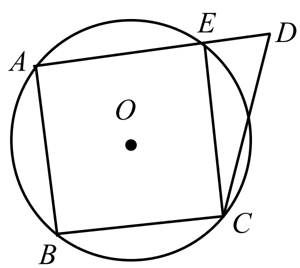
$\therefore\ \angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

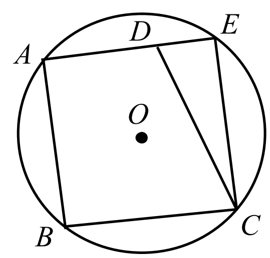
অনুসিদ্ধান্ত ১: বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান।

উপপাদ্য ১১.৯

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।



চিত্র-ক



চিত্র-খ

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, $ABCD$ চতুর্ভুজে $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অঙ্কন: যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়, সুতরাং এই তিনটি বিন্দু দিয়ে একটি ও কেবল একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। মনে করুন, বৃত্তটি AD সরলরেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করুন।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $ABCE$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। সুতরাং $\angle ABC + \angle AEC =$ দুই সমকোণ

কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ [দেওয়া আছে]

$\therefore\ \angle AEC = \angle ADC$

কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ চিত্র-ক অনুসারে ΔCED-এর বহিঃস্থ $\angle AEC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle ADC$

এবং চিত্র-খ অনুসারে ΔCED-এর বহিঃস্থ $\angle ADC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle AEC$

সুতরাং E এবং D বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না। তাই E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

অতএব, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সারসংক্ষেপ

- যদি কোনো চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থিত হয়, তাহলে চতুর্ভুজটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়েছে বলা হয়। সেক্ষেত্রে বৃত্তটিকে চতুর্ভুজটির পরিবৃত্ত বলা হয়।
- সমরেখ নয় এমন তিনটি বিন্দু দিয়ে সবসময় একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়, সুতরাং প্রত্যেক ত্রিভুজকে বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যায়।
- ত্রিভুজ ব্যতীত অন্য কোনো বহুভুজকে সবসময় বৃত্তে অর্ন্তলিখিত করা যায় না।
- বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১১.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-2):

1. বৃত্তে অর্ন্তলিখিত সামান্তরিক একটি-
   (ক) রম্বস (খ) ট্রাপিজিয়ম (গ) বর্গক্ষেত্র (ঘ) আয়তক্ষেত্র
2. বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভূজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি কত?
   (ক) 0^o (খ) 90^o (গ) 180^o (ঘ) 360^o
3. ABC সমদ্বিবাহু এবং BC এর সমান্তরাল রেখা AB ও AC কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন B, C, D, E সমবৃত্ত।
4. ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখন্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করুন, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।
5. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করুন, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।
6. প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহিদ্বিখণ্ডক বৃত্তের উপরে ছেদ করে।
7. প্রমাণ করুন, বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক একটি আয়ত।
8. $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ করুন, $BC = CD$ ।

পাঠ ৪ বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক সম্পর্কিত উপপাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক সম্পর্কে বলতে পারবেন,
- স্পর্শক সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	বৃত্তের ছেদক, বৃত্তের স্পর্শক, সাধারণ স্পর্শক, স্পর্শ জ্যা, স্পর্শ রেখাংশ

মূলপাঠ

বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শক (Secant and Tangent of the circle)

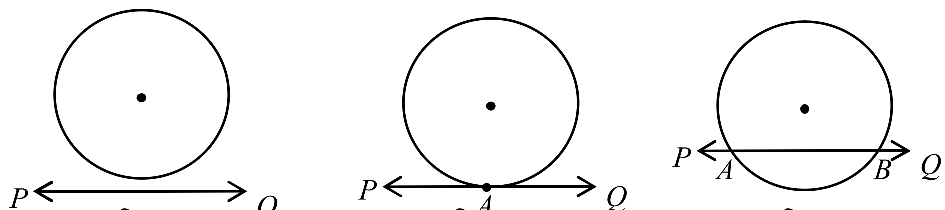
নিচের চিত্রগুলো লক্ষ্য করুন। সমতলে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার পারস্পরিক তিনটি অবস্থান থাকার সম্ভাবনা রয়েছে:

(ক) চিত্র-ক এ বৃত্ত ও সরলরেখার কোনো সাধারণ বিন্দু নেই,

(খ) চিত্র-খ এ সরলরেখাটি বৃত্তকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করেছে,

