বৃত্ত
(Circles)

ইউনিট ৫

ভূমিকা

একটি স্থির বিন্দু হতে যেসব বিন্দুর দূরত্ব সমান তাদের সেটকে একটি বৃত্ত বলে। স্থির বিন্দুকে বৃত্তটির কেন্দ্র এবং স্থির দূরত্বকে ইহার ব্যাসার্ধ বলা হয়। গ্রীক শব্দ Kirkos থেকে বৃত্ত (Circle) শব্দটি নেওয়া হয়েছে যার অর্থ আংটা। গাড়ীর চাকা, চন্দ্র, সূর্য গাছের কান্ডের প্রস্থচ্ছেদ প্রভৃতি বস্তু বৃত্তাকার দেখায়। জ্যামিতি, জ্যোতির্বিদ্যা, ক্যালকুলাস, কম্পিউটার গ্রাফিক্স ডিজাইন ইত্যাদিতে বৃত্ত ব্যবহার হয়ে থাকে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- পোলার স্থানাংকে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- $(x-a)^2 + (x-b)^2 = c^2$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন এবং কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৫.১: নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ
পাঠ ৫.২: পোলার স্থানাংকে বৃত্তের সমীকরণ
পাঠ ৫.৩: বৃত্তের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ
পাঠ ৫.৪: দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ
পাঠ ৫.৫: ব্যবহারিক

পাঠ ৫.১ নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ (Equation of Circle with Fixed Centre and Radius)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

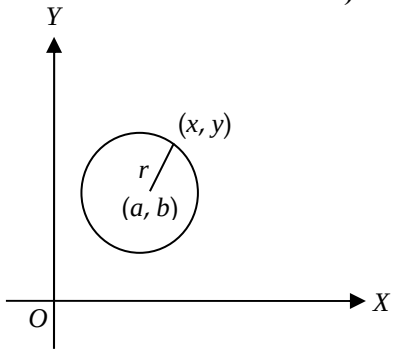
- নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ

মূলপাঠ

নির্দিষ্ট কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ (Equation of Circle with Fixed Centre and Radius)

(a) xy সমতলে নির্দিষ্ট বিন্দু (a, b) কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত একটি বক্ররেখা যার সকল বিন্দু হতে (a, b) বিন্দুর দূরত্ব r।



সুতরাং একটি বিন্দু (x, y) বৃত্তটির উপর অবস্থিত হবে যদি এবং কেবল যদি $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r$ [দুই বিন্দুর দূরত্বের সূত্র প্রয়োগ করে]

বা, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ হয়।

সুতরাং (a, b) কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$।

ইহাকে বৃত্তের আদর্শ সমীকরণ (Standard form of the equation of Circle) বলে।

যেমন, (-5, 3) কেন্দ্র ও 4 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ: $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 4^2$

বা, $x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 16$ বা, $x^2 + y^2 + 10x - 6y + 18 = 0$

উদাহরণ 1: বৃত্তের কেন্দ্র (4, 5) ও ব্যাসার্ধ 10 একক হলে, বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, বৃত্তের সমীকরণ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

এখানে, $a = 4$, $b = 5$ এবং $r = 10$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 10^2$ বা, $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 100$

বা, $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 59 = 0$

ইহাই নির্ণয় বৃত্তের সমীকরণ।

শিক্ষার্থীর কাজ	একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্র (3, 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ 6।

উদাহরণ 2: একটি বৃত্ত (4, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং উহার কেন্দ্রের স্থানাংক (1, –2); বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r

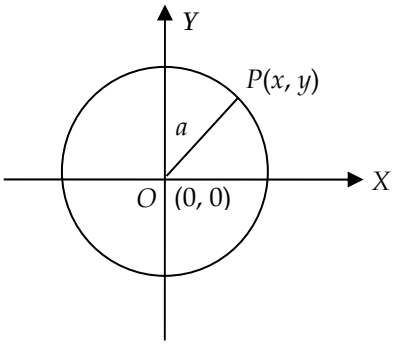
সুতরাং r = কেন্দ্র (1, –2) হতে বৃত্তের উপর (4, 2) বিন্দুর দূরত্ব

সুতরাং (1, –2) কেন্দ্র ও 5 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ,

$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5^2$

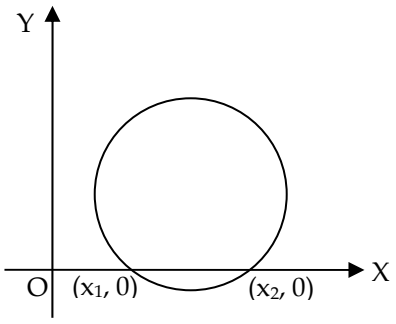
বা, $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 25$
বা, $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

নোট- ১: (a, b) কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট সমীকরণ, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ এর বিভিন্ন অবস্থা:
(i) কেন্দ্র (a, b), x -অক্ষের উপর অবস্থিত হলে $b = 0$, তখন বৃত্তের সমীকরণ, $(x - a)^2 + y^2 = r^2$
(ii) কেন্দ্র (a, b), y-অক্ষের উপর অবস্থিত হলে $a = 0$, তখন বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + (y - b)^2 = r^2$
(iii) কেন্দ্র মূলবিন্দুতে $(0, 0)$ অবস্থিত হলে বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = r^2$



(খ) বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ (General Equation of a Circle)
(a, b) কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ কে লেখা যায়:
$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$
বা, $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$
(a, b) নির্দিষ্ট বিন্দু ও r নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বলে $a^2 + b^2 - r^2$ ধ্রুবক।
ধরুন, $-a = g, -b = f$ এবং $a^2 + b^2 - r^2 = c$
সুতরাং বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$
এখানে, $a = -g, b = -f$
$\Rightarrow (a, b) = (-g, -f)$
এবং $a^2 + b^2 - r^2 = c$
বা, $(-g)^2 + (-f)^2 - c = r^2$
সুতরাং $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ $[\because r \geq 0]$
বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$
যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

নোট- ২: বৃত্তের $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণের বিভিন্ন অবস্থা:
(i) বৃত্তটি x-অক্ষকে $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ দুইটি বিন্দুতে ছেদ করলে, ছেদ বিন্দু দুইটিতে $y = 0$
সুতরাং $x^2 + 2gx + c = o$ সমীকরণের মূলদ্বয় x_1, x_2
$\therefore x_1 + x_2 = -2g, x_1x_2 = c$
সুতরাং বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষ হতে কর্তিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য
$= |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$
$= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$
$= \sqrt{4g^2 - 4c} = 2\sqrt{g^2 - c}$
অনুরূপভাবে
(i) y-অক্ষ হতে কর্তিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য $= 2\sqrt{f^2 - c}$
(ii) বৃত্তটি উভয় অক্ষকে স্পর্শ করলে, $g^2 = f^2 = c$



উদাহরণ 3: $x^2 + y^2 + 5^x + 8y - 1 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 5x + 8y - 1 = 0$ ---------- (i)

(i) নং সমীকরণকে সাধারণ সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = o$ এর সাথে তুলনা করে আমরা পাই,

$g = \frac{5}{2}, \quad f = 4$ এবং $c = -1$

$\therefore$ বৃত্তটির কেন্দ্র $= (-g, -f) = (-\frac{5}{2}, -4)$

এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-\frac{5}{2})^2 + (4)^2 - (-1)} = \sqrt{\frac{25}{4} + 16 + 1} = \frac{\sqrt{93}}{2}$ একক

শিক্ষার্থীর কাজ	$2x^2 + 2y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 4: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 1 = 0$ বৃত্তটির কেন্দ্রগামী এবং (1, 1) কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 1 = 0$ ---------- (i)

বৃত্তটির কেন্দ্র = (–3, –2)

আবার, নির্ণেয় বৃত্তটির কেন্দ্র (1, 1)

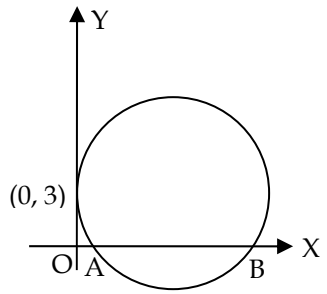
$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(1+3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তটির সমীকরণ, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$

উদাহরণ 5: এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা y-অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং x-অক্ষ হতে 8 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খন্ডিত করে।

সমাধান: মনে করুন বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ---------- (i)



যেহেতু বৃত্তটি y-অক্ষকে (0, 3) বিন্দুতে স্পর্শ করে

$\therefore y^2 + 2fy + c = (y-3)^2$

$\Rightarrow y^2 + 2fy + c = y^2 - 6y + 9$

উভয় পক্ষ থেকে y-এর সহগ এবং ধ্রুবক সংখ্যা তুলনা করে পাই,

$f = -3, c = 9$

x-অক্ষ হতে খন্ডিত অংশ,

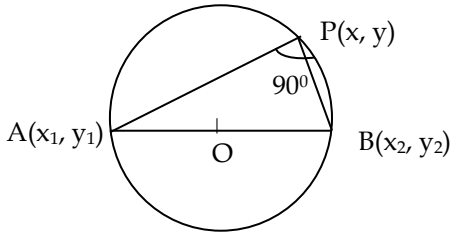
$2\sqrt{g^2 - c} = 8 \Rightarrow \sqrt{g^2 - c} = 4 \Rightarrow g^2 - c = 16 \Rightarrow g^2 - 9 = 16 \Rightarrow g^2 = 25$

বা, $g = \pm 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 \pm 10x - 6y + 9 = 0$

(গ) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু ধরে বৃত্তের সমীকরণ:

মনে করুন, সমতলে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ এবং AB-কে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তটির উপর $P(x, y)$ যেকোন একটি বিন্দু। যেহেতু অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ, তাই p বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থান করবে যদি এবং কেবল যদি $\angle APB = 90^o$ হয়।



সুতরাং $AP \perp BP$

$\therefore$ AP-এর ঢাল $\times$ BP-এর ঢাল $= -1$

$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} \times \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$

বা, $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$

বা, $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

সুতরাং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ:

$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

শিক্ষার্থীর কাজ	$(-4, 3)$ ও $(0, -1)$ বিন্দু দুইটিকে ব্যাসের প্রান্ত ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 6: $(0, -1)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অংকন করা হলে বৃত্তটির সমীকরণ এবং x-অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $(0, -1)$ ও $(2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাংশকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ:

$(x-0)(x-2) + (y+1)(y-3) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ ..... (i)

২য় অংশ: বৃত্তটি, x-অক্ষকে ছেদ করলে সমীকরণ (i) এ $y = 0$ বসিয়ে পাই,

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$

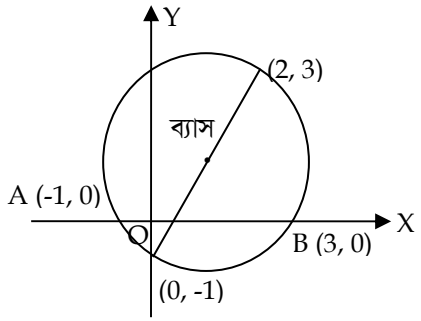
$\therefore x = -1$ অথবা 3

অর্থাৎ ছেদবিন্দুর স্থানাংক $(-1, 0)$ ও $(3, 0)$

মনে করুন, ছেদ বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A ও B

$\therefore$ x-অক্ষের ছেদাংশের পরিমাণ,

$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16} = 4$



সারসংক্ষেপ

- মূল বিন্দুতে কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = r^2$ যখন $(r \geq 0)$
- (a, b) কেন্দ্র ও r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
- বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, কেন্দ্রের স্থানাংক $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
- (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়কে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ: $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.১

1. একটি বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত এবং ব্যাসার্ধ 4 একক হলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক $(-3, 4)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 একক হলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্রের স্থানাংক $(5, 5)$ এবং বৃত্তটি $(8, 9)$ বিন্দু দিয়ে যায়।
4. যে বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -5)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $(1, -2)$ বিন্দু দিয়ে যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. $4x^2 + 4y^2 + 16x - 24y + 3 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

6. একটি বৃত্ত (1, –2) ও (4, –3) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং যার কেন্দ্র $3x + 4y = 7$ রেখার উপর অবস্থিত, তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
7. মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী এবং অক্ষদ্বয় হতে a ও b অংশ ছেদকারী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৫.২ পোলার স্থানাংকে বৃত্তের সমীকরণ (Equation of Circle in Polar Coordinate)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- পোলার স্থানাংকে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বৃত্তের সাধারণ পোলার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	পোল, পোলার স্থানাংক

মূলপাঠ

পোলার স্থানাংকে বৃত্তের সমীকরণ

(ক) বৃত্তের কেন্দ্র পোল বা মূলবিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ R হলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ

মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং R ব্যসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কার্তেসীয় সমীকরণ, $x^2 + y^2 = R^2$

যদি বৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু $P(x, y)$-এর

পোলার স্থানাংক $P(r, \theta)$ হয় তবে, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

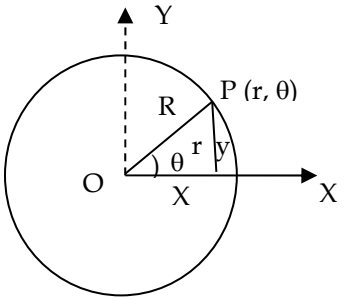
সুতরাং $(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = R^2$

বা, $r^2(\cos^2\theta) + r^2\sin^2\theta = R^2$

বা, $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = R^2$

বা, $r^2 = R^2$

বা, $r = R$ যা θ-এর যেকোন মানের জন্য সত্য।



$\therefore$ R ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র পোল হলে এবং বৃত্তের উপর যেকোন বিন্দুর পোলার স্থানাংক (r, θ) হলে বৃত্তের সমীকরণ, $r = R$.

(খ) বৃত্তের সাধারণ পোলার সমীকরণ

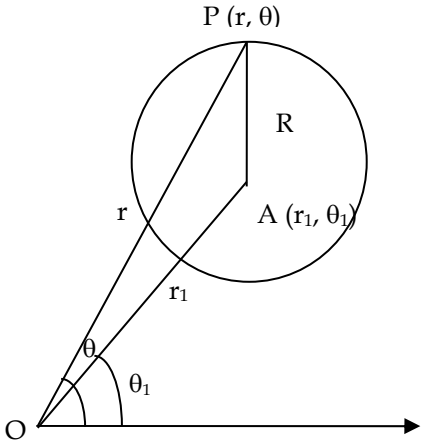
মনে করুন, কোন একটি বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক $A\ (r_1, \theta_1)$ ও ব্যাসার্ধ R। বৃত্তের উপর যেকোন একটি বিন্দুর স্থানাংক $P\ (r, \theta)$.

সুতরাং ΔOAP-এ $OP = r$, $OA = r_1$

$AP = R$ এবং $\angle AOP = \theta - \theta_1$

সুতরাং ΔOAP-এর ত্রিভুজের কোসাইন সূত্র মতে

$$\cos\angle AOP = \frac{OP^2 + OA^2 - AP^2}{2(OP)(OA)}$$



বা, $\cos(\theta - \theta_1) = \dfrac{r^2 + r_1^2 - R^2}{2rr_1}$

বা, $r^2 + r_1^2 - R^2 = 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1)$

বা, $r^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 = R^2$,

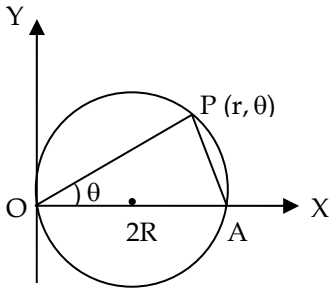
ইহাই বৃত্তের সাধারণ পোলার সমীকরণ।

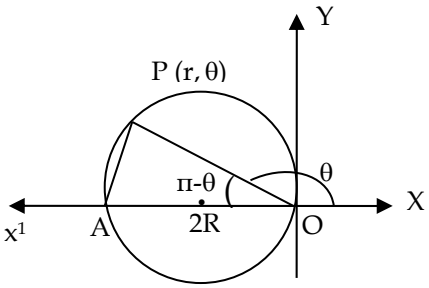
(গ) পোল দিয়ে যায় এবং পোলার অক্ষ বরাবর ব্যাস বা পোলার অক্ষের উপর কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ

মনে করুন, বৃত্তের কেন্দ্র পোলার অক্ষের উপর এবং বৃত্তটি পোল (মূল বিন্দু) O ও পোলার অক্ষের উপর A বিন্দু দিয়ে যায়। $OA = 2R$.

