ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
(Trigonometric Ratios)

ইউনিট
৭

ভূমিকা

ত্রিকোণমিতি শব্দটি এসেছে গ্রীক শব্দ trigono ও metron এ দুটি শব্দ থেকে। trigonoঅর্থ ত্রিভুজ ও metronঅর্থ পরিমাপ করা। অতএব ত্রিকোণমিতি শব্দের অর্থ দ্বারা ত্রিভুজের পরিমাপ বোঝানো হয়। গণিত শাস্ত্রের যে শাখায় ত্রিভূজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ ও এতদসম্পর্কীয় বিষয় আলোচিত হয় তাকে ত্রিকোণমিতি বলা হয়। অতি প্রাচীন কালে ত্রিকোণমিতির পরিধি শুধুমাত্র ত্রিভুজের কোণ, বাহু ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ ছিল। কিন্তু বর্তমানে বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় এর প্রয়োগ বিস্তৃতি লাভ করেছে।বর্তমানে গণিতের যে কোন শাখায় শিক্ষালাভের জন্য ত্রিকোণমিতির জ্ঞান একান্ত অপরিহার্য। ত্রিকোণমিতি দুইটি শাখায় বিভক্ত। তাদের একটি হল সমতল ত্রিকোণমিতি (Plane Trigonometry) এবং অপরটি হল গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (Spherical Trigonomerty)। আমাদের আলোচনা সমতল ত্রিকোণমিতিতে সীমাবদ্ধ থাকবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- ত্রিকোণমিতিক কোণ কী তা বলতে পারবেন,
- কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান নির্ণয় করতে পারবেন,
- ডিগ্রি ও রেডিয়ানের সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবেন
- ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- চর্তুভাগ অনুযায়ী ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ধারণ করতে পারবেন,
- নির্ধারিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান প্রয়োগ করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ত্রিকোণমিতিক কোণ, ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

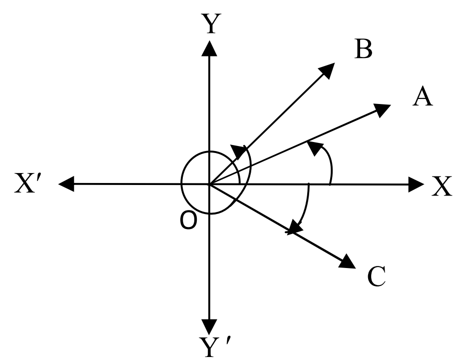
এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক কোণ সম্পর্কে লিখতে পারবেন,
- কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান বিভিন্ন পদ্ধতিতে পরিমাপ করতে পারবেন,
- চৌকন কি তা লিখতে পারবেন,
- কোনো বৃত্তের পরিধি ও তার ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক তা প্রমাণ করতে পারবেন,
- রেডিয়ান একটি ধ্রুবকোণ তা প্রমাণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতিক কোণ, চতুর্ভাগ/চৌকোন,ষাটমূলক, শতমূলক ও বৃত্তীয়মূলক পদ্ধতি

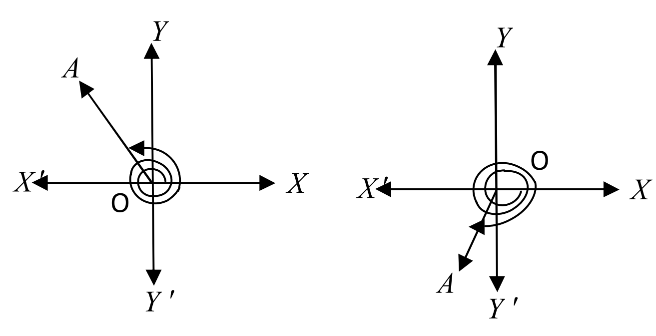
মূলপাঠ

ত্রিকোণমিতিক কোণ(Trigonometric Angle):



সাধারণত জ্যামিতিতে দুইটি পরস্পরছেদী রশ্মি দ্বারা কোণের উৎপত্তি হয়এবং কেণের পরিমান 1° হতে 360°এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে এবং তা হয় ধনাত্মক। জ্যামিতিতে ঋণাত্মক কোণ অর্থহীন। ত্রিকোণমিতিতে কোণের ব্যাখ্যা ভিন্ন। একটি রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমান আবর্তিত হয় তা ঐ রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমাপ। রশ্মিটির প্রান্ত বিন্দুকে উৎপন্ন কোণটির শীর্ষবিন্দু বলা হয়।মনে করুন XOX' ওYOY'দুইটি স্থির রশ্মি লম্বভাবে অবস্থিত। এখন যদি একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি আদি অবস্থান হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OA অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে কোণের সংজ্ঞানুযায়ীঘূর্ণায়মান রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট কোণের পরিমান $\angle XOA$। যদি এই ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি একই দিকে ঘুরতে ঘুরতে আদি অবস্থান OX পার হয়েOBঅবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে সৃষ্ট কোণের পরিমান হবে XOBএবং তা চার সমকোণের চেয়ে বড়। উপরের কোণ দুটি ধনাত্মক। কিন্তু ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যদি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরে OC অবস্থানে এসে স্থির হয় তাহলে কোণের পরিমানহবে $\angle XOC$ এবং তা হবে ঋণাত্মক। অতএব ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমান 0°হতে 360° এর মধ্যে সীমাবদ্ধ নয় এবং তা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

চতুর্ভাগ/চৌকোন (Quadrant):



চিত্রে লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে লম্বভাবে দন্ডয়মান XOX' ও YOY'রশ্মিদুইটি সমতল ক্ষেএটিকে চারটি অংশে বিভক্ত করেছে। এই চারটি অংশের প্রত্যেকটি অংশকে চতুর্ভাগ বলে।$XOY, YOX', X'OY', Y'OX$ অংশকেযথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলে। সুতরাং ত্রিকোণমিতিককোণের পরিমাপ যাই হোক না কেন সেটি যে কোনএকটি চৌকোনের মধ্যে অবস্থান করবে।মনে করুন একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি 850^o কোণ উৎপন্ন করে।তাহলে বুঝতে হবে

ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে দুইবার $(360^{o} \times 2 = 720^{o})$ সম্পূর্ণ আবর্তনের পরএকই দিকেআবর্তন করে
$(850^{o} - 720^{o} = 130^{o})$ কোণ চিহ্নিত করেছে। সুতরাং ঘূর্ণায়মান রশ্মিটির শেষ অবস্থান হবে দ্বিতীয়চর্তুভাগে (১ম চিত্রে দ্বিতীয় চতুর্ভাগ) ।কিন্তু যদি কোণের পরিমান 850^{o} হয় তাহলে বুঝতে হবে ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি ঘড়ির কাঁটারদিকে দুইবার পূর্ণ আবর্তনের পর একই দিকে আরও 130^{o} আবর্তন করে কোণ চিহ্নিত করেছে এবং ঘূর্ণায়মান রশ্মিটির শেষ অবস্থান হবে তৃতীয় চতুর্ভাগে (২য় চিত্রে তৃতীয় চতুর্ভাগ)। নির্দিষ্টপরিমান কোণ চিহ্নত করার পর ঘূর্ণায়মান রশ্মিটি যে অবস্থাতেপৌঁছায় ঐঅবস্থানকে প্রান্তিক রেখা/শেষ অবস্থান/ ব্যাসার্ধ ভেক্টর (Radius Vector) বলা হয়।

কোণের ডিগ্রি ও রেডিয়ান পরিমাপ: জ্যামিতিক সংজ্ঞানুয়ী একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর দন্ডায়মান হলে যদি সমান সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করে তবে তাদের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে। ইউক্লিডের স্বীকার্য অনুযায়ী সমকোণ একটি স্থির কোণ বা ধ্রুবক। সমকোণকে মূল একক ধরে কোণ পরিমাপের জন্য ত্রিকোণমিতিতে সাধারণত তিন প্রকার একক ব্যবহার করা হয়। এই পদ্ধতিগুলো হল –

ক) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesmal System)
খ) শতমূলক পদ্ধতি (Centesimal system)
গ) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

(ক)ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesmal System): এই পদ্ধতিতে এক সমকোণের সমান 90 ভাগে ভাগ করে এক এক ভাগকে ডিগ্রি বলা হয়। প্রতি ডিগ্রিকে 60 মিনিটে এবং প্রতি মিনিটকে 60 সেকেন্ডে ভাগ করা হয়।

1 সমকোণ = 90°(নব্বই ডিগ্রি)

$1^{\circ} = 60'$ (ষাট মিনিট)

$1' = 60''$(ষাট সেকেন্ড)

ক্ষুদ্রতম ভাগগুলো 60 বিধায় এর নামকরণ ষাটমূলক হয়েছে। কোণ পরিমাপের এই একককে সাধারণ (Common) বা বৃটিশ পদ্ধতি (British System) ও বলা হয়।

(খ) শতমূলক পদ্ধতি (Centesimal system): এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 100 ভাগে ভাগ করে এক এক ভাগকে গ্রেড বলা হয়। প্রতি গ্রেডকে একশতমূলক মিনিট এবং প্রতি শতমূলক মিনিটকে এক শতমূলক সেকেন্ডে ভাগ করা হয়।

1 সমকোণ =100g (একশ গ্রেড)

1g =100` (একশ শতমূলক মিনিট)

1` =100`` (একশ শতমূলক সেকেন্ড) এই পদ্ধতিকে ফরাশি পদ্ধতি ও বলা হয়।

(গ) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System) : কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট বৃত্তচাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে বলা হয় এক রেডিয়ান। রেডিয়ানের পরিমাণ বৃত্তের উপর নির্ভর করে না। এটি একটি ধ্রুব কোণ, তাই কোণ পরিমাপের একক হিসেবে গ্রহণযোগ্য।রেডিয়ানের সংজ্ঞা বৃত্তের সঙ্গে সম্পর্কিত বলে কোণ পরিমাপের এই পদ্ধতিকে বৃত্তীয় পদ্ধতি বলে।এই পদ্ধতিকে রেডিয়ানমূলক পদ্ধতিও বলা হয়।

উল্লেখ্য যে, কোণের কোনো উল্লেখ না থাকলে তা রেডিয়ান ধরা হয়।

কোণ পরিমাপের বিভিন্ন এককের মধ্যে সম্পর্ক

(ক) কোণের ষাটমূলক/ডিগ্রি ও বৃত্তিয়মূলক/রেডিয়ান পরিমাপের মধ্যে সম্পর্ক:

ষাটমূলক পদ্ধতিতে, 1 সমকোণ =90°বা 2সমকোণ =180°বৃত্তিয় পদ্ধতিতে , $\frac{\pi}{2}$সমকোণ = 1রেডিয়ান

বা, 2 সমকোণ =πরেডিয়ান, অর্থাৎπ^{c}

বা, 2 সমকোণ = 180°

অর্থাৎ $\pi^c = 180°$

কিন্তু মনে রাখতে হবে πহল একটি ধ্রুব সংখ্যা যার আসন্ন মানকে$\frac{22}{7}$বা03.14159(পাঁচ দশমিক পর্যন্ত) ধরা হয়।

ষাটমূলক ও শতমূলক এককের মধ্যে সম্পর্ক:

ষাটমূলক পদ্ধতিতে, 1 সমকোণ $= 90°$

এবং শতমূলক পদ্ধতিতে 1 সমকোণ $= 100^g$

$\therefore 90^\circ = 100^g$

বা,$9^\circ = 10^g$

$\therefore 1^\circ = \frac{10^g}{9} = 1.11^g$ (প্রায়)

আবার, $10^g = 9^\circ$

$\therefore 1^g = \frac{9^\circ}{10} = 0.9^\circ$

ষাটমূলক, শতমূলক ও বৃত্তীয় এককের মধ্যে সম্পর্ক:

বৃত্তিয় পদ্ধতিতে আমরা পাই, 1 রেডিয়ান $=\frac{2}{\pi}$সমকোণ

$\therefore \pi$রেডিয়ান $=2$ সমকোণ

বা, 1 রেডিয়ান $= \frac{180}{\pi}$সমকোণ $= \frac{180°}{3.14159} = 57°17'45''$

আবার,$1° = \frac{\pi}{180°}$রেডিয়ান $= \frac{3.14159}{180°}$রেডিয়ান $= 0.0174533$রেডিয়ান

কিন্তু অপর দুই পদ্ধতি অনুসারে ,

2 সমকোণ $= 180° = 200^g$

2 সমকোণ $= 180° = 200^g = \pi^c$

1 সমকোণ $= 90° = 100^g = \frac{\pi^c}{2}$

মনে করুন, একটি নির্দিষ্ট কোণের পরিমাণকে ষাটমূলক, শতমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে Dডিগ্রী,G গ্রেড ওθরেডিয়ান নির্দেশ করা হল।

