



ব্যবহারিক জ্যামিতি (Practical Geometry)

ভূমিকা

মাধ্যমিক স্তরে জ্যামিতি শেখার অন্যতম উদ্দেশ্য হলো, জ্যামিতিক প্রমাণ ও জ্যামিতিক অঙ্কন সম্পর্কে জ্ঞান সম্প্রসারণ ও তা প্রয়োগের দক্ষতা বৃদ্ধি করা। এ উদ্দেশ্যকে সামনে রেখে ৯ম-১০ম শ্রেণিতে ব্যবহারিক জ্যামিতি অন্তর্ভুক্ত করা হয়েছে। এর মাধ্যমে শিক্ষার্থীরা জ্যামিতিক চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কন করতে পারবে এবং ব্যবহারিক ক্ষেত্রে জ্যামিতির জ্ঞান ও দক্ষতা প্রয়োগ করতে পারবে। ব্যবহারিক জীবনে কখনো কখনো জ্যামিতিক চিত্র সূক্ষ্মভাবে অঙ্কনের প্রয়োজন হয়। এর ফলে শিক্ষার্থীরা যুক্তি উপলব্ধির মাধ্যমে গণিত শিক্ষার সৌন্দর্য ও আনন্দ লাভ করে। শুধু স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কনের ফলে বুদ্ধিবৃত্তীয় বিকাশের সাথে সাথে মনোপেশিজ স্তরের বিকাশও ঘটে। ব্যবহারিক জ্যামিতির এ অংশে বিশেষ ধরনের ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ অঙ্কনের আলোচনা করা হয়েছে।



ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি-

- ত্রিভুজ সংক্রান্ত বিভিন্ন সম্পাদ্য আঁকতে ও প্রমাণ করতে পারবেন,
- চতুর্ভুজ সংক্রান্ত বিভিন্ন সম্পাদ্য আঁকতে ও প্রমাণ করতে পারবেন,



ইউনিট সমাপ্তির সময়

ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১: ত্রিভুজ অঙ্কন

পাঠ ২: চতুর্ভুজ অঙ্কন

পাঠ ১ ত্রিভুজ অঙ্কন



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের ভূমি ও ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি জানা থাকলে ত্রিভুজটি আঁকতে পারবেন,
- ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্ম কোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর জানা থাকলে ত্রিভুজটি আঁকতে পারবেন,
- ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ ও পরিসীমা জানা থাকলে ত্রিভুজটি আঁকতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	ত্রিভুজ, ভূমি, ভূমি সংলগ্ন, পরিসীমা
------------	-------------------------------------



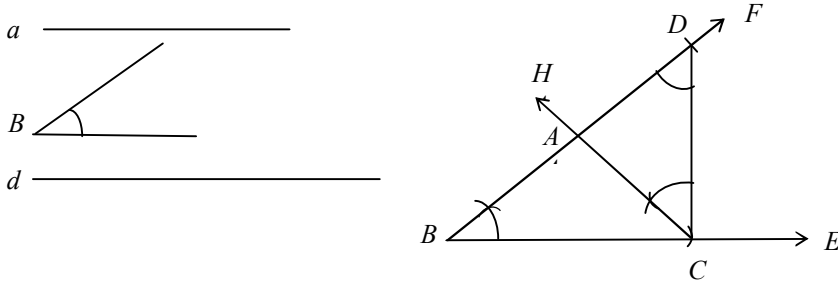
মূলপাঠ

ত্রিভুজ অঙ্কন (Construction of Triangles)

প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ এই ছয়টি অঙ্গ রয়েছে। তবে কোনো ত্রিভুজের আকার ও আকৃতি নির্দিষ্ট করার জন্য সবগুলো বাহু ও কোণের প্রয়োজন হয় না। ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের মধ্যে কেবল তিনটি অঙ্গ জানা থাকলেই ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব।

সম্পাদ্য ১০.১

ত্রিভুজের ভূমি ও ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, একটি ত্রিভুজের ভূমি a , ভূমিসংলগ্ন কোণ B এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো একটি রশ্মি BE হতে ভূমি a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিন। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle B$ এর সমান করে $\angle CBF$ আঁকুন। BF রশ্মি হতে d এর সমান করে BD অংশ কাটুন। C, D যোগ করুন।

C বিন্দুতে CD রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু অবস্থিত সেই পাশে CD এর সাথে $\angle DCH = \angle BDC$ আঁকুন।

মনে করুন, CH রশ্মি BD রেখাংশকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle ADC$ -এ, $\angle ADC = \angle ACD$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore AC = AD$