(গ) চিত্র-গ এ সরলরেখাটি বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করেছে, অর্থাৎ সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার সর্বাধিক দুইটি সাধারণ বিন্দু বা ছেদবিন্দু থাকতে পারে।

অতএব নিম্নের চিত্র অনুসারে আমরা বৃত্তের ছেদক ও স্পর্শকের সংজ্ঞা নিম্নলিখিতভাবে দিতে পারি।



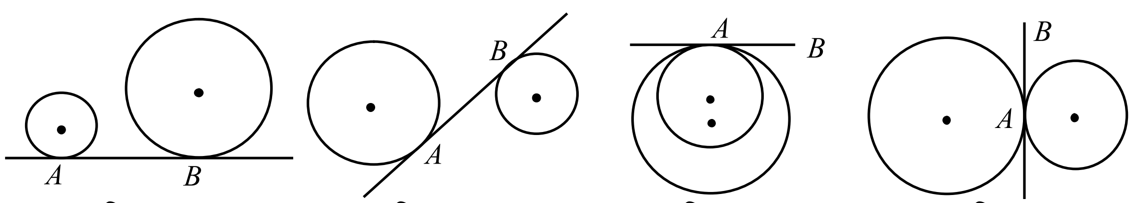
চিত্র-ক চিত্র-খ চিত্র-গ

সংজ্ঞা: সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয়। কিন্তু যদি একটি ও কেবল একটি সাধারণ বিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়। শেষোক্ত ক্ষেত্রে, সাধারণ বিন্দুটিকে ঐ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু বলা হয়। উপরের চিত্রে একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার পারস্পরিক অবস্থান দেখানো হয়েছে। চিত্র-গ এ PQ সরলরেখাটি বৃত্তকে A ও B দুইটি বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং চিত্র-খ এ PQ সরলরেখাটি বৃত্তকে A বিন্দুতে স্পর্শ করেছে, অর্থাৎ PQ বৃত্তটির স্পর্শক ও A এই স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু।

মন্তব্য: বৃত্তের প্রত্যেক ছেদকের ছেদবিন্দুদ্বয়ের অন্তর্বর্তী সকল বিন্দু বৃত্তটির অভ্যন্তরে থাকে।

সাধারণ স্পর্শক (Common tangent)

সংজ্ঞা: একটি সরলরেখা যদি দুইটি বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে তাকে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক বলা হয়।



চিত্র-ক চিত্র-খ চিত্র-গ চিত্র-ঘ

উপরের চিত্রগুলোতে AB সরলরেখা উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক। চিত্র-ক ও চিত্র-খ এ স্পর্শবিন্দু ভিন্ন ভিন্ন। চিত্র-গ ও চিত্র-ঘ এ স্পর্শবিন্দু একই।

দুইটি বৃত্তের কোনো সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি ভিন্ন হলে স্পর্শকটিকে **(ক) সরল সাধারণ স্পর্শক** বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং **(খ) তির্যক সাধারণ স্পর্শক** বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে। চিত্র-ক এ স্পর্শকটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং চিত্র-খ এ স্পর্শকটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

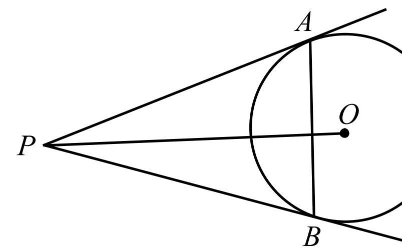
দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক যদি বৃত্ত দুইটিকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে ঐ বিন্দুতে বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করে বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে, বৃত্ত দুইটির **অন্তঃস্পর্শ** হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং **বহিঃস্পর্শ**

হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে। চিত্র-গ এ বৃত্ত দুইটির অন্তঃস্পর্শ এবং চিত্র-ঘ এ বহিঃস্পর্শ হয়েছে।

স্পর্শ জ্যা ও স্পর্শ রেখাংশ (Tangent chord and tangent line)

O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের একটি বহিঃস্থ বিন্দু P। P বিন্দু দিয়ে যায় বৃত্তটির এরূপ দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটি স্পর্শক রয়েছে এবং স্পর্শক দুইটির স্পর্শবিন্দুদ্বয় PO সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। চিত্রে PA ও PB এরূপ দুইটি স্পর্শক।