তাহলে,$180° = \pi^c$

$\therefore D° = \frac{\pi}{180°} \times D$ রেডিয়ান

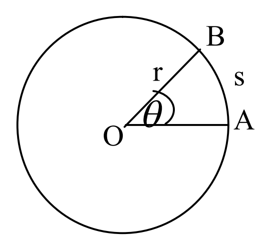
আবার যেহেতু,$100^g = \pi^c$

$\therefore G^g = \frac{\pi}{200^g} \times G$রেডিয়ান

সুতরাং,$\frac{\pi D}{180} = \frac{\pi G}{200} = \theta$

$\therefore \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{\theta}{\pi}$

রেডিয়ান পরিমাপে বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলের সূত্র:



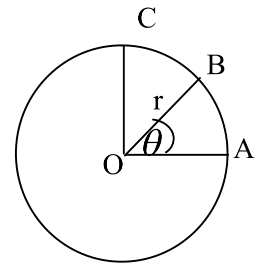
বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য : মনে করুন, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং বৃত্তচাপ $AB = s$ এবং কেন্দ্রে $\angle AOB = \theta^c$ কোণ উৎপন্ন করে।$\therefore$ **বৃত্তের পরিধি**$=2\pi r$। **বৃত্তের কেন্দ্রে মোট উৎপন্ন কোণ =**2πএবং চাপ s দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের ডিগ্রী পরিমাণ θআমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক,

$\therefore \frac{s}{\theta} = \frac{2\pi r}{2\pi}$

$\Rightarrow s = r\theta$

বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল:

মনে করুন, Oকেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক এবং বৃত্তটির AB চাপ কেন্দ্রে θকোণ উৎপন্ন করে। OA রেখাংশের উপর লম্ব OC রেখাংশ অঙ্কন করুন।



তাহলে, বৃত্তকলাAOBএর ক্ষেত্রফল, $\frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\angle AOB} = \frac{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}}{\angle AOC}$

বা, $\frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\angle AOB}{\angle AOC}$

বা, $\frac{\text{বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\theta}{\frac{\pi}{2}}$

বা, বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল= $\frac{2\theta}{\pi} \times$বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল

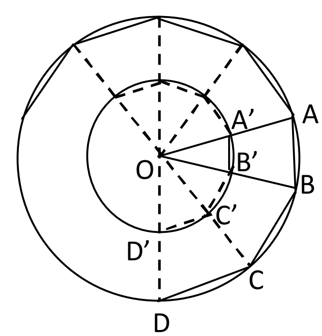
বা, বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল= $\frac{2\theta}{\pi} \times \frac{1}{4}\pi r^2$ বর্গ একক [$\because$ বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{4}$ বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল]

বা, বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল= $\frac{1}{2} r^2\theta$ বর্গ একক, যেখানে θ রেডিয়ান পরিমাপে ।

উপপাদ্য(Theorem): যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও তার ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক।

প্রমাণ ঃ মনে করুন O দুইটি বৃত্তের সাধারণ কেন্দ্র। বড় বৃত্তটিতে n সংখ্যক সমান বাহু বিশিষ্ট $ABCD$ বহুভুজ অঙ্কন করুন। OA, OB, OC, OD যোগ করুন। এই রেখাগুলি ছোট বৃত্তটিকে যথাক্রমে $A', B', C', D', \ldots\ldots\ldots$ বিন্দুতে ছেদ করে। এখন $A'B', B'C', C'D', \ldots\ldots\ldots$ যোগ করুন, তাহলে $A'B'C'D'\ldots\ldots\ldots$ ক্ষেত্রটি ছোট বৃত্তে অন্তর্লিখিত n সংখ্যক সমান বাহু বিশিষ্ট বহুভুজ হবে। এখন (বড় বৃত্তের দুটি ব্যাসার্ধ)

এবং $OA' = OB'$ (ছোট বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ)



সুতরাং, $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$ এবং $\angle AOB$, ΔOAB এবং $\Delta OA'B'$ এর সাধারণ কোণ।

অতএব, ΔOAB এবং $\Delta OA'B'$ হবে সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{OA'}$

বা, $\frac{n.AB}{n.A'B'} = \frac{OA}{OA'}$

বা, $\frac{n.AB}{OA} = \frac{n.A'B'}{OA'}$

অর্থাৎ, $\frac{\text{বড় বৃত্তের অন্তর্লিখিত বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} =$ ----------------(i)

এখন, বহুভুজের বাহু সংখ্যা n যত বেশি হবে AB এবং অন্যান্য বাহুর দৈর্ঘ্য তত ছোট হবে। এভাবেn-এর মান অসীম হলে (i)-নং নিম্নরূপ আকার ধারণ করবে –

$\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাসার্ধ}}$

$\frac{\text{বড় বৃত্তের পরিধি}}{\text{বড় বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{\text{ছোট বৃত্তের পরিধি}}{\text{ছোট বৃত্তের ব্যাস}}$ … … … … … (ii)

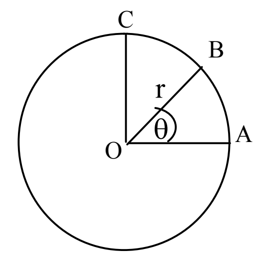
এভাবে যে কোনো সংখ্যক বৃত্ত অংকন করে (ii) নং সমীকরণের সত্যতা প্রমাণ করা যায়।

সুতরাং, $\frac{\text{যে কোন বৃত্তের পরিধি}}{\text{সেই বৃত্তের ব্যাস}} =$ ধ্রুব সংখ্যা… … … … … (iii)

কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধকে r এবং ব্যাসকে d ধরা হলে (iii) নং সমীকরণ হবে, $\frac{\text{পরিধি}}{d} = \pi$, [যেখানে, ব্যাস=d এবং π একটি ধ্রুব সংখ্যা, πএর আসন্ন মানকে (Approximate value) ধরা হয় $\frac{22}{7}$ বা 3.14159, পাঁচ দশমিক পর্যন্ত]

প্রমাণ করুন যে, রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।

প্রমাণ: মনে করুন, O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OA = r$ ব্যাসার্ধ, ধরুন AB বৃত্তচাপটি ব্যাসার্ধের সমান। তাহলে সংজ্ঞানুযায়ী $\angle AOB = 1^c$ । এখন , সরলরেখার উপর লম্ব আঁকুন। তাহলে, $\angle AOB = 1$ সমকোণ এবং বৃত্তচাপ AC = বৃত্তের পরিধির এক চতুর্থাংশ $= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$ ।



আমরা জানি,একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থকোণ বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।

সুতরাং, $\frac{\angle AOB}{\text{বৃত্তচাপ } AB} = \frac{\angle AOC}{\text{বৃত্তচাপ } AC}$

বা, $\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{বৃত্তচাপ } AB}{\text{বৃত্তচাপ } AC} = \frac{r}{\pi \times r/2}$

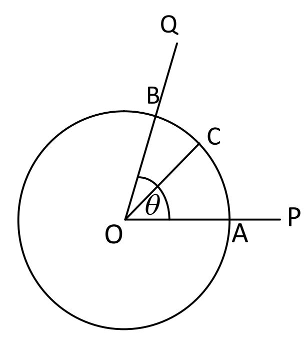
অর্থাৎ, $\frac{\text{এক রেডিয়ান}}{\text{এক সমকোণ}} = \frac{2}{\pi}$

$\therefore$ এক রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi} \times$ এক সমকোণ

যেহেতু, π একটি ধ্রুব সংখ্যা,এবং সমকোণ উভয়ই ধ্রুবক, সুতরাং রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।

উপপাদ্য: বৃত্তের যেকোনো চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান।

প্রমাণ: মনে করুন,PQR একটি নির্দিষ্ট কোণ ।O কে কেন্দ্র করে এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন । মনে করুন, বৃত্তটি OP এবং OQকে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। এখন বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি বৃত্তচাপAC নিন।তাহলে , চাপ AC= ব্যাসার্ধ, OA = r এবং $\angle AOC$=1রেডিয়ান।আমরা জানি, একটি বৃত্তচাপ দ্বারা সৃষ্ট কেন্দ্রস্থকোণ বৃত্তচাপটির সমানুপাতিক।



সুতরাং, $\frac{\angle AOB}{\text{চাপ AB}} = \frac{\angle AOC}{\text{চাপ AC}}$

বা, $\frac{\angle AOB}{\angle AOC} = \frac{\text{চাপ AB}}{\text{চাপ AC}}$

বা, $\frac{\angle AOB}{1\text{রেডিয়ান}} = \frac{\text{চাপ AB}}{r}$

বা, $\angle AOB = \frac{\text{চাপ AB}}{r} \times 1$ রেডিয়ান

বা, $\angle AOB = \frac{s}{r}$ রেডিয়ান,[যেখানে, চাপ $AB = s$]

$\angle$AOBএর বৃত্তীয় পরিমাপ θ রেডিয়ান হলে তাকে $\angle AOB = \theta$ রেডিয়ান বা $\angle AOB = \theta^C$ আকারে লেখা যায়।

তাহলে নির্দিষ্ট কোণ, $\angle AOB = \frac{s}{r}$ রেডিয়ানঅর্থাৎ, $\theta = \frac{s}{r}$ ।

উদাহরণ1: $73°7'30''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধান: $30'' = \frac{30'}{60} = \frac{1'}{2}$

$\therefore 7'30'' = 7\frac{1'}{2} = \frac{15'}{2} = \frac{15°}{2 \times 60} = \frac{1°}{8}$

অতএব, $73^\circ 7' 30'' = 73\frac{1^\circ}{8} = \frac{585^\circ}{8} = \frac{585^\circ}{8\times 90}$ সমকোণ $= \frac{\pi}{2}\times\frac{585^\circ}{8\times 90}$ রেডিয়ান $= \frac{13\pi}{32}$ রেডিয়ান

উদাহরণ2: একটি ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $x^\circ, 25^\circ$ এবং $\frac{13\pi}{36}$ হলে x এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $\frac{13\pi}{36} = \frac{13\times 180^\circ}{36} = 65^\circ$

আবার, $x^\circ + 25^\circ + \frac{13\pi}{36} = 180^\circ$ বা, $x^\circ + 25^\circ + 65^\circ = 180^\circ$

বা, $x^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ বা, $x^\circ = 180^\circ - 90^\circ$ বা, $x^\circ = 90^\circ$

অতএব, $x = 90^\circ$

উদাহরণ 3: $15^g 25' 13''$ কে ষাটমূলক পদ্ধতিতে প্রকাশ করুন।

সমাধান: $15^g 25' 13'' = 15^g + 0.25^g + 0.0013^g = 15.2513^g$

$= 0.152513$ সমকোণ $= 90\times 0.152513^\circ = 13.72617^\circ = 13^\circ(60\times 0.72617)'$

$= 13^\circ 43.5702' = 13^\circ 43'(60\times 0.5702)'' = 13^\circ 43' 34.2''$

উদাহরণ 4: একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর প্রগমন শ্রেণীভুক্ত। এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ দুইটিকে যথাক্রমে রেডিয়ান ও ডিগ্রিতে প্রকাশ করলে এদের অনুপাত হয় $3\pi : 180^\circ$ কোণগুলির পরিমাপকে রেডিয়ানে প্রকাশ করুন।

সমাধান: মনে করুন, কোণগুলি হলো $(\alpha-\beta)^c, \alpha^c, (\alpha+\beta)^c$

$\because$ ত্রিভুজের কোণগুলির সমষ্টি $= 2$ সমকোণ $= \pi^c$

সুতরাং, $\alpha - \beta + \alpha + \alpha + \beta = \pi$

বা, $3\alpha = \pi \therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$

আবার, ক্ষুদ্রতম কোণ $(\alpha-\beta)^c = (\alpha-\beta)\times\frac{180^\circ}{\pi}$

এখন শর্তানুসারে, $(\alpha+\beta) : (\alpha-\beta)\times\frac{180^\circ}{\pi} = 3\pi : 180$

বা, $\frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)\times\frac{180^\circ}{\pi}} = \frac{3\pi}{180}$ বা, $\frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta)} = 3\pi$

বা, $\alpha+\beta = 3(\alpha-\beta)$ বা, $\beta + 3\beta = 3\alpha - \alpha$

বা, $4\beta = 2\alpha$ বা, $\beta = \frac{\alpha}{2}$

$\therefore \beta = \frac{\pi}{3\times 2} = \frac{\pi}{6}$, [$\alpha = \frac{\pi}{3}$ বসিয়ে]

অতএব, কোণগুলি $(\alpha-\beta)^c, \alpha^c, (\alpha+\beta)^c$ বা, $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)^c, \frac{\pi}{3}^c, \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)^c$ বা, $\frac{\pi}{6}^c, \frac{\pi}{3}^c, \frac{\pi}{2}^c$