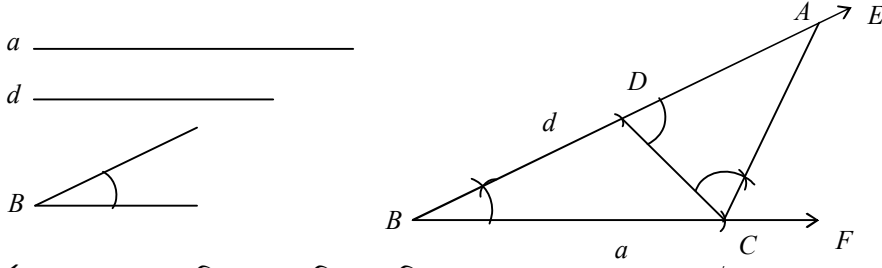
এখন, $\triangle ABC$ -এ, $\angle ABC = \angle B$, $BC = a$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং $BA + AC = BA + AD = BD = d$ [$AC = AD$]

অতএব $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ১০.২

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্ম কোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ত্রিভুজের ভূমি a , ভূমিসংলগ্ন কোণ B এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো একটি রশ্মি BF হতে ভূমি a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিন। BC রেখাংশের B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle B$ এর সমান করে $\angle CBE$ আঁকুন।

BE রশ্মি হতে d এর সমান করে BD অংশ কাটুন। C, D যোগ করুন। CD রেখাংশের C বিন্দুতে $\angle DCA = \angle EDC$ আঁকুন। মনে করুন, CA রশ্মিকে BE রশ্মি A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle ADC$ -এ, $\angle ADC = \angle ACD$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore AC = AD$

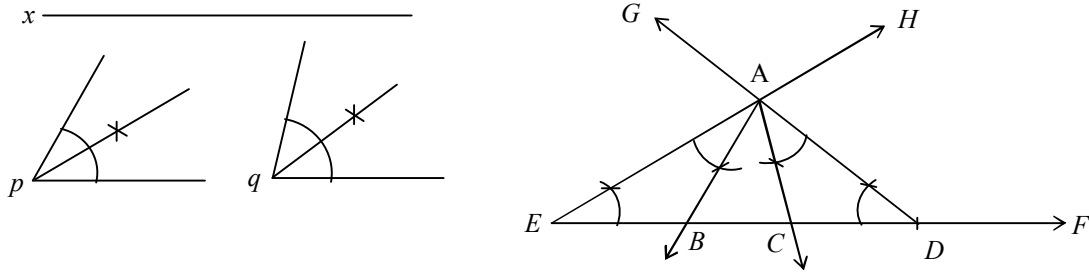
সুতরাং দুই বাহুর অন্তর $AB - AC = AB - AD = BD = d$

অতএব, $\triangle ABC$ -এ, $BC = a$, $AB - AC = d$ এবং $\angle ABC = \angle B$,

সুতরাং $\triangle ABC$ -ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ১০.৩

ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, একটি ত্রিভুজের পরিসীমা x এবং ভূমিসংলগ্ন কোণ p ও q দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোন একটি রশ্মি EF থেকে পরিসীমা x এর সমান করে ED অংশ কেটে নিন। E ও D বিন্দুতে ED রেখাংশের একই পাশে $\angle DEH = \frac{1}{2} \angle p$ এবং $\angle EDG = \frac{1}{2} \angle q$ আঁকুন।

মনে করুন, DG ও EH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle EAB = \angle AED$ এবং $\angle DAC = \angle ADE$ আঁকুন। AB এবং AC রশ্মিদ্বয় ED রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে $\triangle ABC$ -ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $\triangle AEB$ -এ, $\angle AEB = \angle EAB$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore AB = EB$

আবার $\triangle ACD$ -এ, $\angle ADC = \angle DAC$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore CA = CD$

সুতরাং $\triangle ABC$ -এ, $AB + BC + CA = EB + BC + CD = ED = x$

$$\angle ABC = \angle AEB + \angle EAB = \frac{1}{2} \angle p + \frac{1}{2} \angle p = \angle p$$

$$\text{এবং } \angle ACB = \angle ADC + \angle DAC = \frac{1}{2} \angle q + \frac{1}{2} \angle q = \angle q$$

সুতরাং $\triangle ABC$ -ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-5):

1. ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব যদি

i. দুইটি বাহু দেওয়া থাকে

ii. দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহু দেওয়া থাকে

iii. অতিভুজ ও অপর বাহু দেওয়া থাকে

নিচের কোন্টি সঠিক?