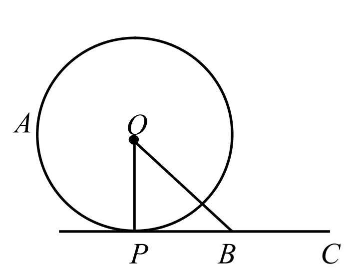
সংজ্ঞা: বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় বৃত্তের এরূপ দুইটি স্পর্শকের স্পর্শকবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটিতে ঐ বিন্দুর স্পর্শ জ্যা বলা হয়। চিত্রে AB রেখাংশ P বিন্দুর স্পর্শ জ্যা।



সংজ্ঞা: বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু P দিয়ে যায় এমন একটি স্পর্শকের স্পর্শকবিন্দু A হলে PA রেখাংশকে P হতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত একটি স্পর্শ রেখাংশ বলা হয়। চিত্রে PA রেখাংশ এবং PB রেখাংশ P বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শ রেখাংশ।

উপপাদ্য ১১.১০

বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের উপরস্থ P বিন্দুতে PC একটি স্পর্শক এবং OP স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। প্রমাণ করতে হবে যে, $PC \perp OP$.

অঙ্কন: PC স্পর্শকের উপর যে কোনো একটি বিন্দু B নিন এবং O, B যোগ করুন।

প্রমাণ: যেহেতু বৃত্তের P বিন্দুতে PC একটি স্পর্শক, সুতরাং ঐ P বিন্দু ব্যতীত PC এর উপরস্থ অন্য সকল বিন্দু বৃত্তের বাইরে থাকবে। সুতরাং B বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।

সুতরাং OB রেখাংশ বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP এর চেয়ে বড়, অর্থাৎ, $OB > OP$ এবং তা স্পর্শ বিন্দু P ব্যতীত PC এর উপরস্থ B বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্য সত্য।

অতএব কেন্দ্র O থেকে PC স্পর্শকের উপর OP হল ক্ষুদ্রতম দূরত্ব।

সুতরাং $PC \perp OP$.

অনুসিদ্ধান্ত ১: বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

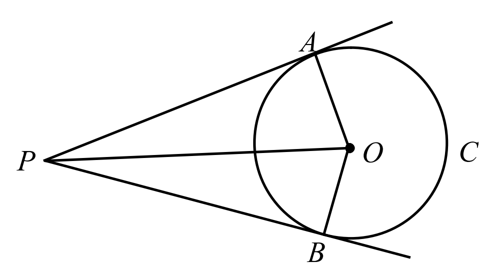
অনুসিদ্ধান্ত ২: স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের ওপর অঙ্কিত লম্ব কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত ৩: বৃত্তের কোনো বিন্দু দিয়ে ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হয়, অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে এর কোনো স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায়।

উপপাদ্য ১১.১১

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PA ও PB রশ্মিদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, $PA = PB$



অঙ্কন: O, A; O, B এবং O, P যোগ করুন।

প্রমাণ: যেহেতু PA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু $PA \perp OA$.

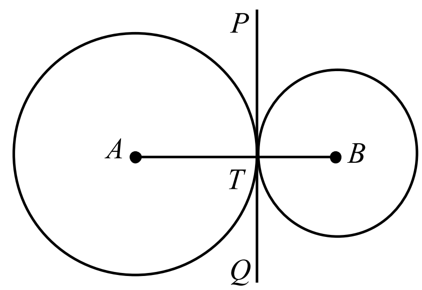
$\therefore \angle PAO =$ এক সমকোণ।

অনুরূপভাবে $\angle PBO =$ এক সমকোণ।

$\therefore \Delta PAO$ এবং ΔPBO উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।
এখন, ΔPAO ও ΔPBO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ $PO =$ অতিভুজ PO
এবং $OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]
সুতরাং $PA = PB$

উপপাদ্য ১১.১২

দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, A এবং B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পর T বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, A, T এবং B বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন: যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পর T বিন্দুতে স্পর্শ করেছে, সুতরাং T বিন্দুতে তাদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকবে। এখন T বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক PTQ অঙ্কন করুন। T, A ও T, B যোগ করুন।