উদাহরণ 5: যদি একটি বৃত্তচাপ 35 ফুট দীর্ঘ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে কোণ উৎপন্ন করে, 50^g তাহলে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য $= l$ ফুট

এখন $l = r\theta$, $r =$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং $\theta =$ রেডিয়ান কোণ।

এখন, $50^g = \frac{50\times\pi^c}{200} = \frac{\pi^c}{4}$

$\therefore$ বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= 35\times\frac{\pi^c}{4}$ ফুট $= 35\times\frac{3.14159}{4}$ ফুট $= 27.49$ ফুট (প্রায়)

উদাহরণ 6: চাঁদের ব্যাস দর্শকের চোখের সাথে $30'$ কোণ তৈরি করে এবং সূর্যের সাথে করে $32'$ । যদি সূর্য চাঁদের থেকে 675 গুণ দূরে অবস্থিত হয়, তাহলে তাদের ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন চাঁদের ক্ষেত্রে, ব্যাস d_1 ও দূরত্ব l_1 এবং সূর্যের ক্ষেত্রে, ব্যাস d_2 ও দূরত্ব l_2

এখন, $30' = \frac{30}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{\pi^c}{180}$ এবং $32' = \frac{32}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{2\pi^c}{675}$

সুতরাং আমরা পাই, $\frac{\pi}{180} = \frac{d_1}{l_1}$ এবং $\frac{2\pi}{675} = \frac{d_2}{l_2}$

কিন্তু দেওয়া আছে, $\dfrac{\frac{\pi}{180}}{\frac{2\pi}{675}} = \dfrac{\frac{d_1}{l_1}}{\frac{d_2}{l_2}}$ বা, $\frac{\pi}{360} \times \frac{675}{2\pi} = \frac{d_1}{l_1} \times \frac{d_2}{l_2}$

বা, $\frac{675}{720} = \frac{d_1}{l_1} \times \frac{675 l_1}{d_2} \frac{d_2}{l_2}$ [শর্তানুসারে]বা, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{675}{675 \times 720}$ বা, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{720}$

সুতরাং, চাঁদ ও সূর্যের ব্যাসের অনুপাত হল 1ঃ 720।

সারসংক্ষেপ

- একটি রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমান আবর্তিত হয় তাকে রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট ত্রিকোণমিতিক কোণ বলা হয়।
- ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের ষাটমূলক ,শতমূলক ও বৃত্তীয়মূলক এককের মধ্যে সম্পর্ক : $\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{\theta}{\pi}$
- যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও তার ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক ।
- রেডিয়ান একটি ধ্রুব কোণ।
- বৃত্তের যেকোনো চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান।
- রেডিয়ান পরিমাপে বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= \pi\theta$ ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} r^2 \theta$ বর্গ একক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.১

1. ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমান কিরূপ?

   ক) শুধু ধনাত্মক খ) শুধু ঋণাত্মক গ) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক ঘ) কোনোটিই নয়

2. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ্য করুন ঃ

   (i)একটি স্থির রশ্মি অপর একটি স্থির রশ্মির প্রেক্ষিতে ঘুরে নির্দিষ্ট অবস্থানে আসতে যে পরিমান আবর্তিত হয় তা রশ্মি দ্বারা সৃষ্ট ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ।

   (ii) ত্রিকোণমিতিক কোণের পরিমাপ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে।

   (iii) ত্রিকোণমিতিক কোণ পরিমাপের পদ্ধতিগুলো হল ষাটমূলক পদ্ধতি, শতমূলক পদ্ধতি ও বৃত্তীয় পদ্ধতি।

   উপরের তথ্যের আলোকে কোনটি সঠিক?

   ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

3. $\frac{3\pi}{180}$ রেডিয়ানের ষাটমূলক মান কত?

   ক)30° খ)130° গ)3° ঘ) 180°

4. একটি বৃত্তের ব্যাস 7 সেন্টিমিটার হলে বৃত্তটির পরিধি কত? যেখানে $\pi = \frac{22}{7}$

   ক) 22 সেন্টিমিটার খ) 7 সেন্টিমিটার গ) $\frac{22}{7}$ সেন্টিমিটার ঘ) $\frac{7}{22}$ সেন্টিমিটার

5. 11ফুট উচু একটি খুঁটি কতদূরে $17''$ কোণ উৎপন্ন করবে যেখানে $\pi = \frac{22}{7}$?

ক) 26.04 মাইল খ) 2640 মাইল গ) 25.27 মাইল ঘ) 25.72মাইল

6. কোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 1ঃ 2ঃ 3বৃহত্তর কোণের পরিমান কোনটি?

ক) $\frac{2\pi}{3}$ খ) $\frac{\pi}{2}$ গ) $\frac{5\pi}{6}$ ঘ) $\frac{\pi}{3}$

7. প্রমাণ করুন, রেডিয়ান একটি ধ্রুবকোণ।

8.প্রমাণ করুন, যে কোনো বৃত্তের পরিধি তার ব্যাসের সমানুপাতিক।

9. প্রমাণ করুন, বৃত্তের যেকোনো চাপ ও তার ব্যাসার্ধের অনুপাত বৃত্তের কেন্দ্রে সেই চাপ দ্বারা উৎপন্ন কোণের সমান।

10.রেডিয়ানে প্রকাশ করুন $50^\circ 37' 30''$

11. ষাটমূলক এককে প্রকাশ করুন $\frac{25\pi}{3}$ ।

12. একটি গাড়ীর চাকা 200 বার আবর্তন করে 800 গজ অতিক্রম করে। গাড়ীর চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

13. কোনো চতুর্ভুজের একটি কোণ আর একটি কেণের $\frac{3}{8}$ এবং অন্য দুইটি কোণ যথাক্রমে 60° ও $\frac{3\pi}{4}$ রেডিয়ান। কোণগুলি ডিগ্রিতে নির্ণয় করুন।

14.একটি স্তম্ভের উচ্চতা 100 ফুট এবং তা একজন পর্যবেক্ষকের চোখের অবস্থানে $9'$ কোণ উৎপন্ন করে। স্তম্ভের গোড়া হতে পর্যবেক্ষকের দূরত্ব নির্ণয় করুন।

পাঠ ৭.২ ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত ও অনুপাতসমূহের মধ্যে সম্পর্ক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

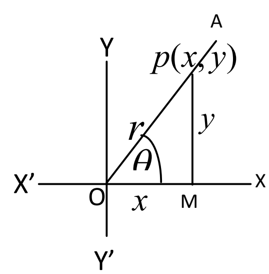
এই পাঠ শেষে আপনি-

- সূক্ষকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে লিখতে পারবেন,
- যে কোন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন সঠিক ভাবে ব্যবহার করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত,

মূলপাঠ

সূক্ষকোণেরত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঃ



মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান রেখা OXঅবস্থান হতে শুরু করে OA অবস্থানে আসতে যে কোণ উৎপন্ন করে তা θদ্বারা নির্দেশ করা হল। এখন OA এর উপরে যে কোন বিন্দু P হতে OX এর উপর PM লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে ΔPOM সমকাণীত্রিভুজ এই ত্রিভুজের অতিভুজ হচ্ছে OPবাহু $= r$,লম্ব হচ্ছেPMবাহু $= y$ এবং ভূমি হচ্ছে OM বাহু $= x$ । OP বাহুকেr দ্বারা সূচিতকরলে $\sqrt{x^2 + y^2}$ এখন ত্রিভুজের বাহুগুলি দ্বারা গঠিত অনুপাতসমূহ হল:

$\frac{PM}{OP}, \frac{OM}{OP}, \frac{PM}{OM}, \frac{OP}{PM}, \frac{OP}{OM}$ এবং $\frac{OM}{PM}$

এখন, θ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহকে নিম্নলিখিত ভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

θ কোণের সাইন (sine) অনুপাত বা $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, (সংক্ষেপে $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{x}{r}$)

θ কোণের সাইন (cosine) অনুপাত বা cosine $\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{ভুমি}}{\text{অতিভুজ}}$, (সংক্ষেপে $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r}$)

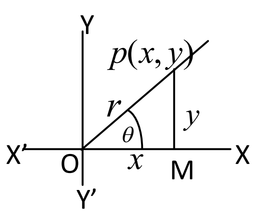
θ কোণের টেনজেন্ট (tangent) অনুপাত বা tangent $\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভুমি}}$, (সংক্ষেপে $\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{y}{x}$)

θ কোণের কোসেকেন্ট (cosecent) অনুপাত বা cosecent $\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভুমি}}$, (সংক্ষেপে $\text{cosec}\,\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{r}{x}$)

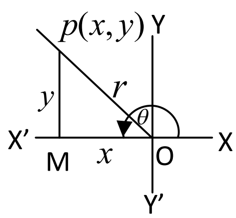
θ কোণের সেকেন্ট (secant) অনুপাত বা secant $\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$, (সংক্ষেপে $\sec\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{r}{x}$)

θ কোণের কোটেনজেন্ট (cotangent) অনুপাত বা cotangent $\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{\text{ভুমি}}{\text{লম্ব}}$, (সংক্ষেপে $\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{x}{y}$)

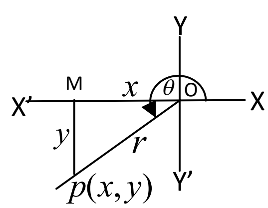
যে কোনো কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:



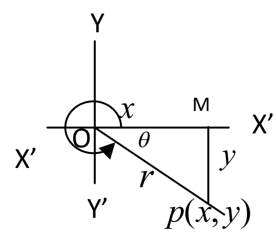
১ম চিত্র



২য় চিত্র



৩য় চিত্র



৪র্থ চিত্র

মনে করুন XOX' এবং YOY' দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করে। O কে মূলবিন্দু ধরলে রেখা দুইটি যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ হবে। এখন ধরুন একটি ঘূণায়মান রেখা আদি অবস্থান OX হতে ঘূর্ণন শুরু করে অবস্থানে এসে শেষ হয় এবং $\angle XOP = \theta$ কোণটি উৎপন্ন করে। সুতরাং P বিন্দুর অবস্থান XOY, YOX', $X'OY'$ অথবা $Y'OX$ এই চারটি চর্তুভাগের যে কোন একটি হতে পারে। এখন P বিন্দু হতে XOX' সরলরেখার উপর PM লম্ব আঁকুন। মূলবিন্দু O হতে P বিন্দুর দূরত্ব OP কে বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলা হয়। P বিন্দুর স্থানাংক (x,y) এবং ব্যাসার্ধ ভেক্টর r হলে কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হয় :

$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{P বিন্দুর y- স্থানাংক}}{\text{P বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = \frac{y}{r}$

$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{P বিন্দুর x- স্থানাংক}}{\text{P বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}} = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{P বিন্দুর y- স্থানাংক}}{\text{P বিন্দুর x- স্থানাংক}} = \frac{y}{x}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{\text{P বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}}{\text{P বিন্দুর y- স্থানাংক}} = \frac{r}{y}$

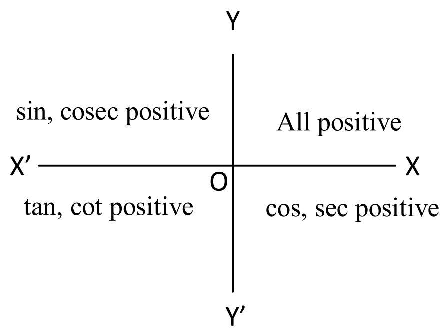
$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{P বিন্দুর ব্যাসার্ধ ভেক্টর}}{\text{P বিন্দুর x- স্থানাংক}} = \frac{r}{x}$

$\cot\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{\text{P বিন্দুর x- স্থানাংক}}{\text{P বিন্দুর y- স্থানাংক}} = \frac{x}{y}$

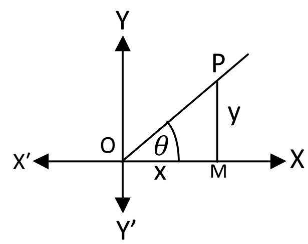
উপরের আলোচনায় θ কে অক্ষীয় কোণ ও Pবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয়নি। $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$ ইত্যাদি কোণকে অক্ষীয় কোণ বলা হয়। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয়ের সময় p বিন্দুর বিভিন্ন চর্তুভাগের অবস্থানের জন্যx ও yএর যথাযথ চিহ্ন অবশ্যই বিবেচনা করতে হবে।

শিক্ষার্থীর কাজ	যদি $\sin A = \frac{12}{13}$ হয় তবে $\tan A$ এর মান নির্ণয় করুন।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন:



