ভেক্টর
(Vectors)

ইউনিট ৬

ভুমিকা

বাস্তব জীবনে পরিমাপের গুরুত্ব অপরিসীম। দৈনন্দিন জীবনে প্রায় সকল ক্ষেত্রেই আমরা বস্তুর পরিমাপ করি। পরিমাপযোগ্য সকল রাশিকে কেবল এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় না। আমরা দৈনন্দিন কাজে ও বিজ্ঞানে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ভর, ত্বরণ, ওজন, সরণ, বল, সময়ের পরিমাণ, টাকার পরিমাণ, তাপমাত্রার পরিমাণ সম্পর্কে আলোচনা করি। রাশিগুলি একই প্রকারের নয়। আমাদের ভেক্টর রাশির ধারণা প্রয়োজন হয়। ভেক্টর (Vector) শব্দটির উৎপত্তি হয়েছে ল্যাটিন শব্দ Vehere থেকে, যার অর্থ to carry অর্থাৎ বহন করা বা পরিবাহক। অষ্টাদশ শতাব্দিতে জ্যোতির্বিদগণ গ্রহসমুহ ও সূর্যের আবর্তন ব্যাখ্যা করতে গিয়ে Vector শব্দটি ব্যবহার করেন। আইরিশ জ্যোতির্বিদ, পদার্থবিদ ও গণিতবিদ উইলিয়াম রোয়ান হ্যামিলটন (Willium Rowan Hamilton) এর ১৮৪৩ সালে প্রকাশিত কোয়ান্টরিয়ন সংখ্যার ধারণাই ভেক্টরের মূলভিত্তি। পদার্থবিদ্যা, প্রকৌশলবিদ্যা ও গণিতে ভেক্টরের বহুল ব্যবহার রয়েছে।

William Rowan Hamilton
(1805-1865)

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- ভেক্টর ও স্কেলার রাশি এবং জ্যামিতিক ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক বিধি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- সমতলে ভেক্টরের অংশক ও অবস্থান নির্ণয় করতে পারবেন,
- দ্বিমাত্রিক ও ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের প্রয়োগ করতে পারবেন,
- ভেক্টরের স্কেলার গুণন ও ভেক্টরের ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৬.১ ভেক্টর ও স্কেলার রাশি এবং জ্যামিতিক ভেক্টর

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসাবে ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সদিক রাশি, স্কেলার রাশি, ধারক রেখা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর, সমতলীয় ভেক্টর

মূলপাঠ

বাস্তব ও দৈনন্দিন জীবনে ভেক্টরের ব্যবহারঃ বাস্তব জীবনে ভেক্টরের বহুল ব্যবহার রয়েছে। সাধারণত গতিশীল বস্তু যেমন গাড়ি, নৌকা, এরোপ্লেন এমনকি আবহাওয়া, জলবায়ুর পরিবর্তন ও অবস্থা নির্ণয়ে ভেক্টর ব্যবহৃত হয়। বিল্ডিং এ বিম-এর উপর প্রযুক্ত বল নির্ণয়, রাস্তার বাঁকের প্রকৃতি ইত্যাদি ক্ষেত্রে ভেক্টর ব্যবহৃত হয়। বর্তমানে অতি জনপ্রিয় 'Google Earth' এ পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানের অবস্থান নির্ণয়ে 'grid line' এবং GPS(Global Positioning System) সিস্টেম এই ভেক্টরেরই ফলিত রূপ।

সদিক রাশির প্রতিরূপ হিসাবে ভেক্টর

আমরা যা কিছু পরিমাপ করতে পারি তাকে রাশি বলি। যেমন 20 মি., 5 কেজি., 25 মিনিট, 10 সে.মি./সে., 8 ডাইন ইত্যাদি। এদের মধ্যে কতকগুলি শুধুমাত্র পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার কতকগুলি শুধু পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় না। যেমন, যদি একটি বস্তুর সরণ প্রথম সেকেন্ডে 40 সে.মি. এবং দ্বিতীয় সেকেন্ডে 30 সে.মি. হয়, তবে একই দিকে একই সরলরেখায় দুই সেকেন্ডে বস্তুটির সরণ (40 + 30) বা 70 সে.মি.। অপরদিকে একই সরলরেখায় প্রথম সেকেন্ডের পর দ্বিতীয় সেকেন্ডে বিপরীত দিকে সরণ হলে দুই সেকেন্ডে বস্তুটির সরণ (40 - 30) বা 10 সে.মি.। তাহলে বলা যায় সরণের পরিমাণ জানার সাথে সাথে এর দিকও জানার প্রয়োজন হয়। অর্থাৎ পরিমাণ ও দিক ছাড়া সরণ সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় না। সুতরাং প্রকৃতির সকল রাশিকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। যথাঃ

(i) অদিক বা স্কেলার বা নির্দিক (Scalar) রাশি,
(ii) সদিক বা ভেক্টর (Vector) রাশি

(i) অদিক বা স্কেলার বা নির্দিক রাশি (Scalar quantity): যে সকল রাশিকে শুধুমাত্র পরিমাণ দিয়ে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় ঐ সকল রাশিকে স্কেলার রাশি বলে। অর্থাৎ স্কেলার রাশির শুধু মান আছে, কোন দিক নাই। যেমন, দৈর্ঘ্য,দূরত্ব, সময়, ভর, কাজ, আয়তন, ঘনত্ব, জনসংখ্যা, জন্মহার, তাপমাত্রা, দ্রুতি, শক্তি ইত্যাদি প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি।

(ii) সদিক বা ভেক্টর রাশি (Vector quantity): যে সকল রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশের জন্য তার পরিমাণ বা মান ও দিক বা নির্দিষ্ট দিক উভয়ই জানা প্রয়োজন হয় তাকে সদিক বা ভেক্টর রাশি (সংক্ষেপে ভেক্টর) বলা হয়। অর্থাৎ ভেক্টর রাশির মান ও দিক উভয়ই আছে। সদিক রাশির প্রতিরূপ হচ্ছে ভেক্টর । বেগ, ত্বরণ, সরণ, মন্দন, ওজন, বল, ভরবেগ ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

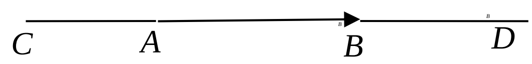
কোন ইংরেজী অক্ষরের উপরে বার বা নিচে বার অথবা বোল্ড অক্ষর দিয়ে ভেক্টরকে প্রকাশ করা হয়।

শিক্ষার্থীর কাজ	আপনার চারপাশের পরিবেশের বিভিন্ন রাশি থেকে অদিক ও ভেক্টর রাশির একটি তালিকা প্রস্তুত করুন।

সদিক রেখাংশ বা দিক নির্দেশক রেখাংশ (Directed line segment)

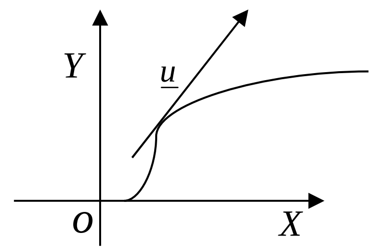
ভেক্টর রাশিকে প্রকাশের জন্য সদিক রেখাংশ একটি উপযুক্ত মাধ্যম। যে কোন ভেক্টর রাশিকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। দুইটি বিন্দু A, B দ্বারা চিহ্নিত একটি সরলরেখার অংশকে রেখাংশ বলে। কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে আদিবিন্দু বা প্রারম্ভবিন্দু (initial point) এবং অপর প্রান্তকে প্রান্তবিন্দু বা অন্তবিন্দু (terminal point) হিসাবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ বা সদিক রেখাংশ বলা হয়।

কোন সদিক রেখাংশের আদিবিন্দু A এবং প্রান্তবিন্দু B হলে ঐ সদিক রেখাংশকে বা ভেক্টরটিকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। প্রত্যেক দিক নির্দেশক রেখাংশের তিনটি পরিচয় আছে।



যথা ঃ (i) ধারক রেখা (Line of support), (ii) দৈর্ঘ্য (Length) ও (iii) দিক (Direction or Sense)।

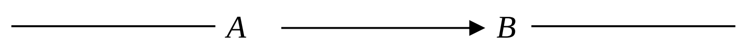
চিত্রে XY তলে চলমান কণাটি কত গতিতে এবং কোন্ দিকে চলছে এ দুইটির মিশ্রণই হলো কণাটির বেগ ভেক্টর $\underline{u}$ ।



জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক, সমতা, বিপরীত ভেক্টর, শূন্য ভেক্টর

জ্যামিতিক ভেক্টরের ধারক: কোনো অসীম সরলরেখার একটি অংশকে কোন দিক নির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা হলে, উক্ত সরলরেখাটিকে ঐ দিক নির্দেশক রেখাংশের ধারক রেখা বা শুধু ধারক বলে। অর্থাৎ ধারক রেখাটি অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত এবং দিক নির্দেশক রেখাংশটি ধারক রেখার একটি অংশ। যেমন, চিত্রে $\overrightarrow{AB}$ সদিক রেখাংশর (ভেক্টরের) ধারক CD ।

সদিক রেখাংশর দৈর্ঘ্য ও দিক: প্রতিটি সদিক রেখাংশ একটি ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক বর্ণনা, যার পরিমাণ ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক এবং যার দিক A বিন্দু থেকে AB রেখা বরাবর B বিন্দুর অভিমুখে। অর্থাৎ সদিক রেখাংশের দিক আদিবিন্দু থেকে প্রান্তবিন্দুর দিকে। এই সদিক রেখাংশকে ভেক্টর, রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে ভেক্টরের মান বলে। A বিন্দুকে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের লেজ (tail) এবং B বিন্দুকে ভেক্টরটির মাথা (head) বলা হয়। অপর পক্ষে $\overrightarrow{BA}$ ভেক্টরের এর দিক B বিন্দু থেকে A বিন্দুর অভিমুখে।

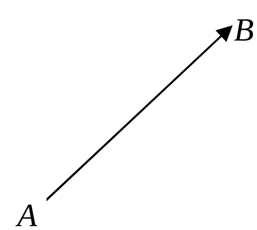


(চিত্রে ধারক রেখা clear করতে হবে)

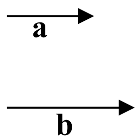
অর্থাৎ উভয়ের ধারক রেখা এবং দৈর্ঘ্য (মান বা পরিমাণ) অভিন্ন কিন্তু দিক ভিন্ন। সদিক রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ এর দৈর্ঘ্য হলো, A ও B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব যা $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$ । $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ কে ভেক্টরের পরমমানও বলা হয়।

লক্ষ্যনীয়: সদিক রেখাংশকে ভেক্টর, রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে ভেক্টরের মান, ভেক্টরটি যে রেখা বরাবর ক্রিয়ারত সেই রেখা ধারক রেখা এবং সদিক রেখাংশের দিকই ভেক্টরের দিক।

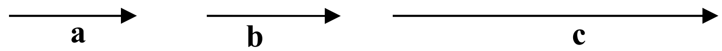
ভেক্টরের প্রতীক: আদিবিন্দু A এবং প্রান্তবিন্দু B বিশিষ্ট ভেক্টরের জন্য $\overrightarrow{AB}$ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। যখন কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরা হয় ও মূলবিন্দুকে ভেক্টরের আদিবিন্দু ধরা হয় (Localized vector) তখন প্রান্তবিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। একটিমাত্র অক্ষর দ্বারা যেমন, a, b, c,…, u, v, w কে ভেক্টর বুঝালে উপরে বা নিচে টান বা তীর চিহ্ন দেয়া হয় না। এরূপ ক্ষেত্রে ছাপার সময় মোটা (Bold) অক্ষর **u** ব্যবহার করতে হয়। তবে হাতে লেখার সময় অক্ষরের উপরে বা নিচে টান ব্যতীত চিহ্ন দেয়া হয় যেমন, $\bar{u}$ বা $\underline{u}$ বা $\vec{u}$ । আবার $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}$ দ্বারাও ভেক্টরকে প্রকাশ করা হয়।



সদৃশ ভেক্টর (Like vectors): যদি দুই বা ততোধিক ভেক্টরের দিক একই হয়, তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে। সদৃশ ভেক্টর সমূহের ধারক রেখা একই অথবা পরস্পর সমান্তরাল হয়। সদৃশ ভেক্টর সমূহের মান বা দৈর্ঘ্য একই অথবা ভিন্ন ভিন্ন বা অসমান হতে পারে।



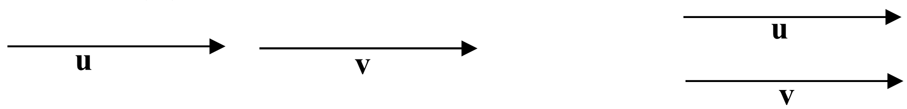
এখানে **a** ও **b** সদৃশ ভেক্টর
এবং
ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই



(চিত্রে ধারক রেখা clear করতে হবে)

এখানে **a, b** ও **c** সদৃশ ভেক্টর, $\left|\bar{a}\right| = \left|\bar{b}\right| \neq \left|\bar{c}\right|$
এবং ভেক্টরত্রয়ের ধারক রেখা একই

সমান ভেক্টর বা ভেক্টরের সমতা (Equal vectors or Equality of vectors): দুই বা ততোধিক ভেক্টরকে সমান ভেক্টর বলা হবে যদি, (i) এদের মান বা দৈর্ঘ্য সমান হয়, (ii) এদের ধারক রেখা একই অথবা পরস্পর সমান্তরাল হয় ও (iii) এদের দিক একই হয়।



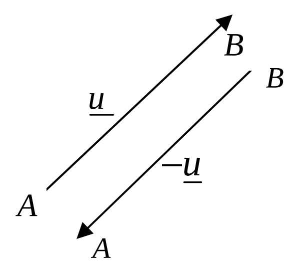
এখানে **u** ও **v** মান ও দিক সমান এবং এদের ধারক রেখা একই।

এখানে **u** ও **v** মান ও দিক সমান এবং এদের ধারক রেখাদ্বয় সমান্তরাল।

(চিত্রে ধারক রেখা clear করতে হবে)

ভেক্টরের মান (Magnitude of vector): কোনো ভেক্টরের আদিবিন্দু ও প্রান্তবিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে ভেক্টরটির মান বলা হয়। $\bar{u}$ ভেক্টরের মানকে $\left|\bar{u}\right|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ কোনো ভেক্টরের পরমমানকে ঐ ভেক্টরের মান বলা হয়।

বিপরীত ভেক্টর (Opposite vector) ঃ $\bar{u}$ কে $\bar{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর বলা হবে, যদি (i) $\left|\bar{u}\right| = \left|\bar{v}\right|$ অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের মান সমান হয়, (ii) $\bar{v}$ এর ধারক রেখা $\bar{u}$ এর ধারক রেখা অভিন্ন অথবা পরস্পর সমান্তরাল হয় , (iii) $\bar{v}$ এর দিক $\bar{u}$ এর দিকের বিপরীত হয়। অথবা ভেক্টর দুইটির একটিকে অপরটির ঋণাত্মক ভেক্টর (Negative vector) বলা হয়। ভেক্টর $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ হলে, বিপরীত ভেক্টর $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$ হবে। এখানে $\underline{u}$ এবং $-\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য সমান, কিন্তু এরা পরস্পর বিপরীতমুখী।

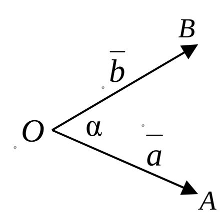


শূন্য ভেক্টর (Zero vector or Null vector): কোনো ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য বা পরমমান শূন্য হলে সেই ভেক্টরটিকে শূন্য ভেক্টর বলা হয়। অর্থাৎ শূন্য ভেক্টরের আদিবিন্দু ও প্রান্তবিন্দু একই। শূন্য ভেক্টরের দিক বা ধারক রেখা সুনির্দিষ্ট নয়। শূন্য ভেক্টরের দিক যে কোনো ভেক্টরের দিক বরাবর গ্রহণ করা যায়। শূন্য ভেক্টরের বৈশিষ্ট্য, স্কেলার শূন্য(0) এর অনুরূপ। শূন্য ভেক্টরকে **O** বা $\underline{0}$ বা $\bar{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $\overrightarrow{AB} = \mathbf{O}$ বা $\underline{0}$ একটি শূন্য ভেক্টর হলে $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0$ । যেমন $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ শূন্য ভেক্টর।

$\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ হলে $\overrightarrow{BA} = -\bar{u}$ তখন ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি মতে $\bar{u} + \left(-\bar{u}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0.$

সুতরাং $\bar{u}$ একটি ভেক্টর হলে $\bar{u} + \left(-\bar{u}\right) = 0.$ ফলে $\bar{u} + 0 = \bar{u}.$ একে ভেক্টর যোগের অভেদ বিধি বলা হয়। কাজেই শূন্য ভেক্টরের সংজ্ঞা এই অভেদ বিধিতে লুকায়িত।

দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত বা মধ্যবর্তী কোণ (Angle between two vectors): মনে করুন, $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে α কোণ উৎপন্ন করেছে। $\alpha = 0$ হলে ভেক্টর দুইটি সমমুখী, $\alpha = \pi$ হলে ভেক্টর দুইটি বিপরীতমুখী এবং $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ হলে ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব হবে।



সমতলীয় ভেক্টর (Coplanar vectos): কতগুলি ভেক্টরকে সমতলীয় ভেক্টর বলা হয়, যদি তাদের ধারক রেখা একই সমতলের উপর অবস্থিত হয় এবং সমান্তরাল হয়। একতলীয় সমপ্রান্তিক ভেক্টরগুলির ধারক রেখা একই তলে অবস্থান করে।

সমরৈখিক বা সমরেখ বা সমান্তরাল ভেক্টর (Collinear vectos): দুই বা ততোধিক ভেক্টর যদি একটি সরলরেখার সমান্তরাল হয় তবে তাদেরকে সমরৈখিক ভেক্টর বলা হয়। যদি $\overline{a}$ ও $\overline{b}$ ভেক্টর দুইটি সমরৈখিক হয়, তবে $\overline{a}=k\overline{b}$; যেখানে k একটি স্কেলার।

অসমরেখ ভেক্টর: দুইটি ভেক্টর $\overline{u}$ ও $\overline{v}$ অসমরেখ হবে, যদি দুইটি স্কেলার রাশি α ও β হয়, যেখানে $\alpha\overline{u}+\beta\overline{v}=0$ বা, $\alpha=\beta=0$ হয়।

যোগাশ্রয়ী সমাবেশ ভেক্টর (Linear Combinations of Vectos): কোনো ভেক্টর $\overline{r}$ কে $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\cdots$ ভেক্টরগুলির যোগাশ্রয়ী সমাবেশ বলা হয় যদি $\overline{r}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}+\cdots$; যখন $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ স্কেলার রাশি। যেমন- $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$, $5\overline{a}-2\overline{b}+7\overline{c}$, $3\overline{a}-2\overline{b}-5\overline{c}$ প্রভৃতি ভেক্টরগুলি $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ ভেক্টরগুলির যোগাশ্রয়ী সমাবেশ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.১

1. যে ভেক্টর রাশির মান শূন্য ও নির্দিষ্ট কোনো দিক নাই তাকে বলা হয়-

   (ক) শূন্য ভেক্টর (খ) সমান ভেক্টর (গ) একক ভেক্টর (ঘ) বিপরীত ভেক্টর

2. দেওয়া আছে, (i) একই দিকে ক্রিয়ারত দুইটি ভেক্টরের মান সমান হলে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।

   (ii) যে সকল রাশির মান ও দিক নেই, ঐ সকল রাশিকে স্কেলার রাশি বলে।

   (iii) $\overline{A}$ এর মান হলো $|\overline{A}|$ ।

   উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

   (ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

পাঠ ৬.২ দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক বিধি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধিগুলি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ভেক্টরের যোগ, ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র, বিনিময় বিধি, সহযোজন বিধি

মূলপাঠ

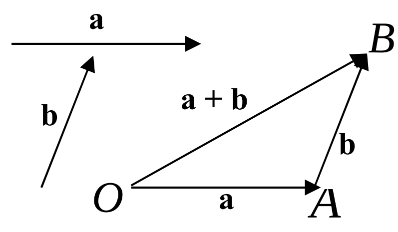
দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতক (Addition, Subtraction and Scalar multiplication of two dimensional Vectors)

ভেক্টরের যোগ (সূত্র বা সংজ্ঞা): ধরুন, **a** ও **b** দুইটি ভেক্টর । **b** এর আদিবিন্দু **a** এর প্রান্তবিন্দুতে স্থাপন করলে, **a** এর আদিবিন্দু থেকে **b** এর প্রান্তবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাংশ হলো ভেক্টর **a** ও **b** এর যোগফল। একে **a + b** দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র

প্রমাণ: যে কোন বিন্দু O থেকে **a** ভেক্টর নির্দেশক ধারক রেখার সমান ও সমান্তরাল করে OA রেখাংশ অংকন করি। **a** এর প্রান্তবিন্দু A থেকে **b** ভেক্টর নির্দেশক ধারক রেখার সমান ও সমান্তরাল করে AB রেখাংশ অংকন করি। তাহলে, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ও $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ । **a** এর আদিবিন্দু O এবং **b** এর প্রান্তবিন্দু B সংযোগে গঠিত রেখাংশ $\overrightarrow{OB}$ ভেক্টরকে **a** ও **b** ভেক্টর দুইটির সমষ্টি বা লব্ধি বা যোগফল বলা হয় এবং একে **a + b** দ্বারা সূচিত করা হয়।

অর্থাৎ ΔOAB তে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ।



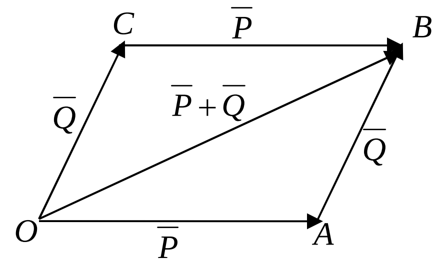
(চিত্রে ভেক্টর clear করতে হবে)

লক্ষ্যনীয় ঃ **a** ও **b** সমান্তরাল না হলে **a, b** ও **a + b** ভেক্টর তিনটি একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে বলে ভেক্টর যোগের এই পদ্ধতিকে 'ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র' বলা হয়।

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র

সূত্র বা সংজ্ঞা: যদি $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ ভেক্টরকে একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত করা হয়, তবে ভেক্টরদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সামান্তরিকের কর্ণটি ভেক্টরদ্বয়ের সমষ্টি বা লব্ধি বা যোগফল $\overline{P} + \overline{Q}$ কে মানে ও দিকে প্রকাশ করবে।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, যে কোনো বিন্দু O থেকে অংকিত দুইটি ভেক্টর $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ কে যথাক্রমে OA ও OC দ্বারা সূচিত করা হল। $OABC$ সামান্তরিকটি অংকন করি এবং O, B যোগ করুন। তাহলে $OABC$ সামান্তরিকটির কর্ণ OB দ্বারা $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ ভেক্টর দুইটির সমষ্টি বা লব্ধি বা যোগফল প্রকাশ করবে। অর্থাৎ $\overrightarrow{OB} = \overline{P} + \overline{Q}$ হবে । এখানে, $OABC$ সামান্তরিকের OC ও AB বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল বলে তারা একই ভেক্টর সূচিত করে।



(চিত্রে ভেক্টর clear করতে হবে)

সুতরাং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} = \overline{P}$ । অতএব ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overline{P} + \overline{Q}$ । সুতরাং OB কর্ণ $\overline{P}$ ও $\overline{Q}$ ভেক্টর দুইটির লব্ধিকে সূচিত করে।

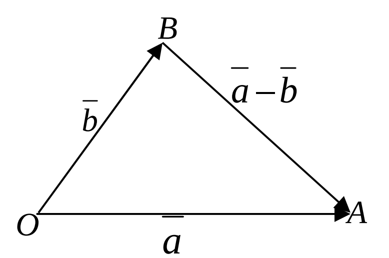
লক্ষ্যনীয় ঃ (a) দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের লব্ধি বলা হয়। বল ও বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের এই সামান্তরিক বিধি অনুসরণ করা যায়।
(b) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে এই সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়।

ভেক্টরের বিয়োগ: যদি দুইটি ভেক্টর $\overline{a}$ ও $\overline{b}$ এর আদিবিন্দু একই হয়, তাহলে ঐ ভেক্টর দুইটির বিয়োগফলকে $\overline{a} - \overline{b}$ ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যার আদিবিন্দু হলো $\overline{b}$ এর প্রান্তবিন্দু এবং প্রান্তবিন্দু হলো $\overline{a}$ এর প্রান্তবিন্দু।

প্রমাণ ঃ মনে করুন, $\overrightarrow{OA} = \overline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \overline{b}$, এখানে $\overline{a}$ ও $\overline{b}$ ভেক্টর দুইটির আদিবিন্দু O এবং $\overline{b}$ ও $\overline{a}$ এর প্রান্তবিন্দু যথাক্রমে B ও A । সুতরাং $\overrightarrow{BA}$ দ্বারা $\overline{a} - \overline{b}$ ভেক্টর সূচিত করবে। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$,

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ [উভয় পক্ষে $\overrightarrow{BO}$ যোগ করে]



(চিত্রে ভেক্টর clear করতে হবে)

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\quad [\because \overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}]$

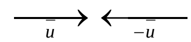
$\Rightarrow \overrightarrow{BA}=\overline{a}-\overline{b}$

অর্থাৎ $\overline{b}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু ও $\overline{a}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ দ্বারা তাদের অন্তরফল বা বিয়োগফল ভেক্টর প্রকাশ করে।

একে $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overline{b}-\overline{a}$ এভাবেও লিখা যায়।

লক্ষ্যনীয়: ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে দুইটি ভেক্টরের বিয়োগফল ভেক্টর নির্ণয় বা প্রকাশ করা যায়।

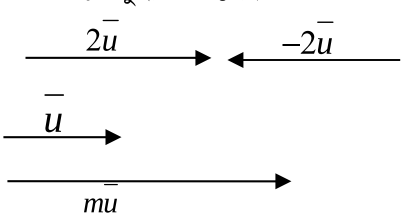
ভেক্টরের স্কেলার বা সংখ্যা গুণিতক: কোনো ভেক্টরকে একটি স্কেলার বা বাস্তব সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে গুণফল একটি ভেক্টর হয়। মনে করুন, $\overline{u}$ যে কোনো ভেক্টর এবং m যে কোনো স্কেলার বা বাস্তব সংখ্যা।



তাহলে ভেক্টর $\overline{u}$ এবং স্কেলার m এর গুণফল $m\overline{u}$ একটি ভেক্টর।

যেমন $\overline{u}$ একটি ভেক্টর এবং 2 ও -2 যে কোনো স্কেলার বা বাস্তব সংখ্যা হলে $2\overline{u}$ ও $-2\overline{u}$ দুইটি ভেক্টর।

$m\overline{u}$ ভেক্টরের বৈশিষ্ট্যগুলি নিম্নরূপ ঃ



(চিত্রে ভেক্টর **clear** *করতে হবে)*

(i) $m\overline{u}$ এর মান $=|m\overline{u}|=|m||\overline{u}|$; অর্থাৎ $m\overline{u}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য $\overline{u}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্যের $|m|$ গুণ।

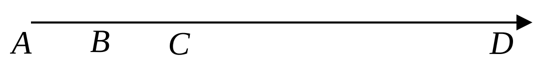
(ii) $\overline{u}$ ও $m\overline{u}$ ভেক্টরের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল।

(iii) $m>0$ হলে, $m\overline{u}$ এর দিকও $\overline{u}$ এর দিক একই হবে;

অপরদিকে $m<0$ হলে, $m\overline{u}$ এর দিক, $\overline{u}$ এর দিকের বিপরীত হবে। আবার

(iv) $m(n\overline{u})=n(m\overline{u})=(mn)\overline{u}.$ এখানে n ও একটি স্কেলার বা বাস্তব সংখ্যা।

ব্যখ্যা ঃ মনে করুন, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overline{u}$



$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}=2\overline{u}.$

আবার $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$ হলে, $\overrightarrow{AD}=3(2\overline{u})=6\overline{u}=(2.3)\overline{u}.$

(v) স্কেলার $m=0$ হলে, $m\overline{u}=0\overline{u}=\underline{0}$ (শূন্য ভেক্টর) হয়, শূন্য ভেক্টরের দিক সুনির্দিষ্ট নয়।

দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও স্কেলার গুণিতকের বিধি (Rules of addition, Subtraction and Scalar multiple of two dimensional Vectors)

$\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ তিনটি ভেক্টর রাশি এবং m ও n দুইটি স্কেলার বা বাস্তব সংখ্যার জন্য

(i) $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$ [ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি]

(ii) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$ [ভেক্টর যোগের সহযোজন বিধি]

(iii) $\underline{0}$,শূন্য ভেক্টরের অস্তিত্ব বিদ্যমান যার জন্য, $\underline{u}+\underline{0}=\underline{0}+\underline{u}=\underline{u}$ [ভেক্টর যোগের অভেদ বিধি]

(iv) প্রতিটি ভেক্টর $\underline{u}$ এর একটি অনন্য বিপরীত ভেক্টর $-\underline{u}$ রয়েছে যার জন্য,

$\underline{u}+(-\underline{u})=(-\underline{u})+\underline{u}=\underline{0}$ [ভেক্টর যোগের বিপরীত বিধি]

(v) $m\underline{u}=\underline{u}m$ [স্কেলার গুণিতকের বিনিময় বিধি]

(vi) $m(n\underline{u})=(mn)\underline{u}$ [স্কেলার গুণিতকের সহযোজন বিধি]

(vii) $(m+n)\underline{u}=m\underline{u}+n\underline{u}$ [স্কেলার গুণিতকের বন্টন বিধি]

(viii) $m(\underline{u}+\underline{v})=m\underline{u}+m\underline{v}$ [ভেক্টর যোগের বন্টন বিধি]

(ix) $1(\underline{u})=\underline{u}$

ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি (Commutative law of vector addition) এর প্রমাণ

মনে করুন, ΔABC এর $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BC}$ দ্বারা যথাক্রমে $\overline{P}$, $\overline{Q}$ দুইটি ভেক্টর সূচিত করা হল। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র মতে, $\overrightarrow{AC}$ এদের লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করবে। ধরুন, লব্ধি $\overrightarrow{AC}=\overline{R}$ । তাহলে, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\cdots$ (i)

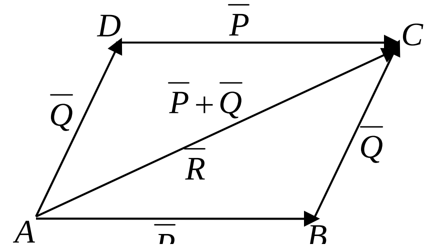
অর্থাৎ $\overline{R}=\overline{P}+\overline{Q}$ ।

এখন $ABCD$ সামান্তরিকটি অঙ্কন করুন। তাহলে,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overline{P}$ ও $\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{DC}$ এবং

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\overline{Q}$ ও $\overrightarrow{BC} \,||\, \overrightarrow{AD}$ । আবার ΔADC এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} \cdots \text{(ii)}$

অর্থাৎ $\overline{R}=\overline{Q}+\overline{P}$ ।



(চিত্রে ভেক্টর clear করতে হবে)

এখন (i) ও (ii) থেকে আমরা পাই, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

অর্থাৎ $\overline{P}+\overline{Q}=\overline{Q}+\overline{P}$

$\therefore$ ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি প্রমাণিত।

ভেক্টর যোগের সহযোজন বিধি (Associative law of vector addition) এর প্রমাণ

মনে করুন, $\overline{U}$,$\overline{V}$ ও $\overline{W}$ ভেক্টরকে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{CD}$ দ্বারা সূচিত করা হল। এখন AD, BD ও AC যোগ করি। ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

ΔABC এ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overline{U}+\overline{V}$

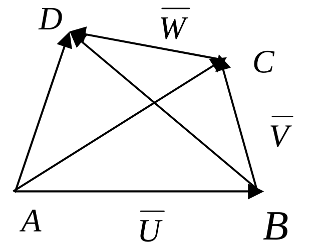
এবং ΔACD এ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\left(\overline{U}+\overline{V}\right)+\overline{W} \cdots \text{(i)}$

আবার, ΔBCD এ $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overline{V}+\overline{W}$

এবং ΔABD এ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overline{U}+\left(\overline{V}+\overline{W}\right) \cdots \text{(ii)}$

এখন (i) ও (ii) থেকে পাই, $\left(\overline{U}+\overline{V}\right)+\overline{W}=\overline{U}+\left(\overline{V}+\overline{W}\right)$.

অর্থাৎ ভেক্টর যোগের সহযোজন বিধি প্রমাণিত।



(চিত্রে ভেক্টর clear করতে হবে)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.২

1. ΔABC - এর তিনটি বাহু দ্বারা একই ক্রমে তিনটি ভেক্টরকে মানে ও দিকে সূচিত করলে তাদের লব্ধি হবে-
   (ক) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ (খ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=0$
   (গ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=0$ (ঘ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$
2. যদি $\overline{P}$, $\overline{Q}$ দুইটি ভেক্টর হয়, তবে ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি হলো -
   (ক) $\overline{P}-\overline{Q}=\overline{Q}+\overline{P}$ (খ) $\overline{P}+\overline{Q}=\overline{Q}-\overline{P}$
   (গ) $\overline{P}+\overline{Q}=\overline{Q}+\overline{P}$ (ঘ) $\overline{P}-\overline{Q}=\overline{Q}-\overline{P}$
3. যদি $\overline{U}$,$\overline{V}$ ও $\overline{W}$ তিনটি ভেক্টর হয়, তবে ভেক্টর যোগের সহযোজন বিধি হলো -
   (ক) $\left(\overline{U}+\overline{V}\right)-\overline{W}=\overline{U}+\left(\overline{V}+\overline{W}\right)$ (খ) $\left(\overline{U}+\overline{V}\right)+\overline{W}=\overline{U}+\left(\overline{V}+\overline{W}\right)$
   (গ) $\left(\overline{U}+\overline{V}\right)+\overline{W}=\overline{U}+\left(\overline{V}-\overline{W}\right)$ (ঘ) $\left(\overline{U}-\overline{V}\right)+\overline{W}=\overline{U}-\left(\overline{V}+\overline{W}\right)$

পাঠ ৬.৩ সমতলে ভেক্টরের অংশক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সমতলে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করতে পারবেন,
- ভেক্টরকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে প্রকাশ করতে পারবেন,
- একক ভেক্টর $\hat{i}$, $\hat{j}$ বর্ণনা করতে পারবেন,
- অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ভেক্টরের অংশক, কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক, একক ভেক্টর, অবস্থান ভেক্টর

মূলপাঠ

সমতলে ভেক্টর: ভেক্টর সম্পর্কে এ পর্যন্ত যা আলোচিত হয়েছে সবই একই সমতলে একমাত্রিক বা দ্বিমাত্রিক জগতে অবস্থিত সকল ভেক্টরের জন্য সমভাবে প্রযোজ্য। এখন নির্দিষ্ট কোনো সমতলে অবস্থিত দ্বিমাত্রিক বা ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টর আলোচনা করা হবে।

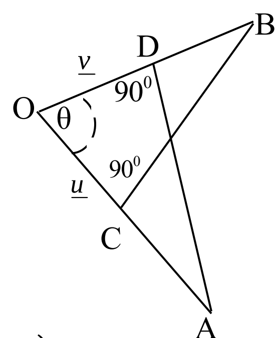
সমতলে ভেক্টরের অংশক (Component of vectors in a plane): ধরুন, একই সমতলে $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ, তাহলে $\underline{v}$ বরাবর $\underline{u}$ এর অংশক $= u\cos\theta$

$\underline{u}$ বরাবর $\underline{v}$ এর অংশক $= v\cos\theta$

চিত্রে, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$

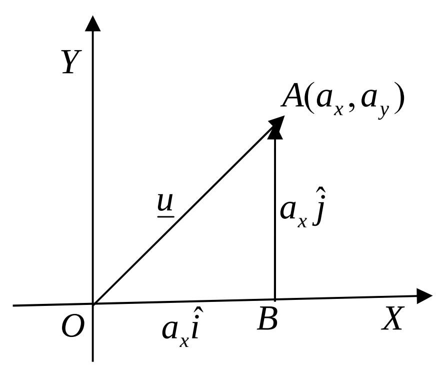
$\therefore$ $\underline{v}$ বরাবর $\underline{u}$ এর অংশক $= OD = OA\cos\theta = |\underline{u}|\cos\theta = u\cos\theta$

$\underline{u}$ বরাবর $\underline{v}$ এর অংশক $= OC = OB\cos\theta = |\underline{v}|\cos\theta = v\cos\theta$



দ্বিমাত্রিক তলে ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক (Resolved part of a vector in a plane):

মনে করুন, $\underline{u}$ একটি ভেক্টর, যার মূলবিন্দু $O(0,0)$ এবং শীর্ষবিন্দু $A(a_x, a_y)$ তাহলে $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ হবে অবস্থান ভেক্টর। আমরা জানি, ভেক্টরের মানের সাথে ঐ ভেক্টরের দিকে একটি একক ভেক্টর দ্বারা গুণ করলে রাশিটি একটি ভেক্টর রাশি হয়। X -অক্ষের দিকে একক ভেক্টর $\hat{i}$ দ্বারা a_x কে গুণ করলে $\overrightarrow{OB} = a_x\hat{i}$ একটি ভেক্টর রাশি হবে, যার মান হবে a_x এবং দিক হবে X -অক্ষের দিকে।অনুরূপভাবে $\overrightarrow{BA} = a_y\hat{j}$ একটি ভেক্টর যার মান হলো a_y এবং দিক হবে Y -অক্ষের দিকে। এখানে $\hat{j}$, Y -অক্ষের দিকে একটি একক ভেক্টর । ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র থেকে পাই- $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$ বা, $\underline{u} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$

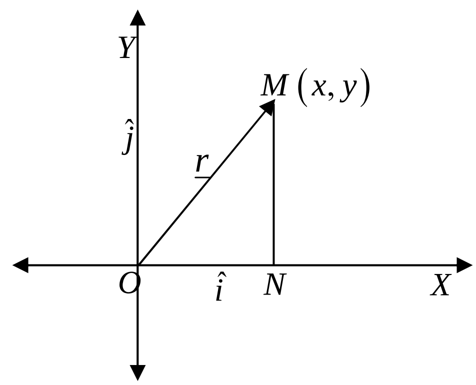


$a_x\hat{i}$ এবং $a_y\hat{j}$ হলো $\underline{u}$ এর উপাংশ বা অংশক। $\underline{u}$ ভেক্টরের মান $|\underline{u}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

একক ভেক্টর (Unit vector): যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য বা মান এক (1) তাকে একক ভেক্টর বলে। মান শূন্য নয় এমন যে কোনো ভেক্টরকে তার মান দ্বারা ভাগ করলে ঐ ভেক্টরটির দিকে অথবা তার সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর পাওয়া

যায়। $\bar{u}$ ভেক্টর রাশির মান $|\bar{u}| \neq 0$ হলে, $\bar{u}$ ভেক্টরের দিকে অথবা তার সমান্তরাল দিকে একটি একক ভেক্টর $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \hat{u}$ পাওয়া যায়। অতএব একক ভেক্টর = ভেক্টর/ ভেক্টরের মান বা পরম মান। একক ভেক্টর প্রকাশ করার জন্য ভেক্টর প্রতীক হিসাবে সাধারণত " ^ " ব্যবহার করা হয়। একে পড়া হয় হ্যাট বা ক্যাপ যেমন " u হ্যাট বা u ক্যাপ "।

ধরুন, O মূলবিন্দু এবং OX ও OY রেখাদ্বয় যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ নির্দেশ করে। মনে করুন, XY সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু $M(x, y)$। M থেকে X-অক্ষের ওপর MN লম্ব টানুন এবং O, M যোগ করে এবং $\overrightarrow{OM} = \underline{r}$ ধরে নিন। তাহলে $ON = x$ এবং $NM = y$ নির্দেশ করে। এখন X ও Y-অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ হলে $\hat{i} = \frac{\overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{ON}|} = \frac{\overrightarrow{ON}}{ON} = \frac{\overrightarrow{ON}}{x} \therefore \overrightarrow{ON} = x\hat{i}$



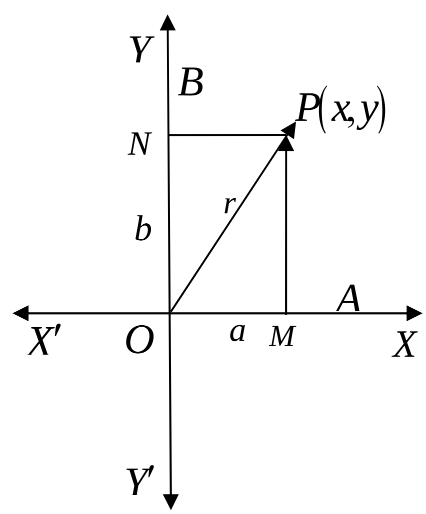
এবং $\hat{j} = \frac{\overrightarrow{NM}}{|\overrightarrow{NM}|} = \frac{\overrightarrow{NM}}{NM} = \frac{\overrightarrow{NM}}{y} \therefore \overrightarrow{NM} = y\hat{j}$

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ-সূত্রানুসারে ΔONM থেকে পাওয়া যায়, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} \quad \therefore \underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

আবার, ONM সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়, $OM^2 = ON^2 + NM^2$ বা, $\underline{r}^2 = |\underline{r}|^2 = r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \therefore \overrightarrow{OM} = \underline{r}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর $\frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \frac{\underline{r}}{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

ভেক্টরকে ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ বা দ্বিমাত্রিক জগতে) কার্তেসীয় স্থানাংকে প্রকাশ বা দ্বিমাত্রিক স্থানাংক পদ্ধতি (Representation of vectors in Cartesian coordinates) ঃ ধরুন, OX ও OY রেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে। তাহলে O মূলবিন্দু এবং OX ও OY রেখাদ্বয় যথাক্রমে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ নির্দেশ করে। মনে করুন P একটি বিন্দু। P থেকে OX এর উপর PM লম্ব টানুন। PM এর সমান OY থেকে ON অংশ কেটে নিন। তাহলে OM কে x দ্বারা ও MP কে y দ্বারা প্রকাশ করে। এক্ষেত্রে $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$ হলো P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর। ধরুন, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$।



$\therefore \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} = x\underline{a}$ এবং

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{ON} = y\overrightarrow{OB} = y\underline{b}$

এখন দুইটি ভেক্টরের যোগের ত্রিভুজ-সূত্রানুসারে ΔOMP থেকে পাই,

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP}$

বা, $x\underline{a} + y\underline{b} = \underline{r}$

$\therefore \underline{r} = x\underline{a} + y\underline{b}$

ফলে P বিন্দুর দ্বিমাত্রিক স্থানাংক হলো (x, y) বা, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$।

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টরের পরিবর্তে যদি $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ লই তবে $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ হয়। এভাবে দ্বিমাত্রিক ভেক্টরের কার্তেসীয় স্থানাংক প্রকাশ করা হয়।

এখানে (i) (x, y) হলো $\underline{r}$ এর স্থানাংক ।

(ii) $x\hat{i}, y\hat{j}$ হলো $\underline{r}$ এর X -অক্ষ ,Y -অক্ষ বরাবর অংশক ভেক্টর।

X -অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর, $\hat{i}=\dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OM}}{x}$ $\therefore \overrightarrow{OM}=x\hat{i}$ ও X -অক্ষের ঋণাত্মক দিকে একক ভেক্টর, $-\hat{i}$

এবং Y -অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টর, $\hat{j}=\dfrac{\overrightarrow{ON}}{ON}=\dfrac{\overrightarrow{MP}}{MP}=\dfrac{\overrightarrow{MP}}{y}$ $\therefore \overrightarrow{MP}=y\hat{j}$ ও Y -অক্ষের ঋণাত্মক দিকে একক ভেক্টর, $-\hat{j}$

(iii) x, y কে $\underline{r}$ এর অংশক বলে।

(iv) $\underline{r}$ এর প্রারম্ভ বিন্দু $O(0,0)$ ও প্রান্ত বিন্দু $P(x, y)$ হলে $\underline{r}=(x, y)$ লেখা হয়।

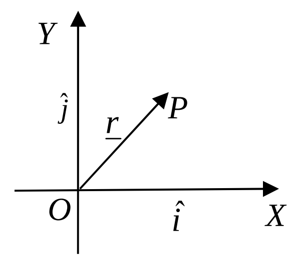
(v) OPM সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই, $OP^2=OM^2+MP^2$ বা, $\underline{r}^2=|\underline{r}|^2=r^2=x^2+y^2$

$\therefore |\underline{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$

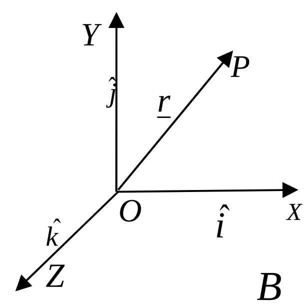
(vi) $\overrightarrow{OP}$ বরাবর অর্থাৎ $\underline{r}$ ভেক্টর বরাবর $\underline{r}$ ভেক্টরের একক ভেক্টর$=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP}=\dfrac{\underline{r}}{r}=\dfrac{x\hat{i}+y\hat{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(vii) প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগে যে কোন বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $x\hat{i}+y\hat{j}, -x\hat{i}+y\hat{j}, -x\hat{i}-y\hat{j}$ ও $x\hat{i}-y\hat{j}$ এবং এদের কার্তেসীয় স্থানাংক যথাক্রমে $(x, y), (-x, y), (-x, -y)$ ও $(x, -y)$

অবস্থান ভেক্টর (Position vector) ঃ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য যে কোনো বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টর দ্বারা নির্দেশ করা হয়, তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে।

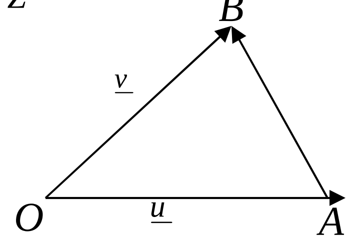


ধরুন, X -অক্ষ এবং Y -অক্ষ O বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করেছে। তাহলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং মূলবিন্দু। O বিন্দুর সাপেক্ষে যে কোনো বিন্দু P এর অবস্থান ভেক্টর হলো $\overrightarrow{OP}$ । $\overrightarrow{OP}=\underline{r}$ হলে, $\underline{r}$ কে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। অবস্থান ভেক্টরকে সর্বদা ধনাত্মক ধরা হয়। এখানে O বিন্দুকে ভেক্টর - মূলবিন্দু (vector origin) বলা হয়। কখনো কখনো অবস্থান ভেক্টরকে ব্যাসার্ধ ভেক্টর (radius vector) বলা হয়। দ্বিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় কোনো বিন্দু P এর কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y) হলে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}=\underline{r}=P(\underline{r})=x\hat{i}+y\hat{j}$ ।

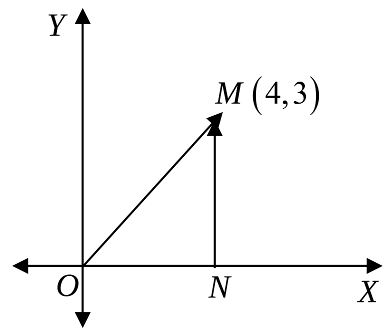


অনুরূপভাবে, ত্রিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থায় কোনো বিন্দু P এর স্থানাংক (x, y, z) হলে, P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}=\underline{r}=P(\underline{r})=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ।

ধরুন, O মূলবিন্দু এবং A, B অন্য দুইটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA}=\underline{u}, \overrightarrow{OB}=\underline{v}$ । তাহলে ভেক্টর বিয়োগ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{AB}=\underline{v}-\underline{u}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$ হয়।



উদাহরণ 1: $M(4,3)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন।



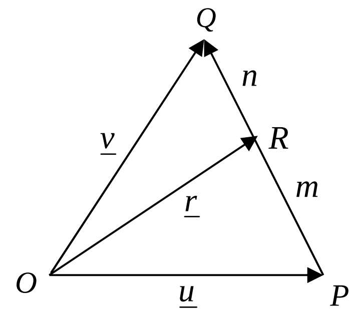
সমাধান: ধরুন, OX ও OY যথাক্রমে X -অক্ষ এবং Y -অক্ষ। $M(4,3)$ বিন্দুটি $XY-$ তলে স্থাপন করে OM যোগ করুন। OX -এর উপর MN লম্ব নিন। তাহলে $ON=4$ এবং $NM=3$। এখন ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ-সূত্রানুসারে OMN ত্রিভুজ থেকে পাই,

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}$

$\therefore \overrightarrow{OM}=4\hat{i}+3\hat{j}$

অতএব $M(4,3)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $=4\hat{i}+3\hat{j}$।

বিভক্তিকরণ সূত্র বা বিভক্তিকরণ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ঃ O ভেক্টর মূলবিন্দু এবং P,Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OP}=\underline{u},\overrightarrow{OQ}=\underline{v}$। R বিন্দুটি PQ কে $m:n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করতে হবে।



ধরুন, R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OR}=\underline{r}$। শর্তমতে, $\overrightarrow{PR}:\overrightarrow{RQ}=m:n$

বা, $\dfrac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}=\dfrac{m}{n}$ বা, $\overrightarrow{PR}=\left(\dfrac{m}{n}\right)\overrightarrow{RQ}$

এখন, ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ-সূত্রানুসারে OPR ত্রিভুজ থেকে পাই,

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}$ বা, $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$

অনুরূপভাবে, ORQ ত্রিভুজ থেকে পাই, $\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}$ বা, $\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}$

$\therefore \overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=\left(\dfrac{m}{n}\right)\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OR}\right)$ বা, $\underline{r}-\underline{u}=\left(\dfrac{m}{n}\right)(\underline{v}-\underline{r})$ বা, $(\underline{r}-\underline{u})n=m(\underline{v}-\underline{r})$

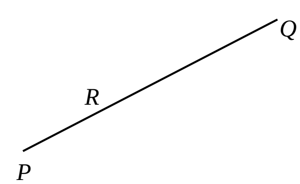
বা, $\underline{r}n-\underline{u}n=m\underline{v}-m\underline{r}$ বা, $\underline{r}n+m\underline{r}=m\underline{v}+\underline{u}n$ বা, $(m+n)\underline{r}=m\underline{v}+n\underline{u}$ $\quad \therefore \underline{r}=\dfrac{m\underline{v}+n\underline{u}}{m+n}$, যা নির্ণেয় বিভক্তি R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ করে।

এখানে (i) যদি R বিন্দুটি PQ রেখাংশের মধ্যবিন্দু হয়, তখন $m=n$ হয় তবে,

$\therefore \underline{r}=\dfrac{n\underline{v}+n\underline{u}}{n+n}=\dfrac{n(\underline{u}+\underline{v})}{2n}=\dfrac{1}{2}(\underline{u}+\underline{v})$ বা, $\underline{u}+\underline{v}=2\underline{r}$ বা, $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OR}$ হবে।

(ii) যদি R বিন্দুটি PQ রেখাংশকে $m:n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তবে, $\therefore \underline{r}=\dfrac{m\underline{v}-n\underline{u}}{m-n}$ হবে।

(iii) P,Q,R এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ হলে P,Q,R বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{PR}=k.\overrightarrow{PQ}$ বা, $\underline{w}-\underline{u}=k(\underline{v}-\underline{u})$ হয়।



(iv) PQ রেখাংশ যদি R বিন্দুতে $1:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় তবে,

$2.\overrightarrow{PR}=1.\overrightarrow{RQ}$ $\therefore \overrightarrow{PR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{RQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

উদাহরণ 2: P ও Q দুইটি বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $P(4,6)$ ও $Q(11,4)$. (i) P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, (ii) Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ও (iii) $\overline{PQ}$ নির্ণয় করুন।

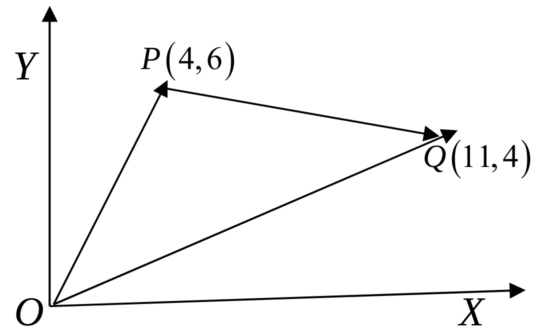
সমাধান: ধরুন, OX ও OY যথাক্রমে X -অক্ষ এবং Y -অক্ষ।

$P(4,6)$ ও $Q(11,4)$ বিন্দুদুইটি XY -তলে স্থাপন করে PQ যোগ করুন।

ফলে, (i) P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overline{OP} = 4\hat{i} + 6\hat{j} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(ii) Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overline{OQ} = 11\hat{i} + 4\hat{j} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(iii) $\overline{PQ} = (11\hat{i} + 4\hat{j}) - (4\hat{i} + 6\hat{j}) = 7\hat{i} - 2\hat{j} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.



পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৩

1. তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}, -\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ এবং $-4\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ হলে দেখান যে, বিন্দু তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।
2. $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{OB} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, $|\overline{AB}|$ এর মান নির্ণয় করুন।
3. P এবং Q এর স্থানাংক যথাক্রমে $(4,2,7)$ এবং $(3,4,-1)$ ও O মূলবিন্দু ।
   (i) অবস্থান ভেক্টর কাকে বলে?
   (ii) $|\overline{PQ}|$ নির্ণয় করুন।
   (iii) দেখান যে, OPQ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।
4. প্রমাণ করুন যে, $A(1,-1,-1), B(3,3,1)$ এবং $(-1,4,4)$ বিন্দু তিনটি একটি গোলকের উপর অবস্থিত, যার কেন্দ্র $P(0,1,2)$ ।

   P এবং Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $(3,-5)$ এবং $(-8,10)$ । উক্ত তথ্যের ভিত্তিতে 5 - 7 নং প্রশ্নের উত্তর দিন।
5. P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?
   (ক) $3\hat{i} - 5\hat{j}$ (খ) $5\hat{i} + 3\hat{j}$ (গ) $3\hat{i} + 5\hat{j}$ (ঘ) $-3\hat{i} + 5\hat{j}$
6. Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কোনটি?
   (ক) $-8\hat{i} - 10\hat{j}$ (খ) $8\hat{i} - 10\hat{j}$ (গ) $8\hat{i} + 10\hat{j}$ (ঘ) $-8\hat{i} + 10\hat{j}$
7. $|\overline{PQ}|$ এর মান কত?
   (ক) $\sqrt{646}$ (খ) $\sqrt{366}$ (গ) $\sqrt{346}$ (ঘ) $\sqrt{696}$

পাঠ ৬.৪ দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টর

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টরের প্রয়োগ করতে পারবেন।

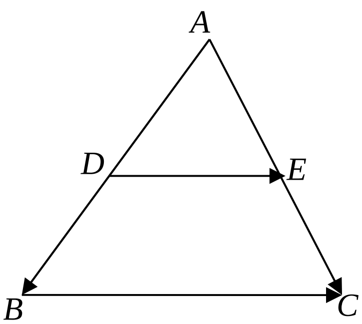
মুখ্য শব্দ	সামান্তরিক, ট্রাপিজিয়াম, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, মধ্যমা, ভরকেন্দ্র, রম্বস, পঞ্চভুজ

মূলপাঠ

দ্বিমাত্রিক জ্যামিতির সমস্যা সমাধানে ভেক্টর

উদাহরণ 1: ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর অর্ধেক ও সমান্তরাল।

সমাধান: মনে করুন, ΔABC - এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশ DE । প্রমাণ করতে হবে যে, $DE=\frac{1}{2}BC$ এবং $DE \parallel BC$ । ΔADE এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$



(চিত্রে ভেক্টর clear করতে হবে)

বা, $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DE}\cdots\cdots(\text{i})$

অনুরূপভাবে, ΔABC এ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\cdots\cdots(\text{ii})$

যেহেতু D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু বলে পাই,

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$

এখন (ii) থেকে $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ বা, $2(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{BC}$

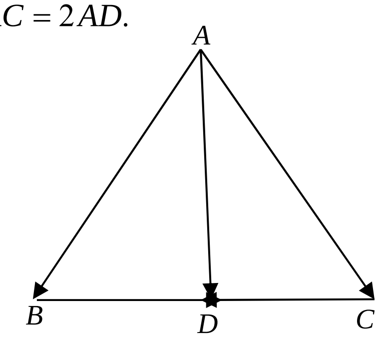
বা, $2\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}$ [(i) দ্বারা]

অতএব, $\left|\overrightarrow{DE}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$ অর্থাৎ $DE=\frac{1}{2}BC$

আবার $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হতে পারে। কিন্তু এক্ষেত্রে ধারক রেখা ভিন্ন। কাজেই $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা সমান্তরাল। সুতরাং $DE=\frac{1}{2}BC$ এবং $DE \parallel BC$ ।(প্রমাণিত)

উদাহরণ 2: ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে দেখান যে, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}.$

সমাধান: ΔABC – এ BC বাহুর মধ্যবিন্দু D । A, D যোগ করুন।



ΔABD – এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই, যেহেতু

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdots\cdots(\text{i})$

অনুরূপভাবে, ΔACD – এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}\cdots\cdots(\text{ii})$

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}$

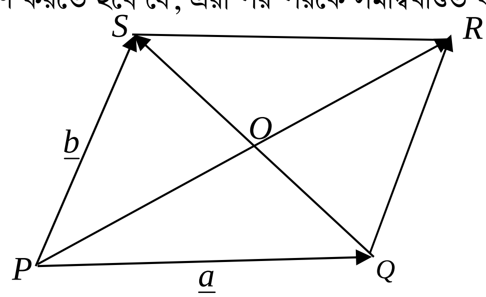
বা, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AD}\cdots\cdots(\text{iii})$

যেহেতু D, BC এর মধ্যবিন্দু সেহেতু $BD=CD$ এবং $\overrightarrow{BD}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টর দুইটির ধারক রেখা একই, দৈর্ঘ্য সমান কিন্তু এদের দিক পরস্পর বিপরীত। কাজেই, $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=0$

অতএব, (iii) থেকে পাই, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+0=2\overrightarrow{AD}\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}.$(প্রমাণিত)

উদাহরণ 3: ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান: ধরুন, $PQRS$ সামান্তরিকের PR ও QS দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, এরা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ধরা যাক, কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। মনে করুন,



$\overrightarrow{PQ}=\underline{a}$ ও $\overrightarrow{PS}=\underline{b}$ । যেহেতু $PQ \parallel SR$ ও $PS \parallel QR$

$\therefore \overrightarrow{SR}=\underline{a}$ ও $\overrightarrow{QR}=\underline{b}$

ΔPQR হতে পাই, $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}$

বা, $\overrightarrow{PR}=\underline{a}+\underline{b}\cdots\cdots(\text{i})$

আবার, ΔPQS হতে পাই, $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}$

বা, $\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{PS}-\overrightarrow{PQ}$

বা, $\overrightarrow{QS}=\underline{b}-\underline{a}\cdots\cdots(\text{ii})$

যেহেতু $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{PO}$ সমরেখ, একটি স্কেলার রাশি k এর জন্য পাই, $\overrightarrow{PO}=k\overrightarrow{PR}\cdots(\text{iii})$ বা, $\overrightarrow{PO}=k(\underline{a}+\underline{b})$

আবার, যেহেতু $\overrightarrow{QS}$ ও $\overrightarrow{QO}$ সমরেখ, একটি স্কেলার রাশি λ এর জন্য পাই, $\overrightarrow{QO}=\lambda\overrightarrow{QS}\cdots(\text{iv})$ বা, $\overrightarrow{QO}=\lambda(\underline{b}-\underline{a})$

এখন ΔPQO হতে পাই, $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QO}=\overrightarrow{PO}$

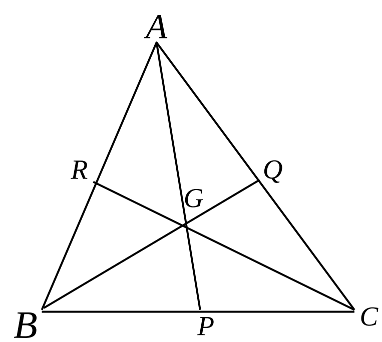
বা, $\underline{a}+\lambda(\underline{b}-\underline{a})=k(\underline{a}+\underline{b})$ বা, $(1-k-\lambda)\underline{a}+(-k+\lambda)\underline{b}=0$

যেহেতু $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ একই রেখায় অবস্থিত নয়, কাজেই আমরা পাই, $1-k-\lambda=0$ ও $-k+\lambda=0$.এদের সমাধান করে পাই, $k=\lambda=\dfrac{1}{2}$. সুতরাং k ও λ এর মান (iii) ও (iv) - এ বসিয়ে পাই $\overrightarrow{PO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ এবং $\overrightarrow{QO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{QS}.$

অর্থাৎ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (প্রমাণিত)

বিকল্প প্রমাণ ঃ P বিন্দুকে মূলবিন্দু এবং $\overrightarrow{PQ}=\underline{a}$ ও $\overrightarrow{PS}=\underline{b}$ ধরুন। যেহেতু PS এবং QR পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। সুতরাং $\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}=\underline{b}.$ অনুরূপভাবে, PQ এবং SR পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}=\underline{a}$ ।Q ও S বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ । তাহলে QS কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $=\dfrac{\underline{a}+\underline{b}}{2}.$ আবার, ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$ বা, $\underline{a}+\underline{b}=\overrightarrow{PR}$ অর্থাৎ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $=\underline{a}+\underline{b}.$ তাহলে PR কর্ণের মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $=\dfrac{\underline{a}+\underline{b}}{2}.$যেহেতু PR ও QS কর্ণ দুইটির মধ্যবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর একই অর্থাৎ $\dfrac{\underline{a}+\underline{b}}{2}.$ সুতরাং সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4: ΔABC - এর BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q এবং R । (a) ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র বা সামান্তরিক সূত্র বর্ণনা করুন।(b) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{BQ}$ ও $\overrightarrow{CR}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করুন। (c) প্রমাণ করুন যে, $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=\underline{0}=0.$



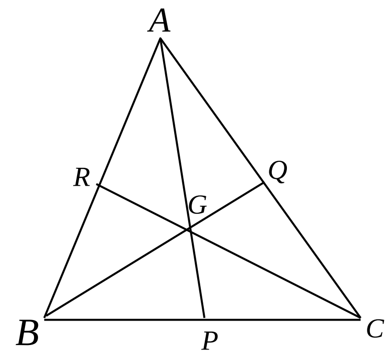
সমাধান: (a) পূর্বে প্রদত্ত।

(b) ধরুন ΔABC - এর BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q এবং R ।AP, BQ এবং CR মধ্যমাগুলি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব G ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র। AP, BQ এবং CR মধ্যমাগুলি পরস্পরকে G বিন্দুতে $1:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। এখন $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{RB}=2\left(\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{GB}\right)$

$=2\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{RC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{QB}\right)=\dfrac{2}{3}\left(-\overrightarrow{CR}\right)+\dfrac{4}{3}\left(-\overrightarrow{BQ}\right)=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{BQ}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CR}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BQ}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CR}$

(c) BC - এর মধ্যবিন্দু P বলে, $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$



অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$ এবং $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

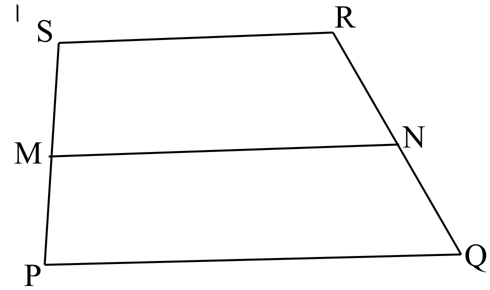
$$\therefore \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(\underline{0})+(\underline{0})+(\underline{0})\right\}=\frac{1}{2}(\underline{0})=\underline{0}=0$$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 5: ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তাদের যোগফলের অর্ধেক।

সমাধান: ধরুন $PQRS$ ট্রাপিজিয়ামের PQ ও SR বাহু দুইটি সমান্তরাল এবং PS ও QR বাহু দুইটি তির্যক। তির্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N । প্রমাণ করতে হবে যে, MN রেখাংশ PQ ও SR সমান্তরাল বাহু দুইটির সমান্তরাল এবং $MN=\frac{1}{2}(PQ+SR)$ ।



এখন, ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই

$$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}=\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}\right)+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{MN}$$

এবং $\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SR}+\overrightarrow{RN}=\left(\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SR}\right)+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$

সমতা দুইটি একত্রে যোগ করে পাই,

$$\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MS}\right)+\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{SR}\right)+\left(\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{RN}\right)=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}$$

বা, $\underline{0}+\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{SR}\right)+\underline{0}=2\overrightarrow{MN}$ (যেহেতু $\overrightarrow{MP}$ ও $\overrightarrow{MS}$ এবং $\overrightarrow{QN}$ ও $\overrightarrow{RN}$ ভেক্টর দুইটির ধারকরেখা একই ,দৈর্ঘ্য সমান কিন্তু দিক পরস্পর বিপরীত; কাজেই $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MS}=\underline{0}$ এবং $\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{RN}=\underline{0}$)

অতএব $2\overrightarrow{MN}=\underline{0}+\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{SR}\right)+\underline{0}=0+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{SR}+0=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{SR}$ $\therefore \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}\right)$

এক্ষেত্রে $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{SR}$ সমান্তরাল ভেক্টর হওয়ায় এদের যোগফলের ধারকরেখা প্রত্যকটি ভেক্টরের ধারকরেখার সমান্তরাল; ফলে $2\overrightarrow{MN}$ বা, $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটির ধারকরেখা $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{SR}$ ভেক্টর দুইটির সমান্তরাল। রেখার আবার $\overrightarrow{PQ}$ ও $\overrightarrow{SR}$ সমান্তরাল এবং একই দিক বিশিষ্ট ভেক্টর হওয়ায় $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{SR}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য PQ ও SR বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যের যোগফলের সমান। অর্থাৎ $MN=\frac{1}{2}(PQ+RS)$ (প্রমাণিত)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৪

1. (a) ΔABC - এর $\overrightarrow{BC}=\underline{a},\overrightarrow{CA}=\underline{b}$ এবং $\overrightarrow{BA}=\underline{c}$ হলে, দেখান যে, $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$

   (b) ΔABC - এ D বিন্দু $\overline{BC}$ বাহুর মধ্যবিন্দু। $\overrightarrow{AB}=\underline{c}$ এবং $\overrightarrow{AC}=\underline{b}$ হলে, দেখান যে, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$

   (c) ΔOPQ - এ $\overrightarrow{OP}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OQ}=\underline{b}$; PQ রেখার উপর R এমন একটি বিন্দু যেন, $PQ=2QR$. প্রমাণ করুন যে, $\overrightarrow{PR}=\frac{2}{3}(\underline{b}-\underline{a})$.
2. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।
3. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।
5. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখান যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।
6. যে কোনো চতুর্ভূজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু সংযুক্ত করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়, প্রমাণ করুন।
7. M এবং N বিন্দু দুইটি $PQRS$ চতুর্ভূজের PR ও QS কর্ণ দুইটির মধ্যবিন্দু। দেখান যে, $(a)\ \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{RS}=4\overrightarrow{NM}$ $(b)\ \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{PS}=2\overrightarrow{AD}$
8. $PQRST$ একটি পঞ্চভুজ; $\overrightarrow{PQ}=\underline{a}, \overrightarrow{QR}=\underline{b}, \overrightarrow{RS}=\underline{c}$ এবং $\overrightarrow{ST}=\underline{d}$ হলে, দেখান যে, $\overrightarrow{PT}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}$.
9. (a) ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে, $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টর দুইটিকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টর দুইটির যোগাশ্রয়ী সমাবেশে প্রকাশ করুন ।

   (b) OAC ত্রিভুজে AC বাহুর মধ্যবিন্দু B; যদি $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$ হয়, তবে $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরকে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।

   (c) $\overrightarrow{OP}=\underline{a}$, $\overrightarrow{OQ}=\underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OR}=\underline{a}+\underline{b}$ হলে, $OPRQ$ কী ধরণের চতুর্ভুজ?
10. ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, দেখান যে, $AB^2+AC^2=2\left(AD^2+BD^2\right)$
11. PQR ত্রিভুজে QR, RP ও PQ বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু L, M ও N হলে, প্রমাণ করুন যে, $\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{RN}=0.$
12. A ও B-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ হলে, AB- এর উপরিস্থিত C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন যেন, $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ হয়।
13. (a) A, B, C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$; $ABCD$ সামান্তরিকের D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় করুন।

    (b) $ABCDE$ একটি পঞ্চভুজ হলে, প্রমাণ করুন যে, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}$
14. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু থেকে বিপরীত বাহুর উপর অংকিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।
15. ΔPQR -এর QR, RP ও PQ বাহুর মধ্যবিন্দু তিনটি যথাক্রমে U, V ও W হলে, নিচের কোনটি ঠিক ?

    (ক) $\overline{PU}-\overline{QV}-\overline{RW}=0$ (খ) $\overline{PU}+\overline{QV}+\overline{RW}=0$

    (গ) $\overline{PU}+\overline{QV}-\overline{RW}=0$ (ঘ) $\overline{PU}-\overline{QV}+\overline{RW}=0$

পাঠ ৬.৫ ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টর

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

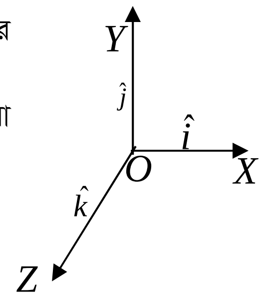
এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ -এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন,
- ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগ ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ -এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ত্রিমাত্রিক স্থানাংক, ত্রিমাত্রিক জগতে একক ভেক্টর, ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য, ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল

মূলপাঠ

ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর ব্যাখ্যা ঃ ত্রিমাত্রিক স্থানাংকে তিনটি ধনাত্মক অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর বিবেচনা করা হয় তাকে আয়ত একক ভেক্টর বলে।



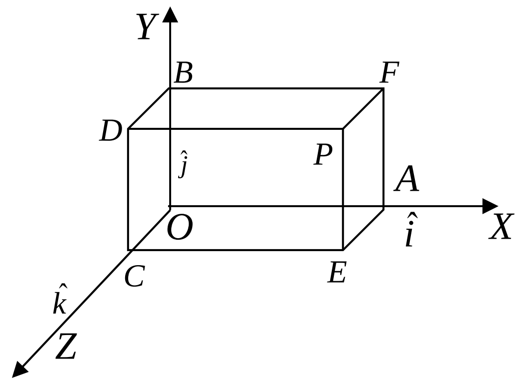
কার্তেসীয় স্থানাংকে X, Y ও Z -অক্ষের ধনাত্মক দিকে একক ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ত্রিমাত্রিক জগতে $\hat{i} = (1,0,0), \hat{j} = (0,1,0), \hat{k} = (0,0,1)$ ।

ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টর $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরকে $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ বা, (x, y, z) দ্বারাও প্রকাশ করা যায়।

ত্রিমাত্রিক ($\mathbb{R}^3$ – জগতে) স্থানাংক পদ্ধতিতে ভেক্টর বিশ্লেষণ বা অংশক নির্ণয়

ধরুন, OX, OY ও OZ রেখাত্রয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে, তাহলে O মূলবিন্দু এবং রেখাত্রয় যথাক্রমে X, Y ও Z অক্ষ (আয়ত-অক্ষ) নির্দেশ করে।



মনে করুন, X, Y ও Z -অক্ষের দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ এবং কোনো বিন্দু P এর কার্তেসীয় স্থানাংক (x, y, z) । ফলে চিত্র থেকে পাই, $OA = x$, $OB = y$ এবং $OC = z$. আবার, একক ভেক্টরের সংজ্ঞা থেকে পাই,

$\hat{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{x} \therefore \overrightarrow{OA} = x\hat{i}$ অনুরূপে $\overrightarrow{OB} = y\hat{j}$ এবং $\overrightarrow{OC} = z\hat{k}$.

মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$, এখন OP এর দৈর্ঘ্য $= r$ হলে,

ΔOPD – এ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} \cdots\cdots (1)$

এবং ΔOBD – এ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \cdots\cdots (2)$

অতএব, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$

যেহেতু $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC}$ এবং যখন X, Y ও Z -অক্ষের দিকে একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$. $\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ ।

সুতরাং $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ এই ভেক্টরটিকে সাধারণ ভেক্টর বা যে কোনো বিন্দু (x, y, z) এর অবস্থান ভেক্টর বলে। এখানে x, y, z হলো অক্ষত্রয় বরাবর $\underline{r}$ ভেক্টরের উপাংশের মান। x, y, z যথাক্রমে অক্ষত্রয়ের উপর $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ এবং $x\hat{i}, y\hat{j}$ ও $z\hat{k}$ যথাক্রমে অক্ষত্রয় বরাবর $\overrightarrow{OP} = \underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ভেক্টরের অংশক।

ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য নির্ণয়

$OP^2 = OD^2 + DP^2 \, [\because DP \perp OD]$

বা, $OP^2 = OB^2 + BD^2 + DP^2 \, [\because BD \perp OB]$ বা, $OP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$ বা, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

সুতরাং, $\overrightarrow{OP} = \underline{r}$ ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য, $|\overrightarrow{OP}| = OP = r = |\underline{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$\therefore OP$ বরাবর একক ভেক্টর, $\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \dfrac{\underline{r}}{|\underline{r}|} = \dfrac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

ভেক্টরকে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে $\underline{r}(x, y, z)$ ভেক্টরকে প্রকাশ করলে দাঁড়ায় $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

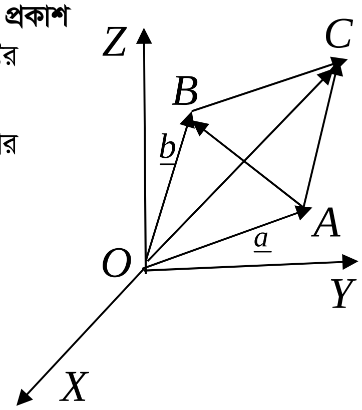
যেমন- $\underline{a}(a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$. আবার, $\underline{r}$ ভেক্টরটি যদি X, Y ও Z -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যথাক্রমে α, β ও γ কোণ উৎপন্ন করে তবে $\cos\alpha, \cos\beta$ ও $\cos\gamma$ কে $\underline{r}$ ভেক্টরের দিক কোসাইন বলে।

আয়ত অক্ষ বরাবর অবস্থিত একক ভেক্টর $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা

X, Y ও Z -অক্ষ বরাবর অবস্থিত একক ভেক্টর যথাক্রমে $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ এর জন্য $\hat{i}.\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos 0^0 = 1.1.1 = 1$ [$\because |\hat{i}| = 1$ এবং $\hat{i}$ ভেক্টরটি তার নিজের সাথে 0^o কোণ উৎপন্ন করে] অনুরূপভাবে, $\hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1.$

আবার, $\hat{i}.\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos 90^0 = 1.1.0 = 0$ [$\because |\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$ এবং $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ ভেক্টর দুইটি তাদের নিজেদের মধ্যে 90^0 কোণ উৎপন্ন করে] । অনুরূপভাবে, $\hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0.$

ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের যোগফল ও স্কেলার গুণিতককে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ



ধরুন, O শীর্ষ বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B এর ত্রিমাত্রিক অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}.$ $OACB$ সামান্তরিক অংকন করে এর কর্ণদ্বয় যোগ করি। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \underline{a} + \underline{b} = \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right) + \left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}\right)$$

$$\therefore\ \underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

$\therefore\ (a_1, a_2, a_3)$ ও (b_1, b_2, b_3) ভেক্টরের যোগফল বা লব্ধি

$$= (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

ΔOAB হতে পাই, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \underline{b} - \underline{a} = \left(b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}\right) - \left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right)$

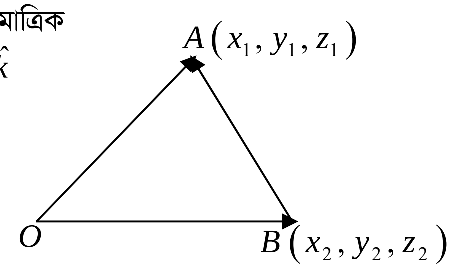
$$= (b_1 - a_1)\hat{i} + (b_2 - a_2)\hat{j} + (b_3 - a_3)\hat{k}$$

আবার, m একটি স্কেলার রাশি হলে, $m\underline{a} = m\left(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}\right) = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k} = (ma_1, ma_2, ma_3)$

$A(x_1, y_1, z_1)$ ও $B(x_2, y_2, z_2)$ হলে, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$ নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 1: $A(x_1, y_1, z_1)$ ও $B(x_2, y_2, z_2)$ হলে, $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, O মূলবিন্দু । ফলে O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B এর ত্রিমাত্রিক অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ ও $\overrightarrow{OB} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্র প্রয়োগ করে পাই, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\right) - \left(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\right)$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	$\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ ও $\underline{b} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ হলে, (১) $5\underline{a} + 2\underline{b}$ ও (২) $5\underline{a} - 3\underline{b}$ নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৫

1. ত্রিমাত্রিক স্থানাংকে আয়ত একক ভেক্টর কোনটি?

(ক) $-\hat{i}, -\hat{j}$ ও $\hat{k}$ (খ) $\hat{i}, \hat{j}$ ও $\hat{k}$ (গ) $\hat{i}, -\hat{j}$ ও $\hat{k}$ (ঘ) $\hat{i}, \hat{j}$ ও $-\hat{k}$

2. $\underline{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}, \underline{b} = 5\hat{i} + 6\hat{k}$ ও $\underline{c} = 5\hat{i} - 4\hat{j}$ হলে, $\underline{a} + 2\underline{b} + 3\underline{c} =$ কত?

(ক) $-28\hat{i} - 18\hat{j} - 38\hat{k}$ (খ) $24\hat{i} + 21\hat{j} - 13\hat{k}$

(গ) $15\hat{i} - 17\hat{j} + 25\hat{k}$ (ঘ) $28\hat{i} - 10\hat{j} + 16\hat{k}$

পাঠ ৬.৬ সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

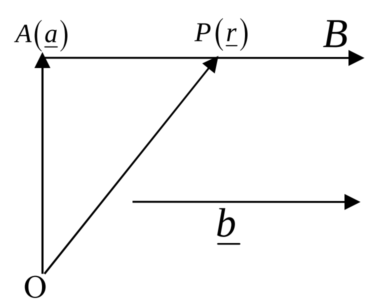
মুখ্য শব্দ	সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ, সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ, প্যারামিটার

মূলপাঠ

সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ (Vector equation of a straight line)

কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুগামী নির্দিষ্ট একটি ভেক্টরের ধারকরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

উপপাদ্য ১: দেখান যে, $A(\underline{a})$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$, যেখানে t একটি প্যারামিটার এবং আরও দেখান যে, একে $(\underline{r} - \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{0}$ আকারেও প্রকাশ করা যায়।



প্রমাণ: ধরুন, $A(\underline{a})$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখা AB. AB এর উপর যে কোনো বিন্দু $P(\underline{r})$ হইলে $\overrightarrow{AP} = \underline{r} - \underline{a} \cdots (1)$

যেহেতু $\overrightarrow{AP}$ এবং $\underline{b}$ সমান্তরাল, $\overrightarrow{AP} = t\underline{b} \cdots (2)$ যেখানে t একটি প্যারামিটার।

এখন (1) এবং (2) থেকে পাই, $\underline{r} - \underline{a} = t\underline{b} \Rightarrow \underline{r} = \underline{a} + t\underline{b} \cdots (3)$ (প্রমাণিত)

আবার, $\overrightarrow{AP}$ এবং $\underline{b}$ সমান্তরাল হওয়ায় উহাদের ভেক্টর গুণন শূন্য হবে। অর্থাৎ

$\overrightarrow{AP} \times \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow (\underline{r} - \underline{a}) \times \underline{b} = \underline{0} \cdots (4)$ (প্রমাণিত)

এখানে (3) অথবা (4) সরলরেখাটির নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ।

সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ, $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ এর কার্তেসীয় (ত্রিমাত্রিক) আকার

মনে করুন, $\underline{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$, $\underline{a} = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1$ এবং $\underline{b} = \hat{i}l + \hat{j}m + \hat{k}n.$ তাহলে $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$ থেকে পাই,

$\hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1 + t\left(\hat{i}l + \hat{j}m + \hat{k}n\right)$

বা, $\hat{i}(x - x_1 - tl) + \hat{j}(y - y_1 - tm) + \hat{k}(z - z_1 - tn) = \underline{0}.$

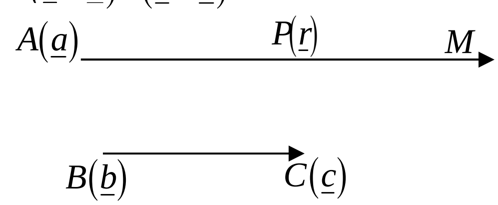
যেহেতু $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ অনির্ভরশীল ভেক্টর ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে), সুতরাং আমরা পাই,

$x-x_1-tl=0, y-y_1-tm=0, z-z_1-tn=0$

$\Rightarrow x-x_1=tl, y-y_1=tm, z-z_1=tn \Rightarrow \dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}=t \Rightarrow \dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$

নোট ঃ $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=\hat{i}x_1+\hat{j}y_1+\hat{k}z_1+t\left(\hat{i}l+\hat{j}m+\hat{k}n\right), t$ একটি প্যারামিটার। অর্থাৎ সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=\underline{a}+t\underline{b}$ এর কার্তেসীয় সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}(=t)$

উপপাদ্য ২: প্রমাণ করুন যে, $A(\underline{a})$ বিন্দুগামী এবং $B(\underline{b})$ ও $C(\underline{c})$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=\underline{a}+t(\underline{c}-\underline{b})$ যেখানে t একটি প্যারামিটার অথবা $(\underline{r}-\underline{a})\times(\underline{c}-\underline{b})=0$ ।



প্রমাণ: ধরুন, $A(\underline{a})$ বিন্দুগামী এবং $B(\underline{b})$ ও $C(\underline{c})$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা AM. AM এর উপর যে কোনো বিন্দু $P(\underline{r})$ হইলে, $\overrightarrow{AP}=\underline{r}-\underline{a}\cdots(1)$

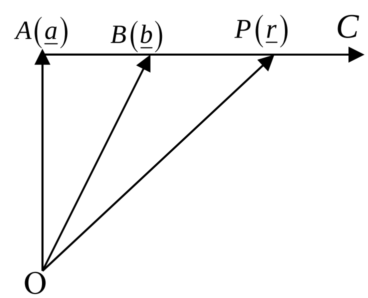
আবার, $\overrightarrow{BC}=\underline{c}-\underline{b}\cdots(2)$

যেহেতু $\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ সমান্তরাল, সুতরাং $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{BC}$, যেখানে t একটি প্যারামিটার। $\Rightarrow \underline{r}-\underline{a}=t(\underline{c}-\underline{b})$

$\Rightarrow \underline{r}=\underline{a}+t(\underline{c}-\underline{b})$ (প্রমাণিত)

আবার, $\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{BC}$ সমান্তরাল হওয়ায় উহাদের ভেক্টর গুণন শূন্য হবে। অর্থাৎ $\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{BC}=\underline{0}\Rightarrow(\underline{r}-\underline{a})\times(\underline{c}-\underline{b})=\underline{0}$. (প্রমাণিত)

উপপাদ্য ৩: প্রমাণ করুন যে, $A(\underline{a})$ এবং $B(\underline{b})$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r}=\underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a})$ যেখানে t একটি প্যারামিটার অথবা $(\underline{r}-\underline{a})\times(\underline{b}-\underline{a})=\underline{0}$ ।



প্রমাণ: ধরুন, $A(\underline{a})$ এবং $B(\underline{b})$ বিন্দুগামী সরলরেখা AC. AC এর উপর একটি বিন্দু $P(\underline{r})$ হইলে, $\overrightarrow{AP}=\underline{r}-\underline{a}\cdots(1)$ এবং $\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}\cdots(2)$

যেহেতু $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AP}$ সমরৈখিক। সুতরাং $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}\cdots(3)$, যেখানে t একটি প্যারামিটার।

(1), (2) এবং (3) থেকে পাই, $\underline{r}-\underline{a}=t(\underline{b}-\underline{a})$

$\Rightarrow \underline{r}=\underline{a}+t(\underline{b}-\underline{a})\cdots(4)$ আবার, $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AP}$ সমরৈখিক হওয়ায় উহাদের ভেক্টর গুণন শূন্য হবে। অর্থাৎ $\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB}=\underline{0}\Rightarrow(\underline{r}-\underline{a})\times(\underline{b}-\underline{a})=\underline{0}\cdots(5)$

এখানে (4) অথবা (5) সরলরেখাটির নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ।

নোট ঃ যদি $\underline{a}=0$ হয়, তবে সরলরেখাটি মূলবিন্দুগামী হবে। এক্ষেত্রে সরলরেখাটি হবে $\underline{r}=t\underline{b}$.

সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় ও প্রয়োগ:

উদাহরণ 1: $3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ বিন্দুগামী এবং $2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ ভেক্টর ও কার্তেসীয় আকারে নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, $\underline{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\underline{b}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ । তাহলে $\underline{a}$ বিন্দুগামী এবং $\underline{b}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার নির্ণেয় সমীকরণ $\underline{r}=\underline{a}+t\underline{b}$. এখানে t একটি প্যারামিটার। এখন $\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$

$\therefore x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=3\hat{i}-2\hat{j}+5\hat{k}+t\left(2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}\right)$

$\Rightarrow x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=(2t+3)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(5-4t)\hat{k}\cdots(1)$

এখানে $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ অনির্ভরশীল ভেক্টর। সুতরাং $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $x = 2t+3, y = t-2, z = 5-4t$

$$\Rightarrow \frac{x-3}{2} = t, \frac{y+2}{1} = t, \frac{z-5}{-4} = t \Rightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-4} \cdots (2)$$

এখানে (1) সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ ও (2) সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ।

উদাহরণ 2: $(1,2,-3)$ বিন্দুগামী এবং $(2,3,-1)$ ও $(3,5,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $(1,2,-3)$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ এবং $(2,3,-1)$ ও $(3,5,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ ভেক্টর $\underline{b}$, তাহলে $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\underline{b} = (3-2)\hat{i} + (5-3)\hat{j} + (2+1)\hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$। অতএব $(1,2,-3)$ বিন্দুগামী এবং $(2,3,-1)$ ও $(3,5,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল নির্ণেয় সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t\underline{b}$. এখানে t একটি প্যারামিটার।

$\Rightarrow \underline{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + t\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) \therefore \underline{r} = (1+t)\hat{i} + (2+2t)\hat{j} + (-3+3t)\hat{k}$, যেখানে $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

ইহাই নির্ণেয় সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ।

উদাহরণ 3: $(1,2,3)$ এবং $(4,-3,1)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান: মনে করুন, $(1,2,3)$ এবং $(4,-3,1)$ বিন্দুদ্বয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$. সুতরাং $\underline{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\underline{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ বিন্দুগামী সরলরেখার নির্ণেয় ভেক্টর সমীকরণ $\underline{r} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$

$\Rightarrow \underline{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t\left(4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k} - \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}\right) \Rightarrow \underline{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + t\left(3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}\right)$

$\Rightarrow \underline{r} = (1+3t)\hat{i} + (2-5t)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$, যেখানে $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. ইহাই নির্ণেয় সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ।

শিক্ষার্থীর কাজ	**1.** $(3,2,1)$ এবং $(4,1,-2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন। **2.** $(2,-1,3)$ বিন্দুগামী এবং $(1,3,2)$ ও $(3,5,1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৬

1. মূলবিন্দু ও $\vec{P} = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. $P(-2,1,3)$ বিন্দুগামী ও $\vec{Q} = \hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. $P(2,2,2)$ এবং $Q(5,5,5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৬.৭ ভেক্টরের স্কেলার গুণন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ভেক্টরের স্কেলার গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবেন,

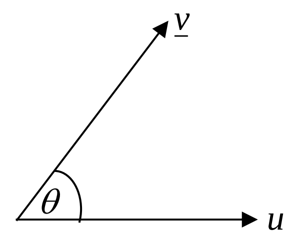
- স্কেলার গুণজের ধর্ম ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ভেক্টরের স্কেলার বা ডট্ গুণন, অভিক্ষেপ, ভেক্টরের অংশক, ভেক্টরের উপাংশ

মূলপাঠ

একটি ভেক্টরের সাথে অপর একটি ভেক্টরের গুণন দুই ভাবে হতে পারে, যথা- (১) ভেক্টরের স্কেলার বা ডট্ গুণন এবং (২) ভেক্টরের ভেক্টর গুণন।

ভেক্টরের স্কেলার বা ডট্ গুণন (Scalar product or dot product of two vectors)



দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta(0 \le \theta \le \pi)$ হলে, $uv\cos\theta$ কে ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন বা ডট্ গুণন বলে, যাকে $\underline{u}.\underline{v}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $\underline{u}.\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta = uv\cos\theta$; এখানে $u = |\underline{u}|$ এবং $v = |\underline{v}|$। দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণন একটি স্কেলার রাশি।

নোট ঃ (১) দুইটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হলে, $\cos\theta = 0$ এবং $\underline{u}.\underline{v} = 0$.

(২) দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল বা সমরেখ হলে, $\cos\theta = 1$ এবং $\underline{u}.\underline{v} = |\underline{u}|.|\underline{v}|$.

(৩) ভেক্টর দুইটির দিক বিপরীত হলে, অর্থাৎ $\theta = 180^0$ হলে, $\underline{u}.\underline{v} = -|\underline{u}|.|\underline{v}| = uv.$

(৪) θ স্থুলকোণ হলে, $\cos\theta > 0$ এবং $\underline{u}.\underline{v} > 0$; θ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\cos\theta < 0$ এবং $\underline{u}.\underline{v} < 0.$

(৫) $\underline{u}.\underline{u} = |\underline{u}|.|\underline{u}|\cos 0^0 = u^2.1 = u^2$ আবার, (৬) $\hat{i}.\hat{i} = 1, \hat{j}.\hat{j} = 1, \hat{k}.\hat{k} = 1; \hat{i}.\hat{j} = 0, \hat{j}.\hat{k} = 0, \hat{k}.\hat{i} = 0.$

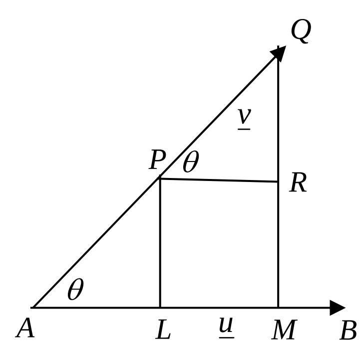
দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ

$\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ দুইটি অশূন্য ভেক্টরের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ হলে, $\underline{u}.\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta$ বা, $\cos\theta = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|.|\underline{v}|}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|.|\underline{v}|}.$

ত্রিমাত্রিক জগতে ভেক্টরের অংশক নির্ণয় (Resolved part of a vector in three dimensional space)

ভেক্টরের অভিক্ষেপ বা লম্ব অভিক্ষেপ (Projection of a vector)



ধরুন, $\underline{v} = \overrightarrow{PQ}$ এবং $\underline{u}$ ভেক্টরের ধারক রেখা AB। P ও Q বিন্দু থেকে অংকিত লম্ব AB রেখাকে যথাক্রমে L ও M বিন্দুতে ছেদ করে। আবার, P বিন্দু থেকে অংকিত লম্ব MQ রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে। AB রেখার উপর $\underline{v}$ এর অভিক্ষেপ $= LM = PR = |\overrightarrow{PQ}|\cos\theta = |\underline{v}|\cos\theta$; যেখানে, $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ θ এবং $0 < \theta < \pi$. একে লম্ব অভিক্ষেপও বলা হয়। এখন, ΔPQR ত্রিভুজে

$\cos\theta = \dfrac{PR}{PQ}$ বা, $PR = PQ\cos\theta$ বা,

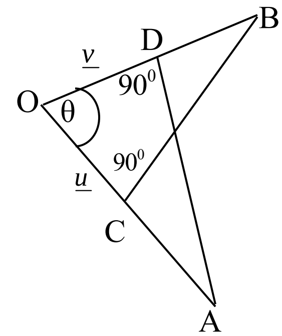
$LM = PQ\cos\theta = |\underline{v}|\dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|} = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|}$, $[\because \cos\theta = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|.|\underline{v}|}]$

$\therefore AB$ রেখার উপর $\underline{v}$ এর অভিক্ষেপ $= LM = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|}$ । অনুরূপে, দেখানো যায় যে, $\underline{u}$ এর অভিক্ষেপ বা লম্ব অভিক্ষেপ $= \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|}$ । অন্যভাবে, লিখা যায় $\underline{u}$ ভেক্টরের উপর বা বরাবর $\underline{v}$ এর অভিক্ষেপ $= \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরের উপর বা বরাবর $\underline{u}$ এর অভিক্ষেপ $= \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|}$

নোট: $\underline{u}.\underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta \Rightarrow |\underline{v}|\cos\theta = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|}$ যা $\underline{u}$ ভেক্টরের উপর $\underline{v}$ এর অভিক্ষেপ। তদ্রূপ $|\underline{u}|\cos\theta = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|}$ যা $\underline{v}$ ভেক্টরের উপর $\underline{u}$ এর অভিক্ষেপ।

একটি ভেক্টরের দিক বরাবর অপর একটি ভেক্টরের অংশক বা উপাংশ (Component of vector) নির্ণয়

$\underline{u}$ ভেক্টরের উপর $\underline{v}$ এর অভিক্ষেপ, $OC = OB\cos\theta = |\underline{v}|\cos\theta.$ ধরুন, $\underline{u}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{u} = \dfrac{\underline{u}}{|\underline{u}|}.$ এখন অভিক্ষেপ $OC = |\underline{v}|\cos\theta$ কে একক ভেক্টর $\hat{u}$ দ্বারা গুণ করলে গুণফল $\overline{OC}$ একটি ভেক্টর হবে, যা $\underline{u}$ ভেক্টর বরাবর $\underline{v}$ ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক।



অর্থাৎ $\underline{u}$ ভেক্টর বরাবর বা দিকে $\underline{v}$ ভেক্টরের অংশক $\overrightarrow{OC} = |\underline{v}|\cos\theta\hat{u} = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{\underline{v}}(\hat{u}).$

অনুরূপভাবে, $\underline{v}$ ভেক্টর বরাবর $\underline{u}$ ভেক্টরের অংশক $\overrightarrow{OD} = |\underline{u}|\cos\theta\hat{v} = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{\underline{u}}(\hat{v}).$

নোট: (১) $\underline{u}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{v}$ এর উপাংশের মান ও $\underline{u}$ এর উপর $\underline{v}$ এর অভিক্ষেপ বা লম্ব অভিক্ষেপ পরস্পর সমান অর্থাৎ উপাংশ ও অভিক্ষেপ এর পরমমান একই এবং দিক $\underline{u}$ এর দিক বরাবর। (২) কোনো ভেক্টরের উপাংশ বা অংশক একটি ভেক্টর রাশি এবং অভিক্ষেপ বা লম্ব অভিক্ষেপ একটি স্কেলার রাশি।

শিক্ষার্থীর কাজ	**1.** $\underline{u} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\underline{v} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন। **2.** $\underline{M} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ বরাবর $\underline{N} = 3\hat{i} + 7\hat{j} - 5\hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় করুন।

স্কেলার গুণজের মাধ্যমে ভেক্টরের অংশক (Component of vectors by dot product)

ধরুন, একই সমতলে $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ θ, তাহলে $\underline{v}$ বরাবর $\underline{u}$ এর অংশক $= u\cos\theta$

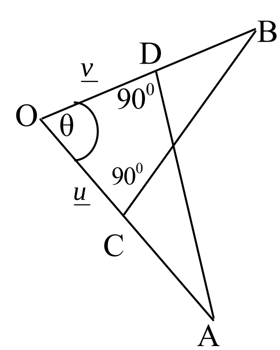
$\underline{u}$ বরাবর $\underline{v}$ এর অংশক $= v\cos\theta$

চিত্রে, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}, \overrightarrow{OB} = \underline{v}$

$\therefore \underline{v}$ বরাবর $\underline{u}$ এর অংশক $= OD = OA\cos\theta$

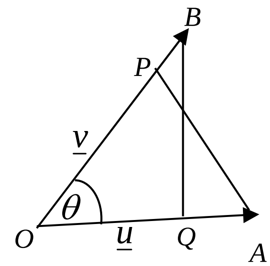
$= |\underline{u}|\cos\theta = |\underline{u}|\dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|.|\underline{v}|} = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{v}|}$ $[\because \cos\theta = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|.|\underline{v}|}]$

আবার, $\underline{u}$ বরাবর $\underline{v}$ এর অংশক $= OC = OB\cos\theta = |\underline{v}|\cos\theta = \dfrac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|}$



স্কেলার বা ডট্ গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta\,(0 \le \theta \le \pi)$ হলে,



$uv\cos\theta$ কে ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণন $\underline{u}.\underline{v} = uv\cos\theta = u(v\cos\theta) = v(u\cos\theta)$

ধরুন, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$ । A থেকে OB এর উপর AP লম্ব এবং B থেকে OA এর উপর BQ লম্ব অংকন করুন।

তাহলে, $ON = \underline{u}$ বরাবর $\underline{v}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং $OM = \underline{v}$ বরাবর $\underline{u}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ।

ΔOBQ থেকে $\cos\theta = \dfrac{OQ}{OB}$ বা, $OQ = OB\cos\theta = v\cos\theta$ [$\because v = |\underline{v}| = |\overrightarrow{OB}|$]

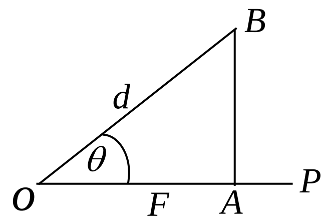
আবার, ΔOAP থেকে $\cos\theta = \dfrac{OP}{OA}$ বা, $OP = OA\cos\theta = u\cos\theta$ [$\because u = |\underline{u}| = |\overrightarrow{OA}|$]

তাহলে, $\underline{u}.\underline{v} = u(v\cos\theta) =$ ($\underline{u}$ ভেক্টরের মান)($\underline{u}$ বরাবর $\underline{v}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ)

অথবা, $\underline{u}.\underline{v} = v(u\cos\theta) =$ ($\underline{v}$ ভেক্টরের মান)($\underline{v}$ বরাবর $\underline{u}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ)

সুতরাং দুইটি ভেক্টরের স্কেলার বা ডট্ গুণজ হলো যে কোন একটি ভেক্টরের মান এবং তার উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের গুণফল।

স্কেলার গুণজের প্রয়োগঃ মনে করুন, একটি বস্তুর উপর $\underline{F}$ বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির সরণ $\underline{d} = \overrightarrow{OB}$ যখন $\underline{F}$ বলটি OP বরাবর ক্রিয়াশীল। $\underline{F}$ বলের দিকে সরণ $\underline{d}$ এর মান $= OA = OB\cos\theta$



আমরা জানি, কাজ = বল $\times$ সরণ

$\therefore W = F \times OA = F \times OB\cos\theta = Fd\cos\theta = \underline{F}.\underline{d}$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, কাজ $= \underline{F}$ এবং $\underline{d}$ এর স্কেলার গুণন।

অতএব, কাজ একটি স্কেলার রাশি।

উদাহরণ 1: একটি বস্তুর উপর $\underline{F} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ নিউটন বল প্রয়োগে বস্তুটির সরণ $\underline{d} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ মিটার হলে, প্রযুক্ত বলটি দ্বারা কাজের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ আমরা জানি, কাজ = বল এবং সরণের স্কেলার গুণজ

$\therefore W = \underline{F}.\underline{d} = (7\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}).(5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) = 7.5 - 4.3 - 2.4 = 35 - 12 - 8 = 15$ জুল

স্কেলার গুণজের ধর্ম (Properties of scalar or dot product)

$\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ যে কোন ভেক্টর এবং m, n যে কোন স্কেলার হলে,

(i) স্কেলার গুণজ বিনিময় বিধি মেনে চলে, অর্থাৎ $\underline{u}.\underline{v} = \underline{v}.\underline{u}$

(ii) স্কেলার গুণজ বন্টন বিধি মেনে চলে, অর্থাৎ $\underline{u}.(\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u}.\underline{v} + \underline{u}.\underline{w}$

(iii) $m\underline{u}.n\underline{v} = mn(\underline{u}.\underline{v})$ এবং $(m\underline{u}).\underline{v} = m(\underline{u}.\underline{v}) = \underline{u}.(m\underline{v})$

(iv) $\underline{u}.(-\underline{v}) = -(\underline{u}.\underline{v})$ এবং $(-\underline{u}).(-\underline{v}) = \underline{u}.\underline{v}$

নোটঃ স্কেলার গুণজের জন্য সংযোজন বিধি $(\underline{u}.\underline{v}).\underline{w}$ অর্থহীন, কারণ $\underline{u}.\underline{v}$ একটি স্কেলার রাশি যার সাথে $\underline{w}$ ভেক্টরের স্কেলার গুণজ হতে পারে না।

অংশকের মাধ্যমে দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণজ নির্ণয়

মনে করুন, $\underline{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ এবং $\underline{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর। ভেক্টর দ্বয়ের স্কেলার বা ডট্ গুণজ =

$$\underline{u}.\underline{v} = (u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}).(v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

$$\left[\because \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1; \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0\right]$$

ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য নির্ণয়

মনে করুন, $\underline{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ $\quad \therefore |\underline{u}|^2=\underline{u}.\underline{u}=\left(u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}\right).\left(u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}\right)=u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}+u_3^{\ 2}.$

অতএব, $|\underline{u}|=u=\sqrt{u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}+u_3^{\ 2}}$.যা $\underline{u}$ ভেক্টরের মান বা দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে।

দুইটি ভেক্টরের অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয়

মনে করুন, $\underline{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ এবং $\underline{v}=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর ও এদের মধ্যবর্তী কোণ θ। তাহলে,

$$\cos\theta=\frac{\underline{u}.\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}+u_3^{\ 2}}.\sqrt{v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}+v_3^{\ 2}}}$$

$$\therefore \theta=\cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^{\ 2}+u_2^{\ 2}+u_3^{\ 2}}.\sqrt{v_1^{\ 2}+v_2^{\ 2}+v_3^{\ 2}}}\right)$$

দুইটি ভেক্টর লম্ব হওয়ার শর্ত

দুইটি ভেক্টর $\underline{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ ও $\underline{v}=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}$ লম্ব হওয়ার শর্ত, $\underline{u}.\underline{v}=0$

অর্থাৎ $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. $\underline{u}=6\hat{i}-7\hat{j}+3\hat{k}$ হলে, $\underline{u}$ এর মান নির্ণয় করুন। 2. $\underline{u}=5\hat{i}-7\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\underline{v}=2\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ ভেক্টর দ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন। 3. মনে করুন, $\underline{u}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ এবং $\underline{v}=2\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর। দেখান যে, ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

উদাহরণ 2: যদি $\underline{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ও $\underline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ হয়, তবে $\underline{A}+\underline{B}$ এবং $\underline{A}-\underline{B}$ নির্ণয় করুন। প্রমাণ করুন যে, $\underline{A}+\underline{B}$ ও $\underline{A}-\underline{B}$ পরস্পর লম্ব।

সমাধান: $\underline{A}+\underline{B}=\left(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}\right)+\left(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)=4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

এবং $\underline{A}-\underline{B}=\left(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}\right)-\left(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}\right)=-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$

এখন, $\left(\underline{A}+\underline{B}\right).\left(\underline{A}-\underline{B}\right)=\left(4\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right).\left(-2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}\right)=-8+3+5=-8+8=0$

যেহেতু ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণন শূন্য, সেহেতু ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।(প্রমাণিত)

উদাহরণ 3: $\underline{P}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\underline{Q}=3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ হলে $\underline{P}$ ও $\underline{Q}$ এর লব্ধি ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত ভেক্টর দ্বয়ের লব্ধি $=\underline{P}+\underline{Q}=\left(2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}\right)+\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right)=5\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

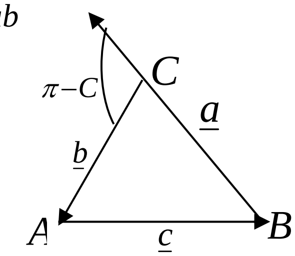
আবার, $\left|\underline{P}+\underline{Q}\right|=\sqrt{5^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{25+1+1}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

সুতরাং $\underline{P}+\underline{Q}$ ভেক্টরের সমান্তরাল একক ভেক্টর $=\dfrac{\left(\underline{P}+\underline{Q}\right)}{\left|\left(\underline{P}+\underline{Q}\right)\right|}=\dfrac{5\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\left(5\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন যে, $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$

সমাধান: $\left(\underline{a}+\underline{b}\right)^2=\left(\underline{a}+\underline{b}\right).\left(\underline{a}+\underline{b}\right)=\underline{a}.\underline{a}+\underline{a}.\underline{b}+\underline{b}.\underline{a}+\underline{b}.\underline{b}=a^2+2a.b+b^2$

উদাহরণ 5: ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করুন যে, কোন ΔABC এ $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



সমাধান: চিত্রে ΔABC -এ মনে করুন $\overrightarrow{BC} = \underline{a}, \overrightarrow{CA} = \underline{b}$

তাহলে $\overrightarrow{AB} = \underline{a} - \underline{b} = \underline{c}$

$\therefore \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = \left(\underline{a}-\underline{b}\right)^2 = \underline{a}^2 - 2\underline{a}.\underline{b} + \underline{b}^2$

বা, $\underline{c}^2 = c^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2$

$\therefore \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ সূত্রটি ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র নামে পরিচিত। অনুরূপভাবে $\cos A, \cos B$ নির্ণয় করা যায়।

বিকল্প প্রমাণ: মনে করুন, $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ বাহুত্রয় যথাক্রমে, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ভেক্টরগুলি প্রকাশ করে। ভেক্টর ত্রিভুজ সূত্র থেকে পাই, $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c} = 0$ বা, $\underline{c} = -\left(\underline{a}+\underline{b}\right) \therefore \underline{c}.\underline{c} = \left\{-\left(\underline{a}+\underline{b}\right)\right\}.\left\{-\left(\underline{a}+\underline{b}\right)\right\}$

বা, $c^2 = \left(\underline{a}+\underline{b}\right).\left(\underline{a}+\underline{b}\right) = \underline{a}.\underline{a} + \underline{a}.\underline{b} + \underline{b}.\underline{a} + \underline{b}.\underline{b} = a^2 + 2\underline{a}.\underline{b} + b^2 \left[\because \underline{a}.\underline{b} = \underline{b}.\underline{a}\right]$

বা, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\left(\pi - C\right) = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ বা, $2ab\cos C = a^2+b^2-c^2$

$\therefore \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ (প্রমাণিত)

শিক্ষার্থীর কাজ	$(\text{i})\ c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C,\quad (\text{ii})\ b^2 = a^2+c^2-2ac\cos B,$ $(\text{iii})\ a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ প্রমাণ করুন।

উদাহরণ 6. $\vec{P} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ হলে, $\vec{P}.\vec{Q}$-এর মান এবং উহাদের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\vec{P}.\vec{Q} = \left(3\hat{i}+5\hat{j}-2\hat{k}\right).\left(2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}\right) = 3.2 + 5.(-4) + (-2).5 = 6 - 20 - 10 = -24$

$\left[\because \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1\right]$ এবং $\left[\because \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0\right]$

আবার, এদের অন্তর্গত কোণ θ হলে $\vec{P}.\vec{Q} = \left|\vec{P}\right|.\left|\vec{Q}\right|\cos\theta$ বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{\left|\vec{P}\right|\left|\vec{Q}\right|}$

কিন্তু $\left|\vec{P}\right| = \sqrt{3^2+5^2+1^2} = \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35}$

এবং $\left|\vec{Q}\right| = \sqrt{2^2+(-4)^2+5^2} = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{\left|\vec{P}\right|\left|\vec{Q}\right|} = \dfrac{-24}{\sqrt{35}.3\sqrt{5}} = \dfrac{-8}{\sqrt{35}.\sqrt{5}} = \dfrac{-8}{\sqrt{175}} = \dfrac{-8}{5\sqrt{7}} \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{-8}{5\sqrt{7}}\right)$

উদাহরণ 7. $\vec{Q} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$ এর উপর $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ এবং অংশক (বা উপাংশ) নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, দেওয়া আছে ভেক্টর $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{P}.\vec{Q} = \left(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right).\left(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}\right) = 1.3 + (-2).(-6) + 2.2 = 3 + 12 + 4 = 19$

$\left|\vec{Q}\right| = \sqrt{3^2+(-6)^2+2^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$

$\vec{Q}$ এর উপর $\vec{P}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ $\left|\vec{P}\right|\cos\theta=\dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{\left|\vec{Q}\right|}$ এখানে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর অন্তর্গত কোণ$=\theta$

$\therefore \left|\vec{P}\right|\cos\theta=\dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{\left|\vec{Q}\right|}=\dfrac{19}{7}$ । অর্থাৎ লম্ব অভিক্ষেপ $\left|\vec{P}\right|\cos\theta=P\cos\theta=\dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{\left|\vec{Q}\right|}=\dfrac{19}{7}$

$\vec{Q}$ এর উপর $\vec{P}$ এর উপাংশ বা অংশক $=\dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{\left|\vec{Q}\right|}.\vec{Q}$ ভেক্টর বরাবর একক ভেক্টর$=\dfrac{19}{7}.\dfrac{\vec{Q}}{\left|\vec{Q}\right|}=\dfrac{19}{7}.\left(\dfrac{3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}}{7}\right)$

বা, $\vec{Q}$ এর উপর $\vec{P}$ এর উপাংশ বা অংশক = (অভিক্ষেপ)$.\dfrac{\vec{Q}}{\left|\vec{Q}\right|}=\dfrac{19}{7}.\dfrac{\vec{Q}}{\left|\vec{Q}\right|}$

$=\dfrac{19}{7}.\left(\dfrac{3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}}{7}\right)=\dfrac{57\hat{i}-114\hat{j}+38\hat{k}}{49}$

উদাহরণ 8. শিক্ষক শিক্ষার্থীদের তিনটি ভেক্টর লিখতে বললেন ঃ $\vec{A}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{B}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $\vec{C}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$

(ক) উদ্দীপকের ভেক্টরগুলি থেকে $\vec{A}.\vec{B}$ নির্ণয় করুন।

(খ) উদ্দীপকের ভেক্টরগুলি থেকে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর পরস্পরের উপর অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন।

(গ) ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে প্রমাণ করুন ।

সমাধান: (ক) $\vec{A}.\vec{B}=\left(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right).\left(\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}\right)=3.1+(-2).(-3)+1.5=3+6+5=14$

(খ) এখন, $\left|\vec{A}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$, $\left|\vec{B}\right|=\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35}$

$\vec{A}$ বরাবর $\vec{B}$ এর অভিক্ষেপ$=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ ও $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ$=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}=\dfrac{14}{\sqrt{35}}$

(গ) এখন, $\left|\vec{A}\right|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$, $\left|\vec{B}\right|=\sqrt{1^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35}$ ও

$\left|\vec{C}\right|=\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$

যেহেতু $\left|\vec{A}\right|^2=A^2, \left|\vec{B}\right|^2=B^2, \left|\vec{C}\right|^2=C^2 \therefore A^2+C^2=\left(\sqrt{14}\right)^2+\left(\sqrt{21}\right)^2=14+21=35$

এবং $B^2=\left(\sqrt{35}\right)^2=35$, অতএব, $A^2+C^2=35=B^2$ অর্থাৎ ভেক্টর তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৭

1. ভেক্টর পদ্ধতিতে দেখান যে, কোনো ত্রিভুজ ABC -এ $(i)\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $(ii)\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
2. ভেক্টরের সাহায্যে দেখান যে, ΔABC -এ (i) $c=a\cos B+b\cos A$, (ii) $b=c\cos A+a\cos C$, (iii) $a=c\cos B+b\cos C$
3. $2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।

4. $\overrightarrow{U}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}, \overrightarrow{V}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ হলে, V ভেক্টরের উপর U ভেক্টরের অভিক্ষেপ এবং U ভেক্টরের উপর V ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন।

5. (i) $\overrightarrow{M}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \overrightarrow{N}=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, M এবং N ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

(ii) $\overrightarrow{M}=\hat{i}+\hat{j}, \overrightarrow{N}=\hat{k}$ হলে দেখান যে, M এবং N ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব।

(iii) a -এর মান কত হলে, $\overrightarrow{P}=5\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$ ও $\overrightarrow{Q}=15\hat{i}+a\hat{j}+18\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে?

(iv) λ -এর মান কত হলে, $\overrightarrow{P}=4\hat{i}+\lambda\hat{j}-2\hat{k}$ ও $\overrightarrow{Q}=3\hat{i}+2\hat{j}-7\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে?

6. $2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।

7. যদি $\overrightarrow{R}=\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\overrightarrow{S}=4\hat{i}+6\hat{j}-\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর হয়, R ভেক্টরের উপর S ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন।

8. $\overrightarrow{M}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}, \overrightarrow{N}=2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর হলে, N ভেক্টরের দিক বরাবর M ভেক্টরের অংশক নির্ণয় করুন।

9. $\overrightarrow{A}=7\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}, \overrightarrow{B}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর হলে, A ভেক্টরের দিক বরাবর B ভেক্টরের অংশক এবং B ভেক্টরের দিক বরাবর A ভেক্টরের অংশক ও লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় করুন।

10. $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ও $\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

11. $\overrightarrow{A}=2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

12. দুইটি ভেক্টর $\overrightarrow{A}=2\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B}=4\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একটি লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

13. $\overrightarrow{P}=3\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}, \ \overrightarrow{Q}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ দুইটি ভেক্টর লক্ষ্য করুন এবং নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দিন ঃ

(ক) $\overrightarrow{P}.\overrightarrow{Q}$ নির্ণয় করুন।

(খ) $\overrightarrow{Q}$ এর দিক বরাবর $\overrightarrow{P}$ এর অংশক নির্ণয় করুন।

(গ) $\overrightarrow{P}$ এবং $\overrightarrow{Q}$ এর সমতলে লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

14. $\overrightarrow{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B}=2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}$ হলে, ভেক্টর দুইটির অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয় করুন।

15. $P(2,1,3)$ এবং $Q(1,4,-2)$ ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণফল নির্ণয় করুন।

16. λ এর কোন মানের জন্য $\overrightarrow{P}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{Q}=\lambda\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে?

(ক) 3 (খ) -12 (গ) 12 (ঘ) -3

একাদশ শ্রেণির একজন ছাত্রকে দুইটি ভেক্টর লিখতে বলায় তিনি লিখেছেন, $\overrightarrow{P}=3\hat{i}+\hat{j}-6\hat{k}$, $\overrightarrow{Q}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$

উপরের তথ্যের আলোকে 17-18 প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ

17. $\overrightarrow{P}$ ভেক্টরটি $Y-$অক্ষের সাথে নিচের কোন কোণটি উৎপন্ন করে?

(ক) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (খ) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (গ) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right)$ (ঘ) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

18. $\overrightarrow{Q}$ ভেক্টরের দিক বরাবর একক ভেক্টর নিচের কোনটি?

(ক) $\frac{1}{7}\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)$ (খ) $-\frac{1}{7}\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)$ (গ) $\pm\frac{1}{7}\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)$ (ঘ) $\pm\frac{1}{7}\left(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}\right)$

19. $\overrightarrow{A}=3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\overrightarrow{B}=-\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ হলে, $\overrightarrow{A}$ ও $\overrightarrow{B}$ ভেক্টর দুইটির লব্ধির সমান্তরাল একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

20. $\vec{P}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \vec{Q}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{R}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ হলে, $(\vec{P}.\vec{R})\vec{Q}-(\vec{P}.\vec{Q})\vec{R}$ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৬.৮ ভেক্টরের ভেক্টর গুণন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

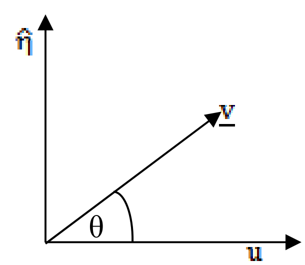
- ভেক্টরের ভেক্টর গুণন ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ভেক্টর গুণজের ধর্ম ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- ভেক্টর গুণজকে ভেক্টর দুইটির অংশকের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ভেক্টর গুণজ, ডানহাতি স্ক্রু, সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, লম্ব একক ভেক্টর, সমান্তরাল ভেক্টর

মূলপাঠ

ভেক্টরের ভেক্টর ক্রস গুণন (Vector or cross product of two vectors)

দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\theta(0\le\theta\le\pi)$ হলে, $uv\sin\theta\hat{\eta}$ কে ভেক্টর দুইটির ভেক্টর গুণন বা ক্রস গুণন বলে। এই গুণনকে $\underline{u}\times\underline{v}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এখানে $|\underline{u}|=u, |\underline{v}|=v$ এবং $\hat{\eta}$ একটি একক ভেক্টর যার দিক অর্থাৎ $\underline{u}\times\underline{v}$ এর দিক ঘূর্ণায়মান ডানহাতি স্ক্রুকে প্রথম ভেক্টর থেকে দ্বিতীয় ভেক্টরের দিকে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর সমতলের উপর লম্ব বরাবর ঘুরালে যেদিকে অগ্রসর হয় সেদিকে, যখন ঘূর্ণন ঘড়ির কাঁটা ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে হয় অর্থাৎ θ ধনাত্মক হয়। গাণিতিকভাবে, $\underline{u}\times\underline{v}=uv\sin\theta\hat{\eta}$



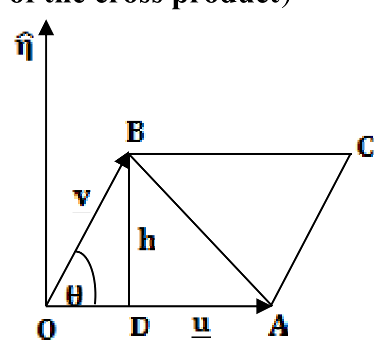
ভেক্টরের ভেক্টর গুণনের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা **(Geometrical interpretation of the cross product)**

$OACB$ একটি সামান্তরিক অংকন করুন। উহার OA এবং OB দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা যথাক্রমে $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটি সূচিত করা হলো। ধরুন, $\angle AOB=\theta$ এবং $BD=h,$ সামান্তরিকের উচ্চতা। তাহলে, ভেক্টরদ্বয়ের ক্রস গুণন,

$$\underline{u}\times\underline{v}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta\hat{\eta}=OA.OB\sin\theta\hat{\eta}$$

বা, $\underline{u}\times\underline{v}=OA.OB\sin\theta\hat{\eta}=OA.h.1=OA.h=2.\frac{1}{2}OA.h$

বা, $\underline{u}\times\underline{v}=2(\Delta OAB)=OACB$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।



সুতরাং দুইটি ভেক্টরের ক্রস গুণফলের পরম মান সংশ্লিষ্ট সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

অন্যভাবে, $OACB$ একটি সামান্তরিক অংকন করুন। উহার OA এবং OB দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা যথাক্রমে $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টর দুইটি সূচিত করা হলো। ধরুন, $\angle AOB=\theta$ এবং $BD=h,$ সামান্তরিকের উচ্চতা। তাহলে, ভেক্টরদ্বয়ের ক্রস গুণন, $\underline{u}\times\underline{v}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta\hat{\eta}=OA.OB\sin\theta\hat{\eta}$

বা, $\underline{u} \times \underline{v} = OA.OB \sin\theta \hat{\eta} = OA.h.1 = OA.h =$ ভূমি $\times$ উচ্চতা $= OACB$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।
সুতরাং কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় দুইটি ভেক্টর দ্বারা সূচিত হলে উহাদের ক্রস গুণফলের পরম মান দ্বারা উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের নির্দেশিত হয়।

ভেক্টর গুণজের ধর্ম (Properties of vector product)

(i) মৌলিক একক ভেক্টরগুলির মধ্যে ক্রস গুণন হলো ঃ

$\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}| \sin 90^{o} \hat{\eta} = 1.1.1.\hat{k} = \hat{k}$,

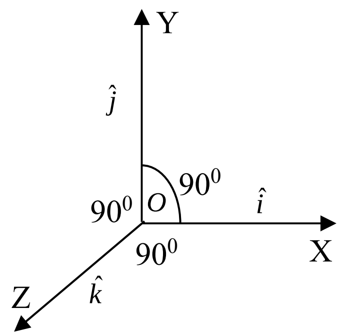
[কেননা $\hat{i}$ ও $\hat{j}$ এর সাথে লম্ব একক ভেক্টর $\hat{k}$]

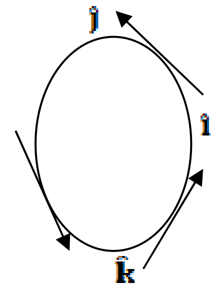
অনুরূপে, $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k},\ \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i},\ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

আবার $\hat{i} \times \hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}| \sin 0^{o} \hat{\eta} = 1.1.\text{o}.\hat{\eta} = 0$

অনুরূপে, $\hat{j} \times \hat{j} = 0, \hat{k} \times \hat{k} = 0$





(ii) ভেক্টর গুণন বিনিময় বিধি মেনে চলে না অর্থাৎ $\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{u} \times \underline{v}$ বা, $\underline{u} \times \underline{v} \neq \underline{v} \times \underline{u}$ কারণ এদের মান ও ধারক রেখা অভিন্ন কিন্তু দিক ভিন্ন।

(iii) দুইটি অশূন্য ভেক্টর $\underline{u}, \underline{v}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, $\underline{u} \times \underline{v} = 0$ কারণ $\theta = 0$ বা, $\theta = \pi$ হলে, $\sin\theta = 0$ অর্থাৎ দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের ভেক্টর গুণজ শূন্য হবে। অন্যভাবে, দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$ হবে, যখন $\underline{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ এবং $\underline{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$

(iv) সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহুদ্বয় $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টর দ্বারা সূচিত হলে, $|\underline{u} \times \underline{v}|$ দ্বারা সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

(v) $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টর দ্বারা কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু সূচিত হলে, উক্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে, $\frac{1}{2}|\underline{u} \times \underline{v}|$

(vi) $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টর দ্বারা কোনো সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ সূচিত হলে, উক্ত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল হবে, $\frac{1}{2}|\underline{u} \times \underline{v}|$

(vii) অংশকের মাধ্যমে ভেক্টর গুণজ ঃ যখন $\underline{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ এবং $\underline{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$ অংশকে বিভাজিত দুইটি ভেক্টর, তখন ভেক্টরের ভেক্টর গুণজ, $\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

(viii) $\underline{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k},\ \underline{v} = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$ এবং $\underline{w} = w_1\hat{i} + w_2\hat{j} + w_3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে, $(\underline{u} \times \underline{v}).\underline{w} = 0$ অর্থাৎ $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$

(ix) দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ হলে, এদের মধ্যবর্তী কোণ θ বিবেচনা করলে, $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\underline{u} \times \underline{v}|}{|\underline{u}||\underline{v}|}\right)$.

(x) $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ প্রত্যেক ভেক্টরের উপর লম্ব একক ভেক্টর $= \pm \frac{\underline{u} \times \underline{v}}{|\underline{u} \times \underline{v}|}$

(xi) (a) $(\underline{u} \times \underline{v}).\underline{w} = \underline{w}.(\underline{u} \times \underline{v})$

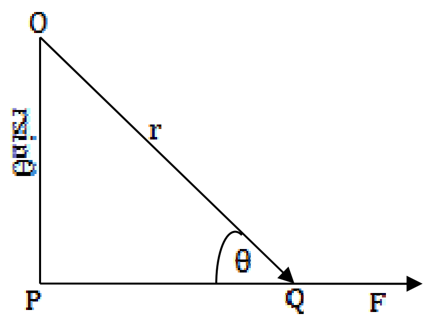
(b) $(\underline{u}\times\underline{v}).\underline{w}=\underline{v}.(\underline{w}\times\underline{u})=\underline{w}.(\underline{u}\times\underline{v})$

(c) $\underline{u}.(\underline{v}\times\underline{w})$, ইহাকে ত্রয়ী স্কেলার গুণন বলে।

(d) $\underline{u}.(\underline{v}\times\underline{w})$ দ্বারা $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$ ধার বিশিষ্ট সামান্তরিক আকারের ঘনবস্তুর আয়তন নির্দেশ করে।

ভেক্টর গুণজের প্রয়োগ

দুইটি ভেক্টরের ক্রস বা ভেক্টর গুণফল দ্বারা কোনো বিন্দুর চতুর্দিকে একটি বলের মোমেন্ট সূচিত হয়।



ধরুন, একটি বস্তু O বিন্দুতে আটকানো আছে। বস্তুটির উপর F বল প্রয়োগ করা হলো। F বলটির মান ও দিক $\overrightarrow{PQ}$ রেখাংশ দ্বারা সূচিত হলো। Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OQ}=r$, $OP\perp PQ$ এবং $\angle OQP=\theta$ কাজেই $OP=r\sin\theta$. সুতরাং ঘূর্ণন কেন্দ্র O থেকে r দূরত্বে কোনো বস্তুর উপর F বল প্রয়োগ করা হলে বস্তুটির বলের ভ্রামক বা মোমেন্ট ভেক্টর $=\vec{F}\times\vec{r}$ (O বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের ভ্রামক)

$=F\times r\sin\theta\hat{\eta}$ ($\hat{\eta}$ হলো F এবং r এর সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর)

সুতরাং ভ্রামকের মান $|\vec{F}\times\vec{r}|=Fr\sin\theta=F\times$ (F ভেক্টরের উপর r ভেক্টরের উলম্ব অংশক)

উদাহরণ 1: $\underline{F}=3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ বলটি $(-1,2,3)$ বিন্দুতে প্রয়োগ করলে $(4,3,5)$ বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে, $\underline{r}=(4+1)\hat{i}+(3-2)\hat{j}+(5-3)\hat{k}=5\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$

সুতরাং বলের ভ্রামক $\underline{M}=\underline{F}\times\underline{r}=(3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k})\times(5\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})=3\hat{i}+4\hat{j}-17\hat{k}$

অতএব ভ্রামকের মান $|\underline{M}|=|3\hat{i}+4\hat{j}-17\hat{k}|=\sqrt{3^2+4^2+(-17)^2}=\sqrt{9+16+289}=\sqrt{314}$

শিক্ষার্থীর কাজ	দেখান যে, $\underline{u}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$, $\underline{v}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\underline{w}=4\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত।

উদাহরণ 2: যদি $\underline{A}=3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ও $\underline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ হয়, তবে $\underline{A}\times\underline{B}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\underline{A}\times\underline{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 6\end{vmatrix}=9\hat{i}-27\hat{j}-9\hat{k}$

উদাহরণ 3: $P(-5,2,3)$ বিন্দুর চতুর্দিকে $\underline{F}=5\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ বলের ভ্রামক নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $\underline{F}=5\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\underline{r}=-5\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

সুতরাং $\underline{F}$ বলের ভ্রামক =

$$\underline{M}=|\underline{F}\times\underline{r}|=\left|(5\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k})\times(-5\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\right|=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 5 & 4 & -2\\ -5 & 2 & 3\end{vmatrix}$$ এর মডুলাস।

$\therefore \underline{M}=16\hat{i}-10\hat{j}+30\hat{k}$

অতএব ভ্রামকের মান $\left|\underline{M}\right| = \left|16\hat{i} - 10\hat{j} + 30\hat{k}\right| = \sqrt{16^2 + (-10)^2 + 30^2} = \sqrt{256 + 100 + 900} = \sqrt{1256}$ মোমেন্ট একক।

উদাহরণ 4: $\vec{P} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$ হলে, দেখান যে, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল।

সমাধান: এখানে, $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12+12) - \hat{j}(6-6) + \hat{k}(-4+4) = 0+0+0 = 0$

যেহেতু, $\vec{P} \times \vec{Q}$ সুতরাং $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল। (দেখানো হলো)

বিকল্প প্রমাণ: ধরুন, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\left|\vec{P}\right| = P = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$,

$\left|\vec{Q}\right| = Q = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$;

$\vec{P}.\vec{Q} = 1.2 + (-2).(-4) + 3.6 = 2+8+18 = 28$

এখন, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$ বা, $\cos\theta = \dfrac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ} = \dfrac{28}{\sqrt{14}.2\sqrt{14}} = \dfrac{28}{2.14} = \dfrac{28}{28} = 1$;

$\therefore \theta = \cos^{-1}(1) = 0^{\circ} = 0$

সুতরাং $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল। (দেখানো হলো)

উদাহরণ 5: $\vec{M} = 9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{N} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$ হলে, দেখান যে, $\vec{M}$ এবং $\vec{N}$ পরস্পর লম্ব।

সমাধান: ঃ এখানে, $\vec{M}.\vec{N} = (9\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}).(4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}) = 9.4 + 1.(-6) + (-6).5 = 36 - 6 - 30 = 0$

$\therefore \vec{M}.\vec{N} = 0$ অর্থাৎ প্রদত্ত $\vec{M}$ এবং $\vec{N}$ পরস্পর লম্ব। (দেখানো হলো)

বিকল্প প্রমাণ: ধরুন, $\vec{M}$ এবং $\vec{N}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ

$\left|\vec{M}\right| = M = \sqrt{9^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{81+1+36} = \sqrt{118}$

$\left|\vec{N}\right| = N = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 5^2} = \sqrt{16+36+25} = \sqrt{77}$

$\vec{M} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 9 & 1 & -6 \\ 4 & -6 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(5-36) - \hat{j}(45+24) + \hat{k}(-54-4) = -31\hat{i} - 69\hat{j} - 58\hat{k}$

$\left|\vec{M} \times \vec{N}\right| = \sqrt{(-31)^2 + (-69)^2 + (-58)^2} = \sqrt{961+4761+3364} = \sqrt{9086}$

আমরা জানি, $\left|\vec{M} \times \vec{N}\right| = MN\sin\theta$ বা, $\sin\theta = \dfrac{\left|\vec{M} \times \vec{N}\right|}{MN} = \dfrac{\sqrt{9086}}{\sqrt{118} \times \sqrt{77}} = \dfrac{\sqrt{9086}}{\sqrt{9086}} = 1$ বা, $\sin\theta = 1$

বা, $\theta = \sin^{1} 1 = 90^{\circ}$. অর্থাৎ প্রদত্ত $\vec{M}$ এবং $\vec{N}$ পরস্পর লম্ব। (দেখানো হলো)

উদাহরণ 6: $\vec{P} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুইটির উপর লম্ব এরূপ একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ উভয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর $=\pm\dfrac{\vec{P}\times\vec{Q}}{\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}$

এখন, $\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & -6\\ 4 & -3 & 1\end{vmatrix}=\hat{i}\left(2-18\right)-\hat{j}\left(3+24\right)+\hat{k}\left(-9-8\right)=-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k}$

$\therefore\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|=\sqrt{\left(-16\right)^2+\left(-27\right)^2+\left(-17\right)^2}=\sqrt{256+729+289}=\sqrt{1274}$

সুতরাং $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ উভয়ের উপর লম্ব একক ভেক্টর

$$=\pm\frac{\vec{P}\times\vec{Q}}{\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}=\pm\frac{-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k}}{\sqrt{1274}}=\pm\frac{1}{\sqrt{1274}}\left(-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k}\right)=\pm\frac{1}{7\sqrt{26}}\left(-16\hat{i}-27\hat{j}-17\hat{k}\right)$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৮

1. প্রমাণ করুন যে, $\vec{P}=7\hat{i}-\hat{k}, \vec{Q}=-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}, \vec{R}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় সমরেখ।
2. $\vec{P}=p_1\hat{i}+p_2\hat{j}+p_3\hat{k}$ এবং $\vec{Q}=q_1\hat{i}+q_2\hat{j}+q_3\hat{k}$ হলে, দেখান যে, $\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\end{vmatrix}$
3. দেখান যে, $\vec{P}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}, \vec{Q}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ এবং $\vec{R}=2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ এই তিনটি ভেক্টর একই সমতলে অবস্থিত।
4. একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন যার কর্ণ দুইটি যথাক্রমে $\vec{P}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\vec{Q}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$.
5. $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ দুইটি ভেক্টর ধরে প্রমাণ করুন যে, $\vec{P}.\vec{Q}=\vec{Q}.\vec{P}$ কিন্তু $\vec{P}\times\vec{Q}=-\vec{Q}\times\vec{P}$
6. $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ এবং $\vec{B}=\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে, $\vec{A}\times\vec{B}$ ধরে মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।
7. শিক্ষার্থী বন্ধুরা দুইটি ভেক্টর $\vec{P}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{Q}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ লিখুন, তা থেকে নিচের প্রশ্নগুলির উত্তর দিনঃ
   (ক) $\left|\overline{PQ}\right|$ নির্ণয় করুন।
   (খ) $\vec{P}$ এর দিক বরাবর $\vec{Q}$ এর উপাংশ নির্ণয় করুন।
   (গ) $\vec{P}, \vec{Q}$ এবং $\vec{P}\times\vec{Q}$ একই সমতলে অবস্থিত কি-না তা যাচাই করুন।
8. $\vec{F}=3\hat{i}+6\hat{j}+4\hat{k}$ বল কোনো বস্তুর উপর ক্রিয়ারত হয়ে, $\vec{r}=3\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k}$ সরণ ঘটালে কাজের পরিমাণ নির্ণয় করুন।
9. $\hat{j}+2\hat{k}$ বল $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ বিন্দু বরাবর ক্রিয়ারত হলে, $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ বিন্দুর সাপেক্ষে মোমেন্ট নির্ণয় করুন।
10. $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ এবং $2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ এর উপর লম্ব ভেক্টর এবং ঐ একই দিকে একটি একক ভেক্টর নির্ণয় করুন।
11. $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুইটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে-
    $\left(\text{i}\right)\vec{P}.\vec{Q}=0$ হলে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর লম্ব হবে।
    $\left(\text{ii}\right)\vec{P}\times\vec{Q}=0$ হলে, $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে।

(iii) $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর অন্তর্গত কোণ θ হলে, $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta; 0^0 \le \theta \le 90^0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

12. $\vec{P}\times\vec{Q}$ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{n}$ এর মান নিচের কোনটি?

(ক) $\dfrac{\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}{\vec{P}\times\vec{Q}}$ (খ) $\dfrac{\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}{\left|\vec{P}.\vec{Q}\right|}$ (গ) $\dfrac{\vec{P}\times\vec{Q}}{\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}$ (ঘ) $\dfrac{\left|\vec{P}.\vec{Q}\right|}{\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}$

13. $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি-

(ক) $\vec{P}\times\vec{Q}=0$ (খ) $\vec{P}.\vec{Q}=0$ (গ) $\vec{P}\times\vec{Q}=1$ (ঘ) $\vec{P}\times\vec{Q}=-1$

14. যে কোনো ত্রিভুজে প্রমাণ করুন যে, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

15. $\vec{P}=2\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{Q}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ ও $\vec{R}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ হলে, $\vec{P}\times\left(\vec{Q}\times\vec{R}\right)$ নির্ণয় করুন।

16. $(3,-1,2),(1,-1,-3),(4,-3,1)$ শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.১

1. (ক) 2. (খ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.২

1. (ঘ) 2. (গ) 3. (খ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৩

2. $\sqrt{76}$, 3. (i) সংজ্ঞা, (ii) $\left|\overline{PQ}\right|=\sqrt{69}$, (iii) $PQ=OP=\sqrt{69}$,

4. $PA=PB=PC=\sqrt{14}=$ গোলকের ব্যাসার্ধ। 5. (ক) 6. (ঘ) 7. (গ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৪

9. (a) $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AC}-\overline{AB}, \overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{AB}-\overline{AC}$ (b) $2\underline{b}-\underline{a}$ (c) সামান্তরিক 15. (খ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৫

1. (খ) 2. (ঘ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৬

1. $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=-3\lambda\hat{i}+3\lambda\hat{j}+6\lambda\hat{k}$

2. $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=(-2+\lambda)\hat{i}+(1+4\lambda)\hat{j}+(3-5\lambda)\hat{k}$

3. $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=(2+3t)\hat{i}+(2+3t)\hat{j}+(2+3t)\hat{k}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৭

3. X -অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$, Y -অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, Z -অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)$

4. V ভেক্টরের উপর U ভেক্টরের অভিক্ষেপ $=\frac{-7}{\sqrt{6}}$, U ভেক্টরের উপর V ভেক্টরের অভিক্ষেপ $=\frac{-7}{\sqrt{14}}$

5. $(\text{iii})\, a=6,\ (\text{iv})\, \lambda=-13,$

6. X -অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$, Y -অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$, Z -অক্ষের সাথে $\cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

7. $\frac{15}{\sqrt{6}}$ 8. $\frac{13}{225}\left(2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}\right)$

9. A ভেক্টরের দিক বরাবর B ভেক্টরের অংশক $=\frac{-17}{121}\left(7\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}\right)$ এবং B ভেক্টরের দিক বরাবর A ভেক্টরের অংশক $=\frac{-17}{9}\left(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$ ও B ভেক্টরের উপর A ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ $=\frac{-17}{3}$

10. $\frac{1}{5\sqrt{2}}\left(4\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}\right)$ 11. $\frac{1}{7}\left(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}\right)$ 12. $\frac{1}{7}\left(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}\right)$

13. (ক) 3, (খ) $\frac{3}{\sqrt{26}}\hat{b}$, (গ) $\frac{1}{\sqrt{1187}}\left(-17\hat{i}-27\hat{j}-13\hat{k}\right)$ 14. $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{13}{45}\right)$

15. 0 16. (ঘ) -3 17. (খ) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ 18. (ক) $\frac{1}{7}\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)$

19. $\frac{1}{7}\left(2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}\right)$ 20. $-2\hat{j}+2\hat{k}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৬.৮

4. $5\sqrt{3}$ 6. $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{14}}\right)$ 7. (ক) $\sqrt{6}$, (খ) $\frac{11}{\sqrt{14}}\hat{a}$, (গ) না,

8. 9 একক 9. 0 একক 10. $-\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ এবং $\frac{1}{\sqrt{53}}\left(-\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)$

11. (ক) i ও ii 12. (গ) $\frac{\vec{P}\times\vec{Q}}{\left|\vec{P}\times\vec{Q}\right|}$ 13. (ক) $\vec{P}\times\vec{Q}=0$

15. $9\hat{i}+26\hat{j}+20\hat{k}$ 16. $\frac{1}{2}\sqrt{165}$ বর্গ একক