(ক) i

(খ) ii

(গ) i ও ii

(ঘ) i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপকের আলোকে 2 ও 3 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন:

একটি ত্রিভুজের ভূমি 4 মিটার, ভূমি সংলগ্ন কোণ 30° এবং ভূমির অন্য প্রান্ত বিন্দুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য 3 মিটার।

2. অঙ্কিত ত্রিভুজটি কোন্ ধরনের ত্রিভুজ?

(ক) স্থূলকোণী

(খ) সূক্ষ্মকোণী

(গ) সমকোণী

(ঘ) সমদ্বিবাহু সমকোণী

3. ত্রিভুজটির ভূমির বিপরীত কোণের মান কত ডিগ্রি?

(ক) 30°

(খ) 45°

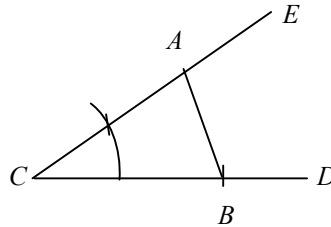
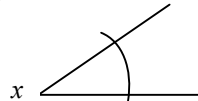
(গ) 60°

(ঘ) 90°

4. চিত্রে একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু a ও b এবং বাহুসংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ নিয়ে $\triangle ABC$ আঁকা হয়েছে।

a _____

b _____



$\triangle ABC$ এ a বাহুর দৈর্ঘ্য কোন্টি?

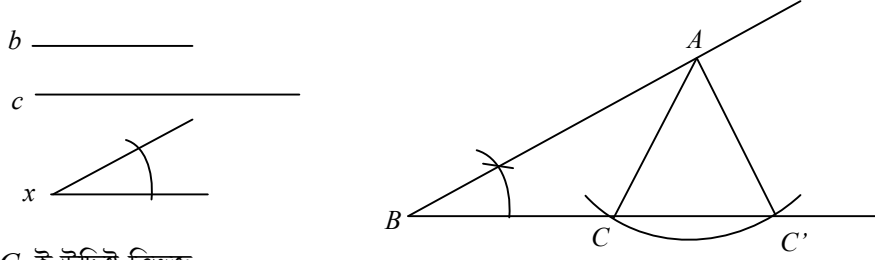
(ক) AB

(খ) BC

(গ) AC

(ঘ) CD

5. চিত্রে অঙ্কিত ত্রিভুজের দুইটি বাহু b ও c এবং তাদের সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ $\angle x$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে কোন্টি সঠিক ?



i. $\triangle ABC$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ

ii. $\triangle ABC'$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ

iii. $\triangle ACC'$ ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ

(ক) i

(খ) i ও ii

(গ) iii

(ঘ) i ও iii

6. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু এবং অতিভূজ ও অপর বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকুন।
7. একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকুন।
8. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভূজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকুন।
9. ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুইবাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকুন।
10. সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকুন।
11. একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ যথাক্রমে 45° ও 60° এবং ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমির উচ্চতা 6 সে.মি.।

(ক) উপরের তথ্য ব্যবহার করে ত্রিভুজটির চিত্র অঙ্কন করুন।

(খ) আপনার অঙ্কন প্রক্রিয়াটির বর্ণনা দিন।

(গ) আপনার অঙ্কিত ত্রিভুজটির অঙ্কন বিশুদ্ধতা প্রমাণ করুন।

পাঠ ২ চতুর্ভুজ অঙ্কন



পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে সামান্তরিকটি আঁকতে পারবেন,
- সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় ও একটি বাহু দেওয়া থাকলে সামান্তরিকটি আঁকতে পারবেন।

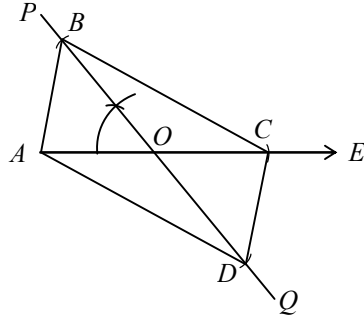
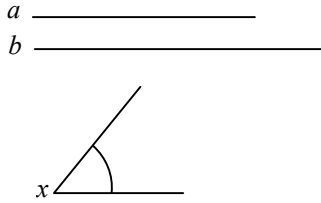
মূখ্য শব্দ সামান্তরিক, কর্ণ, অন্তর্ভুক্ত কোণ



মূলপাঠ

সম্পাদ্য ১০.৪

সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও তাদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ a ও b এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ x দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি AE থেকে a -এর সমান AC রেখাংশ নিন। AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করুন। O বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle AOP$ আঁকুন।

