

গাণিতিক অর্থনীতির মৌলিক ধারণা

Basic Concepts of Mathematical Economics

ইউনিট
৩

ভূমিকা

অর্থনীতি একটি সামাজিক বিজ্ঞান। ইহা অর্থনীতিতে কি ঘটছে তা শুধু বর্ণনাই করে না অর্থনীতি কিভাবে পরিচালিত হয় এবং কোন কিছুর পরিবর্তনে অর্থনীতিতে কি প্রভাব পড়ে এ সবকিছুই অর্থনীতি পাঠে জানা যায়। অর্থনীতির বিভিন্ন তত্ত্বের প্রয়োগ এবং বিশ্লেষণাত্মক সমস্যা সমাধানের জন্য গণিতের ব্যবহার প্রয়োজন। অর্থনৈতিক সিদ্ধান্ত সমূহের যথার্থতা যাচাই এবং সহজভাবে উপস্থাপনের জন্য গণিতের বিকল্প নেই। তাই অর্থনীতি পাঠের জন্য গাণিতিক অর্থনীতির কিছু মৌলিক ধারণার সঙ্গে পরিচয় থাকা দরকার। এই ইউনিটের পাঠগুলো হচ্ছে—



ইউনিট সমাপ্তির সময়

ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৬ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৩.১: চলক ও ফ্রাবক

পাঠ ৩.২: অপেক্ষক

পাঠ ৩.৩: লেখচিত্র অঙ্কন

পাঠ ৩.৪: ঢাল ও ছেদাংশ।



চলক ও ধ্রুবক Variable and Constant



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা-

- চলক ও ধ্রুবকের পার্থক্য করতে পারবেন;
- চলক ও ধ্রুবকের বৈশিষ্ট্য বর্ণনা করতে পারবেন;
- চলকের শ্রেণিবিভাগ করতে পারবেন



মূলপাঠ

চলক (Variable)

চলক হচ্ছে গণিতশাস্ত্রের একটি ধারণা। গাণিতিক প্রক্রিয়ায় ইহার মান পরিবর্তিত হয় অর্থাৎ চলক বিভিন্ন মান গ্রহণ করতে পারে। অর্থনীতিতে চলক হলো- দামস্তর, মুনাফা, আয়-ব্যয়, জাতীয় আয়, ভোগ, বিনিয়োগ, আমদানি ও রপ্তানি ইত্যাদি। যেহেতু প্রতিটি চলক বিভিন্ন মান গ্রহণ করতে পারে তাই ইহাকে কোন নির্দিষ্ট সংখ্যার পরিবর্তে প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়। যেমন- আমরা দামস্তরকে (P), মুনাফাকে (π), আয়কে R, ব্যয়কে C, জাতীয় আয়কে Y দ্বারা নির্দেশ করি। এক্ষেত্রে আমরা $P = ৩$; $C = ১০$ অথবা P ও C এর মান যেকোন একটি ধরা যায়। অর্থাৎ চলকের মান পরিবর্তনশীল। তাই ইহাকে বাস্তব সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।

চলকের বৈশিষ্ট্য (Features of Variable)

উপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে চলকের কয়েকটি বৈশিষ্ট্য উল্লেখ করা হল—

১. চলক পরিবর্তনশীল এবং গতিশীল;
২. ইহা যে কোন মান গ্রহণ ও ত্যাগ করতে পারে;
৩. ইহাকে X, Y, Z, কিংবা μ , π , ρ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
৪. চলককে কোন বাস্তব সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।
৫. নির্ভরশীলতার দিক থেকে কিছু চলক স্বাধীন এবং কিছু চলক নির্ভরশীল আচরণ করে।

চলকের প্রকারভেদ (Classification of Variable)

নির্ভরশীলতার দিক থেকে চলককে দুইভাগে ভাগ করা যায়। যথাঃ

- স্বাধীন চলক
- অধীন বা নির্ভরশীল চলক

স্বাধীন চলক : কোন একটি সমীকরণে দুই বা ততোধিক সম্পর্কযুক্ত চলকের মধ্যে যে চলক অন্য চলকের মানের উপর নির্ভরশীল না হয়ে নিজের ইচ্ছামত যে কোন মান গ্রহণ করতে পারে, তাকে স্বাধীন চলক বলে। যেমন-

$$Q^d = ১৫ - ২P \dots\dots\dots(1)$$

এই সমীকরণে চাহিদার পরিমাণ (Q^d) নির্ভর করে দাম (P) এর উপর। এখানে P হচ্ছে স্বাধীন চলক। কারণ P এর যেকোন মান গ্রহণ করা সম্ভব।

$$P = 1 \text{ হলে } Q^d = 15 - 2(1) = 15 - 2 = 13$$

$$P = 2 \text{ হলে } Q^d = 15 - 2(2) = 15 - 4 = 11$$

$$P = 3 \text{ হলে } Q^d = 15 - 2(3) = 15 - 6 = 9$$

অধীন চলক : কোন সমীকরণে দুই বা ততোধিক সম্পর্কযুক্ত চলকের মধ্যে যে চলক নিজে নিজে কোন মান গ্রহণ করতে পারে না এবং অন্য চলকের মানের উপরে নির্ভর করে তাকে অধীন বা নির্ভরশীল চলক বলে।