ব্যাসার্ধ ভেক্টরOP $(= r)$সর্বদা ধনাত্মক, সুতরাং θকোণেরবিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর চিহ্ন x ও yএর চিহ্ন অর্থাৎ বাহুর পরিমাপের উপর নির্ভর করবে। এখন একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা আদি অবস্থান OXহতে শুরু করে যে কোনো পরিমাপের কোণ উৎপন্ন করার পর তা চারটিকোয়াড্রেন্টের যেকোনো একটিতে অবস্থান করবে। যদি ঘূর্ণায়মানসরলরেখারশেষ অবস্থান অর্থাৎ ব্যাসার্ধ ভেক্টর প্রথম কোয়াড্রেন্টেথাকেতাহলে POMত্রিভুজের PM, OMএবং OP বাহুর প্রত্যেকটির পরিমানধনাত্মক হবে। সুতরাং প্রথম চর্তুভাগে/ কোয়াড্রেন্টেসমস্ত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোরমান ধনাত্মক হবে।দ্বিতীয় চর্তুভাগে OM ঋণাত্মক OP এবংPMধনাত্মক।

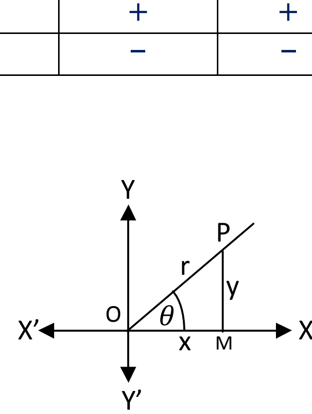


সেক্ষেত্রে sin ও cosec ধনাত্মক হবে। তৃতীয় চর্তুভাগে OM ও PMঋণাত্মক OP ধনাত্মক। সেক্ষেত্রেtanও cotধনাত্মক হবে। চতুর্থ চর্তুভাগে PMঋণাত্মক OM এবং OPধনাত্মক। সেক্ষেত্রেcos ওsecধনাত্মক হবে।

নিম্নে একটি ছকের মাধ্যমে অনুপাতগুলোর চিহ্ন দেখানো হল–

চতুর্ভাগ	X	Y	R	$\sin\theta = \frac{x}{y}$	$\cos ec\theta = \frac{y}{x}$	$\cos\theta = \frac{x}{r}$	$\sec\theta = \frac{r}{x}$	$\tan\theta = \frac{x}{y}$	$\cot\theta = \frac{y}{x}$
প্রথম	+	+	+	+	+	+	+	+	+
দ্বিতীয়	−	+	+	+	+	−	−	−	−
তৃতীয়	−	−	+	−	−	−	−	+	+
চতুর্ভাগ	+	−	+	−	−	+	+	−	−

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলির পারস্পারিক সম্পর্ক ঃ



a. $\because \sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}$ এবং $\text{cosec}\,\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{y}{r}$

$$\therefore \cos ec\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{1}{\frac{PM}{OP}} = \frac{1}{\sin\theta}$$

অনুরূপভাবে, $\sin\theta = \frac{1}{\cos ec\theta}$

বিপরীতক্রমে, $\cos ec\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

এবং $\sin\theta\cos ec\theta = 1$

b. $\because \cos\theta = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{x}{r}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{r}{x}$

$$\therefore \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{\frac{OM}{OP}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

অনুরূপভাবে, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

বিপরীতক্রমে, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

এবং $\cos\theta\sec\theta = 1$

c. $\because \tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{y}{x}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{x}{y}$

$$\therefore \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{1}{\frac{PM}{OM}} = \frac{1}{\tan\theta}$$

অনুরূপভাবে, $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

বিপরীতক্রমে, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ এবং $\cot\theta\tan\theta = 1$

d. $\because \sin\theta = \dfrac{PM}{OP}, \cos\theta = \dfrac{OM}{OP}, \tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM}$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ এবং $\therefore \cot\theta = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{OM/OP}{PM/OP} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

e. ΔPOM হতে, $x^2 + y^2 = r^2$

$\dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1$ [r^2 দিয়ে ভাগ করে পাই]

বা, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

f. ΔPOM একটি সমকোণী ত্রিভুজ বলে, $x^2 + y^2 = r^2$

$\dfrac{x^2}{y^2} + 1 = \dfrac{r^2}{y^2}$, [y^2 দিয়ে ভাগ করে পাই]

বা, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

g. আবার x^2 দ্বারা ভাগ করে

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

বা, $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

উদাহরণ 1: $\sin\theta$ অনুপাতকে $\cot\theta$ অনুপাতে প্রকাশ করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $sin\theta = \dfrac{1}{cosec\theta}$ এবং $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

বা, $sin\theta = \dfrac{1}{cosec\theta} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta}} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}}$

উদাহরণ 2: প্রমাণ করুন $\dfrac{1}{\cot A + \tan A} = \sin A\cos A$

সমধান: $\dfrac{1}{\cot A + \tan A} = \dfrac{1}{\dfrac{\cos A}{\sin A} + \dfrac{\sin A}{\cos A}} = \dfrac{1}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A\cos A}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sin A\cos A}} = \sin A\cos A =$ ডানপক্ষ

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{sonA-\sin B}=0$

সমাধান: $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{sonA-\sin B}$

$$=\frac{(\sin A-\sin B)(\sin A+\sin B)+(\cos A-\cos B)(\cos A+\cos B)}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$$

$$=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B+\cos^2 A-\cos^2 B}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}=\frac{\sin^2 A-\sin^2 B+1-\sin^2 A-1+\sin^2 B}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}$$

$$=\frac{1-1}{(\cos A+\cos B)(\sin A+\sin B)}=0$$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন ঃ $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}-\sec\theta=\sec\theta-\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

সমাধান: বাম পক্ষ = $\sqrt{\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}-\sec\theta=\sqrt{\dfrac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}}-\sec\theta$

$$=\sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin^2\theta)}}-\frac{1}{\cos\theta}=\sqrt{\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta-1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1-(1-\sin\theta)}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}=\frac{1}{\cos\theta}-\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{1}{\cos\theta}-\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}=\sec\theta-\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$$

উদাহরণ 5: যদি $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ হয় তবে $\dfrac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয়

সমাধান: $\dfrac{a\sin\theta-b\cos\theta}{a\sin\theta+b\cos\theta}=\dfrac{a\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-b\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}}{a\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+b\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{a\tan\theta-b}{a\tan\theta+b}$

$=\dfrac{a\dfrac{a}{b}-b}{a\dfrac{a}{b}+b}$, [$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ বসিয়ে পাই]

$$=\frac{\dfrac{a^2-b^2}{b}}{\dfrac{a^2+b^2}{b}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

উদাহরণ 6: $\cos ecA+\cos ecB+\cos ecC=0$ হলে দেখান যে, $(\sum\sin A)^2=\sum\sin^2 A$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$\cos ecA+\cos ecB+\cos ecC=0$

বা, $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}=0$

বা, $\dfrac{\sin B\sin C+\sin A\sin C+\sin A\sin B}{\sin A\sin B\sin C}=0$

বা, $\sin B\sin C+\sin A\sin C+\sin A\sin B=0$

বা, $2(\sin B\sin C+\sin A\sin C+\sin A\sin B)=0$, [উভয় পক্ষে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(\sin A+\sin B+\sin C)^2-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)=0$

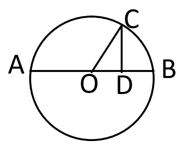
বা, $(\sum\sin A)^2-\sum\sin^2 A=0$

$\therefore (\sum \sin A)^2 = \sum \sin^2 A$ (প্রমাণিত)।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.২

1. যদি $\cos\theta = \frac{12}{13}$ হয়, তবে $\tan\theta$ মান কত?

ক) $\pm\frac{12}{15}$ খ) $\pm\frac{5}{12}$ গ) $\pm\frac{15}{12}$ ঘ) $\pm\frac{13}{12}$



O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABCএকটি বৃত্তে ব্যাস $AB=28$ সেন্টিমিটার, BC চাপ $=14$ সেন্টিমিটার এবং $\angle BOD=\theta$ হলে উপরের তথ্যের আলোকে (2 – 4) নং প্রশ্নের উত্তর দিন –

2. ABC বৃত্তের পরিধি কত সেন্টিমিটার?

ক) 66 খ) 22 গ)88 ঘ) 44

3. $\angle BOD=\theta$ হলে $\theta=$কত ?

ক) 1^c খ) 2^c গ) 10^c ঘ) 20^c

4. $\theta=30°$ এবং $DC=7$ সেন্টিমিটার হলে $\sin 30° =$ কত ?

ক) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ গ) 1 ঘ) $\frac{1}{2}$

$5(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$ এর মান নির্ণয় করুন।

(6 – 14) নংঅভেদগুলি প্রমাণ করুনঃ

6. $\frac{sinA}{1+cosA}+\frac{1+cosA}{sinA}=2cosecA$
7. $cosec^6\theta+cot^6\theta=1+3cosec^2\theta cot^2\theta$
8. $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$
9. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$
10. $\frac{\sin A-\cos A+1}{\sin A+\cos A-1}=\frac{1+\sin A}{\cos A}$
11. $\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$
12. $\frac{\sin A-2\sin^3 A}{2\cos^3 A-\cos A}=\tan A$
13. $(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$
14. $(\tan\theta+\cot\theta+\sec\theta)(\tan\theta+\cot\theta-\sec\theta)=\cos ec^2\theta$
15. যদি $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ হয় তবে দেখান যে $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$
16. যদি $\sin\theta=\frac{21}{29}$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $\sec\theta+\tan\theta=2\frac{1}{2}$, যখন প্রথম চর্তুভাগে অবস্থিত
17. $5\tan A=4$হলে, $\frac{5\sin A-3\cos A}{\sin A+2\cos A}$ এর মান নির্ণয় করুন

18. $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হলে $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ এর মান নির্ণয় করুন

19. যদি $a^2\sec^2\theta - b^2\tan^2\theta = c^2$ হয় তবে দেখান যে $\operatorname{cosec}^2\theta = \pm\sqrt{\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}}$

পাঠ কয়েকটি নির্ধারিত কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপতের মান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

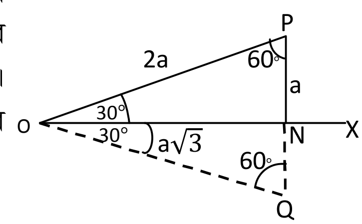
- নির্ধারিত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমুহের মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমস্যা সমাধানে অনুপাতসমুহের মান প্রয়োগ করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমুহের সীমাবদ্ধতা লিখতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধ্রুবতা লিখতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতিক অনুপাত,

মূলপাঠ

কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করুন, একটি ঘূর্ণায়মান সরলরেখা আদি অবস্থান OXহতে আরম্ভ করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীতক্রমে আবর্তিত হয়ে$\angle OXP = 30^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে। OX এর উপর PN লম্ব অঙ্কন করে তাকে Q পর্যন্ত এমনভাবেবর্ধিত করুন যেন $PN = NQ$ হয়। এখন OQ যোগ হয়।যেহেতু, OPNএবং OQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান অতএব $\angle OPN = \angle OQN = 60^\circ$,সুতরাং, OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



$\therefore OP = PQ = 2PN \quad [\because PN = NQ]$

ধরুন $PN = a$

তাহলে $OP = 2a$ এবং $ON = \sqrt{OP^2 - PN^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

$$\therefore \sin 30^\circ = \frac{PN}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{ON}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PN}{ON} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

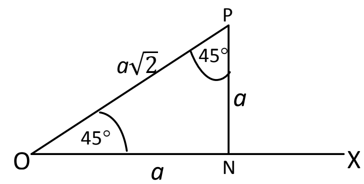
$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{OP}{PN} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\sec 30^\circ = \frac{OP}{ON} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

এবং $\cot 30^\circ = \dfrac{ON}{PN} = \dfrac{2a}{a} = 2$

45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করুন, $\angle OXP = 45^\circ$ এবং OX এর উপর PN লম্ব। অতএব, $\angle PON = 45^\circ$। যেহেতু, OPN সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle OPN = 45^\circ$, সুতরাং, $PN = ON$, মনে করুন $PN = a$ তাহলে $ON = a$ এবং $OP = \sqrt{PN^2 + OP^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$



$\therefore \sin 45^\circ = \dfrac{PN}{OP} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos 45^\circ = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

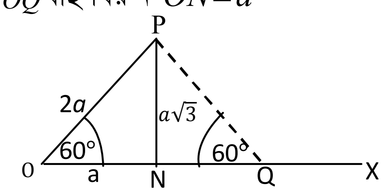
$\tan 45^\circ = \dfrac{PN}{ON} = \dfrac{a}{a} = 1$ $\operatorname{cosec} 45^\circ = \dfrac{OP}{PN} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\sec 45^\circ = \dfrac{OP}{ON} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$ এবং $\cot 45^\circ = \dfrac{ON}{PN} = \dfrac{a}{a} = 1$

60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করুন, $\angle OXP = 60^\circ$ এবং OX এর উপর লম্ব PN। তাহলে $\angle PON = 60^\circ$। OX এর উপর এমন একটি বিন্দু Q হল যেন $ON = NQ$ হয়। এখন PQ যোগ করুন। এখন, ΔOPN এবং ΔPQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বতোভাবে সমান বলে $\angle PON = \angle PQN = 60^\circ$, সুতরাং, OPQ একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং OP বাহু = OQ বাহু। ধরুন $ON = a$

তাহলে $OP = OQ = 2ON = 2a$



এবং $PN = \sqrt{OP^2 - ON^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

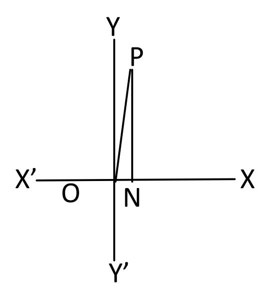
$\therefore \sin 60^\circ = \dfrac{PN}{OP} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^\circ = \dfrac{ON}{OP} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \dfrac{PN}{ON} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$ $\operatorname{cosec} 60^\circ = \dfrac{OP}{PN} = \dfrac{2a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\sec 60^\circ = \dfrac{OP}{ON} = \dfrac{2a}{a} = 2$ এবং $\cot 60^\circ = \dfrac{ON}{PN} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

90° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

মনে করুন, OXP কোনের পরিমান প্রায় 90° এর সমান এবং OX এর উপর PN লম্ব। তাহলে, ON বাহু স্পষ্টতঃ খুবই ছোট। এখন, PON কোণের পরিমান 90° যতই কাছাকাছি হবে ON বাহুর দৈর্ঘ্য ততই ছোট হবে এবং OP ও PN পরস্পর নিকটবর্তী হতে থাকবে। এখন, $\angle OPN = 90^\circ$ কল্পনা করলে $ON = 0$(শূন্য) হবে এবং PN ও OP উভয়ই OY এর উপর সমাপতিত হবে অর্থাৎ $PN = OP$ হবে। অতএব যখন $\angle XOP = 90^\circ$ তখন $\dfrac{PN}{OP} = \dfrac{OP}{OP} = 1$ এবং $\dfrac{ON}{OP} = \dfrac{0}{OP} = 0$



$\therefore$ প্রান্তীয় অবস্থায়, $\sin 90^\circ = \dfrac{PN}{OP} = \dfrac{OP}{OP} = 1$

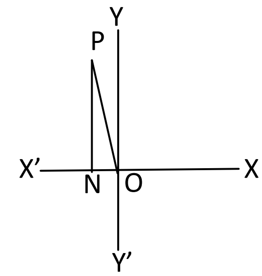
$\cos 90^\circ = \dfrac{ON}{OP} = 0$

$\tan 90^\circ = \dfrac{PN}{ON} = \dfrac{PN}{0} = \infty$

$\operatorname{cosec} 90^\circ = \dfrac{OP}{PN} = \dfrac{OP}{OP} = 1$

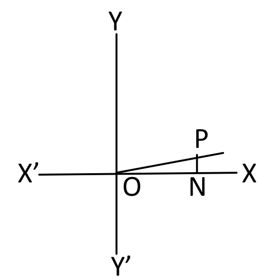
$\sec 90° = \frac{OP}{ON} = \frac{OP}{0} = \infty$

এবং $\cot 90° = \frac{ON}{PN} = \frac{0}{PN} = 0$



উপরে $90°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় করার সময় XOP কোণকে $90°$ অপেক্ষা সামান্য ছোট ধরা হয়েছে।কিন্তু XOP কোণকে $90°$ অপেক্ষা সামান্য বড় ধরে টেনজেন্ট ও সেকেন্ট অনুপাতের প্রান্তীয় মান নির্ণয় করলে তাদের মানের চিহ্ন পরিবর্তিত হয়। সুতরাং, প্রকৃতপক্ষে আমরা পাই,$\tan 90° = \infty$ এবং $\sec 90° = \pm\infty$ কিন্তু অন্যান্য অনুপাতের মানের পরিবর্তন হবে না।

$0°$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতঃ



মনে করুন, OXP কোনের পরিমান খুবই ছোট এবং ধনাত্মক কোণ এবং OXএর উপর PN লম্ব । তাহলে, PN বাহু স্পষ্টতঃ খুবই ছোট ।এখন, $\angle OXP$ ক্ষুদ্র হতে ক্ষুদ্রতর হতে থাকলে PN বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশ ক্ষুদ্র হতে থাকবে। প্রান্তীয় অবস্থায় যখন $\angle OXP = 0°$ হয়, তখন PN বাহু লোপ পায় এবং OP বাহু ON এর উপর সমাপতিত হবে অর্থাৎ $OP = ON$ এবং $PN = 0$ হয়।

$\therefore$ প্রান্তীয় অবস্থায়, $\sin 0° = \frac{PN}{OP} = \frac{0}{OP} = 0$

$\cos 0° = \frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OP} = 1$ $\tan 0° = \frac{PN}{ON} = \frac{0}{ON} = 0$

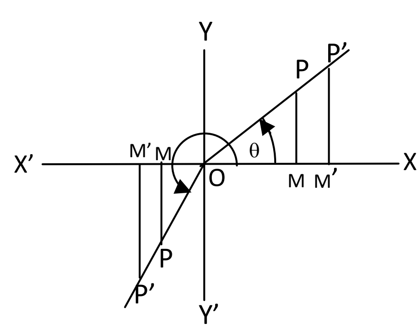
$\cos ec 0° = \frac{OP}{PN} = \frac{OP}{0} = \infty$ $\sec 0° = \frac{OP}{ON} = \frac{OP}{OP} = 1$ এবং $\cot 0° = \frac{ON}{PN} = \frac{ON}{0} = \infty$

$0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ ও $180°$ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নিম্নে ছক আকারে দেয়া হল –

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধ্রুবতা :

একটি নির্দিষ্ট পরিমান কোণের জন্য যে কোনো নির্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান সব সময়ই ধ্রুব হবে।



মনে করুন, $\angle XOP = \theta$ । যে কোন দুটি বিন্দু P ও P' হতে XOX' এর উপর যথাক্রমে PM ও $P'M'$ লম্বদ্বয় অংকন করুন।প্রথম চতুর্ভাগে আঁকা OPM ও $OP'M'$ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী। অতএব

এরা সদৃশ। সুতরাং $\frac{PM}{OP}=\frac{P'M'}{OP'}$ । OPM ত্রিভুজ থেকে,

$\sin\theta=\frac{PM}{OP}$ এবং $OP'M'$ ত্রিভুজ থেকে , $\sin\theta=\frac{P'M'}{OP'}$ ।

$\therefore \sin\theta=\frac{PM}{OP}=\frac{P'M'}{OP'}$

লক্ষণীয় তৃতীয় চতুর্ভাগে PM ও $P'M'$ উভয়ে ঋণাত্মক। দুইটি ত্রিভুজ থেকে $\sin\theta$ এর একই মান পাওয়া যাচ্ছে। সুতরাং যেকোনো ত্রিভুজ হতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করলে তাদের মান ও চিহ্ন একই হবে।

উদাহরণ1: মান নির্ণয় করুন, $\sin 80^\circ\cos 50^\circ-\cos 80^\circ\sin 50^\circ$

সমাধান: $\sin 80^\circ\cos 50^\circ-\cos 80^\circ\sin 50^\circ=\sin(80^\circ-50^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

উদাহরণ2: যদি $A=30^\circ$ এবং $B=60^\circ$ হয় তবে দেখান যে, $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

সমাধান: বামপক্ষ $=\cos(A+B)=\cos(30^\circ+60^\circ)=\cos 90^\circ=0$

ডানপক্ষ $=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 30^\circ\cos 60^\circ-\sin 30^\circ\sin 60^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ3: প্রমাণ করুন $(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)(\cos 60^\circ-\cos 45^\circ)=-\frac{1}{4}$

সমাধান: বামপক্ষ$=(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)(\cos 60^\circ-\cos 45^\circ)$

$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1-2}{4}=-\frac{1}{4}$ = ডানপক্ষ

বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ4:সমাধান করুন $\sec^2\theta=2\tan\theta$, যদি θ ধনাত্মক ও সূক্ষকোণ হয়।

সমাধান: $\sec^2\theta=2\tan\theta$

বা, $1+\tan^2\theta=2\tan\theta$ বা, $\tan^2\theta-2\tan\theta+1=0$

বা, $(\tan\theta-1)^2=0$ বা, $\tan\theta=1$

বা, $\tan\theta=\tan 45^\circ$ বা, $\theta=45^\circ$

উদাহরণ5: যদি $\tan^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}=x\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\tan^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}=x\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\tan$

বা, $\tan^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}=x\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}$

বা, $\tan^2\frac{180^\circ}{4}-\cos^2\frac{180^\circ}{3}=x\sin\frac{180^\circ}{4}\cos\frac{180^\circ}{4}\tan\frac{180^\circ}{3}$

বা, $\tan^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=x\sin 45^\circ\cos 45^\circ\tan 60^\circ$

বা, $(\tan 45^\circ)^2-(\cos 60^\circ)^2=x\sin 45^\circ\cos 45^\circ\tan 60^\circ$

বা, $(1)^2-(\frac{1}{2})^2=x\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{3}$

বা, $1-\frac{1}{4}=x\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $x=\frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

উদাহরণ6: সমাধান করুন $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ যেখানে, $0\le\theta\le 90°$

সমাধান: $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$

বা, $(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sqrt{2})^2$ [উভয় পক্ষে বর্গ করে]

বা, $(\sin\theta)^2+2\sin\theta\cos\theta+(\cos\theta)^2=2$

বা, $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$

বা, $2\sin\theta\cos\theta+1=2$, $[\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

বা, $2\sin\theta\cos\theta=1$, $[\because 2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta]$

বা, $\sin 2\theta=\sin 90°$

বা, $2\theta=90°$

$\therefore \theta=45°$

উদাহরণ7: সমাধান করুন $\sqrt{3}(\tan\theta+\cot\theta)=4$ যখন $0°<\theta<90°$

সমাধান: $\sqrt{3}(\tan\theta+\cot\theta)=4$

বা, $\sqrt{3}\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)=4$

বা, $\sqrt{3}(\tan^2\theta+1)=4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta-4\tan\theta+\sqrt{3}=0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta-3\tan\theta-\tan\theta+\sqrt{3}=0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta-\sqrt{3})-1(\tan\theta-\sqrt{3})=0$

বা, $(\tan\theta-\sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta-1)=0$

হয় $(\tan\theta-\sqrt{3})=0$ না হয় $(\sqrt{3}\tan\theta-1)=0$

$\therefore \tan\theta=\sqrt{3}=\tan 60°$ $\therefore \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30°$

যেহেতু θএর মান $0°$ হতে $90°$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ

$\therefore \theta=30°, 60°$

উদাহরণ8: A, B, C কোণের মান নির্ণয় করুন (A, B, C কোণের প্রত্যেকটির মান ধনাত্মক ও সূক্ষ্ম), যখন

$\sin(B+C-A)=1$, $\cos(C+A-B)=1$, $\tan(A+B-C)=1$.

সমাধান: $\sin(B+C-A)=\sin 90°$

$\therefore B+C-A=90°$ ... ... (i)

$\cos(C+A-B)=\cos 0°$

$\therefore C+A-B=0$ ... ... (ii)

$\tan(A+B-C)=\tan 45°$

$\therefore A+B-C=45°$ ... ... (iii)

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $2C=90°$ $\therefore C=45°$

(ii) ও (iii) যোগ করে পাই, $2C = 45°$, $\therefore A = 22\frac{1}{2}°$

(iii) ও (i) যোগ করে পাই ,$2B = 135°$ $\therefore B = 67\frac{1}{2}°$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৩

মান নির্ণয় করুন $(1-2)$

1. $\sin 45° \sin 60° - \cos 45° \cos 60°$
2. $\tan^2 45° - \operatorname{cosec}^2 30° \cos^3 60°$
3. যদি $A = 30°$ ও $B = 60°$ হয় তবে দেখান যে, $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

প্রমাণ করুন $(4-7)$

4. যদি $\theta = 60°$ হয় তবে, $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
5. যদি $\theta = 45°$ হয় তবে, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
6. যদি $A = 30°$ হয় তবে, $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
7. যদি $\theta = 60°$ এবং $\varphi = 30°$ হয় তবে, $\tan(\theta - \varphi) = \dfrac{\tan\theta - \tan\varphi}{1 - \tan\theta\tan\varphi}$

সমাধান করুন (যদি θ ধনাত্মক ও সূক্ষকোণ হয়) $(8-11)$

8. $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$
9. $\cot^2\theta + 3\operatorname{cosec}\theta - 9 = 0$
10. $3\tan^2\theta - 5\sec\theta + 1 = 0$
11. $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
12. সমাধান করুন $2\cos^2\theta = 3(1-\sin\theta)$, যখন $0° < \theta < 90°$
13. α ও β ধনাত্মক ও সূক্ষকোণ হলে $\sin(2\alpha - \beta) = 1$ এবং $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ সমীকরণ দুটি থেকে α ও β এর মান নির্ণয় করুন ।
14. A, B, C সবগুলো কোণই ধনাত্মক ও সূক্ষকোণ হলে A, B ও C এর মান নির্ণয় করুন। যখন $\cos(B+C-A) = \frac{1}{2}$,$\tan(C+A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $\sec(A+B-C) = \sqrt{2}$

পাঠ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

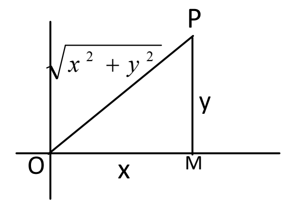
এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমাবদ্ধতা লিখতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়কাল নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিকোণমিতিক ফাংশন, ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ।

মূলপাঠ

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মানের পরিবর্তন:



যখন $\theta = 0, x = 0$ অতএব, $\sin 0 = \frac{0}{y} = 0$, $\cos 0 = \frac{x}{y} = 1$, $\tan 0 = \frac{0}{y} = 0$

$\cot 0 = \frac{y}{0} = \infty$, $\sec 0 = \frac{y}{y} = 1$ এবং $\cos ec 0 = \frac{y}{0} = \infty$ ।

এখন, $[0, 2\pi]$ ব্যবধিতে $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিন ফাংশনের মান নিচের ছকে দেখানো হলো:

θ	sinθ	cosecθ	secθ	tanθ	cotθ
0	0	∞	1	0	∞
$\frac{\pi}{2}$	1	1		∞	0
π	0	∞	−1	0	∞
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-1	∞	∞	0
2π	0	∞	1	0	∞

উপরের ছক হতে পর্যবেক্ষণ করে প্রত্যেক ত্রিকোণমিতি ফাংশনের মানের পরিবর্তন নিম্নোক্তভাবে দেখানো হলে –

i. যখন, $\theta = 0$

$\sin\theta = 0,\ \cos ec\theta = \infty,\ \cos\theta = 1,\ \sec\theta = 1,\ \tan\theta = 0,\ \cot\theta = \infty$

কিন্তু, $\theta \to 0+$ হলে $\cos ec\theta = +\infty$ & $\cot\theta = +\infty$

ii. যখন, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$0 < \sin\theta < 1,$

$1 < cosec\,\theta < +\infty$

$0 < cos\,\theta < 1,$

$1 < \sec\theta < +\infty$ $[\because \theta \to \frac{\pi}{2}$ –হলে$\sec\theta \to +\infty]$

$0 < \tan\theta < +\infty$ $[\because \theta \to \frac{\pi}{2}$ –হলে$\tan\theta \to +\infty]$

$1 < cot\theta < +\infty$

iii. যখন, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = 1,\ \cos ec\theta = 1,\ \cos\theta = 0,\ \sec\theta = \infty,\ \tan\theta = \infty,\ \cot\theta = 1$

iv. যখন, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$0 < \sin\theta < 1$

$1 < \cos ec\theta < +\infty$ $[\because \theta \to \frac{\pi}{2}$ –হলে$\text{cosec}\,\theta \to +\infty]$

$-1 < \cos\theta < 0$

$-\infty < \sec\theta < -1$ $[\because \theta \to \frac{\pi}{2}$ –হলে$\sec\theta \to -\infty]$

$-\infty < \tan\theta < 0$ [$\because \theta \to \frac{\pi}{2}-$ হলে $\tan\theta \to -\infty$]

$-\infty < cot\theta < 0$ [$\because \theta \to \frac{\pi}{2}-$ হলে $\cot\theta \to -\infty$]

v. যখন, $\theta = \pi$

$\sin\theta = 0,\ \ cosec\theta = \infty,\ \ \cos\theta = -1,\ \ \sec\theta = -1,\ \ \tan\theta = 0,\ \ \cot\theta = \infty$

vi. যখন, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$-1 < \sin\theta < 0$

$-\infty < \cos ec\,\theta < -1$ [$\because \theta \to \pi +$ হলে $\operatorname{cosec}\theta \to -\infty$]

$-1 < \cos\theta < 0$

$-\infty < \sec\theta < -1$ [$\because \theta \to \frac{3\pi}{2} -$ হলে $\operatorname{cosec}\theta \to +\infty$]

$0 < \tan\theta < -\alpha$ [$\because \theta \to \frac{3\pi}{2} -$ হলে $\tan\theta \to +\infty$]

$-\alpha < \cot\theta < 0$ [$\because \theta \to \pi +$ হলে $\cot\theta \to -\infty$]

vii. যখন, $\theta = \frac{3\pi}{2}$

$\sin\theta = -1,\ \ cosec\theta = -1,\ \ \cos\theta = 0,\ \ \sec\theta = \infty,\ \ \tan\theta = \infty,\ \ \cot\theta = 0$

viii. যখন, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$-1 < \sin\theta < 0$

$-\infty < \cos ec\,\theta < -1$ [$\because \theta \to 2\pi -$ হলে $\operatorname{cosec}\theta \to -\infty$]

$0 < \cos\theta < 1$

$1 < \sec\theta < +\infty$ [$\because \theta \to \frac{3\pi}{2} -$ হলে $\operatorname{cosec}\theta \to +\infty$]

$-\infty < \tan\theta < 0$ [$\because \theta \to \frac{3\pi}{2} +$ হলে $\tan\theta \to -\infty$]

$-\alpha < \cot\theta < 0$ [$\because \theta \to 2\pi -$ হলে $\cot\theta \to -\infty$]

ix. যখন, $\theta = 2\pi$

$\sin\theta = 0,\ \ cosec\theta = \infty,\ \ \cos\theta = 1,\ \ \sec\theta = 1,\ \ \tan\theta = 0,\ \ \cot\theta = \infty$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সীমাবদ্ধতা

আপনারা জানেন $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ যেহেতু বাস্তব সংখ্যার বর্গ সর্বদা ধনাত্মক , সুতরাং $\sin^2\theta$ এবং $\cos^2\theta$ এর প্রত্যেকটির মান ধনাত্মক। আবার এদের যোগফল 1বলে তাদের কোনোটির মান1অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না। অর্থাৎ $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান+1অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

অর্থাৎ, $(-1 \le \sin\theta \le 1)$ এবং $(-1 \le \cos\theta \le 1)$।

কিন্তু মনে রাখার বিষয়, $\tan\theta$ বা $\cot\theta$ এর মান $+1$ অপেক্ষা বৃহত্তম বা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হতে পারে।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জঃ

আমরা সীমাবদ্ধতা থেকে দেখতে পাই, $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ ফাংশন দুইটির ডোমেন বাস্তব সংখ্যার সেট R এবং রেঞ্জ $[-1,1]$

এখন $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\therefore \cos\theta = 0$ হলে $\tan\theta, \sec\theta$ এর মান ∞ বা অসংজ্ঞায়িত।

আবার, $\cos\theta = 0$ হলে $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, যেখানে $n \in Z$।

অতএব, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in Z$ ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার সেট $\tan\theta$ ও $\sec\theta$ এর ডোমেন।

$\tan\theta$ রেঞ্জ বাস্তব সংখ্যার সেট, কিন্তু $\sec\theta$ এর রেঞ্জ -1 এর চেয়ে বড় এবং 1এর চেয়ে ছোট সংখ্যাগুলো ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার সেট

$\therefore \tan\theta$ এর ডোমেন= $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\ , n \in Z\right\}$ এবং রেঞ্জ R

$\sec\theta$এর ডোমেন= $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\ \ , n \in Z\right\}$এবং রেঞ্জ= $\{x \in R | x \leq -1$অথবা$\geq 1\} = R - (-1,1)$
অনুরূপভাবে,$\sin\theta = 0$হলে$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$এবং$\mathrm{cosec}\theta = 0$এর মান$\infty$ বা অসংজ্ঞায়িত।
আবার,$\sin\theta = 0$হলে$\theta = n\pi\ \ , n \in Z$ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার সেট$\cot\theta$ও$\mathrm{cosec}\theta$এর ডোমেন।$\cot\theta$রেঞ্জ বাস্তব সংখ্যার সেট, কিন্তু$\mathrm{cosec}\theta$এর রেঞ্জ-1এর চেয়ে বড় এবং1এর চেয়ে ছোট সংখ্যাগুলো ব্যতীত সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।
$\therefore \cot\theta$এর ডোমেন= $R - \{n\pi, n \in Z\}$এবং রেঞ্জR।
$\mathrm{cosec}\theta$এর ডোমেন= $R - \{n\pi, n \in Z\}$এবং রেঞ্জ= $\{x \in R | x \leq -1$অথবা$x \geq 1\}$
$= R - (-1,1)$।

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায়(Period of a trigonometric function):
একটি ফাংশন যে নিয়মিত বিরতিতে বা সময়সীমার মধ্যে তার মানের পুনরাবৃত্তি হয় তাকে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের পর্যায় বলা হয়।
আমরা পাই, $\sin x = \sin(2\pi + x) = \sin(4\pi + x) = \sin(6\pi + x) = \cdots$
সুতরাং, $\sin x$একটি পর্যায়ী ফাংশন এবং তার পর্যায়কাল 2π
আবার, $\cos x = \cos(2\pi + x) = \cos(4\pi + x) = \cos(6\pi + x) = \cdots$
এবং$\cos x$ও একটি পর্যায়ী ফাংশন এবং তার পর্যায়কাল2π
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে $cossec\, x$ এবং$sec\, x$ পর্যায়ী ফাংশন, তাদের পর্যায়কাল 2π।
আবার, $tan\, x = tan(\pi + x) = tan(2\pi + x) = tan(3\pi + x) = \cdots$
এবং$cot\, x = cot\,(\pi + x) = cot(2\pi + x) = cot(3\pi + x) = \cdots$
$\therefore tan\, x$ও $\cot x$পর্যায়ী ফাংশন এবং তার পর্যায়কালπ।
উদাহরণ :$y = sinpx$ এবং$y = sin\,(px + q)(p > 0)$, এই দুইটি ফাংশনের পর্যায় নির্ণয় করুন।
সমাধান : গুণগত দিক থেকে $sinx$এর সাথে$sinpx$বা$\sin\,(px + q)$এর কোন মৌলিক পার্থক্য নেই, তা সহজেই বোঝা যায়। যেহেতু$sinpx = \sin(px + 2\pi) = sinp(x + \frac{2\pi}{p})$সেহেতু, $y = sinpx$ ফাংশনটির পর্যায়$\frac{2\pi}{p}$
আবার $f(x) = \sin\,(px + q)$নিলে

$$f(x + \frac{2\pi}{p}) = sin\,[p\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) + q]$$

$$= sin(px + q + 2\pi) = \sin\,(px + q) = f(x)$$

$\therefore x$ এর সকল মানের জন্য খাটে। অতএব এ ক্ষেত্রেও পর্যায়ী ফাংশন$\frac{2\pi}{p}$।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৪

1. নিচের কোনটি মিথ্যা?
   ক) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ খ) $\cos(-\theta) = -\cos\theta$ গ) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ ঘ) $\cot(-\theta) = -\cot\theta$
2. মূলবিন্দুগামী ফাংশন কোনটি?
   ক) $\sec x$ খ)$\cos x$ গ)$\sin x$ঘ) কোনোটিই নয়।
3. $\tan x$ ফাংশনের ডোমেন কোনটি?
   ক) $R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\ \ , n \in Z\right\}$খ) $R - \{n\pi, n \in Z\}$ গ)Rঘ) Z
4. $\sin x$ এর রেঞ্জ কোনটি?
   ক) $[-1,1]$ খ)$(-1,1)$ গ) R ঘ) Z
5. (i) $\sin\theta$ও $\cos\theta$এর মান$+1$ অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

(ii) $\operatorname{cosec}\theta$এর রেঞ্জ -1এর চেয়ে বড় এবং1এর চেয়ে ছোট।

(iii) $\tan\theta$বা $\cot\theta$এর মান $+1$ অপেক্ষা বৃহত্তম বা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতম হতে পারে।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) (i)ও (ii) খ)(ii) ও(iii) গ) (i)ও (iii) ঘ) (i), (ii) ও (iii)

পাঠ ৭.৫ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- $y=\sin x, y=\sin 2x, y=\sin 3x$ ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন,
- $y=\cos x, y=\cos 2x, y=\cos 3x$ ইত্যাদি ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন,
- $y=\tan x$ ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অক্ষ লেখচিত্র

মূলপাঠ

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র(Graph of Trigonomertical Function):

$y=sinx, y=cosx, y=tanx, y=cos^2x$ইত্যাদি ফাংশনের লেখচিত্র সঠিক ভাবে অঙ্কনের কৌশল: $y=sinx, y=cosx$এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য$-270°$হতে$+270°$পর্যন্ত প্রতি $10°$অন্তর xএর বিভিন্নমানেরজন্যyএর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করতে হবে। প্রাপ্ত(x,y)বিন্দুগুলোকে ছক কাগজেএমনভাবে স্থাপন করতে হবে যেনxঅক্ষ বরাবর ছোটবর্গের 1বাহু$=10°$ এবংy অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 10বাহু$=1$হয়। অতঃপর স্থাপিত বিন্দুগুলোকে সংযুক্ত করতে হবে।

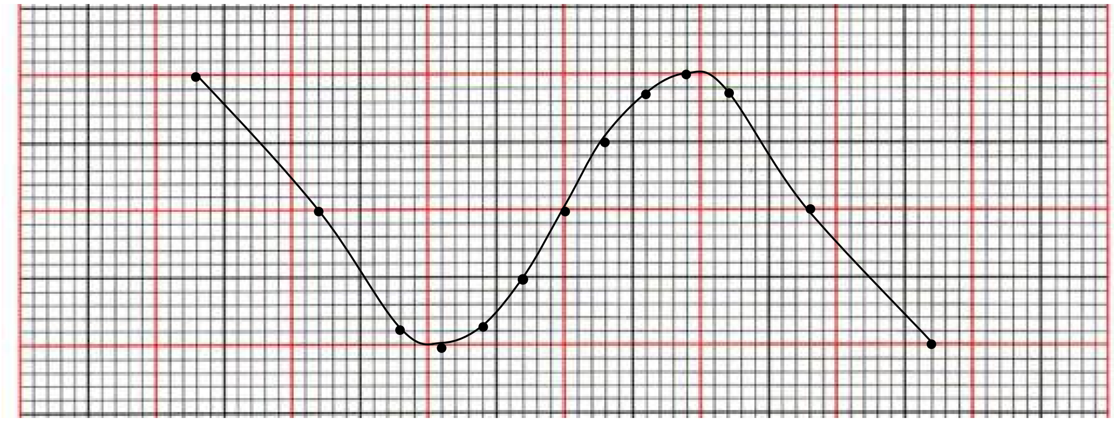
(i) sineফাংশনের লেখচিত্র

মনে করুন, $y=\sin x$

এখানে $x=-180°$ থেকে শুরু করে $x=180°$ পর্যন্ত x এর কয়েকটি মানের জন্য $y=\sin x$ এর আনুসঙ্গিক মান নেয়া হল। এর মানগুলি ছকের মাধ্যমে নিম্নে দেওয়া হল -

x	$-270°$	$-180°$	$-120°$	$-90°$	$-60°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$270°$
$y=sinx$	1	0	-0.87	-1	0.87	-0.5	0	0.5	0.87	1	0.87	0	-1

এখানে, x-অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু$=10°$ এবংy- অক্ষ বরাবর ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু $=0.1$ নেওয়া হয়েছে।



এখন উপরোক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ কাগজে স্থাপন করা হল। বিন্দুগুলি যোগ করলে সাইন লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে, লেখচিত্রটি $x=-270^\circ$ থেকে শুরু করে $x=270^\circ$ পর্যন্ত অঙ্কন করা হয়েছে।

$\sin$ লেখচিত্রের বৈশিষ্ট: উপরের চিত্র হতে পাই-

- লেখচিত্রের কোথাও ছেদ বা Break নেই এবং এর আকার ঢেউয়ের মত।
- লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, $\sin$ অনুপাতের সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান -1 ।
- অনুপাতটির মান সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন পাওয়া যায়, যখন x এর মান 90° এর বিজোড় গুনিতকের সমান হয়।
- $\sin$ অনুপাতের মান মূলবিন্দুতে ও যখন x এর মান 90° এর জোড় গুনিতকের সমান তখন শূন্য হয়।
- যেহেতু $\sin(360^\circ+x)=\sin x$, সুতরাং 0° এবং 360° এর মধ্যে অঙ্কিত লেখচিত্রটি ডানে ও বামে পর্যায়ক্রমে আবির্ভূত হয়।

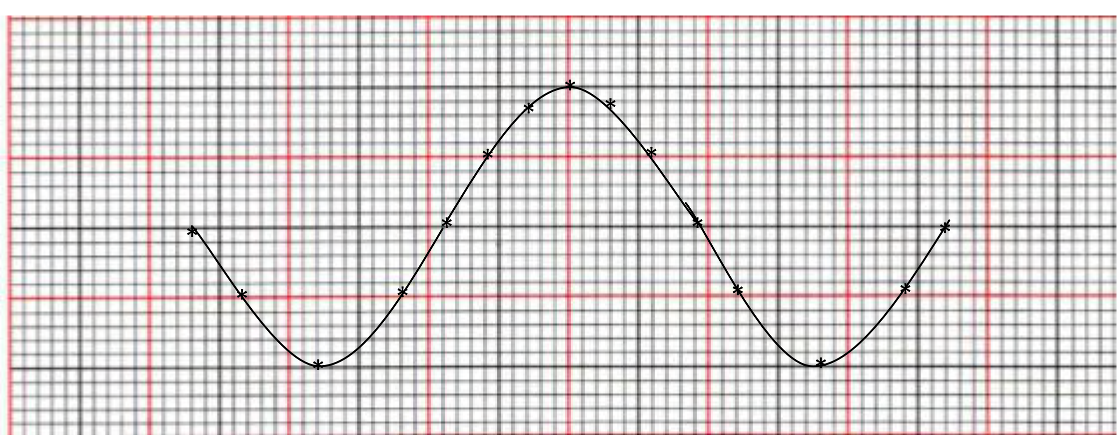
(ii) cosine ফাংশনের লেখচিত্র

মনে করুন, $y=\cos x$

এখানে $x=-180^\circ$ থেকে শুরু করে $x=180^\circ$ পর্যন্ত x এর কয়েকটি মানের জন্য $y=\cos x$ এর আনুসঙ্গিক মান নেয়া হল। এর মান গুলি ছকের মাধ্যমে নিম্নে দেওয়া হল :

x	-270°	-180°	-120°	-90°	-60°	-30°	0	30°	60°	90°	120°	180°	270°
$y=cosx$	0	-1	-0.5	0	0.5	0.87	1	0.87	0.50	0	-0.5	-1	0

এখানে, x- অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10° এবং y- অক্ষের দিকে ছোট বর্গাক্ষেত্রের এক বাহু = 0.1 নেওয়া হয়েছে।এখন উপরোক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ- কাগজে স্থাপন করা হলো। বিন্দুগুলি যোগ করলে কোসাইন লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে, লেখচিত্রটি $x=-270^\circ$ থেকে শুরু করে $x=270^\circ$ পর্যন্ত অঙ্কন করা হয়েছে।



cosine লেখচিত্রের বৈশিষ্ট: উপরের চিত্র হতে পাই-

- যেহেতু, $\sin(90^\circ + x) = \cos x$ বা, $\cos(x - 90^\circ) = \sin x$ সেহেতু, লেখচিত্রটিকে 90° ডানে অথবা 90° বামে সরানো হলে তা সাইন লেখচিত্রের অনুরূপ হবে।
- লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, cosine অনুপাতের সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান -1
- cosine অনুপাতটির মান সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন পাওয়া যায় - মূলবিন্দুতে ও যখন এর মান 180° এর গুনিতকের সমান হয়।
- $y = \cos x$ ফাংশনটিতে xএর পরিবর্তে$-x$ স্থাপন করলে ফাংশনটি অপরিবর্তিত থাকে। ফলে লেখচিত্রটি y-অক্ষের সঙ্গে সাদৃশ্যপূর্ণ (Symmetrical) হবে।

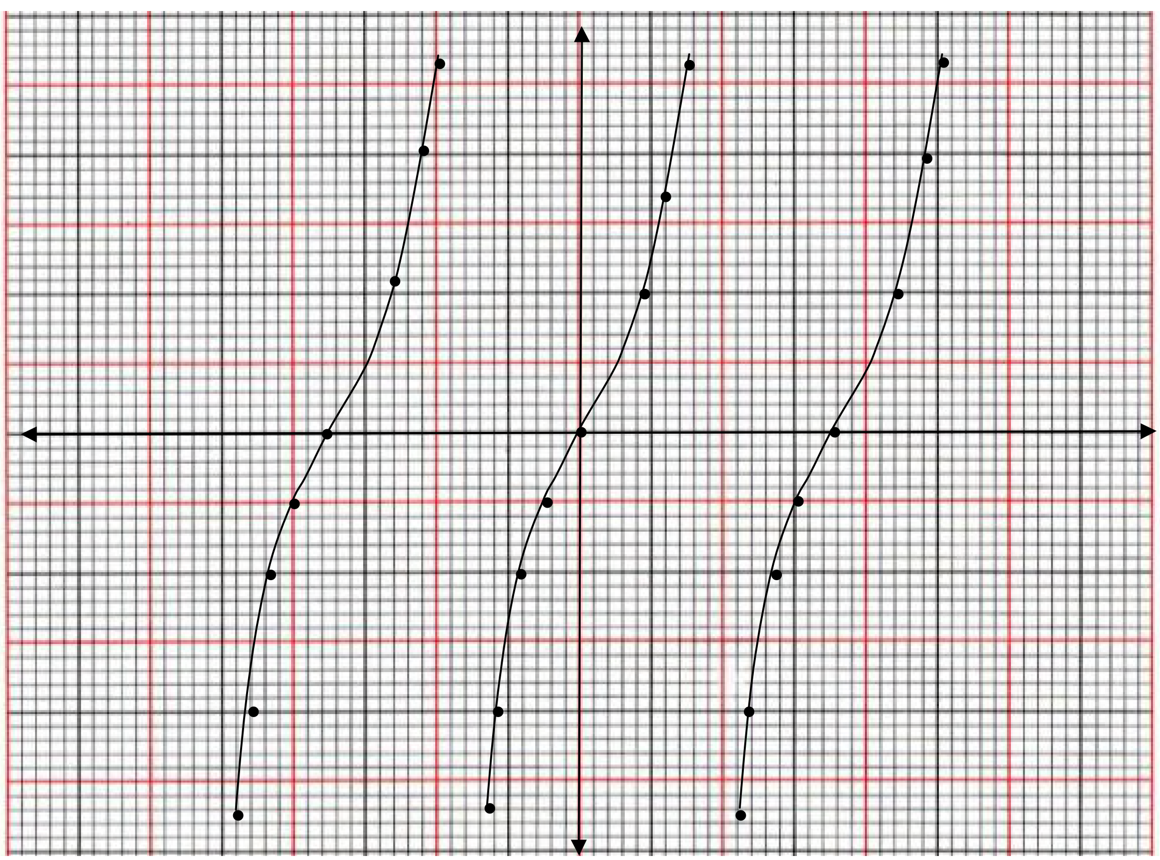
(iii) **tangent**ফাংশনের লেখচিত্র।

মনে করুন, $y = \tan x$

এখানে $x = -180^\circ$ থেকে শুরু করে $x = 360^\circ$ পর্যন্ত xএর কয়েকটি মানের জন্য $y = \tan x$ এর আনুসাঙ্গিক মান নেয়া হল। এর মানগুলি ছকের মাধ্যমে নিম্নে দেওয়া হল –

x	$-270°$	$-180°$	$-120°$	$-90°$	$-60°$	$-30°$	0	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$270°$
$y = tanx$	*unde.*	0	1.73	*unde*	-1.73	$-.58$	0	0.58	1.73	*und.*	-1.73	0	*und.*

এখানে, x- অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10° এবং y- অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 0.1 নেওয়া হয়েছে।এখন উপরোক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ- কাগজে স্থাপন করলে এবং বিন্দুগুলি যোগ করলে টেনজেন্টের লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে, লেখচিত্রটি $x = -120^\circ$ থেকে শুরু করে $x = 260^\circ$ পর্যন্ত অঙ্কন করা হয়েছে।



tangentলেখচিত্রের বৈশিষ্ট: উপরের চিত্র হতে পাই-

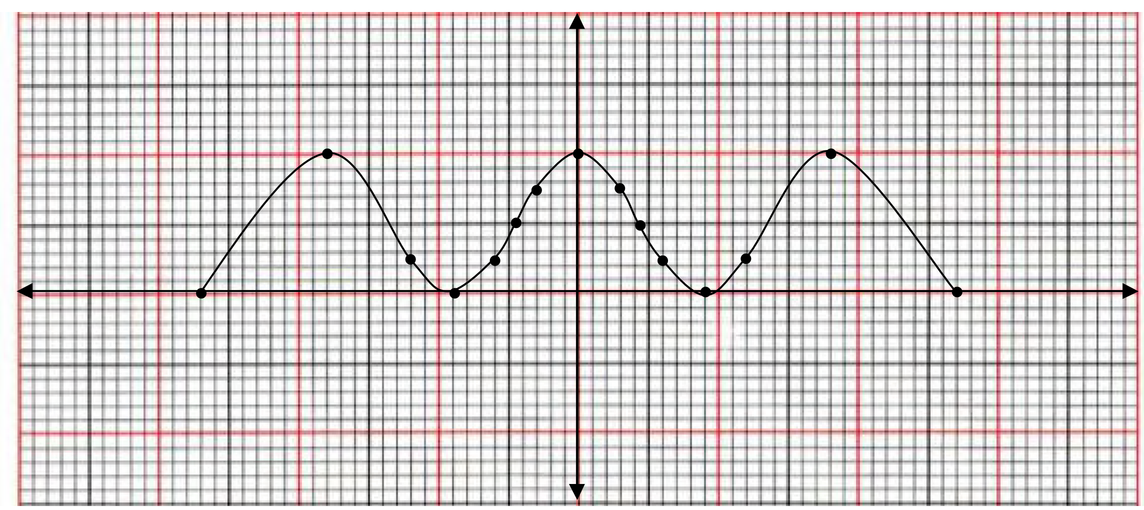
- লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন ও ভিন্ন ভিন্ন শাখায় বিভক্ত।
- যখনই x- এর মান 90° কোণের বিজোড় গুণিতকের সমান হয়, তখনই লেখচিত্রটি বিচ্ছিন্ন হয়ে পরে।
- -90° এবং 90° কোণের মধ্যে যে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়, তা ডানে ও বামে পর্যায়ক্রমে আবির্ভূত হয়।
- 90° এর বিজোড় গুণিতকের সমান কোণের ভুজের বিন্দুগামী y- অক্ষের সমান্তরাল করে যে রেখাগুলি টানা যায় এদের এবং লেখচিত্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব ক্রমশঃ কমতে থাকে, কিন্তু এরা পরস্পরকে স্পর্শ করে না।

(iv)মনে করুন, $y = \cos^2 x$, $-\pi \le x \le \pi$

এখানে $x = -180^\circ$ থেকে শুরু করে $x = 180^\circ$ পর্যন্ত x এর কয়েকটি মানের জন্য $y = \cos^2 x$ এর আনুসঙ্গিক মান নেয়া হল। এর মান গুলি ছকের মাধ্যমে নিম্নে দেওয়া হল–

x	-270°	-180°	-120°	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°
$y = cos^2x$	0	1	0.25	0	0.25	0.5	0.75	1	0.75	0.5	0.50	0	0.25	1	0

এখানে, x- অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10° এবং y- অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 0.1 নেওয়া হয়েছে।এখন উপরোক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ- কাগজে স্থাপন করা হল। বিন্দুগুলি যোগ করলে $y = \cos^2 x$ লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে, লেখচিত্রটি $x = -270^\circ$ থেকে শুরু করে $x = 270^\circ$ পর্যন্ত অঙ্কন করা হয়েছে।



$\cos^2 x$ লেখচিত্রের বৈশিষ্ট: উপরের চিত্র হতে পাই-

- যেহেতু, $\sin(90^\circ + x) = \cos x$ বা, $\cos(x - 90^\circ) = \sin x$ সেহেতু, লেখচিত্রটিকে 90° ডানে অথবা 90° বামে সরানো হলে তা সাইন লেখচিত্রের অনুরূপ হবে।
- লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, $\cos^2 x$ অনুপাতের সর্বোচ্চ মান 1 এবং সর্বনিম্ন মান 0
- $\cos ine$ অনুপাতটির মান সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন পাওয়া যায় - মূলবিন্দুতে ও যখন এর মান 180° এর গুনিতকের সমান হয়।
- $y = \cos x$ ফাংশনটিতে xএর পরিবর্তে$-x$ স্থাপন করলে ফাংশনটি অপরিবর্তিত থাকে। ফলে লেখচিত্রটি y- অক্ষের সঙ্গে সাদৃশ্যপূর্ণ (Symmetrical) হবে।

(v) লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন: $sin2x - sinx = 0$, $0 \le x \le 2\pi$

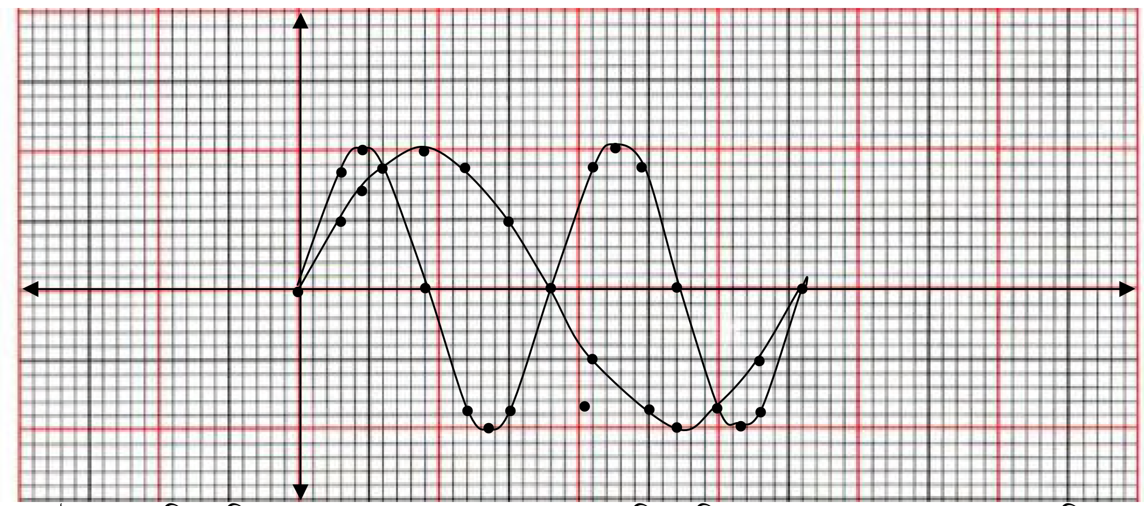
সমাধান: দেওয়া আছে, $sin2x - sinx = 0 \therefore y = sinx, y = sin2x$

মনে করুন, $y = sin2x = sinx \therefore y = sinx, y = sin2x$

নিচের তালিকায়, $x \in [0,2\pi]$এর ভিন্নমানের জন্য $y = sinx$, ও$y = sin2x$এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করে পাওয়া যায়:

x	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	270°	300°	315°	360°
$y = sinx$	0	0.5	0.71	0.87	1	0.87	0.71	0.5	0	−0.5	1	−0.87	−0.71	0
$y = sin2x$	0	0.87	1	0.87	0	−0.87	1	−0.87	0	0.87	0	−0.87	−1	0

এখানে, x- অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10° এবং y- অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 0.1 নেওয়া হয়েছে।



এখন উপরোক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ - কাগজে স্থাপন করলে এবং বিন্দুগুলি যোগ করলে $sinx$ও$sin2x$লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে, লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছেযে, প্রদত্ত ব্যবধিতে ছেদ বিন্দুর ভূজসমূহ$0°, 60°, 180°, 300°$ ও$360°$। সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান$x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$।

(vi) লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন: $2sin^2x - 2cosx = 0, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$

সমাধান : দেওয়া আছে, $2sin^2x - cos2x = 0$

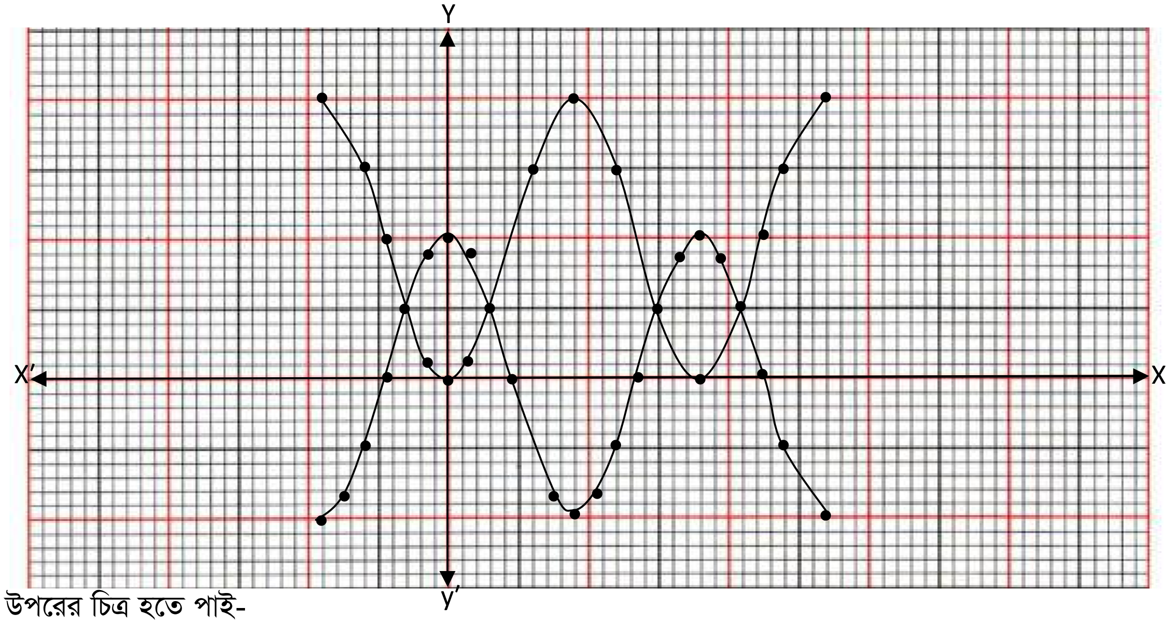
সুতরাং, $2sin^2x = 2cosx$

অর্থাৎ, $y = 2sin^2x = 1 - cos2x$এবং $y = cos2x$

নিচের তালিকায়, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ এর বিভিন্নমানের জন্য $y = 1 - cos2x$ I $y = cos2x$ এর প্রতিরূপী মান নির্ণয় করে পাওয়া যায় :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$
$y = cos2x$	−1	−0.5	0.5	1	0.5	0	-0.5	0.5	0.5	1
$y = 1 - cos2x$	2	1.5	0.5	0	0.5	1	1.5	0.5	0.5	0

এখানে, x - অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 10° এবং y- অক্ষের দিকে ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = 0.1 নেওয়া হয়েছে।



উপরের চিত্র হতে পাই-

এখন উপরোক্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ - কাগজে স্থাপন করলে এবং বিন্দুগুলি যোগ করলে $cos2x$ ও $1 - cos2x$ লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে, লেখচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত ব্যবধিতে ছেদ বিন্দুর ভূজ সমূহ

$-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

সুতরাং, নির্ণেয় সমাধান $x = -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৫

1. নিচের ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করুন:

   (ক) $y = sin3x,$ যখন$0 < x < 2\pi$

   (খ) $y = cos^3x,$ যখন$-\pi < x < \pi$

   (গ)$y = cosec\theta,$ যখন$-\pi < \theta < \pi$

   (ঘ) $y = cot\theta,$যখন$-2\pi < \theta < 2\pi$

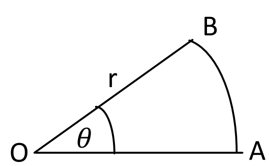
2. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করুন:

   (ক)$5sinx + 2cosx = 5,$ যখন$0 < x < \frac{3\pi}{2}$

   (খ)$cotx + tanx = 2,$যখন$0 < x < \pi$

সৃজনশীল প্রশ্ন:

1.



উপরের চিত্রে 7সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের একটি চাপABকেন্দ্র O তে θকোণ উৎপন্ন করে।পরিসীমা$OAB = 22$ সে.মি.

(ক) চাপ ABএর মান নির্ণয় করুন।

(খ)θ কোণের মান নির্ণয় করুন।

(গ)OABএর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন৭.১

1.গ 2. ঘ 3.ক 4.খ 5.গ 6.খ 10. $\frac{9\pi}{32}$ 11.1500 12. $\frac{7}{11}$

13. $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 135^\circ$ 14. 7.23মাইল

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.২

1.খ 2. গ 3.ক 4.ঘ 11. $\frac{5}{12}$ 12. $\frac{7}{25}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৩

1. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 2. $-\frac{1}{8}$ 8. 60° 9. 30° 10. 60° 11. 30° 12. 30° 13. $\propto = 30^\circ, \beta = 10^\circ$

14. $A = 37.5^\circ,\quad B = 57.5^\circ,\quad C = 45^\circ$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৪

1.খ 2.ঘ 3.গ 4.ক 5. গ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৭.৫

সৃজনশীল প্রশ্ন-উত্তর

1. (ক)8 সে.মি.(খ)$\frac{8^c}{7}$(গ)28বর্গ সে.মি.