OP এর বিপরীত রশ্মি OQ অঙ্কন করুন। OP ও OQ রশ্মিদ্বয় থেকে $\frac{1}{2}b$ এর সমান যথাক্রমে OB ও OD রেখাংশদ্বয় নিন। A,B ; A,D ; C,D ; C,B যোগ করুন। তাহলে $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ এ $OA = OC = \frac{1}{2}a$, $OB = OD = \frac{1}{2}b$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

অতএব, $\triangle AOB \cong \triangle COD$

সুতরাং, $AB = CD$ এবং $\angle ABO =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CDO$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

$\therefore AB$ ও CD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

সুতরাং, $ABCD$ একটি সামান্তরিক যার কর্ণ $AC = AO + OC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$, কর্ণ $BD = BO + OD =$

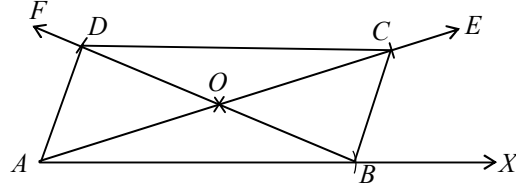
$\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$ এবং কর্ণ দুইটির অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB = \angle x$

অতএব $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য ১০.৫

সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

a _____
 b _____
 c _____



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ a ও b এবং একটি বাহু c দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: a ও b কর্ণদ্বয়কে সমান দুইভাগে বিভক্ত করুন। যেকোনো রশ্মি AX থেকে c এর সমান AB নিন।

A ও B কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\frac{a}{2}$ ও $\frac{b}{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকুন। মনে করুন, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O ; O, B যোগ করুন।

AO কে AE বরাবর এবং BO কে BF বরাবর বর্ধিত করুন। OE থেকে $\frac{a}{2} = OC$ এবং OF থেকে $\frac{b}{2} = OD$ নিন।

A, D ; D, C ও B, C যোগ করুন।

তাহলে $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ -এ $OA = OC = \frac{a}{2}$; $OB = OD = \frac{b}{2}$ [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$

$\therefore AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle ODC$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

$\therefore AB$ ও CD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

অতএব $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

আবার $AB = c$; কর্ণ $AC = AO + OC = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$ এবং কর্ণ $BD = BO + OD = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b$

অতএব $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-5):

- নিচের কোন্ উপাত্ত দেয়া থাকলে সামান্তরিক আঁকা যাবে?

(ক) চারটি বাহু ও একটি কোণ	(খ) চারটি বাহু ও একটি কর্ণ
(গ) একটি বাহু ও দুইটি কর্ণ	(ঘ) দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ
- একটি সামান্তরিকের পরিসীমা 28 সে.মি., সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের অনুপাত 4 : 3 হলে বৃহত্তর বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

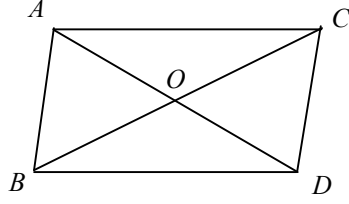
(ক) 4	(খ) 6	(গ) 8	(ঘ) 12
-------	-------	-------	--------
- প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে

(ক) দুইটি সমান ত্রিভুজে বিভক্ত করে	(খ) দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে
(গ) দুইটি সমান অংশে বিভক্ত করে না	(ঘ) দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে না

4. নিচের কোন্টি সামান্তরিক নয় ?

- (ক) আয়তক্ষেত্র (খ) বর্গক্ষেত্র (গ) ট্রাপিজিয়াম (ঘ) রম্বস

5.



উপরের চিত্রের ক্ষেত্রে নিচের কোন্টি সঠিক?

- (ক) $AO = AB$ (খ) $BO = BC$ (গ) $CO = DC$ (ঘ) $BO = DO$

6. দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে. মি., 6.5 সে. মি. এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 30° । সামান্তরিকটি আঁকুন।
7. একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে. মি., এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে. মি. ও 6.5 সে. মি.। সামান্তরিকটি আঁকুন।
8. একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মিটার এবং উচ্চতা 5 মিটার হলে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
9. একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে, সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন।
10. একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন করুন।
11. একটি রম্বসের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, রম্বসটি অঙ্কন করুন।
12. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে, বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন করুন।
13. একটি চতুর্ভুজের তিনটে বাহু 3 সে. মি., 3.5 সে. মি. ও 4 সে. মি. এবং দুইটি কোণ 60° ও 45° ।
- (ক) $PQRS$ একটি সামান্তরিক আঁকুন।
- (খ) প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ আঁকুন।
- (গ) 60° ও 45° কোণদ্বয়কে ভূমিসংলগ্ন কোণ ধরে 4 সে. মি. ভূমি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁকুন।