ইউনিট ৯

রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ
(Lines, Angles and Triangles)

ভূমিকা

জ্যামিতি গণিত শাস্ত্রের একটি অন্যতম শাখা। 'Geometry' শব্দটি গ্রীক Geo অর্থ ভূমি (Earth) ও Metrein অর্থ পরিমাপ (Measure) শব্দের সমন্বয়ে গঠিত। ব্যুৎপত্তিগতভাবে 'জ্যামিতি' বা 'Geometry' শব্দের অর্থ 'ভূমি পরিমাপ'। কৃষিভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি বা জমি পরিমাপের বিভিন্ন সমস্যা সমাধানের প্রয়োজনেই জ্যামিতি শাস্ত্রের উদ্ভব হয়। তবে জ্যামিতি কেবলমাত্র ভূমি পরিমাপের ক্ষেত্রেই সীমাবদ্ধ নয়, বরং গণিত শাস্ত্রের একটি অন্যতম শাখা হিসেবে অনেক জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানে ও ব্যাখ্যাদানে বিশেষ প্রয়োজনীয় বলে প্রতিপন্ন হয়েছে। প্রাচীন সভ্যতার নিদর্শনগুলোতে জ্যামিতি চর্চার বিশেষ প্রমাণ পাওয়া যায়। ঐতিহাসিকদের মতে প্রাচীন মিশরে আনুমানিক চার হাজার বছর আগে ভূমি বা জমি জরিপ ও নির্মাণ কার্যের জন্য বিভিন্ন ধ্যান-ধারণা ব্যবহার করা হতো। প্রাচীন মিশর, ব্যাবিলন, ভারত এবং চীনেও বিভিন্ন ব্যবহারিক কাজে জ্যামিতিক তথ্য প্রয়োগের নিদর্শন রয়েছে। তবে প্রাচীন গ্রীক সভ্যতার যুগেই জ্যামিতির প্রণালীবদ্ধ রূপটি সুস্পষ্টভাবে লক্ষ করা যায়।

মিশরের আলেকজান্দ্রিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক গ্রীক পণ্ডিত ইউক্লিড আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৩০০ অব্দে জ্যামিতিক পরিমাপ পদ্ধতির সংজ্ঞা ও বিভিন্ন সূত্রসমূহকে ধারাবাহিকভাবে সুবিন্যস্ত করে একটি অসাধারণ গ্রন্থ রচনা করেন। ১৩টি খণ্ডে প্রণীত এই গ্রন্থের নাম 'Elements'। গ্রন্থটি আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তিস্বরূপ। এই ইউনিটে আপনারা জ্যামিতির প্রাথমিক ধারণা সম্পর্কে অবহিত হবেন এবং আধুনিক যুক্তিমূলক জ্যামিতির দৃষ্টিভঙ্গি সম্পর্কে পরিচিত হবেন। এর ফলে আপনাদের জ্যামিতি পাঠে আগ্রহ ও কৌতুহল বৃদ্ধি পাবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- সমতলীয় জ্যামিতির মৌলিক স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করতে পারবেন,
- সমান্তরাল সরলরেখা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ করতে পারবেন,
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ করতে পারবেন,
- ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য ও অনুসিদ্ধান্তগুলো প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১ স্থান, তল, রেখা ও বিন্দুর ধারণা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- স্থান কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- তল কী তা বলতে পারবেন,
- তলের মাত্রা কত তা বলতে পারবেন,
- তল থেকে কীভাবে রেখা হয় তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- রেখার মাত্রা কত তা বলতে পারবেন,
- বিন্দু কী এবং এর মাত্রা কত তা বলতে পারবেন,
- একটি ঘনবস্তু থেকে তল, রেখা ও বিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	স্থান, তল, রেখা, ঘনবস্তু

মূলপাঠ

স্থান (Space)

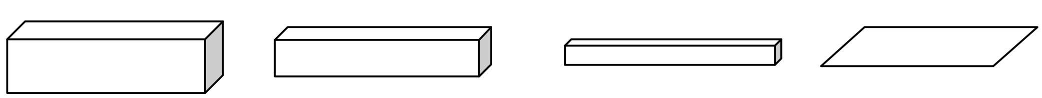
আপনারা আপনাদের চারপাশে সামনে, পিছনে, বামে, ডানে, উপরে, নিচে যে দিকেই তাকান দেখা যায় সীমাহীন বিস্তৃত জায়গা। জ্যামিতিক ধারণায় সীমাহীন এই বিস্তৃতিকে বলা হয় স্থান (Space)। স্থানের বিভিন্ন অংশ জুড়ে রয়েছে ছোট বড় নানারকম বস্তু। বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সেই স্থানের আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য ইত্যাদি থেকেই জ্যামিতিক ধারণার উদ্ভব।

ঘনবস্তু (Solid)

কোনো জাগতিক বস্তু যে স্থান দখল করে থাকে, তা তিন দিকে বিস্তৃত। এ তিন দিকের বিস্তার বস্তুটির তিনটি মাত্রা (Three dimension) দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্দেশ করে। সেজন্য প্রত্যেক ত্রিমাত্রিক (three-dimensional) বস্তুকে বলা হয় ঘনবস্তু (Solid)। যেমন, একটি ইট বা বাক্সের তিনটি মাত্রা দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে। একটি বল বা গোলকেরও তিনটি মাত্রা আছে। এর তিন মাত্রার অভিন্নতা স্পষ্টভাবে বোঝা না গেলেও একে দৈর্ঘ্য-প্রস্থ-উচ্চতা বিশিষ্ট খণ্ডে বিভক্ত করা যায়। এগুলো ঘনবস্তু।

তল (Surface)

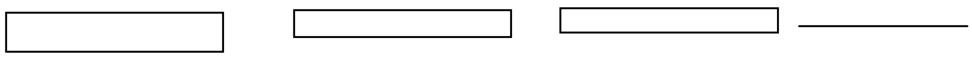
ঘনবস্তুর উপরিভাগকে তল (Surface) বলা হয়। প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, একটি ইট বা বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি তলের প্রতিরূপ। আবার, বল বা গোলকের উপরিভাগও একটি তল। তবে বাক্সের পৃষ্ঠতল ও গোলকের উপর তল ভিন্ন প্রকারের। বাক্সের পৃষ্ঠতল হচ্ছে সমতল (Plane Surface) এবং গোলকের উপর তল হচ্ছে বক্রতল (Curved Surface)।



তলের শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কোনো উচ্চতা নাই। কাজেই তল দ্বিমাত্রিক (Two-dimensional)। একটি বাক্সের দুইটি মাত্রা ঠিক রেখে তৃতীয় মাত্রা অর্থাৎ উচ্চতা ক্রমশ হ্রাস করে শূন্যে পরিণত করলে বাক্সটির পৃষ্ঠবিশেষ শুধু অবশিষ্ট থাকে। এভাবে ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণায় আসা যায়।

রেখা (Line)

দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদস্থলে একটি রেখা (Line) উৎপন্ন হয়। যেমন, বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠতল বাক্সের এক ধারে একটি রেখায় মিলিত হয়। এই রেখা একটি সরলরেখা (Straight Line)। একটি লেবু বা গোলাকার বস্তুকে একটি পাতলা ছুরি দিয়ে কাটলে, ছুরির সমতল যেখানে লেবুর বক্রতলকে ছেদ করে সেখানে একটি বক্ররেখা (Curved Line) উৎপন্ন হয়।

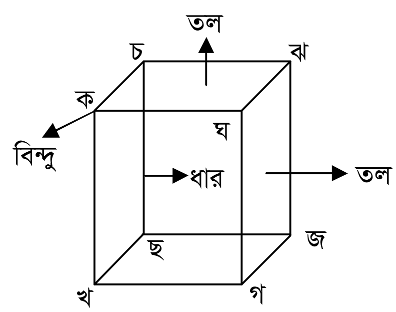


রেখার শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই। কাজেই রেখা একমাত্রিক (One-dimensional)। বাক্সের একটি পৃষ্ঠতলের প্রস্থ ক্রমশ হ্রাস পেয়ে সম্পূর্ণ শূন্য হলে, ঐ তলের একটি রেখা শুধু অবশিষ্ট থাকে। এভাবে তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণায় আসা যায়।

বিন্দু (Point)

দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর সৃষ্টি হয়। অর্থাৎ, দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু (Point) দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। যেমন, বাক্সের দুইটি ধার বাক্সের এক কোনায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়। বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশ হ্রাস পেয়ে অবশেষে শূন্য হলে, একটি বিন্দু শুধু অবশিষ্ট থাকে। বিন্দুকে শূন্য মাত্রার সত্ত্বা (Entity) বলে গণ্য করা হয়।

এখন আপনারা বাস্তব অভিজ্ঞতার মাধ্যমে একটি ঘনবস্তু থেকে তল, রেখা ও বিন্দু সম্পর্কে জ্ঞান লাভ করার চেষ্টা করুন।



একটি ব্লক নিন। এই ব্লকটির মসৃণ উপরিভাগকে একটি তলের প্রতিরূপ ধরুন। এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করা যায়, কিন্তু উচ্চতা নির্ণয় করা যায় না। ব্লকটির দুইটি তল যেখানে মিলিত হয়েছে, সেখানে সৃষ্টি হয়েছে ব্লকটির কিনারা বা ধার। এই ধার হচ্ছে রেখার একটি অংশের প্রতিরূপ। এর দৈর্ঘ্য আছে, কিন্তু প্রস্থ ও উচ্চতা নাই। কাগজে সোজা দাগ কেটে একটি রেখার প্রতিরূপ তৈরি করুন। ব্লকটির দুইটি ধার যেখানে মিলিত হয়েছে, সেখানে সৃষ্টি হয়েছে বিন্দু। বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা কিছুই নাই, শুধু অবস্থান আছে।

সারসংক্ষেপ

- জ্যামিতি শব্দের অর্থ ভূমি পরিমাপ।
- আমাদের চারপাশে যা মহাশূন্যের মতো দেখি, জ্যামিতিতে তাকেই স্থান বলে।
- ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক অর্থাৎ ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে।
- তল দ্বিমাত্রিক অর্থাৎ, তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কিন্তু উচ্চতা নাই।
- রেখা একমাত্রিক অর্থাৎ, রেখার শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই।
- বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কিছুই নাই, শুধু অবস্থান আছে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন:

1. একটি ঘনবস্তুর মাত্রা কয়টি?
   (ক) 1টি (খ) 2টি (গ) 3টি (ঘ) 4টি
2. দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদস্থলে কী উৎপন্ন হয়?
   (ক) বিন্দু (খ) রেখা (গ) বক্রতল (ঘ) সমতল
3. (i) একটি তলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে।
   (ii) একটি রেখার শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই।
   (iii) একটি বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই।
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

আপনার গণিত বইটি লক্ষ করুন এবং 4 ও 5 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন।

4. গণিত বইটির পৃষ্ঠস্থল কয়টি?
   (ক) 3টি (খ) 4টি (গ) 5টি (ঘ) 6টি
5. বইটির কোথায় রেখাংশ বা ধার দেখা যায়?
   (ক) বইটির দুইটি তল যেখানে মিলিত হয়েছে। (খ) বইটির তিনটি তল যেখানে মিলিত হয়েছে।
   (গ) বইটির চারটি তল যেখানে মিলিত হয়েছে। (ঘ) বইটির ছয়টি তল যেখানে মিলিত হয়েছে।

পাঠ ২ ইউক্লিডের স্বীকার্য

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- স্বতঃসিদ্ধ কী তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- স্বীকার্য বলতে কী বোঝায় তা বলতে পারবেন,
- ইউক্লিড প্রদত্ত স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করতে পারবেন,
- আধুনিক যুক্তিমূলক জ্যামিতির ভিত্তি ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকার্য

মূলপাঠ

পাঠ-১ এ তল, রেখা ও বিন্দু সম্পর্কে যে ধারণা দেওয়া হয়েছে, তা তল, রেখা ও বিন্দুর সংজ্ঞা নয়-বর্ণনা মাত্র। এই বর্ণনায় মাত্রা বলতে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার ধারণা ব্যবহার করা হয়েছে, যেগুলো সংজ্ঞায়িত নয়। সব ধারণা সংজ্ঞায়িত করা যায় না। তাই যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় কতকগুলো প্রাথমিক তথ্য বা ধারণা স্বীকার করে নিতে হয়। এসব

প্রাথমিক তথ্যের সত্যতা বাস্তব অভিজ্ঞতা থেকে উপলব্ধি করা যায়। প্রমাণ ছাড়া যে প্রাথমিক সত্যগুলো মেনে নিতে হয়, তাদেরকে স্বীকার্য (Postulate) বলে। অর্থাৎ, স্বীকার্য হলো স্ব-প্রকাশিত সত্য (Self-evident truth)। জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা ও তলকে প্রাথমিক ধারণা হিসেবে স্বীকার করে নেওয়া হয়।

ইউক্লিড তাঁর 'ইলিমেন্টস' গ্রন্থের প্রথম খণ্ডের শুরুতেই বিন্দু, রেখা ও তলের যে 'সংজ্ঞা' উল্লেখ করেছেন তা-ও আধুনিক দৃষ্টিভঙ্গি অনুসারে অসম্পূর্ণ।

ইউক্লিড প্রদত্ত বর্ণনা নিম্নরূপঃ

১. যার কোনো **অংশ** নাই, তাই বিন্দু।
২. যার কেবল **দৈর্ঘ্য** আছে, কিন্তু **প্রস্থ** ও **উচ্চতা** নাই, তাই রেখা।
৩. রেখার **প্রান্ত** বিন্দু নাই।
৪. যে রেখার উপরিস্থিত বিন্দুগুলো **একই বরাবরে** থাকে, তাই সরলরেখা।
৫. যার কেবল **দৈর্ঘ্য** ও **প্রস্থ** আছে, কিন্তু **উচ্চতা** নাই, তাই তল।
৬. তলের **প্রান্ত** হলো রেখা।
৭. যে তলের সরলরেখাগুলো তার উপর **সমভাবে** থাকে, তাই সমতল।

উপরের বর্ণনায় অংশ, প্রান্ত, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা, সমভাবে ইত্যাদি শব্দগুলো লক্ষ করলে দেখা যায় যে, এগুলো অসংজ্ঞায়িতভাবে গ্রহণ করা হয়েছে। ধরে নেওয়া যায় যে, এগুলো সম্পর্কে আমাদের প্রাথমিক ধারণা রয়েছে। এসব ধারণার উপর ভিত্তি করেই বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলের ধারণা দেওয়া হয়েছে। বস্তুত, যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নিতে হয়। ইউক্লিড এগুলোকে স্বতঃসিদ্ধ (Axioms) বলে আখ্যায়িত করেন।

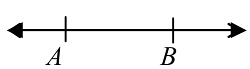
ইউক্লিড প্রদত্ত কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ নিচে দেওয়া হলোঃ

১. যে সকল বস্তুর প্রত্যেকটি একই বস্তুর সমান, সেগুলো পরস্পর সমান।
২. সমান সমান রাশির সাথে সমান সমান রাশি যোগ করলে, যোগফলগুলো সমান হয়।
৩. সমান সমান রাশি থেকে সমান সমান রাশি বিয়োগ করলে, বিয়োগফলগুলো সমান হয়।
৪. সমান সমান রাশিকে সমান সমান রাশি দিয়ে গুণ করলে, গুণফলগুলো সমান হয়।
৫. সমান সমান রাশিকে সমান সমান রাশি দিয়ে (শূন্য নয়) ভাগ করলে, ভাগফলগুলো সমান হয়।
৬. একটি সম্পূর্ণ রাশি তার যেকোনো অংশ থেকে বৃহত্তর।

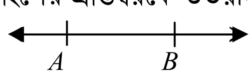
আধুনিক জ্যামিতিতে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলকে প্রাথমিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করে এদের কিছু বৈশিষ্ট্যকে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এই স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যসমূহকে জ্যামিতিক স্বীকার্য (Postulate) বলা হয়। বাস্তব ধারণার সঙ্গে সঙ্গতি রেখেই এই স্বীকার্যসমূহ নির্ধারণ করা হয়।

ইউক্লিড প্রদত্ত পাঁচটি স্বীকার্য হলোঃ

স্বীকার্য-১ঃ দুইটি বিন্দু দিয়ে কেবলমাত্র একটি সরলরেখা আঁকা যায়।

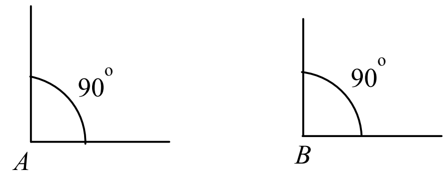


স্বীকার্য-২ঃ যেকোনো সরল রেখাংশের প্রান্তদ্বয়কে উভয়দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যায়।

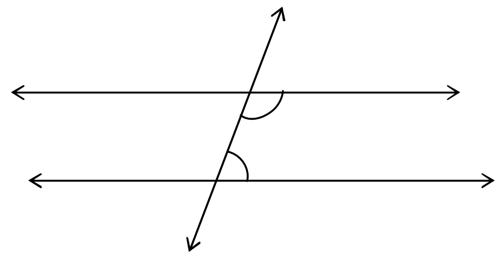


স্বীকার্য-৩ঃ যেকোনো বিন্দুকে কেন্দ্র করে যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে কেবলমাত্র একটি বৃত্ত আঁকা যায়।

স্বীকার্য-৪: সকল সমকোণ পরস্পর সমান।



স্বীকার্য-৫: একটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের থেকে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করলে যেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের থেকে কম, সেদিকে মিলিত হয়।



সমগ্র গণিত শাস্ত্র যুক্তি নির্ভর। এই যুক্তির প্রয়োগ জ্যামিতিতে খুবই সুস্পষ্ট। ইউক্লিড সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ ও স্বীকার্যগুলোর সাহায্যে যুক্তিমূলক নতুন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করেন। তিনি সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ, স্বীকার্য ও প্রমাণিত প্রতিজ্ঞার সাহায্যে আবার নতুন একটি প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করেন। ইউক্লিড তাঁর 'ইলিমেন্টস' গ্রন্থে বেশ কতকগুলো শৃঙ্খলাবদ্ধ প্রতিজ্ঞার প্রমাণ দিয়েছেন যা আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তি।

ইউক্লিডের প্রথম থেকে চতুর্থ পর্যন্ত স্বীকার্যগুলো এতো সহজ যে এগুলো "স্পষ্টই সত্য" বলে প্রতীয়মান হয়। কিন্তু স্বীকার্যগুলো প্রমাণ করা যায় না। কাজেই, উক্তিগুলো "প্রমাণবিহীন সত্য" বা স্বীকার্য বলে ধরে নেওয়া হয়। অন্যদিকে, পঞ্চম স্বীকার্যটি অন্য চারটি স্বীকার্যের থেকে জটিল। এই স্বীকার্যটি সমান্তরাল সরলরেখার সাথে সম্পর্কিত বিধায় পরবর্তীতে আলোচনা করা হবে।

সারসংক্ষেপ

- প্রমাণবিহীন যে প্রাথমিক সত্যগুলো মেনে নেওয়া হয়, তাদেরকে স্বীকার্য বলে।
- বিন্দু, রেখা ও তলকে জ্যামিতিক প্রাথমিক ধারণা হিসেবে স্বীকার করা হয়।
- যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নেওয়াকে ইউক্লিড স্বতঃসিদ্ধ বলে আখ্যায়িত করেন।
- বাস্তব ধারণার সাথে সঙ্গতি রেখেই স্বীকার্যসমূহ নির্ধারণ করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন:

1. নিচের কোনগুলোকে জ্যামিতিক প্রাথমিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করা হয়?
   (ক) দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা (খ) দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, তল (গ) বিন্দু, রেখা, তল (ঘ) বিন্দু, রেখা, উচ্চতা
2. (i) যার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নাই, তাই তল
   (ii) যার কেবল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, উচ্চতা নাই, তাই তল
   (iii) তলের প্রান্ত হলো রেখা।
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
3. দুইটি বিন্দু দিয়ে কয়টি সরলরেখা আঁকা যায়?
   (ক) একটি (খ) দুইটি (গ) চারটি (ঘ) অসংখ্য
4. কত ডিগ্রির কোণকে সমকোণ বলা হয়?
   (ক) 30^o (খ) 45^o (গ) 60^o (ঘ) 90^o

পাঠ ৩ সমতল জ্যামিতি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

- সমতল জ্যামিতি বলতে কী বোঝায় তা বলতে পারবেন,
- জ্যামিতিক স্বীকার্য কী তা বলতে পারবেন,
- আপতন স্বীকার্যগুলো বর্ণনা করতে পারবেন,
- দূরত্ব স্বীকার্য বর্ণনা করতে পারবেন,
- রুলার স্বীকার্য ও রুলার স্থাপন স্বীকার্য ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- প্রতিজ্ঞা কী তা বলতে পারবেন,
- বিরোধ পদ্ধতি বলতে কী বোঝায় তা বর্ণনা করতে পারবেন,
- জ্যামিতিক প্রমাণ কীভাবে করতে হয় তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সমতল জ্যামিতি, আপতন স্বীকার্য, দূরত্ব স্বীকার্য, রুলার স্বীকার্য, রুলার স্থাপন স্বীকার্য, প্রতিজ্ঞা, উপপাদ্য, সম্পাদ্য

মূলপাঠ

সমতল জ্যামিতি (Plane Geometry)

জ্যামিতির যে শাখায় একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, রেখা এবং তাদের সাথে সম্পর্কিত বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্ত্বা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে সমতল জ্যামিতি (Plane Geometry) বলা হয়। এই পুস্তকের জ্যামিতি অংশে সমতল জ্যামিতিই আপনাদের মূল বিবেচ্য বিষয়। সুতরাং বিশেষ কোনো বিষয় উল্লেখ না থাকলে বুঝতে হবে যে, আলোচ্য সকল বিন্দু, রেখা ইত্যাদি একই সমতলে অবস্থিত।

স্বীকার্য (Postulate)

যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নিতে হয়। বর্তমান জ্যামিতিতে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলকে প্রাথমিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করে তাদের কিছু বৈশিষ্ট্যকে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এই স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যসমূহকে জ্যামিতিক স্বীকার্য বলা হয়।

জ্যামিতির তিনটি প্রাথমিক ধারণা বিন্দু, সরলরেখা ও সমতল সম্পর্কে যথাযথ সংজ্ঞা দেওয়া সম্ভব নয়, তবে বাস্তব অভিজ্ঞতা প্রসূত ধারণা দেওয়া যায়।

বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থান (Space) কে বিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়। এখানে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতল সংক্রান্ত মৌলিক স্বীকার্যগুলো উল্লেখ করা হলো।

স্বীকার্য-১: সকল বিন্দুর সেট হচ্ছে স্থান (Space) এবং সরলরেখা ও সমতল হচ্ছে এই সেটের উপসেট।

এই স্বীকার্য থেকে লক্ষ করা যায় যে, প্রত্যেক সরলরেখা এবং প্রত্যেক সমতল হচ্ছে এক একটি সেট, যার উপাদান হচ্ছে বিন্দু। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, কোনো বিন্দু একটি সরলরেখার (বা সমতলের) অন্তর্ভুক্ত হলে বিন্দুটি ঐ সরলরেখায় (বা সমতলে) অবস্থিত অথবা, সরলরেখাটি (বা সমতলটি) ঐ বিন্দু দিয়ে যায়। অনুরূপভাবে, একটি সরলরেখা একটি সমতলের উপসেট হলে সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত অথবা, সমতলটি ঐ সরলরেখা দিয়ে যায়। জ্যামিতিক বর্ণনায় সাধারণত সেট প্রতীকের ব্যবহার পরিহার করা হয়।

সরলরেখা ও সমতলের বৈশিষ্ট্য হিসেবে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য-২: দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবলমাত্র একটি সরলরেখা আছে, যাতে বিন্দু দুইটি অবস্থিত।

স্বীকার্য-৩: একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবলমাত্র একটি সমতল আছে, যাতে বিন্দু তিনটি অবস্থিত।

স্বীকার্য-৪: কোনো দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলেই অবস্থিত।

স্বীকার্য-৫: (ক) স্থানে একাধিক সমতল বিদ্যমান

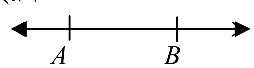
(খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত

(গ) প্রত্যেক সরলরেখার বিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেকটি বিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য বিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।

মন্তব্য: স্বীকার্য -১ থেকে স্বীকার্য-৫ কে **আপতন স্বীকার্য** বলা হয়।

জ্যামিতিতে যেকোনো দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় ও প্রকাশ করতে হয়। দূরত্বের ধারণাও জ্যামিতির একটি প্রাথমিক ধারণা। এজন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য-৬: (ক) A ও B বিন্দুযুগল একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে, যাকে A বিন্দু থেকে B বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং AB দ্বারা সূচিত করা হয়।



(খ) A ও B ভিন্ন বিন্দু হলে AB সংখ্যাটি ধনাত্মক। অন্যথায়, $AB = 0$

(গ) A থেকে B এর দূরত্ব এবং B থেকে A এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ, $AB = BA$।

মন্তব্য: $AB = BA$ হওয়ায় এই দূরত্বকে সাধারণত A বিন্দু ও B বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়। ব্যবহারিকভাবে, এই দূরত্ব পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

মন্তব্য: স্বীকার্য-৬ কে **দূরত্ব স্বীকার্য** বলা হয়।

স্বীকার্য ৫ (গ) অনুযায়ী প্রত্যেক সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট ও বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এক-এক মিল স্থাপন করা যায়। এ প্রসঙ্গে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

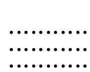
স্বীকার্য-৭: কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এমনভাবে এক-এক মিল স্থাপন করা যায় যেন, রেখাটির যেকোনো বিন্দু A, B এর জন্য $AB = |a\text{-}b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে A ও B এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

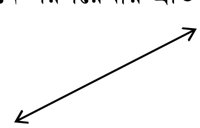
এই স্বীকার্যে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সরলরেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় A বিন্দুর সঙ্গে a সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে A কে a এর লেখবিন্দু এবং a কে A এর স্থানাঙ্ক বলা হয়। কোনো সরলরেখাকে সংখ্যারেখায় পরিণত করার জন্য প্রথমে রেখাটির একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 0 এবং তার ডান পাশের অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 1 ধরে নেওয়া হয়। এতে রেখাটিতে একটি একক দূরত্ব এবং একটি ধনাত্মক দিক নির্দিষ্ট হয়। এজন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য-৮: যেকোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক 0 এবং B এর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক হয়।

মন্তব্য: স্বীকার্য -৭ কে **রুলার স্বীকার্য** এবং স্বীকার্য-৮ কে **রুলার স্থাপন স্বীকার্য** বলা হয়।

জ্যামিতিক বর্ণনাকে স্পষ্ট করার জন্য চিত্র ব্যবহার করা হয়। কাগজের উপর পেন্সিল বা কলমের সূক্ষ্ম ফোঁটা দিয়ে বিন্দুর প্রতিরূপ (model) আঁকা হয়। সোজা রুলার বরাবর দাগ টেনে সরলরেখার প্রতিরূপ আঁকা হয়। যেমন,





কয়েকটি বিন্দু সরলরেখা

সরলরেখার চিত্রে দুই দিকে তীরচিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয় যে, রেখাটি উভয়দিকে সীমাহীনভাবে বিস্তৃত।

গাণিতিক উক্তির প্রমাণ

যেকোনো গাণিতিক তত্ত্বে কিছু প্রাথমিক ধারণা, সংজ্ঞা ও স্বীকার্য থাকে। এগুলোর উপর ভিত্তি করে ধাপে ধাপে ঐ তত্ত্ব সম্পর্কিত বিভিন্ন উক্তি যৌক্তিকভাবে প্রমাণ করা হয়। এরূপ উক্তিকে সাধারণত প্রতিজ্ঞা (Proposition) বলা হয়। প্রতিজ্ঞার যৌক্তিকতা প্রমাণের জন্য যুক্তিবিদ্যার কিছু নিয়ম প্রয়োগ করা হয়। যেমন,

(ক) আরোহ পদ্ধতি (Mathematical Induction),
(খ) অবরোহ পদ্ধতি (Mathematical Deduction),
(গ) বিরোধ পদ্ধতি (Proof by Contradiction),

আরোহ পদ্ধতির কাজ হলো কতকগুলো নির্দিষ্ট সত্য থেকে সাধারণ সত্যে উপনীত হওয়া। এই পদ্ধতিতে যে ধরনের যুক্তির ব্যবহার হয় তাদেরকে আরোহ যুক্তি বলা হয়। আরোহ পদ্ধতির ঠিক উল্টো হচ্ছে অবরোহ পদ্ধতি, এরা একে অপরের পরিপূরক।

অবরোহ পদ্ধতির মূল লক্ষ্য হলো সাধারণ সত্য থেকে বিশেষ সত্যকে উদ্ধার করতে পারা। এই পদ্ধতিতে যে ধরনের যুক্তি প্রয়োগ করা হয় তাদেরকে অবরোহ যুক্তি বলা হয়। আরোহ যুক্তির সাহায্যে যে সাধারণ সত্য অর্জিত হয় তার উপর ভিত্তি করে বিশেষ সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারাই অবরোহ যুক্তির কাজ। মোট কথা হচ্ছে, অবরোহ পদ্ধতিতে সমস্যা সমাধানের অর্থ হলো আরোহ পদ্ধতির চেয়ে সমস্যার আরও গভীরে প্রবেশ করে সিদ্ধান্ত গ্রহণ।

বিরোধ পদ্ধতি (Proof by Contradiction)

যুক্তিমূলক প্রমাণের এ পদ্ধতিটির সূচনা করেন দার্শনিক এরিস্টটল। এ পদ্ধতির ভিত্তি হলো:

- একই গুণকে একই সময় স্বীকার ও অস্বীকার করা যায় না।
- একই জিনিসের দুইটি পরস্পর বিরোধী গুণ থাকতে পারে না।
- যা পরস্পর বিরোধী তা অচিন্ত্যনীয়।
- কোনো বস্তু এক সময়ে যে গুণের অধিকারী হয়, সেই বস্তু সেই একই সময়ে সেই গুণের অনধিকারী হতে পারে না।

জ্যামিতিক প্রমাণ (Geometrical proof)

কোনো জ্যামিতিক তত্ত্বকে প্রমাণ করতে হলে কিছু প্রাথমিক ধারণা, সংজ্ঞা এবং স্বীকার্যের মাধ্যমে ঐ তত্ত্ব সম্পর্কিত বিভিন্ন উক্তি ধাপে ধাপে যৌক্তিকভাবে প্রমাণ করতে হয়। এরূপ উক্তিকে সাধারণত প্রতিজ্ঞা বলা হয়।

জ্যামিতিক প্রমাণে বিভিন্ন তথ্য চিত্রের সাহায্যে বর্ণনা করা হয়। জ্যামিতিক প্রমাণ অবশ্যই যুক্তিনির্ভর হতে হবে।

জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা দুই প্রকার: উপপাদ্য (Theorem) ও সম্পাদ্য (Problem)।

যে প্রতিজ্ঞায় জ্যামিতিক কোনো তথ্য যুক্তি দ্বারা প্রমাণ করার প্রস্তাব করা হয়, তাকে **উপপাদ্য** বলা হয়। আবার, যে প্রতিজ্ঞায় কোনো জ্যামিতিক বিন্দু, রেখা বা ক্ষেত্রাদি অঙ্কন করার প্রস্তাব করা হয়, তাকে **সম্পাদ্য** বলা হয়।

জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার বর্ণনায় **সাধারণ নির্বচন** (General enunciation) এবং **বিশেষ নির্বচন** (Particular enunciation) ব্যবহার করা হয়। সাধারণ নির্বচন হচ্ছে চিত্র নিরপেক্ষ বর্ণনা এবং বিশেষ নির্বচন হচ্ছে চিত্র নির্ভর বর্ণনা।

কোনো প্রতিজ্ঞায় সাধারণ নির্বচন দেওয়া থাকলে প্রতিজ্ঞার বিষয়বস্তু চিত্রের সাহায্যে বিশেষ নির্বচনে রূপান্তরিত করা যায়। এজন্য প্রয়োজনীয় চিত্র অঙ্কন করতে হয়। জ্যামিতিক উপপাদ্যের আলোচনায় সাধারণত নিম্নলিখিত ধাপগুলো থাকে:

(১) সাধারণ নির্বচন
(২) চিত্র ও বিশেষ নির্বচন
(৩) প্রয়োজনীয় অঙ্কনের বর্ণনা এবং
(৪) প্রমাণের যৌক্তিক ধাপগুলোর বর্ণনা।

যদি কোনো প্রতিজ্ঞা সরাসরিভাবে একটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত থেকে প্রমাণিত হয়, তবে তাকে অনেক সময় ঐ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত (Corollary) হিসেবে উল্লেখ করা যায়।

বিভিন্ন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করা ছাড়াও জ্যামিতিতে বিভিন্ন চিত্র অঙ্কন করার প্রস্তাবনা বিবেচনা করা হয়। এগুলোকে সম্পাদ্য বলা হয়। জ্যামিতিক সম্পাদ্যের আলোচনায় চিত্র অঙ্কন করে চিত্রের বর্ণনা এবং যৌক্তিকতা উল্লেখ করতে হয়।

সারসংক্ষেপ

- জ্যামিতির যে শাখায় একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, রেখা এবং তাদের সাথে সম্পর্কিত বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্তা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে সমতল জ্যামিতি (Plane Geometry) বলে।
- আধুনিক জ্যামিতিতে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলকে প্রাথমিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করে তাদের কিছু বৈশিষ্ট্যকে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এই স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যসমূহকে জ্যামিতিক স্বীকার্য বলা হয়।
- বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থান (Space) কে বিন্দুসমূহের সেট এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়।
- স্বীকার্য-১ থেকে স্বীকার্য-৫ কে আপতন স্বীকার্য বলা হয়।
- A বিন্দু থেকে B বিন্দুর দূরত্ব এবং B বিন্দু থেকে A বিন্দুর দূরত্ব একই অর্থাৎ, $AB = BA$ হওয়ায় এই দূরত্বকে সাধারণত A বিন্দু ও B বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়।
- স্বীকার্য-৬ কে দূরত্ব স্বীকার্য, স্বীকার্য-৭ কে রুলার স্বীকার্য এবং স্বীকার্য-৮ কে রুলার স্থাপন স্বীকার্য বলা হয়।
- আরোহ পদ্ধতি ও অবরোহ পদ্ধতি একে অপরের পরিপূরক।
- দার্শনিক এরিস্টটল যুক্তিমূলক প্রমাণের জন্য বিরোধ পদ্ধতির (Proof by Contradiction) সূচনা করেন।
- জ্যামিতিক প্রমাণে বিভিন্ন তথ্য চিত্রের সাহায্যে বর্ণনা করা হয় এবং এই প্রমাণ অবশ্যই যুক্তিনির্ভর হতে হবে।
- সাধারণ নির্বচন হচ্ছে চিত্র নিরপেক্ষ বর্ণনা এবং বিশেষ নির্বচন হচ্ছে চিত্র নির্ভর বর্ণনা।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৩

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন:

1. প্রত্যেক সরলরেখা ও প্রত্যেক সমতল এক একটি সেট হলে, এর উপাদান কোনটি?
   (ক) স্থান (খ) বিন্দু (গ) রেখা (ঘ) তল
2. এই পাঠে কত নম্বর স্বীকার্যকে রুলার স্বীকার্য বলা হয়?
   (ক) স্বীকার্য- ৫ (খ) স্বীকার্য- ৬ (গ) স্বীকার্য- ৭ (ঘ) স্বীকার্য- ৮
3. (i) সাধারণ নির্বচন হচ্ছে চিত্র নির্ভর বর্ণনা।
   (ii) আরোহ পদ্ধতি ও অবরোহ পদ্ধতি একে অপরের পরিপূরক।
   (iii) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত।
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

   আপতন স্বীকার্যের সাহায্যে 4 নম্বর ও 5 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন।
4. দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবলমাত্র একটি কী আছে, যাতে বিন্দু দুইটি অবস্থিত?
   (ক) সরলরেখা (খ) সমতল (গ) স্থান (ঘ) উপসেট
5. কোনো দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা কোথায় অবস্থিত?
   (ক) স্থানে (খ) উপসেটে (গ) বাস্তব সংখ্যায় (ঘ) সমতলে

পাঠ ৪ রেখা, রশ্মি, রেখাংশ ও কোণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি

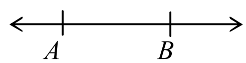
- রেখা, রশ্মি ও রেখাংশের পার্থক্য নির্ণয় করতে পারবেন,
- কোণের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বিভিন্ন কোণের সংজ্ঞা দিতে এবং অঙ্কন করতে পারবেন,
- সন্নিহিত কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্য প্রমাণ করতে পারবেন,
- দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে, উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান তা প্রমাণ করতে পারবেন,
- পরস্পর সমান্তরাল সরলরেখা সম্পর্কিত উপপাদ্যের প্রমাণ করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	রেখা, রশ্মি, রেখাংশ, সরল কোণ, সন্নিহিত কোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ, স্থূলকোণ, প্রবৃদ্ধ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, বিপ্রতীপ কোণ

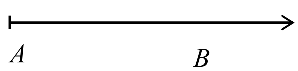
মূলপাঠ

রেখা, রশ্মি, রেখাংশ (Line, Ray, Line Segment)

AB একটি সরলরেখা, যা দুইদিকে তীরচিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়েছে যে, সরলরেখাটি উভয়দিকে একই বরাবরে সীমাহীনভাবে বিস্তৃত। সরলরেখাকে সংক্ষেপে রেখা বলা হয়।



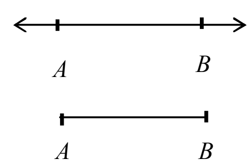
AB রেখাকে $\overleftrightarrow{AB}$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। রেখা অসীম এবং রেখার কোনো প্রান্ত বিন্দু নাই। একটি রেখার যদি একদিকে একটি প্রান্ত বিন্দু থাকে এবং অন্যদিকে অসীম হয়, তবে তাকে রশ্মি বলে।



উপরের চিত্রে, AB একটি রশ্মি এবং A এর প্রান্ত বিন্দু। রশ্মিকে $\overrightarrow{AB}$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

$\overrightarrow{AB}$ রশ্মি $\overleftrightarrow{AB}$ রেখারই অংশ বিশেষ।

$\overleftrightarrow{AB}$ রেখাটির দুইটি বিন্দু A ও B। কোনো রেখার দুইটি বিন্দু চিহ্নিত করে সেই অংশ কেটে নিলেই তাকে রেখাংশ বলা হয়। চিত্রে, AB একটি রেখাংশ যা $\overleftrightarrow{AB}$ রেখারই একটি অংশ। A ও B বিন্দু দুইটিকে উক্ত রেখাংশের প্রান্ত বিন্দু বলা হয়। AB রেখাংশকে $\overline{AB}$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

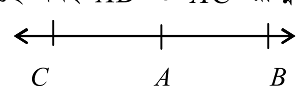


$\overleftrightarrow{AB}$ প্রতীক দ্বারা রেখা, $\overrightarrow{AB}$ প্রতীক দ্বারা রশ্মি এবং $\overline{AB}$ প্রতীক দ্বারা রেখাংশ বোঝায়।

লক্ষণীয় যে, $\overline{AB}$ রেখাংশ $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার একটি উপসেট। আবার, $\overrightarrow{AB}$ রশ্মি $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার একটি উপসেট এবং $\overline{AB}$ রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ রশ্মির একটি উপসেট।

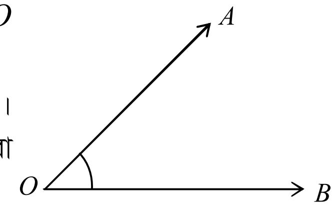
তিনটি বিন্দু A, B, C যদি এমন হয় যে, C-A-B, তবে $\overrightarrow{AC}$ কে $\overrightarrow{AB}$ এর বিপরীত রশ্মি বলা হয়।

লক্ষণীয় যে, প্রত্যেক রশ্মি $\overrightarrow{AB}$ এর একটি ও কেবল একটি বিপরীত রশ্মি $\overrightarrow{AC}$ রয়েছে এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ রশ্মি ভিন্ন, কিন্তু সমরেখ।



কোণ (Angle)

সমতলে দুইটি রশ্মির একই প্রান্তবিন্দু হলে মিলন স্থলে কোণ (Angle) তৈরি হয়। রশ্মি দুইটিকে কোণের বাহু এবং তাদের সাধারণ প্রান্ত বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে।

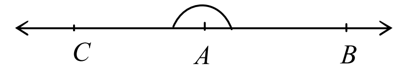


পাশের চিত্রে, $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি দুইটির সাধারণ প্রান্তবিন্দু O। রশ্মি দুইটি O প্রান্তবিন্দুতে AOB একটি কোণ উৎপন্ন করে। এই কোণটিকে BOA কোণও বলা হয়। $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ রশ্মি দুইটি ঐ কোণের দুইটি বাহু এবং O কোণটির শীর্ষবিন্দু (Vertex)। AOB কোণ বা BOA কোণকে $\angle AOB$ বা $\angle BOA$ সংক্ষেপে $\angle O$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং পড়া হয় কোণ O। '$\angle$' চিহ্নটি কোণ প্রকাশের প্রতীক।

$\overrightarrow{OA}$ এর যে পার্শ্বে B আছে সেই পার্শ্বে এবং $\overrightarrow{OB}$ এর যে পার্শ্বে A আছে সেই পার্শ্বে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেটকে $\angle AOB$ এর অভ্যন্তর বলা হয়। কোণটির অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় এমন সকল বিন্দুর সেটকে এর বহির্ভাগ বলা হয়।

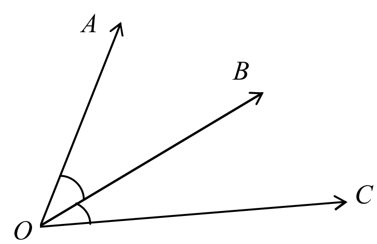
সরল কোণ (Straight Angle)

দুইটি পরস্পর বিপরীত রশ্মি তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকে সরল কোণ বলে।



চিত্রে, AB রশ্মির প্রান্তবিন্দু A থেকে $\overrightarrow{AB}$ এর বিপরীত দিকে AC রশ্মি আঁকা হয়েছে। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ রশ্মিদ্বয় তাদের সাধারণ প্রান্তবিন্দু A তে $\angle BAC$ উৎপন্ন করেছে। $\angle BAC$ কে সরল কোণ বলে এবং এর ডিগ্রি পরিমাপ দুই সমকোণ বা 180°।

সন্নিহিত কোণ (Adjacent Angle)

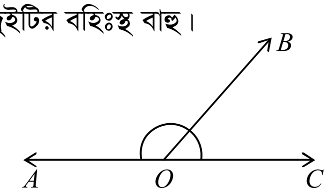


যদি সমতলে দুইটি কোণের একই শীর্ষবিন্দু হয় ও তাদের একটি সাধারণ রশ্মি থাকে এবং কোণদ্বয় সাধারণ রশ্মির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থান করে, তবে ঐ কোণদ্বয়কে সন্নিহিত কোণ বলে। এরূপ দুইটি কোণের একটিকে অপরটির সন্নিহিত কোণও বলা হয়।

চিত্রে, O বিন্দুটি $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ এর শীর্ষবিন্দু এবং $\overrightarrow{OB}$ সাধারণ রশ্মি।

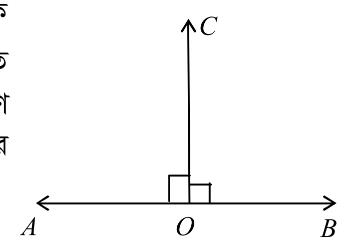
কোণ দুইটি সাধারণ রশ্মি $\overrightarrow{OB}$ এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle AOB$ এবং $\angle BOC$ পরস্পর সন্নিহিত কোণ। সন্নিহিত কোণদ্বয়ের একই শীর্ষবিন্দু O এবং একটি সাধারণ বাহু $\overrightarrow{OB}$ । $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহু।

মন্তব্য : কোনো রশ্মি তার প্রান্তবিন্দুতে একটি সরলরেখার সাথে মিলিত হলে, যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয় তারাও সন্নিহিত কোণ।



লম্ব ও সমকোণ (Perpendicular and Right Angle)

একটি সরল কোণের সমদ্বিখণ্ডককে লম্ব এবং সংশ্লিষ্ট সন্নিহিত কোণের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে। চিত্রে, $\angle AOB$ সরল কোণকে O বিন্দুতে $\overrightarrow{OC}$ রশ্মি দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হয়েছে। এর ফলে $\angle BOC$ ও $\angle COA$ সন্নিহিত কোণ দুইটির প্রত্যেকেই সমকোণ এবং এদের ডিগ্রি পরিমাপ 90°। OB রশ্মি ও তার বিপরীত রশ্মি OA উভয়ের উপর OC রশ্মি লম্ব। OC রশ্মিকে AB রেখার উপর O বিন্দুতে লম্ব বলা হয়।



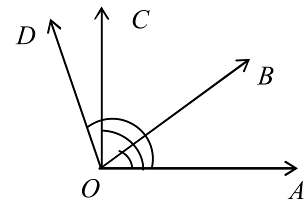
দুইটি রশ্মি পরস্পর লম্ব বোঝাতে '$\perp$' এরূপ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। চিত্রে, OB ও OC পরস্পর লম্ব, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$ অর্থাৎ সংক্ষেপে $OB \perp OC$.

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ (Acute and Obtuse Angle)

এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়।

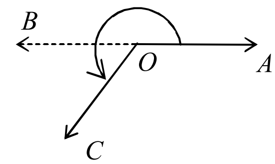
চিত্রে, $\angle AOB$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle AOD$ স্থূলকোণ। এখানে $\angle AOC$ এক সমকোণ।

উল্লেখ্য যে, $\angle AOB < \angle AOC$ এবং $\angle AOD > \angle AOC$



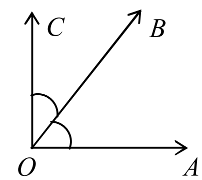
প্রবৃদ্ধ কোণ (Reflex Angle)

দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলা হয়। চিত্রে, $\angle AOC$ প্রবৃদ্ধ কোণ।



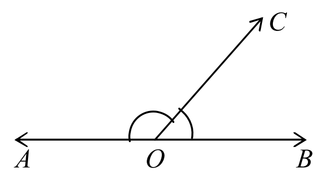
পূরক কোণ (Complementary Angle)

দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি এক সমকোণ বা 90^o হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পরের পূরক কোণ বলা হয়। চিত্রে, $\angle AOB + \angle COB = 90^o$. সুতরাং $\angle AOB$ এবং $\angle COB$ পরস্পরের পূরক কোণ। 30^o কোণের পূরক কোণ 60^o কোণ, 50^o কোণের পূরক কোণ 40^o কোণ, ইত্যাদি।



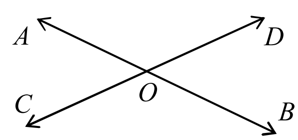
সম্পূরক কোণ (Supplementary Angle)

দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180^o হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পরের সম্পূরক কোণ বলা হয়। চিত্রে, $\angle BOC + \angle AOC = 180^o$. সুতরাং, $\angle BOC$ এবং $\angle AOC$ পরস্পরের সম্পূরক কোণ। 50^o কোণের সম্পূরক কোণ 130^o কোণ, 35^o কোণের সম্পূরক কোণ 145^o কোণ, ইত্যাদি।



বিপ্রতীপ কোণ (Vertically Opposite Angles)

যদি দুইটি কোণের একটির বাহুদ্বয় অপরটির বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মি হয় এবং কোণ দুইটির শীর্ষবিন্দু একই হয়, তবে কোণ দুইটিকে বিপ্রতীপ কোণ বলে। চিত্রে, OA ও OB পরস্পর বিপরীত রশ্মি। আবার, OC ও OD পরস্পর বিপরীত রশ্মি।



$\angle AOC$ ও $\angle BOD$ পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ। আবার, $\angle BOC$ ও $\angle AOD$ পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ। O উভয় বিপ্রতীপ কোণ যুগলের শীর্ষবিন্দু।

দুইটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, ছেদ বিন্দুতে দুই জোড়া বিপ্রতীপ কোণ উৎপন্ন হয়।

উপপাদ্য ৯.১

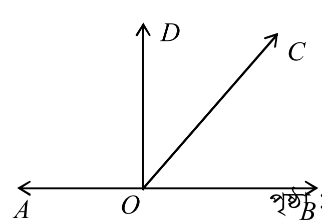
একটি সরলরেখার একটি বিন্দুতে অপর একটি রশ্মি মিলিত হলে, যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, AB সরলরেখার O বিন্দুতে OC রশ্মি মিলিত হয়ে $\angle AOC$ ও $\angle BOC$ দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOC + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন: AB রেখার উপর OD লম্ব আঁকুন।

প্রমাণ: $\angle AOC + \angle BOC$

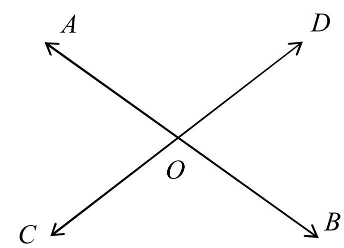
$= \angle AOD + \angle DOC + \angle COB.$



$= \angle AOD + \angle DOB$ [যেহেতু, $\angle DOC + \angle COB = \angle DOB$]
$=$ দুই সমকোণ [যেহেতু, $\angle AOD$ ও $\angle DOB$ প্রত্যেকে এক সমকোণ]
(প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৯.২

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে, উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান।



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। ফলে, O বিন্দুতে $\angle AOD, \angle DOB, \angle BOC, \angle AOC$ কোণগুলো উৎপন্ন হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD =$ বিপ্রতীপ $\angle BOC$ এবং $\angle AOC =$ বিপ্রতীপ $\angle BOD$।

প্রমাণঃ AO রেখা CD রেখার সাথে O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

$\therefore \angle AOC + \angle AOD =$ এক সরলকোণ $= 2$ সমকোণ।

আবার, CO রেখা AB রেখার সাথে O বিন্দুতে হয়েছে।

$\therefore \angle AOC + \angle COB =$ এক সরলকোণ $= 2$ সমকোণ।

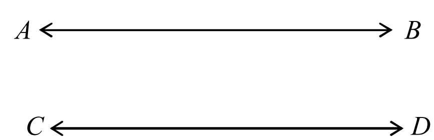
সুতরাং, $\angle AOC + \angle AOD = \angle AOC + \angle COB$

$\therefore \angle AOD = \angle COB$ [উভয়পক্ষ থেকে $\angle AOC$ বাদ দিয়ে]

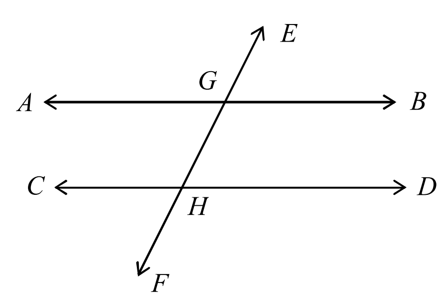
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\angle AOC = \angle BOD$ *(প্রমাণিত)*

সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel lines)

একান্তর কোণ (Alternate angles), অনুরূপ কোণ (Corresponding angle), ছেদকের একই পার্শস্থ অন্তঃস্থ কোণ (Interior angles of the traversal)



একই সমতলে অবস্থিত যদি দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে কোথাও ছেদ না করে, তবে তাদেরকে পরস্পর সমান্তরাল বা শুধু সমান্তরাল সরলরেখা বলা হয়। চিত্রে, $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা। দুইটি সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব সব সময় সমান থাকে। দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল বোঝানোর জন্য '||' এরূপ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। চিত্রে, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



দুইটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ কে অপর একটি সরলরেখা $\overleftrightarrow{EF}$ যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\overleftrightarrow{EF}$ কে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ এর ছেদক বলা হয়। এরূপক্ষেত্রে, $\angle AGF$ কে $\angle EHD$ এর এবং $\angle BGF$ কে $\angle CHE$ এর একান্তর কোণ বলে। আবার, $\angle AGE, \angle AGF, \angle BGE$ ও $\angle BGF$ কে যথাক্রমে $\angle CHE, \angle CHF, \angle DHE$ ও $\angle DHF$-এর অনুরূপ কোণ বলা হয়।

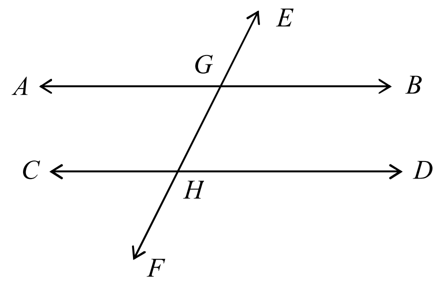
এদের মধ্যে $\angle AGE, \angle BGE, \angle CHF$ ও $\angle DHF$ কে বহিঃস্থ কোণ (Exterior angle*s*) এবং $\angle AGF, \angle BGF, \angle CHE$ ও $\angle DHE$ কে অন্তঃস্থ কোণ (Interior angles) বলে। উল্লেখ্য, $\angle BGF, \angle DHE$ হচ্ছে ডানপাশের অন্তঃস্থ কোণ এবং $\angle AGF, \angle CHE$ হচ্ছে বামপাশের অন্তঃস্থ কোণ।

উপপাদ্য ৯.৩

দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি ছেদক দ্বারা উৎপন্ন

(ক) প্রত্যেক একান্তর কোণ জোড়া সমান হবে।
(খ) প্রত্যেক অনুরূপ কোণ জোড়া সমান হবে।
(গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।

চিত্রে, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ এবং $\overleftrightarrow{EF}$ ছেদক রেখা দুইটিকে যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে।

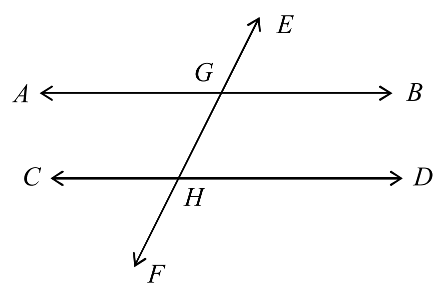


সুতরাং, (ক) $\angle AGH$ = একান্তর $\angle GHD$ এবং $\angle BGH$ = একান্তর $\angle GHC$
(খ) $\angle EGB$ = অনুরূপ $\angle GHD$ এবং $\angle BGH$ = অনুরূপ $\angle DHF$
(গ) $\angle BGH + \angle GHD$ = দুই সমকোণ অর্থাৎ, কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।
আবার, $\angle AGH + \angle GHC$ = দুই সমকোণ অর্থাৎ, কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক।

উপপাদ্য ৯.৪

দুইটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখাকে ছেদ করলে যদি
(ক) অনুরূপ কোণগুলো পরস্পর সমান হয়, অথবা
(খ) একান্তর কোণগুলো পরস্পর সমান হয়, অথবা
(গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের যোগফল দুই সমকোণের সমান হয়, তবে ঐ সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

চিত্রে, $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ রেখা দুইটিকে $\overleftrightarrow{EF}$ রেখা যথাক্রমে G ও H বিন্দুতে ছেদ করেছে। এখানে

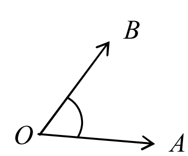


(ক) $\angle EGB$ = অনুরূপ $\angle GHD$ এবং $\angle AGH$ = অনুরূপ $\angle CHF$
অথবা, (খ) $\angle AGH$ = একান্তর $\angle GHD$ এবং $\angle BGH$ = একান্তর $\angle CHG$
অথবা, (গ) $\angle BGH + \angle GHD$ = দুই সমকোণ এবং
$\angle AGH + \angle GHC$ = দুই সমকোণ
সুতরাং $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

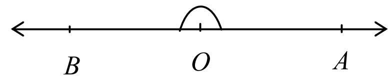
অনুসিদ্ধান্তঃ যেসব সরলরেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল, সেগুলো পরস্পর সমান্তরাল।

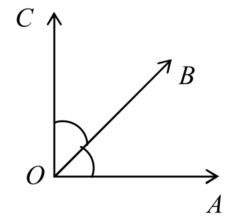
সারসংক্ষেপ

- AB সরলরেখাকে $\overleftrightarrow{AB}$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।
- সরলরেখার কোনো প্রান্তবিন্দু নাই।
- AB রশ্মিকে $\overrightarrow{AB}$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।
- রশ্মির প্রান্তবিন্দু একটি।
- AB রেখাংশকে $\overline{AB}$ প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।
- রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দুইটি।
- $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ দুইটি রশ্মির একই প্রান্তবিন্দু O তে মিলিত হয়ে $\angle AOB$ একটি কোণ উৎপন্ন করে। $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OB}$ রশ্মিকে $\angle AOB$ এর দুইটি বাহু এবং প্রান্তবিন্দু O কে $\angle AOB$ এর শীর্ষবিন্দু বলে।



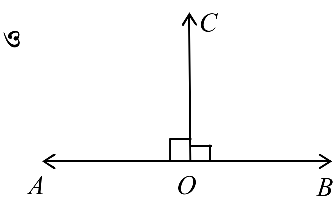
- OA ও OB পরস্পর বিপরীত রশ্মি O বিন্দুতে $\angle AOB$ একটি সরল কোণ উৎপন্ন করেছে। যার ডিগ্রি পরিমাপ 180°।





- চিত্রে, $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ পরস্পর সন্নিহিত কোণ। এদের শীর্ষবিন্দু O এবং $\overrightarrow{OB}$ সাধারণ বাহু।

- $\overrightarrow{OC}$ রশ্মি $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার O বিন্দুতে লম্ব এবং $\angle BOC$ ও $\angle AOC$ সমকোণ, যাদের ডিগ্রি পরিমাপ 90°।



- এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ বলে।
- এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলে।
- দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে প্রবৃদ্ধ কোণ বলে।
- দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পর পূরক কোণ বলে।
- দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি 180° হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পর সম্পূরক কোণ বলে।
- দুইটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, ছেদ বিন্দুতে দুই জোড়া বিপ্রতীপ কোণ উৎপন্ন হয়।
- সমতলস্থ দুইটি সরলরেখা যদি পরস্পরকে কোথাও ছেদ না করে, তবে তাদেরকে পরস্পর সমান্তরাল রেখা বলে।
- সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব সব সময় সমান থাকে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৪

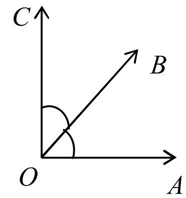
সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন:

1. একটি রেখাংশের কয়টি প্রান্তবিন্দু থাকে?
   (ক) 1টি (খ) 2টি (গ) 3টি (ঘ) অসংখ্য
2. $\overrightarrow{AB}$ এই প্রতীক দ্বারা কী নির্দেশ করে ?
   (ক) AB একটি রেখা (খ) AB একটি রেখাংশ (গ) AB একটি রশ্মি (ঘ) AB একটি তল
3. দুই সমকোণ থেকে বড় কিন্তু চার সমকোণ থেকে ছোট কোণকে কী বলে?
   (ক) স্থূলকোণ (খ) সূক্ষ্মকোণ (গ) সম্পূরক কোণ (ঘ) প্রবৃদ্ধ কোণ
4. দুইটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করলে, ছেদ বিন্দুতে কয়টি কোণ উৎপন্ন হয়?
   (ক) 2টি (খ) 4টি (গ) 6টি (ঘ) 8টি
5. 70° কোণের সম্পূরক কোণ নিচের কোনটি?
   (ক) 20° (খ) 30° (গ) 110° (ঘ) 120°
6. (i) একটি সরলরেখা উভয়দিকে একই বরাবরে সীমাহীনভাবে বিস্তৃত।
   (ii) এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ বলে।
   (iii) দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি এক সরলকোণ হলে, কোণ দুইটিকে পরস্পর সম্পূরক কোণ বলে।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোন্‌টি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

এই জ্যামিতিক চিত্রটি থেকে 7 ও 8 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন।



7. $\angle AOB$ কে কী কোণ বলা হয়?

(ক) সূক্ষ্মকোণ (খ) স্থূলকোণ (গ) পূরককোণ (ঘ) সন্নিহিত কোণ

8. যদি $\angle AOB + \angle BOC = 90^{o}$ হয়, তবে কোণ দুইটিকে পরস্পর কী কোণ বলে?

(ক) সন্নিহিত কোণ (খ) সমকোণ (গ) সম্পূরক কোণ (ঘ) পূরক কোণ

পাঠ ৫ ত্রিভুজ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বিভিন্ন ত্রিভুজের সংজ্ঞা দিতে ও অঙ্কন করতে পারবেন,
- ত্রিভুজ সর্বসম হওয়া বিষয়ক উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের বাহু সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের কোণ সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

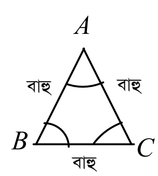
মূখ্য শব্দ	ত্রিভুজ, ত্রিভুজের মধ্যমা, ত্রিভুজের উচ্চতা, ত্রিভুজের পরিসীমা, সমবাহু ত্রিভুজ, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, বিষমবাহু ত্রিভুজ, সমকোণী ত্রিভুজ, স্থূলকোণী ত্রিভুজ, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ, ত্রিভুজের সর্বসমতা

মূলপাঠ

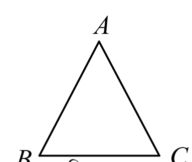
ত্রিভুজ (Triangle)

সমতলস্থ তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্রকে ত্রিভুজ এবং রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলা হয়। ত্রিভুজের বাহুগুলো দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ত্রিভুজক্ষেত্র বলে।

ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয় এবং বাহু দুইটি শীর্ষবিন্দুতে কোণ উৎপন্ন করে। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে। কাজেই, বাহুভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার। সমবাহু ত্রিভুজ, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ও বিষমবাহু ত্রিভুজ।



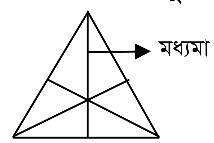
ত্রিভুজ



আবার, কোণভেদেও ত্রিভুজ তিন প্রকার। সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ, স্থূলকোণী

ত্রিভুজ ও সমকোণী ত্রিভুজ।

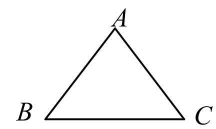
চিত্রে, ABC একটি ত্রিভুজ এবং A, B ও C ত্রিভুজটির তিনটি শীর্ষবিন্দু। AB, BC ও CA ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle BCA$ (সংক্ষেপে যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ ত্রিভুজটির) তিনটি কোণ। সুতরাং, একটি ত্রিভুজ তিনটি শীর্ষবিন্দু, তিনটি বাহু ও তিনটি কোণের সমন্বয়ে গঠিত। ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে **ত্রিভুজের পরিসীমা** বলে। অর্থাৎ AB, BC ও CA বাহুর পরিমাপের সমষ্টি ত্রিভুজটির পরিসীমা।



ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে **মধ্যমা** বলে। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা আছে। আবার, ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বই **ত্রিভুজের উচ্চতা**।

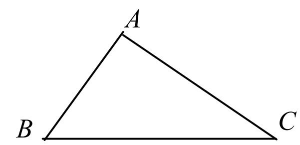
সমবাহু ত্রিভুজ (Equilateral Triangle)

কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান হলে, ত্রিভুজটিকে সমবাহু ত্রিভুজ বলা হয়। চিত্রে, ABC ত্রিভুজটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ, যার AB বাহু $= BC$ বাহু $= CA$ বাহু।



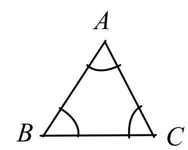
বিষমবাহু ত্রিভুজ (Scalene Triangle)

কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যই পরস্পর অসমান হলে, ত্রিভুজটিকে বিষমবাহু ত্রিভুজ বলা হয়। চিত্রে, ABC ত্রিভুজটি একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ, যার AB, BC ও CA বাহু তিনটি পরস্পর অসমান।



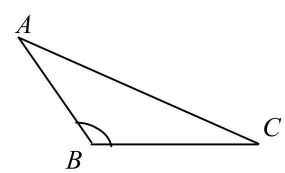
সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (Acute Angled Triangle)

কোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ হলে, ত্রিভুজটিকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলা হয়। চিত্রে, ABC ত্রিভুজটি একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ। কারণ, $\angle ABC$, $\angle BAC$ ও $\angle ACB$ প্রত্যেক কোণই সূক্ষ্মকোণ। অর্থাৎ প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ 90^o থেকে কম।



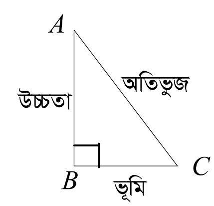
স্থূলকোণী ত্রিভুজ (Obtuse Angled Triangle)

কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ হলে, ত্রিভুজটিকে স্থূলকোণী ত্রিভুজ বলা হয়। চিত্রে, ABC ত্রিভুজটি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle ABC$ স্থূলকোণ কিন্তু এর অন্য দুইটি কোণই সূক্ষ্মকোণ হবে। অর্থাৎ, $\angle BAC$ ও $\angle ACB$ উভয়ই সূক্ষ্মকোণ।



সমকোণী ত্রিভুজ (Right Angled Triangle)

কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ হলে, ত্রিভুজটিকে সমকোণী ত্রিভুজ বলা হয়। চিত্রে, ABC ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle ABC$ সমকোণ। কিন্তু এর অন্য দুইটি কোণের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ হবে। অর্থাৎ $\angle BAC$ ও $\angle BCA$ উভয়ই সূক্ষ্মকোণ।

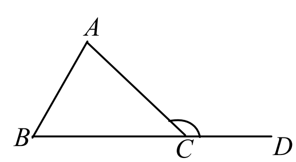


সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে অতিভুজ (Hypotenuse) বলে এবং সমকোণ সংলগ্ন বাহুর একটিকে ভূমি (Base) ও অপরটিকে উন্নতি বা উচ্চতা (Altitude) ধরা হয়।

চিত্রে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের AC বাহু অতিভুজ এবং BC বাহু ভূমি ও AB বাহু উচ্চতা।

ত্রিভুজের অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ কোণ (Interior and Exterior Angles)

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তা ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। এই কোণের সন্নিহিত কোণটি ছাড়া ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণকে এই বহিঃস্থ কোণের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলে। চিত্রে, ত্রিভুজ ABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে।

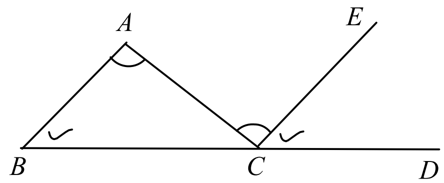


$\angle ACD$ ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। $\angle ABD$, $\angle BAC$ ও $\angle ACB$ ত্রিভুজটির তিনটি অন্তঃস্থ কোণ। বহিঃস্থ $\angle ACD$ এর সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণ হচ্ছে $\angle ACB$ এবং বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ হচ্ছে $\angle CBA$ ও $\angle CAB$।

উপপাদ্য ৯.৫

ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ।



অঙ্কন: BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করুন এবং C বিন্দুতে BA রেখার সমান্তরাল করে CE রেখা আঁকুন।

প্রমাণ: যেহেতু BA ও CE রেখা সমান্তরাল এবং AC রেখা তাদের ছেদক।

অতএব, $\angle BAC = \angle ACE$ [একান্তর কোণ]

আবার, যেহেতু BA ও CE রেখা সমান্তরাল এবং BCD তাদের ছেদক।

অতএব, $\angle ABC = \angle ECD$ [অনুরূপ কোণ]

$\therefore \angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$

বা $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB$ [উভয় পক্ষে $\angle ACB$ যোগ করে]

কিন্তু $\angle ACD + \angle ACB =$ এক সরলকোণ $=$ দুই সমকোণ

$\therefore \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ

শিক্ষার্থীর কাজ	প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণটি উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

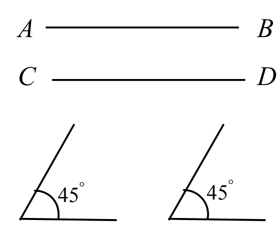
অনুসিদ্ধান্ত ১: ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২: সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাপ 60°

অনুসিদ্ধান্ত ৩: সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি পরস্পর পূরক।

অনুসিদ্ধান্ত ৪: কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ যদি এর অপর দুইটি কোণের সমষ্টির সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমকোণী।

বাহু ও কোণের সর্বসমতা (Congruence of Sides and Angles)

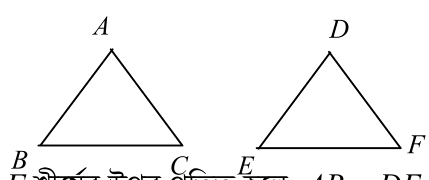


দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হলে, রেখাংশ দুইটি সর্বসম হবে।

আবার, বিপরীতভাবে, দুইটি রেখাংশ সর্বসম হলে, তাদের দৈর্ঘ্য সমান হবে।

দুইটি কোণের পরিমাপ সমান হলে, কোণ দুইটি সর্বসম হবে। আবার বিপরীতভাবে, দুইটি কোণ সর্বসম হলে, তাদের পরিমাণও সমান হবে।

ত্রিভুজের সর্বসমতা (Congruence of Triangles)



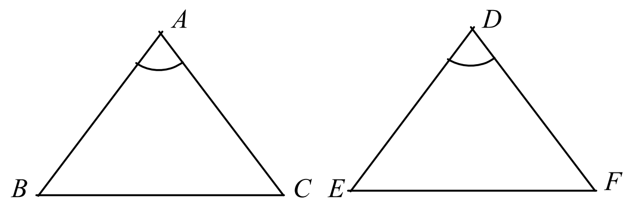
একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে মিলে যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়। সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলো সমান।

চিত্রে, ΔABC ও ΔDEF সর্বসম। কাজেই A, B, C শীর্ষগুলো যথাক্রমে D, E, F শীর্ষের উপর পতিত হলে, $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$ হবে এবং $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ হবে।

দুইটি ত্রিভুজ ΔABC ও ΔDEF সর্বসম বোঝাতে $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ লেখা হয়। আবার, দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে, এদের দ্বারা সীমাবদ্ধ ত্রিভুজক্ষেত্র দুইটিও সর্বসম হবে।

উপপাদ্য ৯.৬ (বাহু-কোণ-বাহু-উপপাদ্য)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ΔABC এবং ΔDEF এ $AB = DE,\ AC = DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle A =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle D$। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC এবং ΔDEF সর্বসম। অর্থাৎ $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

প্রমাণ: ΔABC কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করুন যেন, A বিন্দু D বিন্দুর উপর এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে। যেহেতু, $AB = DE,$ সুতরাং B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়বে।

আবার যেহেতু, $\angle BAC = \angle EDF$ এবং AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে, তাই AC বাহু DF বাহুর উপর পড়বে।

এখন, $AC = DF,$ কাজেই C বিন্দু অবশ্যই F বিন্দুর উপর পড়বে।

B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়ে বলে BC বাহু অবশ্যই EF বাহুর সাথে পুরোপুরি মিলে যাবে।

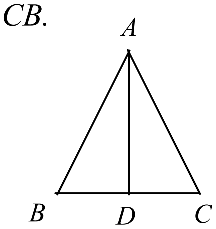
$\therefore\ \Delta ABC,\ \Delta DEF$ এর সাথে সর্বতোভাবে মিলে যাবে।

সুতরাং প্রমাণিত হলো যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

উপপাদ্য ৯.৭

যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ABC ত্রিভুজে $AB = AC$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC = \angle ACB.$



অঙ্কন: $\angle BAC$ এর সমদ্বিখন্ডক AD অঙ্কন করুন যেন তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ΔABD এবং ΔACD এ $AB = AC$ (দেওয়া আছে)।

AD সাধারণ বাহু। অন্তর্ভুক্ত $\angle BAD =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD$ [অঙ্কনানুসারে]

সুতরাং $\Delta\ ABD \cong \Delta\ ACD$

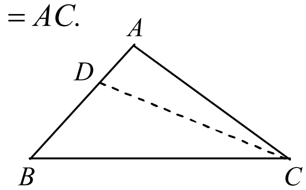
$\therefore\ \angle ABD = \angle ACD$

অর্থাৎ, $\angle ABC = \angle ACB$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৯.৮

যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত বাহু দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ΔABC এ $\angle ABC = \angle ACB.$ প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC.$



প্রমাণ : যদি AB ও AC সমান না হয়, তবে মনে করুন, $AB > AC$।

এখন, AB থেকে AC এর সমান করে BD অংশ কেটে নিন এবং C ও D যোগ করুন।

এখন, ΔABC ও ΔDBC এ $AC = BD,\ BC$ সাধারণ বাহু এবং

অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle DBC$

$\therefore\ \Delta\ ABC \cong \Delta\ DBC,$

অর্থাৎ, ত্রিভুজক্ষেত্র $ABC =$ ত্রিভুজক্ষেত্র DBC। কিন্তু এরা সমান হতে পারে না, কারণ Δ ক্ষেত্র $DBC,\ \Delta$ ক্ষেত্র ABC এর অংশ। কিন্তু অংশ কখনোই সম্পূর্ণের সমান হতে পারে না।

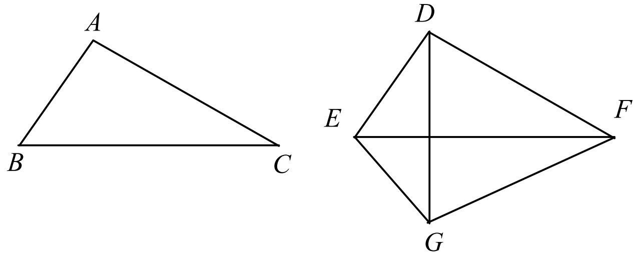
$\therefore\ AB > AC$ হতে পারে না।

অনুরূপভাবে, দেখানো যায় যে, $AC > AB$ হতে পারে না।

সুতরাং, $AB = AC$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৯.৯ (বাহু - বাহু - বাহু উপপাদ্য)

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF এ $AB = DE,\ AC = DF$ এবং $BC = EF$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF.$

প্রমাণ: ΔABC কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করুন যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর, BC বাহু EF বাহুর উপর এবং EF রেখার যে পাশে D বিন্দু অবস্থিত, A বিন্দু তার বিপরীত পাশে পড়ে। এখন, $BC = EF$ তাই C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়বে।

মনে করুন, G বিন্দু A বিন্দুর নতুন অবস্থান। D, G যোগ করুন।

ΔGEF হবে ΔABC এর নতুন অবস্থান। যেখানে, $EG = BA,\ FG = CA$ এবং $\angle EGF = \angle BAC.$

এখন, ΔEDG এ $ED = BA = EG$

$\therefore\ \angle EGD = \angle EDG$ [ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হলে, তাদের বিপরীত কোণ দুইটি সমান]

অনুরূপভাবে, ΔFDG এ $FD = CA = FG.$

$\therefore\ \angle FGD = \angle FDG.$

সুতরাং, $\angle EGD + \angle FGD = \angle EDG + \angle FDG.$

বা, $\angle EGF = \angle EDF$

অর্থৎ, $\angle BAC = \angle EDF.$

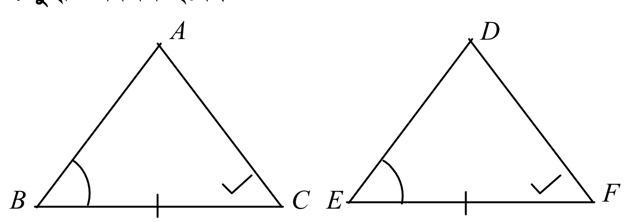
অতএব, ΔABC ও ΔDEF এর মধ্যে $AB = DE,\ AC = DF$

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF.$

$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ৯.১০ (কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য)

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ΔABC এবং ΔDEF এ $\angle ABC = \angle DEF,\ \angle ACB = \angle DFE$ এবং সংলগ্ন বাহু $BC =$ সংলগ্ন বাহু EF । প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta\ ABC \cong \Delta\ DEF$

প্রমাণ: ΔABC কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করুন যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং BC বাহু EF বাহু বরাবর পড়ে এবং A বিন্দু EF রেখার যে পাশে D বিন্দু আছে সেই পাশে পড়ে।

যেহেতু, $BC = EF,$ সেহেতু C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়বে।

যেহেতু $\angle B = \angle E$

$\therefore BA$ বাহু ED বাহুর উপর পড়বে।

আবার যেহেতু, $\angle C = \angle F,$ সেহেতু CA বাহু FD বাহু বরাবর পড়বে।

$\therefore BA$ ও CA বাহুর সাধারণ বিন্দু A, ED ও FD বাহুর সাধারণ বিন্দু D এর উপর পড়বে।

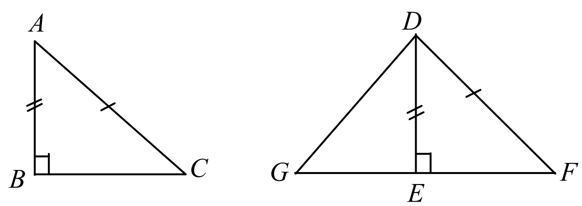
তাহলে, ΔABC, ΔDEF এর উপর সমাপতিত হবে।

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (প্রমাণিত)

বিশেষ দ্রষ্টব্য: "যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।" - এই উপপাদ্য ও উপরের উপপাদ্যের প্রমাণ হুবহু একই।

উপপাদ্য ৯.১১ (অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য)

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় সমান হলে এবং একটির এক বাহু অপরটির অপর এক বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ΔABC ও ΔDEF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ $AC =$ অতিভুজ DF এবং AB বাহু $= DE$ বাহু। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

প্রমাণ: ΔABC কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করুন যেন, A বিন্দু D বিন্দুর উপর, AB বাহু DE বাহুর উপর এবং DE এর যে পাশে F বিন্দু অবস্থিত, C বিন্দু তার বিপরীত পাশে পড়ে।

মনে করুন, G বিন্দু C বিন্দুর নতুন অবস্থান।

যেহেতু $AB = DE$। অতএব, B বিন্দু E বিন্দুর উপর পড়বে। তাহলে, ΔDEG হবে ΔABC এর নতুন অবস্থান।

$\therefore DG = AC = DF.$

$\angle DEG = \angle ABC = 90^\circ$ এবং $\angle DGE = \angle ACB$

যেহেতু, $\angle DEG + \angle DEF =$ ১ সমকোণ + ১ সমকোণ = ২ সমকোণ

$\therefore GE$ ও EF একই রেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ, GEF একটি সরলরেখা।

এখন, ΔDGF এ $DG = DF.$

$\therefore \angle DGF = \angle DFG, \Rightarrow \angle DGE = \angle DFE \Rightarrow \angle ACB = \angle DFE$

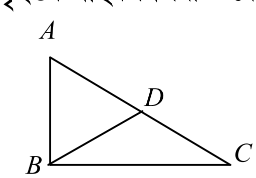
এখন, ΔABC এবং ΔDEF এর মধ্যে $\angle ABC = \angle DEF$ (প্রত্যেকেই সমকোণ)

$\therefore \angle ACB = \angle DFE$ এবং AB বাহু = অনুরূপ DE বাহু

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ৯.১২

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।



চিত্রে, ΔABC এ $AC > AB$

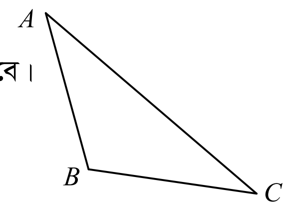
সুতরাং, $\angle ABC > \angle ACB$

উপপাদ্য ৯.১৩

কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, ΔABC এর $\angle ABC > \angle ACB$

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC > AB$



প্রমাণঃ যদি AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়, তবে $AC = AB$ অথবা $AC < AB$ হবে।

যদি $AC = AB$ হয়, তবে $\angle ABC = \angle ACB$ হবে, কিন্তু তা প্রদত্ত শর্ত বিরোধী।

কারণ শর্তানুযায়ী, $\angle ABC > \angle ACB$.