প্রমাণ: A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে TA স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং PTQ স্পর্শক।
সুতরাং $\angle PTA =$ এক সমকোণ।
তদ্রুপ $\angle PTB =$ এক সমকোণ।
অতএব $\angle PTA + \angle PTB =$ এক সমকোণ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।
বা, $\angle ATB =$ দুই সমকোণ
অর্থাৎ, $\angle ATB$ একটি সরল কোণ।
অতএব A, T এবং B বিন্দুত্রয় সমরেখ।

শিক্ষার্থীর কাজ	প্রমাণ করুন যে, দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ১: দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান।
অনুসিদ্ধান্ত ২: দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান।

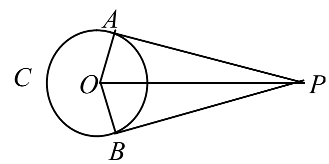
সারসংক্ষেপ

- সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয়।
- সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি একটি ও কেবল একটি সাধারণ বিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়।
- যে বিন্দুতে সরলরেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করে ঐ বিন্দুটিকে ঐ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু বলা হয়।
- একটি সরলরেখা যদি দুইটি বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে তাকে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক বলা হয়।
- বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় বৃত্তের এরূপ দুইটি স্পর্শকের স্পর্শকবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটিতে ঐ বিন্দুর স্পর্শ জ্যা বলা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১১.৪

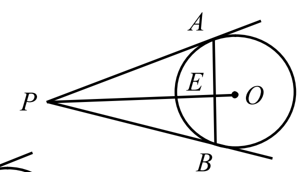
সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-6):

1. বৃত্তের কোনো বিন্দুতে কয়টি স্পর্শক আঁকা যায়?
   (ক) 1 টি (খ) 2 টি (গ) 3 টি (ঘ) 4 টি
2. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সংখ্যা কতটি?
   (ক) 1 টি (খ) 2 টি (গ) 3 টি (ঘ) 4 টি
3. P ও Q কেন্দ্র বিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পর O বিন্দুতে স্পর্শ করলে, নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) $OP = OQ$ (খ) $OP > OQ$ (গ) $OP < OQ$ (ঘ) P, O এবং Q সমরেখ
4. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য করুন এবং সঠিক উত্তর চিহ্নিত করুন-
   (i) বৃত্তের কোনো বিন্দুতে মাত্র একটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
   (ii) বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে দুই-এর অধিক স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
   (iii) যদি একটি বৃত্ত অপর বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত হয় তবে কোনো সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায় না।
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) শুধুমাত্র ii (ঘ) i ও iii
5. দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে এবং তাদের ব্যাসার্ধ 6 সে.মি. এবং 7 সে.মি.। বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তি দূরত্ব কত সে.মি.?
   (ক) 1 (খ) 5 (গ) 11 (ঘ) 13
6. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক

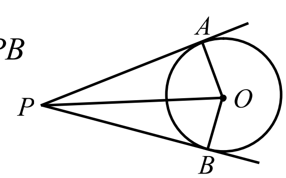
   

   (i) $PA = PB$
   (ii) $OA = OB$
   (iii) $\angle APO = \angle BPO = 45^{o}$
   উপরের তথ্যগুলোর কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i, ii (খ) ii, iii (গ) i, iii (ঘ) i, ii, iii

7. পাশের চিত্রে PA ও PB স্পর্শক। প্রমাণ করুন, $PE \perp AB$ এবং $AE = BE$

8. পাশের চিত্রে PA ও PB স্পর্শক। প্রমাণ করুন, PO, $\angle APB$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

9. প্রমাণ করুন যে, যে সকল বৃত্ত দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে তাদের কেন্দ্রসমূহ সমরেখ।
10. AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ করুন যে, ΔACD সমবাহু।
11. AB ও AC কোনো বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করুন যে, BC রেখা A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমান্তরাল।
12. প্রমাণ করুন, যে সকল বৃত্ত একই বিন্দু দিয়ে যায় এবং উক্ত বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে, তাদের কেন্দ্রগুলো একই সরলরেখায় অবস্থিত।
13. প্রমাণ করুন যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
14. P কোনো বৃত্তের APB চাপের মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করুন যে, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি AB জ্যা-এর সমান্তরাল।

পাঠ ৫ বৃত্ত সম্পর্কিত সম্পাদ্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