সমীকরণ (1) থেকে আমরা বলতে পারি, এখানে P হচ্ছে স্বাধীন চলক এবং Q^d হচ্ছে অধীন চলক। কারণ P এর মানের উপর নির্ভর করে Q^d এর মান নির্ণয় করা যায়।

ধ্রুবক (Constant)

গাণিতিক প্রক্রিয়ায় যে রাশির মানের পরিবর্তন হয় না বা স্থির থাকে, তাদের ধ্রুবক বলে। যেহেতু ধ্রুবকের মান স্থির থাকে সেহেতু ইহাকে বাস্তব সংখ্যা, যেমনঃ ১, ২, ৩ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা যায়। আবার ধ্রুবককে নির্দিষ্ট প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা যায়। যেমন- ইংরেজি বর্ণমালার ছোট হাতের অক্ষর a, b, c এবং গ্রীক বর্ণমালা α, β, γ ইত্যাদি দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সহগ (Co-Efficient)

সহগ হচ্ছে এক প্রকার ধ্রুবক। ধ্রুবক কোন চলকের সাথে গুণন আকারে যুক্ত হলে তাকে সংশ্লিষ্ট চলকের সহগ বলা হয়। যেমন- $2X$ এখানে X চলক এবং ২ সহগ।

 শিক্ষার্থীর কাজ	
$Y = a - bX$ সমীকরণ থেকে চলক, ধ্রুবক ও সহগ নির্ণয় করুন।	

পরামিতি (Parameter)

গাণিতিক উপস্থাপনার ক্ষেত্রে যে ধ্রুবকের মান স্থির থাকে, কিন্তু কখনও পরিবর্তনশীল হিসেবে বিবেচিত হয়, এসব ধ্রুবকসমূহকে পরামিতি বলে। যেমন স্বয়ম্ভূত ভোগকে a দ্বারা বিবেচনা করা হয় যার মান স্থির থাকে। কিন্তু বিভিন্ন দেশের স্বয়ম্ভূত ভোগের মান ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। আবার প্রান্তিক ভোগ প্রবণতা বা MPC কে b দ্বারা বিবেচনা করা হলে সেক্ষেত্রেও কোন নির্দিষ্ট সময়ে একটি দেশের জনগণের MPC স্থির থাকলেও অন্যকোনো দেশের ক্ষেত্রে তা অন্য মান হতে পারে।

ধ্রুবকের বৈশিষ্ট্য (Features of Constant)

১. ধ্রুবক অপরিবর্তনশীল;
২. ধ্রুবকের মান স্থির হওয়ায় ইহা গতিশীল নয়;
৩. ধ্রুবককে বাস্তব সংখ্যা ১, ২, ৩ কিংবা a, b, c বা α, β, γ দ্বারা প্রকাশ করা হয়;
৪. ধ্রুবকের কোন প্রকারভেদ নেই।

চলক ও ধ্রুবকের পার্থক্য (Differences between Variable and Constant)

চলক	ধ্রুবক
১. গাণিতিক প্রক্রিয়ায় যে রাশির মান পরিবর্তনশীল তা হচ্ছে চলক।	১. যেসব রাশির মান অপরিবর্তনশীল তা হচ্ছে ধ্রুবক।
২. চলক যেকোনো মান গ্রহণ বা ত্যাগ করতে পারে।	২. ধ্রুবক যেকোনো মান গ্রহণ বা ত্যাগ করতে পারে না।
৩. চলকের প্রকারভেদ রয়েছে।	৩. ধ্রুবকের প্রকারভেদ নেই।
৪. চলক সাধারণত X, Y, Z কিংবা μ , π , ρ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	৪. ধ্রুবক a, b, c কিংবা α , β , γ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
৫. চলককে বাস্তব সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।	৫. কিন্তু ধ্রুবককে বাস্তব সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়।
৬. চলকের প্রকারভেদ রয়েছে।	৬. ধ্রুবকের প্রকারভেদ নেই।
৭. কোনো একটি অপেক্ষকে কমপক্ষে দুটি চলকের মধ্যে নির্ভরশীল সম্পর্ক বিদ্যমান।	৭. কোনো অপেক্ষকে ধ্রুবকের উপস্থিতি বাধ্যতামূলক নয়।



সারসংক্ষেপ

- গাণিতিক প্রক্রিয়ায় যে রাশির মান পরিবর্তিত হয় তা হচ্ছে চলক। চলককে বাস্তব সংখ্যা (১, ২, ৩) দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।
- গাণিতিক প্রক্রিয়ায় যে রাশির মান পরিবর্তিত হয় না তা হচ্ছে ধ্রুবক। ধ্রুবককে বাস্তব সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা যায়।
- চলকের প্রকারভেদ রয়েছে কিন্তু ধ্রুবকের প্রকারভেদ নেই।



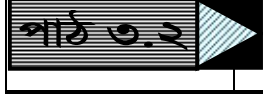
পাঠোত্তর মূল্যায়ন- ৩.১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

- ১। চলকের উদাহরণ হচ্ছে –
 - i. Y, Z
 - ii. μ , π
 - iii. ১, ২

নিচের কোনটি সঠিক

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
- ২। ধ্রুবকের বৈশিষ্ট্য কোনটি?
 - (ক) মান সবসময় পরিবর্তনশীল
 - (খ) X, Y, Z প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা যায়
 - (গ) গাণিতিক সংখ্যা ১, ২, ৩ দ্বারা প্রকাশ করা যায়
 - (ঘ) গড় মূল্য নির্ধারণে ব্যবহৃত হয়


উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা-

- অপেক্ষক সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- অপেক্ষকের শ্রেণিবিভাগ করতে পারবেন।


মূলপাঠ
অপেক্ষক (Function)

এক বা একাধিক স্বাধীন চলকের সাথে অধীন চলকের মধ্যকার পারস্পরিক নির্ভরশীলতার সম্পর্কে গাণিতিকভাবে প্রকাশ করা হলে তাকে অপেক্ষক বলে। অর্থাৎ অপেক্ষক দুই বা ততোধিক চলকের মধ্যকার সম্পর্ককে প্রকাশ করে এবং কিভাবে স্বাধীন চলকের নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে অধীন চলকের মান পাওয়া যায় তা নির্দেশ করে। উপরের আলোচনা থেকে অপেক্ষকের যে বৈশিষ্ট্যসমূহ পাওয়া যায় তা নিম্নরূপ-

- ১। অপেক্ষকের কমপক্ষে দুটি চলক থাকে;
- ২। অপেক্ষককে বিদ্যমান চলকসমূহের মধ্যে নির্ভরশীল সম্পর্ক থাকে;
- ৩। নির্ভরশীল এই সম্পর্ককে গাণিতিক উপায়ে প্রকাশ করা হয়;
- ৪। অপেক্ষকে একটি মাত্র অধীন চলক এবং এক বা একের অধিক স্বাধীন চলক থাকে।

উদাহরণস্বরূপ, একটি মৌলিক অপেক্ষক, $Y = f(X)$ এখানে X স্বাধীন চলক এবং Y অধীন চলক। f হচ্ছে অপেক্ষক বা নির্ভরশীলতার প্রতীক। ‘=’ চিহ্ন দ্বারা স্বাধীন ও অধীন চলক দুটির মধ্যে গাণিতিক সম্পর্ক প্রকাশ করে। আবার এভাবেও বলা যায়, দুটি চলক X ও Y এমনভাবে সম্পর্কযুক্ত যে, X এর বিভিন্ন মানের জন্য Y এর ক্ষেত্রেও বিভিন্ন মান পাওয়া যায় এবং Y হচ্ছে X এর অপেক্ষক।

যেমন : $Y = f(X) = 20 - 5X$

এখানে, Y = অধীন চলক

X = স্বাধীন চলক

f = অপেক্ষক

১০ = ধ্রুবক


৫ = সহগ

অপেক্ষকের শ্রেণিবিভাগ (Classification of Function)

১। চলকের সংখ্যা অনুযায়ী-

- দ্বি-চলক বিশিষ্ট অপেক্ষক: অপেক্ষকে চলকের সংখ্যা দুটি হলে তাকে দ্বিচলক বিশিষ্ট অপেক্ষক বলে।
যেমন, $Y = 20 - 5X$ । এখানে, X ও Y দুটি চলক।
- তিন চলক বিশিষ্ট অপেক্ষক: অপেক্ষকে চলকের সংখ্যা তিনটি হলে তাকে তিন চলক বিশিষ্ট অপেক্ষক বলে।
যেমন, $Y = 20 - 5X + Z$ । এখানে, X , Y ও Z তিনটি চলক।
এভাবে ৪, ৫, ৬, n সংখ্যক সংখ্যার উপর ভিত্তি করে অপেক্ষকের বিভিন্ন নামকরণ করা যায়।

- ২। চলকের ঘাত ও প্রকৃতি অনুযায়ী ও অপেক্ষক বিভিন্ন প্রকার হতে পারে-
- (i) সরলরৈখিক অপেক্ষক: যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের সূচকের সর্বোচ্চ ঘাত এক এর সমান, সে অপেক্ষককে সরলরৈখিক অপেক্ষক বলে। যেমন- $Y = bX+c$; অথবা $Y = ৩X + ৫$
- (ii) দ্বিঘাত অপেক্ষক: যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলকের সূচকের সর্বোচ্চ ঘাত দুই, তাকে দ্বিঘাত অপেক্ষক বলে। যেমন: $Y = ৫X^2 + ৮X + Z$, এখানে স্বাধীন চলক X এর সর্বোচ্চ ঘাত দুই।
- (iii) বহুপদী অপেক্ষক: বহুপদী অপেক্ষককে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়।
 $f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$
 এখানে n হচ্ছে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ হচ্ছে বাস্তব সংখ্যা।
- (iv) আনুপাতিক অপেক্ষক: $R(x) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ হচ্ছে আনুপাতিক অপেক্ষক, যেখানে $P(X)$ এবং $Q(X)$ হচ্ছে বহুপদী অপেক্ষক। যেমন- $Y = (৩X-৫) / (২X+৩)$
- (v) ঘাত অপেক্ষক: যে অপেক্ষকে চলকের মাত্রা দ্বারা প্রকাশ করা হয় তা হচ্ছে ঘাত অপেক্ষক। যেমন: $f(X) = a^x$; $f(X) = ৩^x$

 সারসংক্ষেপ
<ul style="list-style-type: none"> ▪ যদি X, Y চলক দুটি পরস্পর একরূপভাবে সম্পর্কিত হয় যেখানে X এর প্রতিটি মানের জন্য Y এর বিভিন্ন মান পাওয়া যায় তাহলে Y কে X এর অপেক্ষক বলা হয়। যেমনঃ $Y = f(X)$ ▪ অপেক্ষকগত সম্পর্কে যে চলকের মান অপর চলকের মানের উপর নির্ভর করে তাকে অধীন চলক বলে এবং যে চলকের মান অপর চলকের উপর নির্ভর করে না তাকে স্বাধীন চলক বলে। ▪ চলকের সংখ্যা এবং ঘাত বা শক্তি অনুযায়ী অপেক্ষক বিভিন্ন ধরনের হয়ে থাকে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন- ৩.২

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

- ১। অপেক্ষক হতে হলে-
- i. অন্তত দুটি চলক থাকতে হবে
 - ii. নির্ভরশীল সম্পর্ক থাকতে হবে
 - iii. অন্তত একটি ধ্রুবক থাকতে হবে
- নিচের কোনটি সঠিক
- (ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii
- ২। স্বাধীন ও অধীন চলকের মধ্যে নির্ভরশীল সম্পর্কের গাণিতিক প্রকাশকে কি বলে?
- (ক) অপেক্ষক (খ) সহগ (গ) ধ্রুবক (ঘ) পরামিতি



লেখচিত্র অঙ্কন Drawing of Graph



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা-

- লেখচিত্র কি তা বলতে পারবেন;
- লেখচিত্র অঙ্কন পদ্ধতি বর্ণনা করতে পারবেন।

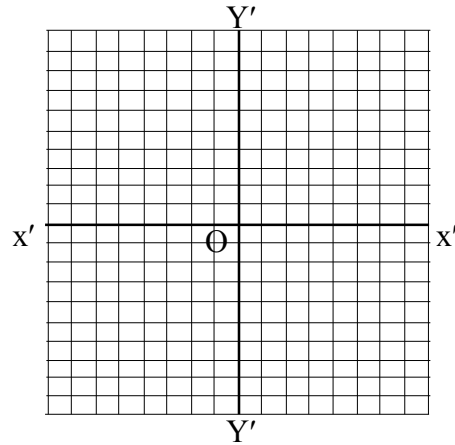


মূলপাঠ

লেখচিত্র (Graph)

পাঠ ৩.২ থেকে আমরা জেনেছি, অপেক্ষকে স্বাধীন ও অধীন চলকের মধ্যে নির্ভরশীলতার সম্পর্ক থাকে। যা গাণিতিক উপায়ে প্রকাশ করা হয়। এই দুটি চলকের মধ্যকার অপেক্ষকগত সম্পর্কের জ্যামিতিক রূপ বা চিত্ররূপ হলো লেখচিত্র। অর্থাৎ একটি অপেক্ষকের স্বাধীন ও অধীন চলকের মধ্যে নির্ভরশীলতার বিভিন্ন সম্পর্কসূচক বিন্দুসমূহকে একটি ছক কাগজে উপস্থাপন করে সেগুলোকে যোগ করে যে রেখা পাওয়া যায় তাকে লেখচিত্র বলে।

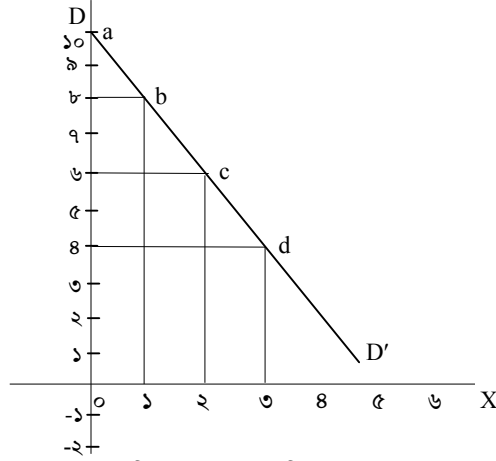
একটি নির্দিষ্ট অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য স্বাধীন (X) ও অধীন (Y) চলকের কিছু সংখ্যক জোড়া মান বের করে সারণী আকারে লিপিবদ্ধ করা হয়। যেখানে X চলকের নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে Y চলকের মান পাওয়া যায়। X ও Y চলকের সম্পর্কযুক্ত দুটি মান দ্বারা যে বিন্দু গঠিত হয় তাকে স্থানাংক বলে। এখন, একটি ছক কাগজে যেখানে অনেকগুলো অনুভূমিক ও উলম্ব রেখা দ্বারা ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গাকার ঘর কাটা থাকে সেখানে অনুভূমিক বরাবর অঙ্কিত রেখাকে ভূমি অক্ষ বা X অক্ষ এবং উলম্ব বরাবর অঙ্কিত রেখাকে লম্ব অক্ষ বা Y অক্ষ বলা হয়। এই ভূমি ও লম্ব অক্ষ পরস্পরকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে মূলবিন্দু বলে। মূলবিন্দুকে 'O' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। চিত্র ৩.৩.১ এ ছক কাগজ, ভূমি অক্ষ, লম্ব অক্ষ ও মূল বিন্দু দেখানো হলো। যেখানে XOX' ভূমি অক্ষ এবং YOY' লম্ব অক্ষ। অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু অর্থাৎ মূলবিন্দুতে স্থানাংক $(0, 0)$ । মূলবিন্দু থেকে শুরু করে ভূমি অক্ষে X চলকের মান এবং লম্ব অক্ষে Y চলকের মান পরিমাপ করা হয়। এরপর সারণী থেকে X ও Y এর জোড়া মান নিয়ে ছক কাগজে এক একটি বিন্দু হিসেবে স্থাপন করা হয়। এই জোড়া মানগুলো বিন্দুসমূহের স্থানাংক হিসেবে পরিচিত।



চিত্র ৩.৩.১: ছক কাগজ


মনে করি, $Y = 2X + 8$ একটি অপেক্ষক। এখন X এর কয়েকটি নির্দিষ্ট মান নেই এবং X এর প্রতিটি মানের প্রেক্ষিতে Y এর মান বের করি।


X	$১০ - ২X = Y$	বিন্দু স্থানাংক
০	$১০ - ২.০ = ১০$	a (০, ১০)
১	$১০ - ২.১ = ৮$	b (১, ৮)
২	$১০ - ২.২ = ৬$	c (২, ৬)
৩	$১০ - ২.৩ = ৪$	d (৩, ৪)



চিত্র ৩.৩.২: লেখচিত্র অঙ্কন

উপরের অপেক্ষক থেকে X ও Y এর D সম্পর্কযুক্ত বিন্দু a, b, c ও d পাই। এবার a, b, c ও d বিন্দু চারটি যোগ করে DD' রেখা পাই। এই DD' রেখাই হচ্ছে লেখচিত্র।

 শিক্ষার্থীর কাজ
$Y = ৩X + 8$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করণ।

 সারসংক্ষেপ
<ul style="list-style-type: none"> অপেক্ষকের স্বাধীন ও অধীন চলকের মধ্যকার সম্পর্ক যখন চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় তখন এই প্রক্রিয়াকে লেখচিত্র অঙ্কন বলে। লেখচিত্রে ভূমি ও লম্ব অক্ষের ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু বলা হয়। আবার, মূলবিন্দু থেকে কোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর অনুভূমিক ও উলম্ব দূরত্বকে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলে।



বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। লেখচিত্রের সাথে সম্পর্কযুক্ত

i. স্থিতিস্থাপকতা

ii. ছক কাগজ

iii. স্বাধীন ও অধীন চলক

নিচের কোনটি সঠিক

(ক) i ও ii

(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii

২। মূলবিন্দু হচ্ছে-

i. ইহাকে 'o' দ্বারা প্রকাশ করা হয়

ii. ভূমি ও লম্ব অক্ষের ছেদবিন্দু

iii. মূলবিন্দুতে স্থানাংক (o,o)

নিচের কোনটি সঠিক

(ক) i ও ii

(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii

(ঘ) i, ii ও iii



ঢাল ও ছেদাংশ Slope and Intersection



উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে শিক্ষার্থীরা-

- ঢাল সম্পর্কে বলতে পারবেন;
- সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করতে পারবেন;
- ছেদাংশ কি তা বলতে পারবেন।



মূলপাঠ

ঢাল (Slope)

লেখচিত্রে আমরা যে রেখা পাই সেখানে একটি চলকের মানের উপর অন্য চলকের মানের পরিবর্তনের প্রভাবকে রেখাটির ঢালের সাহায্যে পরিমাপ করতে পারি। একটি রেখার লম্ব অক্ষে পরিমাপকৃত চলকটির মানের পরিবর্তনকে ভূমি অক্ষের চলকের মানের পরিবর্তন দ্বারা ভাগ করে রেখাটির ঢাল পাওয়া যায়। অর্থাৎ কোনো অপেক্ষকের স্বাধীন চলকের পরিবর্তনের ফলে অধীন চলকের যে পরিবর্তন হয় তার অনুপাতকে ঢাল বলে। সুতরাং ঢাল হলো Y অক্ষ ও X অক্ষের চলকদ্বয়ের পরিবর্তনের অনুপাত।

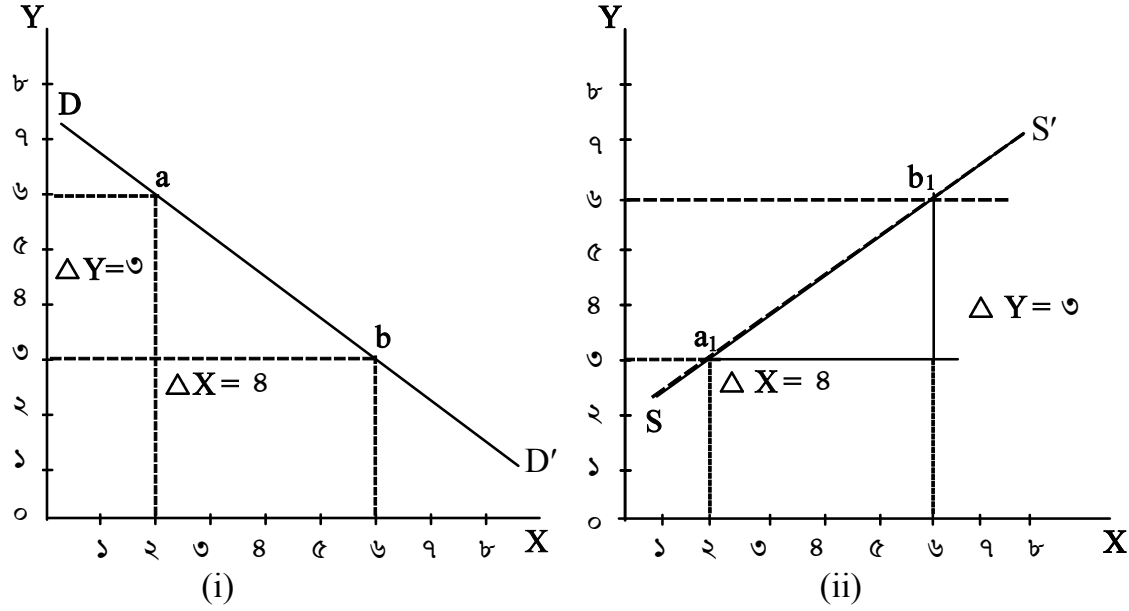
মনে করি,	Y	= f(x), একটি অপেক্ষক
যেখানে	X	= স্বাধীন চলক
	Y	= অধীন চলক
এবং	ΔX	= X চলকের পরিবর্তন
	ΔY	= Y চলকের পরিবর্তন হলে
	ঢাল	= $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$

সুতরাং আমরা বলতে পারি,

$$\text{রেখার ঢাল} = \frac{Y \text{ অক্ষের পরিবর্তন}}{X \text{ অক্ষের পরিবর্তন}} = \frac{\text{উলম্ব অক্ষের পরিবর্তন}}{\text{ভূমি অক্ষের পরিবর্তন}}$$

সরল রেখার ঢাল নির্ণয় পদ্ধতি (Determination of Slope of Straight Line)

একটি সরল রেখার সকল বিন্দুতে X অক্ষের পরিবর্তনের সঙ্গে Y অক্ষের পরিবর্তনের হার $\left(\frac{\Delta Y}{\Delta X}\right)$ সমান। এ কারণে সরলরেখার সর্বত্র ঢাল স্থির বা একই থাকে। সরলরেখার ঢাল কিভাবে পরিমাপ করা যায় তা নিচের চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো-



চিত্র ৩.৪.১: সরলরেখার ঢাল পরিমাপ

চিত্র ৩.৪.১ এর (i) অংশে DD' একটি সরলরেখা, ইহার a বিন্দুতে ঢাল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে পরিবর্তন বিবেচনার জন্য অপর একটি বিন্দু b নেই। এখন X ও Y চলকের পরিবর্তন নির্ণয় করি।

$$\Delta X = 6 - 2 = 8$$

$$\Delta Y = 3 - 6 = -3$$

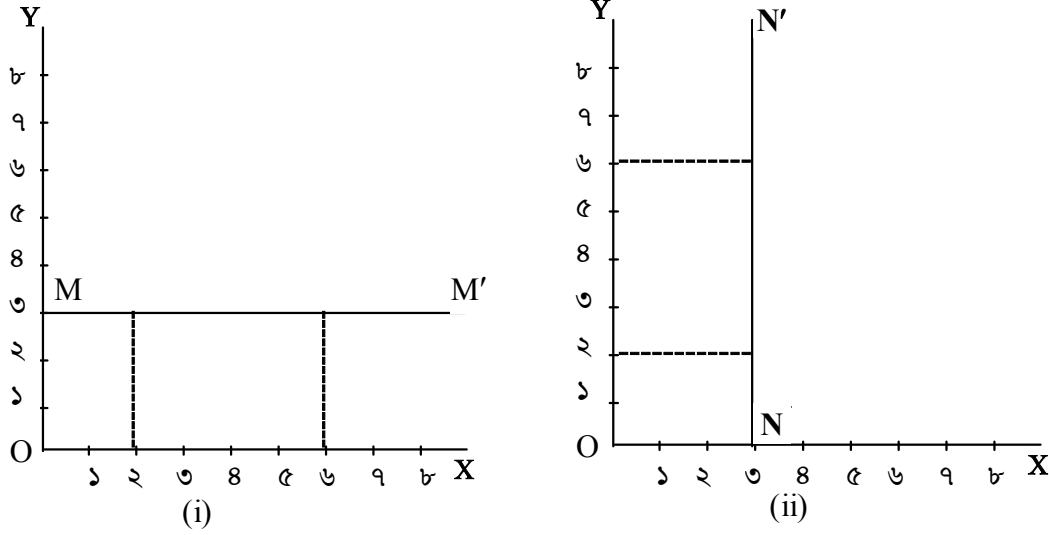
সুতরাং O বিন্দুতে DD' রেখার ঢাল = $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{-3}{8}$ এক্ষেত্রে চলক দুটির মধ্যে ঋণাত্মক সম্পর্ক থাকায় DD রেখার ঢাল ঋণাত্মক। ঋণাত্মক ঢাল বিশিষ্ট রেখা ডানদিকে নিম্নগামী হয়। আবার চিত্র ৩.৪.১ এর (ii) অংশ SS সরলরেখার a বিন্দুতে ঢাল নির্ণয়ে X ও Y চলকের পরিবর্তন নিম্নরূপ:

$$\Delta X = 6 - 2 = 8$$

$$\Delta Y = 6 - 3 = 3$$

সুতরাং a, বিন্দুতে SS' রেখার ঢাল $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{3}{8}$ এখানে চলক দুটির মধ্যে ধনাত্মক সম্পর্ক বিদ্যমান। তাই SS' রেখার ঢাল ধনাত্মক। ধনাত্মক ঢাল বিশিষ্ট রেখা ডানদিকে উর্ধ্বগামী হয়।

যখন কোন সরলরেখা ভূমি অক্ষের সমান্তরাল তখন X চলকের পরিবর্তনে Y চলকের মানের পরিবর্তন হয় না।



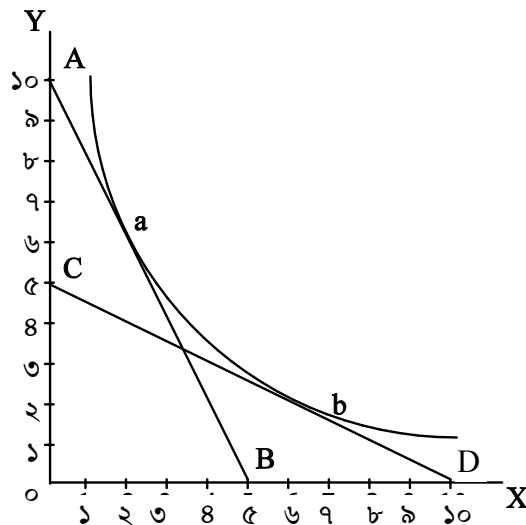
চিত্র ৩.৪.২: ভূমি ও লম্ব অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার ঢাল পরিমাপ

এক্ষেত্রে MM' রেখার ঢাল (চিত্র ৩.৪.২ i) $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{3-3}{6-2} = \frac{0}{4} = 0$

অন্যদিকে লম্ব অক্ষের সমান্তরাল রেখার ক্ষেত্রে X চলকের পরিবর্তন হয় না কিন্তু Y চলকের পরিবর্তন হয়। Y চলকের পরিবর্তন X এর উপর নির্ভর করে না। তখন NN' সরলরেখার ঢাল $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{6-0}{3-3} = \frac{6}{0} = \infty$ অর্থাৎ অসীম (চিত্র ৩.৪.২ ii)।

বক্ররেখার ঢাল নির্ণয় (Determination of Slope of Curve)

বক্ররেখার ঢাল পরিমাপ করার জন্য রেখাটির যে বিন্দুতে ঢাল পরিমাপ করতে চাই সেই বিন্দুতে এমন একটি সরলরেখা আঁকতে হবে যেটি ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটিকে স্পর্শ করে, কিন্তু ছেদ করে না। এরকম সরলরেখাকে বক্র রেখাটির স্পর্শক বলে। এখন স্পর্শকটির ঢাল পরিমাপ করে ঐ বিন্দুতে বক্র রেখাটির ঢাল পাওয়া যাবে। এভাবে একটি বক্ররেখার বিভিন্ন বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কন করে বিভিন্ন বিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল পরিমাপ করা যায়। বক্ররেখার বিভিন্ন বিন্দুতে ঢাল বিভিন্ন হয়ে থাকে। চিত্র ৩.৪.৩ এ বক্ররেখার ঢাল পরিমাপ করে দেখানো হলো—



চিত্র : ৩.৪.৩ বক্ররেখার ঢাল পরিমাপ

উপরের চিত্রে DD' বক্ররেখায় দুটি বিন্দু a ও b নেই। বিন্দু দুটিতে বক্ররেখার ঢাল নির্ণয়ের জন্য AB ও CD দুটি স্পর্শক আঁকি যা শুধু a ও b বিন্দুতে স্পর্শ করে অন্য কোনো বিন্দুতে নয়। a ও b বিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল ঐ দুটি বিন্দুতে সরলরেখার ঢালের সমান। এখন a বিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল $= \frac{AO}{DB} = \frac{-10}{5} = -2$ । আবার একই বক্ররেখার b বিন্দুতে বক্ররেখাটির ঢাল $= \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AO}{DB} = \frac{-10}{5} = -2$ । সুতরাং দেখা যাচ্ছে একটি সরলরেখার ঢাল রেখাটির সকল বিন্দুতে একই থাকে, কিন্তু একটি বক্ররেখার ঢাল বিভিন্ন বিন্দুতে বিভিন্ন হয়।

ছেদাংশ (Intersection)

একটি রেখা Y অক্ষের যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে Y ছেদাংশ বলে। এই বিন্দুতে $X=0$ । আবার রেখাটি X অক্ষের যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে X ছেদাংশ বলে এবং এই বিন্দুতে $Y=0$ । চিত্র ৩.৪.৩ এ AB ও CD রেখার Y ছেদাংশে যথাক্রমে OD ও OC এবং উক্ত রেখা দুটির X ছেদাংশ যথাক্রমে OB ও OD ।



সারসংক্ষেপ

- একটি রেখার ঢাল রেখাটির দুটি বিন্দুর মধ্যে X চলকের পরিবর্তনের ফলে Y চলকের পরিবর্তনের পরিমাপ দেখায়।
- সরলরেখার সকল বিন্দুতে ঢাল এক হলেও বক্ররেখার বিভিন্ন বিন্দুতে ঢাল বিভিন্ন।
- একটি রেখা X অক্ষে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে X ছেদাংশ এবং Y অক্ষে যে বিন্দু ছেদ করে তাকে Y ছেদাংশ বলে।



পাঠোত্তর মূল্যায়ন- ৩.৪

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। সবচেয়ে বেশি ঢাল সম্পন্ন রেখা হচ্ছে—

- i. X অক্ষের সমান্তরাল
- ii. Y অক্ষের সমান্তরাল
- iii. ডানদিকে উর্ধ্বগামী
নিচের কোনটি সঠিক?

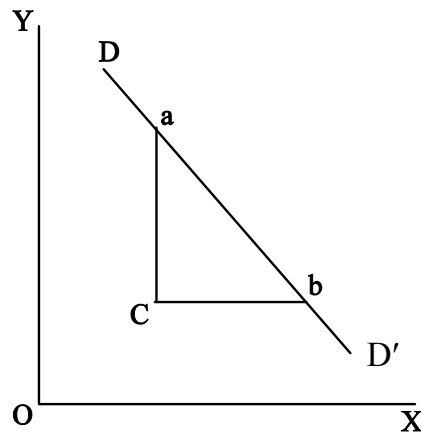
(ক) i

(খ) ii

(গ) iii

(ঘ) i, ii ও iii

নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ্য করুন এবং ২ ও ৩ নং প্রশ্নের উত্তর দিন।



২। DD' রেখার ঢাল কোনটি?

- (ক) $-\frac{ac}{cb}$ (খ) $-\frac{ac}{cb}$ (গ) $-\frac{bc}{ab}$ (ঘ) $-\frac{bc}{ac}$

৩। DD' রেখাটির ঢাল পরিমাপের ক্ষেত্রে—

- i. রেখাটির সকল বিন্দুতে ঢাল সমান
ii. রেখাটির বিভিন্ন বিন্দুতে ঢাল বিভিন্ন
iii. রেখাটির ঢাল শূন্য
নিচের কোনটি সঠিক?

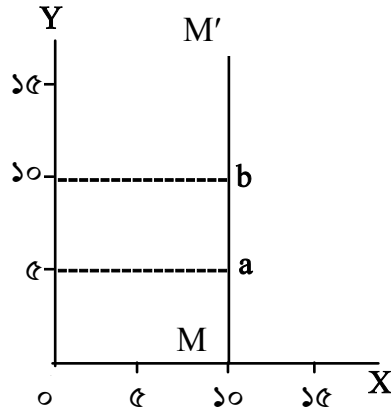
- (ক) i (খ) ii (গ) iii (ঘ) i, ii & iii



চূড়ান্ত মূল্যায়ন

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। নিচের চিত্রটি লক্ষ্য করুন।



- (ক) অপেক্ষক বলতে কি বোঝায়?
(খ) স্বাধীন ও অধীন চলকের মধ্যে পার্থক্য করুন।
(গ) MM' রেখার a বিন্দুতে ঢাল নির্ণয় করুন।
(ঘ) MM' রেখার ঢাল এর মান কেন এমন হলো: আপনার মতামত নেই।

২। দেয়া আছে $Q = 12 - 2p$.

- (ক) চলক কি?
(খ) সমীকরণটি থেকে চলক, ধ্রুবক ও সহগ নির্ণয় করুন।
(গ) উপরের অপেক্ষকটি তিন চলক বিশিষ্ট অপেক্ষকে রূপান্তরিত করুন।
(ঘ) অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন করুন।



উত্তরমালা

- পাঠ ৩.১: ১। ক ২। গ
পাঠ ৩.২: ১। ঘ ২। ক
পাঠ ৩.৩: ১। গ ২। ঘ
পাঠ ৩.৪: ১। খ ২। ক ৩। ক