আবার, যদি $AC < AB$ হয়, তবে $\angle ABC < \angle ACB$ হবে। কিন্তু তাও প্রদত্ত শর্ত বিরোধী।

সুতরাং, AC বাহু AB বাহুর সমান বা AB বাহু থেকে ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

$\therefore AC > AB$

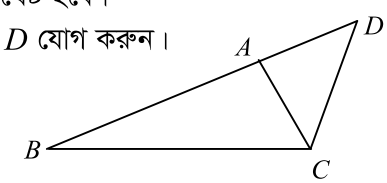
উপপাদ্য ৯.১৪

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, এর যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

ধরুন, BC ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু, তাহলে $AB + AC > BC$ প্রমাণ করলেই যথেষ্ট হবে।

অঙ্কনঃ BA বাহুকে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন, $AD = AC$ হয়। C, D যোগ করুন।



প্রমাণঃ ΔADC-এ $AD = AC$, $\angle ACD = \angle ADC$

এখন, $\angle BCD > \angle ACD$ [কারণ, $\angle ACD$ হলো $\angle BCD$ এর অংশ]

অর্থাৎ, ΔBDC এ $\angle BCD > \angle ACD$

বা, $\angle BCD > \angle ADC$

বা, $\angle BCD > \angle BDC$

$\therefore BD > BC.$

কিন্তু, $BD = AB + AD = AB + AC$ [$\because AD = AC$]

$\therefore AB + AC > BC.$ (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৯.১৫

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

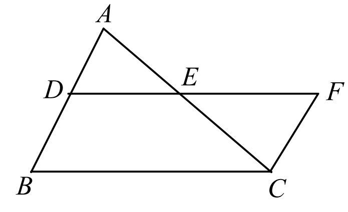
বিশেষ নির্বচনঃ মনে করুন, ABC একটি ত্রিভুজ। ত্রিভুজটির AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC.$

অঙ্কনঃ D ও E বিন্দু দুইটি যোগ করে বর্ধিত করুন যেন, $DE = EF$ হয়। F, C যোগ করুন।

প্রমাণঃ ΔADE ও ΔCEF এর মধ্যে $AE = EC$ (দেওয়া আছে)।

$DE = EF$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore \angle AED = \angle CEF$ [বিপ্রতীপ কোণ]।

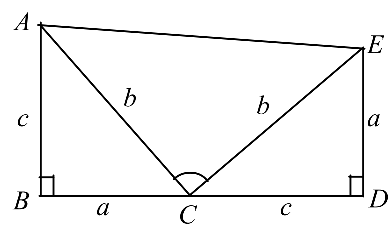


$\therefore\ \Delta ADE \cong \Delta CEF.$

$\therefore\ \angle ADE = \angle EFC$ এবং $\angle DAE = \angle ECF$ [একান্তর কোণ]।
সুতরাং, $DF \parallel BC$ বা, $DE \parallel BC$
আবার, $DF = BC$ বা, $DE + EF = BC$ বা, $DE + DE = BC$
বা, $2DE = BC$
$\therefore DE = \dfrac{1}{2} BC$ (প্রমাণিত)।

উপপাদ্য ৯.১৬ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য)

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



বিশেষ নির্বচন: মনে করুন, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90^{\circ}$, অতিভুজ $AC = b$, $BC = a$ ও $AB = c$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ অর্থাৎ, $b^2 = c^2 + a^2$
অঙ্কন: BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করুন যেন, $CD = AB = c$ হয়। D বিন্দুতে বর্ধিত BC এর উপর DE লম্ব আঁকুন, যেন $DE = BC = a$ হয়।
C, E ও A, E যোগ করুন।

প্রমাণ : ΔABC ও ΔCDE এ $AB = CD = c$, $BC = DE = a$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CDE$ [প্রত্যেকে সমকোণ]।
সুতরাং, $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য অনুযায়ী]।

$\therefore AC = CE = b$ এবং $\angle BAC = \angle ECD.$

আবার, $AB \perp BD$ এবং $ED \perp BD$ বলে $AB \parallel ED$

$\therefore ABDE$ একটি ট্রাপিজিয়াম।

আবার, $\angle ACB + \angle BAC = \angle ACB + \angle ECD =$ এক সমকোণ।

$\therefore\ \angle ACE =$ এক সমকোণ।

$\therefore \Delta\ ACE$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এখন, $ABDE$ ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δক্ষেত্র ABC + Δক্ষেত্র CDE + Δক্ষেত্র $ACE.$

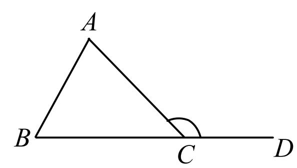
বা, $\dfrac{1}{2}\ BD\ (AB + DE) = \dfrac{1}{2} ac + \dfrac{1}{2}\ ac + \dfrac{1}{2} b^2$ [ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\dfrac{1}{2}$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের যোগফল $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব]

বা, $\dfrac{1}{2}\ (BC + CD)\ (AB + DE) = \dfrac{1}{2}\ (2ac + b^2)$
বা, $(a+c)\ (a+c) = 2ac + b^2$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]
বা, $a^2+2ac+c^2 = 2ac + b^2$
বা, $a^2 + c^2 = b^2$
বা, $b^2 = c^2 + a^2$
অর্থাৎ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (প্রমাণিত)।

শিক্ষার্থীর কাজ	একটি সমকোণ আঁকুন এবং এর বাহু দুইটির উপর যথাক্রমে 5 সে.মি. ও 12 সে.মি. দূরত্বে দুইটি বিন্দু চিহ্নিত করুন। বিন্দু দুইটি যোগ করে একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকুন। ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে দেখুন 13 সে.মি. হয়েছে কি না।

সারসংক্ষেপ

- তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র হচ্ছে ত্রিভুজ।
- রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলা হয়।
- একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু, তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ থাকে।
- বাহুভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকার: (i) সমবাহু ত্রিভুজ (ii) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং (iii) বিষমবাহু ত্রিভুজ
- কোণভেদে ত্রিভুজ তিন প্রকারঃ (i) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ (ii) স্থূলকোণী ত্রিভুজ এবং (iii) সমকোণী ত্রিভুজ।
- ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে ত্রিভুজের পরিসীমা বলে।
- ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশকে মধ্যমা বলে।
- সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান।
- সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান।
- বিষমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যই পরস্পর অসমান।
- সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণই সূক্ষ্মকোণ।
- স্থূলকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ এবং অন্য দুইটি কোণ সূক্ষ্মকোণ।
- সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ এবং অন্য দুইটি কোণ সূক্ষ্মকোণ।
- সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে অতিভুজ এবং সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির একটিকে ভূমি ও অন্যটিকে উচ্চতা ধরা হয়।
- কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তা ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ।



- ΔABC এর বহিঃস্থ কোণ হচ্ছে $\angle ACD$ এবং $\angle ABD, \angle BAC$ ও $\angle ACB$ ত্রিভুজটির তিনটি অন্তঃস্থ কোণ। বহিঃস্থ $\angle ACD$ এর সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণ হচ্ছে $\angle ACB$ এবং বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ হচ্ছে $\angle CBA$ ও $\angle CAB$
- ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।
- একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে মিলে যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।
- যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।
- ত্রিভুজের কোণ দুইটি পরস্পর সমান হলে, বিপরীত বাহু দুইটিও পরস্পর সমান হবে।
- একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।
- কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।
- কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।
- ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর।
- ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

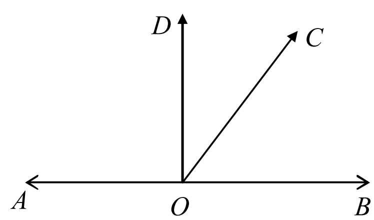
✪ একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৫

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন:

1. কোনো ত্রিভুজের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে কী বলে?
   (ক) সমবাহু (খ) মধ্যমা (গ) পরিসীমা (ঘ) বিষমবাহু
2. কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাকে ত্রিভুজের কী কোণ বলা হয়?
   (ক) অন্তঃস্থ কোণ (খ) বহিঃস্থ কোণ (গ) বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ (ঘ) সন্নিহিত কোণ
3. কোনো ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি কত ডিগ্রি?
   (ক) 80^o (খ) 90^o (গ) 120^o (ঘ) 180^o
4. (i) যে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সূক্ষ্মকোণ, তাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলে।
   (ii) যে ত্রিভুজের তিনটি কোণ সমকোণ, তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে।
   (iii) যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান, তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।
   উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

পাশের চিত্রের সাহায্যে 5 ও 6 নম্বর প্রশ্নের উত্তর দিন।

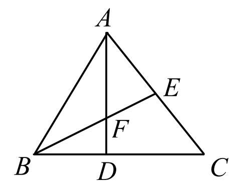


5. এক সমকোণের সমান কোণ কোন্‌টি?
   (ক) $\angle BOC$ (খ) $\angle COD$ (গ) $\angle AOC$ (ঘ) $\angle BOD$
6. $\angle BOC$ এর সম্পূরক কোণ কোন্‌টি?
   (ক) $\angle AOD$ (খ) $\angle AOC$ (গ) $\angle COD$ (ঘ) $\angle BOD$
7. (i) সমকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ এবং অন্য দুইটি কোণ সূক্ষ্মকোণ।
   (ii) স্থূলকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ এবং অন্য দুইটি কোণ সূক্ষ্মকোণ।
   (iii) সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের একটি কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং অন্য দুইটি কোণ স্থূলকোণ।
   উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোন্‌টি সঠিক?
   (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা করুন।
2. দূরত্ব স্বীকার্য ও রুলার স্থাপন স্বীকার্য বর্ণনা করুন।

3. রেখা, রশ্মি ও রেখাংশের চিত্র এঁকে তা প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করুন এবং এদের মধ্যে পার্থক্য কী তা বর্ণনা করুন।
4. চিত্রসহ সংজ্ঞা লিখুনঃ
   সন্নিহিত কোণ, বিপ্রতীপ কোণ, সমকোণ, স্থূলকোণ, সূক্ষ্মকোণ, প্রবৃদ্ধ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ।
5. ত্রিভুজ বলতে কী বোঝায়? ত্রিভুজ কত প্রকার ও কী কী? চিত্রসহ প্রত্যেক প্রকার ত্রিভুজের বর্ণনা দিন।
6. বিপ্রতীপ কোণের বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা করুন।
7. ত্রিভুজের মধ্যমা চিত্রসহকারে বর্ণনা করুন।
8. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ, লম্ব ও ভূমি চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করুন।
9. ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ ও বহিঃস্থ কোণ চিত্রসহ ব্যাখ্যা করুন।
10. পাশের চিত্রে প্রদর্শিত ত্রিভুজগুলোর নামকরণ করুন



11. প্রমাণ করুন যে, দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে, তাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।
12. প্রমাণ করুন যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।
13. প্রমাণ করুন যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণের সমদ্বিখন্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখন্ডিত করে এবং ভূমির উপর লম্ব হয়।
14. প্রমাণ করুন যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তা সমবাহু হবে।
15. প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।
16. প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
17. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে A শীর্ষবিন্দু এবং BA বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হলো, যেন $BA = AD$ হয়। প্রমাণ করুন যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।
18. ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ করুন যে, $AB + AC > 2AD$ ।
19. ΔABC এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করুন যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A.$
20. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C =$ এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $AB = 2BC$
21. ABC ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ করুন যে, $BD = \frac{1}{2} AC$
22. প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।
23. ΔABC এর B ও C শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে BE ও $CF;$ যদি $BE = CF$ হয়, তবে দেখান যে, $AB = AC.$
24. ΔABC এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখন্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করুন যে, $\angle ADB$ একটি স্থূলকোণ।
25. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A =$ এক সমকোণ এবং D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু।
   (ক) প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ত্রিভুজটি অঙ্কন করুন।
   (খ) প্রমাণ করুন যে, $AB + AC > 2AD$

(গ) প্রমাণ করুন যে, $AD = \frac{1}{2}\ BC$

26. AB ও CD রেখা দুইটি পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং $\angle APD = 115^{o}$

(ক) উপরের তথ্য অনুযায়ী চিত্র অঙ্কন করুন।

(খ) বিপ্রতীপ কোণগুলো লিখুন এবং কোণগুলো প্রত্যেকটি পরিমাপ করুন এবং মোট সমষ্টি কত লিখুন।

(গ) একটি কোণ 115^{o} হলে, এর সম্পূরক কোণের পরিমাপ কত ডিগ্রি হবে তা চিত্রের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করুন।

27. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B = 90^{o}$, অতিভুজ $AC = c,\ AB = b$ ও $BC = a,\ BC$ কে D পর্যন্ত বর্ধিত করুন যেন $AB = CD$ হয় এবং D বিন্দুতে DE লম্ব টানুন যেন $DE = BC$ হয়।

(ক) উপরের তথ্য অনুযায়ী চিত্রটি আঁকুন।

(খ) প্রমাণ করুন যে, $\angle ACE =$ এক সমকোণ।

(গ) প্রমাণ করুন যে, $c^2 = a^2 + b^2$ ।