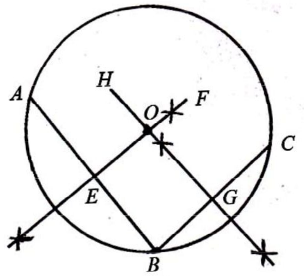
- বৃত্ত সম্পর্কিত বিভিন্ন সম্পাদ্য আঁকতে ও প্রমাণ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	বৃত্ত, বৃত্তচাপ, স্পর্শক, অন্তর্বৃত্ত, পরিবৃত্ত, বহিঃর্বৃত্ত

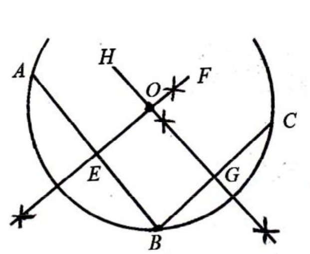
মূলপাঠ

সম্পাদ্য ১১.১

একটি বৃত্ত বা বৃত্তচাপ দেওয়া আছে, কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র-ক



চিত্র-খ

বিশেষ নির্বচন: একটি বৃত্ত চিত্র-ক বা বৃত্তচাপ চিত্র-খ দেওয়া আছে, বৃত্তটির বা বৃত্তচাপটির কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন: প্রদত্ত বৃত্তে বা বৃত্তচাপে তিনটি বিন্দু A, B ও C নিন। A, B এবং B,C যোগ করুন। AB ও BC জ্যা দুইটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EF ও GH রেখাংশ দুইটি টানুন। মনে করুন, তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, O বিন্দুই বৃত্তের বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

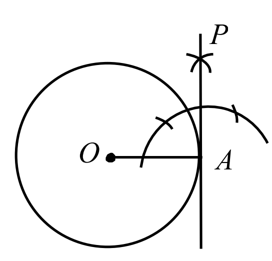
প্রমাণ: EF রেখাংশ AB জ্যা এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং তা কেন্দ্রগামী। আবার GH রেখাংশ BC জ্যা এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং তা কেন্দ্রগামী। কিন্তু কেন্দ্র O হলো EF ও GH সাধারণ ছেদবিন্দু। সুতরাং O বিন্দুই বৃত্তের বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন

আমরা জেনেছি যে, বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শক আঁকা যায় না। বিন্দুটি যদি বৃত্তের উপর থাকে তাহলে উক্ত বিন্দুতে বৃত্তের একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়। স্পর্শকটি বর্ণিত বিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধের উপর লম্ব হয়। সুতরাং, বৃত্তস্থিত কোনো বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করতে হলে বর্ণিত বিন্দুতে ব্যাসার্ধ অঙ্কন করে ব্যাসার্ধের উপর লম্ব আঁকতে হবে। আবার বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত হলে তা থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁকা যাবে।

সম্পাদ্য ১১.২

বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে A একটি বিন্দু। A বিন্দুতে বৃত্তটিতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।

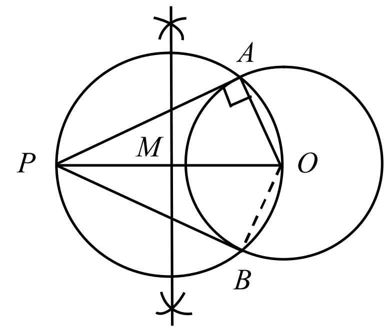
অঙ্কন: O, A যোগ করুন। A বিন্দুতে OA এর উপর AP লম্ব আঁকুন। তাহলে AP নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ: যেহেতু OA রেখাংশ A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং AP তার উপর লম্ব। সুতরাং, AP রেখাই নির্ণেয় স্পর্শক।

মনে রাখার বিষয়ঃ বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক আঁকা যায়।

সম্পাদ্য ১১.৩

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তটির স্পর্শক আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু। P বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে স্পর্শক আঁকতে হবে।

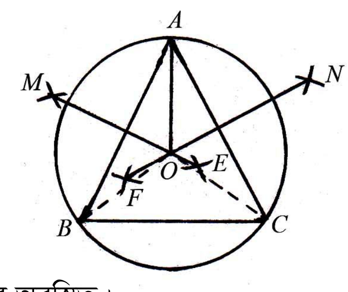
অঙ্কনঃ P, O যোগ করুন। PO রেখাংশের মধ্যবিন্দু M নির্ণয় করুন। এখন M কে কেন্দ্র করে MO এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকুন। মনে করুন, নতুন অঙ্কিত বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।
A, P এবং B, P যোগ করুন। তাহলে, AP ও BP উভয়েই নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণঃ A, O এবং B, O যোগ করুন। এখন APB বৃত্তে PO ব্যাস।
$\therefore \angle PAO =$ এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ]
সুতরাং, OA রেখাংশ AP রেখাংশের ওপর লম্ব।
অতএব, O কেন্দ্রিক বৃত্তের A বিন্দুতে AP রেখাংশ একটি স্পর্শক।
অনুরূপভাবে, BP রেখাংশও একটি স্পর্শক।

মনে রাখার বিষয়ঃ বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে দুইটি ও কেবল দুইটি স্পর্শক আঁকা যায়।

সম্পাদ্য ১১.৪

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।



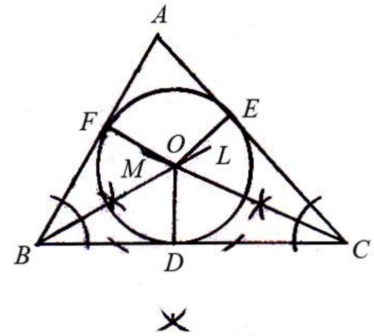
বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনঃ AB ও AC রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকুন। মনে করুন, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
A, O যোগ করুন। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকুন। তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC-এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণঃ B, O এবং C, O যোগ করুন। O বিন্দুটি AB এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক EM এর ওপর অবস্থিত।
$\therefore OA = OB$
একইভাবে, $OA = OC$
$\therefore OA = OB = OC$
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে। সুতরাং এই বৃত্তটিই ΔABC-এর পরিবৃত্ত।

সম্পাদ্য ১১.৫

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। এর অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, ΔABC-এর ভিতরে এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা BC, CA ও AB বাহু তিনটির প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে।

অঙ্কনঃ $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BL ও CM আঁকুন। মনে করুন, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে BC এর ওপর OD লম্ব আঁকুন। মনে করুন, তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন O-কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকুন। তাহলে, এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

প্রমাণঃ O থেকে AC ও AB এর উপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব টানুন। মনে করুন, লম্বদ্বয় বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।

O বিন্দু $\angle ABC$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।

$\therefore OF = OD$

অনুরূপভাবে, O বিন্দু $\angle ACB$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত বলে $OE = OD$

$\therefore OD = OE = OF$

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা D, E এবং F বিন্দু দিয়ে যাবে।

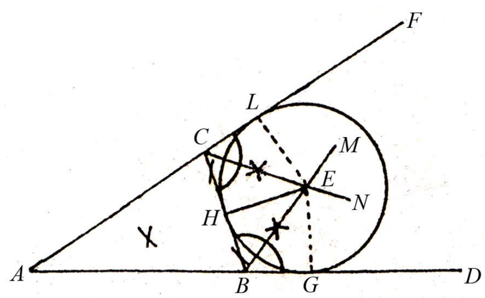
আবার, OD, OE ও OF এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, AC ও AB লম্ব।

সুতরাং বৃত্তটি ΔABC-এর ভিতরে থেকে এর বাহু তিনটিকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সুতরাং, DEF বৃত্তটিই ΔABC -এর অন্তর্বৃত্ত হবে।

সম্পাদ্য ১১.৬

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। এর বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ, এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে।

অঙ্কনঃ AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করুন। $\angle DBC$ ও $\angle FCB$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BM এবং CN আঁকুন। মনে করুন তারা পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে। এখন E বিন্দু থেকে BC এর ওপর EH লম্ব আঁকুন এবং মনে করুন তা BC কে H বিন্দুতে ছেদ করে। E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকুন। তাহলে, এই বৃত্তটিই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত হবে।

প্রমাণঃ E থেকে BD ও CF রেখাংশের উপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব আঁকুন। মনে করুন, লম্বদ্বয়, BD ও CF রেখাংশদ্বয়কে যথাক্রমে G ও L বিন্দুতে ছেদ করে।

E বিন্দুটি $\angle DBC$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।

$\therefore EH = EG$

অনুরূপভাবে, E বিন্দুটি $\angle FCB$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত বলে $EH = EL$

$\therefore EH = EG = EL$

সুতরাং E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H ,G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার, EH, EG ও EL এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, BD ও CF রেখাংশ তিনটি লম্ব।

সুতরাং বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।

অতএব, HGL বৃত্তটিই ΔABC-এর বহির্বৃত্ত হবে।

সারসংক্ষেপ

- বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শক আঁকা যায় না।
- বিন্দুটি যদি বৃত্তের ওপর থাকে তাহলে উক্ত বিন্দুতে বৃত্তের একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
- স্পর্শকটি বর্ণিত বিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধের উপর লম্ব হয়।
- বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত হলে তা থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁকা যাবে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১১.৫

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-3):

1. কোনো ত্রিভুজের কতটি বহির্বৃত্ত আঁকা যায়?
   (ক) 1টি (খ) 2টি (গ) 3টি (ঘ) 4টি
2. সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকলে তার কেন্দ্র কোথায় অবস্থান করবে?
   (ক) ত্রিভুজের অভ্যন্তরে (খ) ত্রিভুজের বাহিরে (গ) অতিভুজের উপর (ঘ) ভূমির উপর
3. একটি ত্রিভুজের কয়টি অন্তর্বৃত্ত আঁকা যায়?
   (ক) 1 টি (খ) 2টি (গ) 3টি (ঘ) 4টি

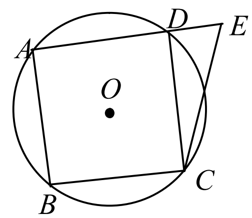
4. এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A ও B দিয়ে যাবে এবং যার কেন্দ্র AB থেকে 5 সে.মি. দূরে থাকবে।
5. একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরির্বৃত্ত অঙ্কন করুন।
6. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও তাদের একটি ছেদককে স্পর্শ করে এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন।
7. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করুন যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।
8. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করুন যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।
9. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 5 সে.মি.
   উপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দিন:
   (ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন করুন।
   (খ) ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করুন এবং এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।
   (গ) ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যে কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করে দেখান যে, স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান হয়।
   (ঘ) ত্রিভুজটির বহির্বৃত্ত অঙ্কন করুন।
   (ঙ) ত্রিভুজটির অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করুন।
10. কোনো বৃত্তের এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করুন, যেন তা কোনো সরলরেখার সাথে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ উৎপন্ন করে।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-3):

1. একটি বৃত্তের-
   (i) ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।
   (ii) সমান সমান জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।
   (iii) বৃহত্তর জ্যা, ক্ষুদ্রতম জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন্‌টি সঠিক
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
2. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য করুন:
   (i) বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর অসমান।
   (ii) বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী।
   (iii) দুইটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ।
   নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

3. পাশের চিত্রটি লক্ষ্য করুন:



(i) $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ।
(ii) $\angle ADC = \angle AEC + \angle ECD$
(iii) $\angle ABC + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।
উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন্‌টি সঠিক
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

4. O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা।
   (ক) প্রদত্ত তথ্যের ভিত্তিতে সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ চিত্র আঁকুন।
   (খ) কেন্দ্র থেকে জ্যাদ্বয় সমদূরবর্তী হলে প্রমাণ করুন $AB = CD$।
   (গ) জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হলে প্রমাণ করুন যে, $\angle AOC + \angle BOD = 180^o$।
5. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AB ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা।
   (ক) তথ্যের ভিত্তিতে সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ চিত্র আঁকুন।
   (খ) $OD \perp AB$ হলে প্রমাণ করুন যে, D, AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু।
   (গ) AB জ্যা-এর সমান করে আরেকটি জ্যা অঙ্কন করে প্রমাণ করুন যে, উক্ত জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী।
6. A এবং B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 6 সে.মি. এবং B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 8 সে.মি.।
   (ক) উদ্দীপক অনুযায়ী চিত্রটি আঁকুন এবং AB-এর দূরত্ব নির্ণয় করুন।
   (খ) যদি বৃত্ত দুইটির স্পর্শবিন্দু T হয় তবে প্রমাণ করুন যে, A, T এবং B বিন্দু তিনটি সমরেখ।
   (গ) A কেন্দ্রবিষ্টি বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক অঙ্কন করুন যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয় (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)।