বৃত্তের উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাংক $P(r, \theta)$

$\therefore$ OPA-এ $\angle OPA = 90^0$ বলে $\dfrac{OP}{OA} = \cos\theta$ বা, $r = 2R\cos\theta$





ডান পাশের চিত্রের বৃত্তটির পোলার সমীকরণ, $r = -2R\cos\theta$

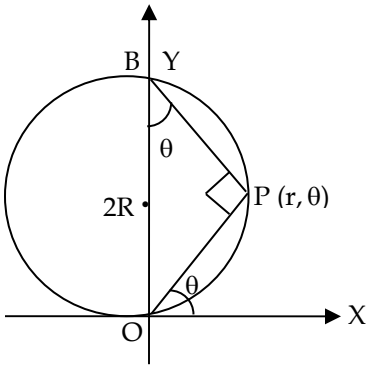
ঘ. পোল বা মূলবিন্দু গামী এবং ব্যাস পোলার অক্ষের উপর লম্ব বা কার্তেসীয় y-অক্ষ বরাবর এমন বৃত্তের পোলার সমীকরণ

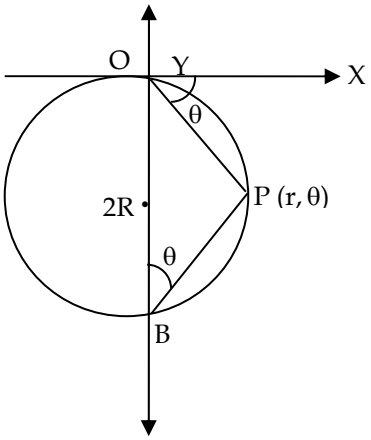
মনে করুন, বৃত্তটির উপর যেকোন বিন্দুর স্থানাংক $P(r, \theta)$ এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ R, বৃত্তটি মূলবিন্দু বা পোল দিয়ে যায় এবং y-অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করলে, $OB = 2R$

স্পষ্টত ΔOBP-এ $\angle OBP = \theta$ এবং $\angle OPB$ এক সমকোণ।

সুতরাং $\dfrac{OP}{OB} = \sin\angle OBP = \sin\theta$

$\therefore$ $r = 2R\sin\theta$





ডান পাশের চিত্রের বৃত্তটির পোলার সমীকরণ, $r = -2R\sin\theta$

উদাহরণ 1: $x^2 + y^2 - 10x = 0$ বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণে $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ বসিয়ে পাই,
$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 10(r\cos\theta) = 0$
বা, $r^2 - 10r\cos\theta = 0$
বা, $r^2 = 10r\cos\theta$, যা বৃত্তটির পোলার সমীকরণ।

শিক্ষার্থীর কাজ	$(2, \frac{\Pi}{2})$ কেন্দ্র এবং 4 একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 2: পোলগামী বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্র $(4, 45^0)$।
সমাধান: মনে করুন, বৃত্তের ব্যাসার্ধ R।
তাহলে বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $R^2 = r^2 + 4^2 - 2r.4\cos(\theta - 45^0)$ ---------- (i)
(i) নং বৃত্তটি পোল $(0, 0^0)$ বিন্দুগামী বলে, $R^2 = 0^2 + 16 - 8.0.\cos(0^0 - 45^0)$
$\Rightarrow R = 4$.
$\therefore$ নির্ণয় সমীকরণ, $16 = r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - 45^0)$
বা, $r^2 = 8r\cos(\theta - 45^0)$

সারসংক্ষেপ

- R ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র পোল হলে বৃত্তের সমীকরণ $r = R$।
- বৃত্তের সাধারণ পোলার সমীকরণ, $r^2 - 2rr_1\cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 = R^2$, যেখানে কেন্দ্র (r_1, θ_1) ও ব্যাসার্ধ R।
- পোল দিয়ে যায় এবং পোলার অক্ষ বরাবর ব্যাস বা পোলার অক্ষের উপর কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ, $r = \pm 2R\cos\theta$।
- পোল বা মূল বিন্দুগামী এবং ব্যাস পোলার অক্ষের উপর লম্ব বা কার্তেসীয় y-অক্ষ বরাবর এমন বৃত্তের পোলার সমীকরণ, $r = \pm 2R\sin\theta$।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.২

1. প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে এরূপ বৃত্তের পোলার সমীকরণ নির্ণয় করুন:
   (a) কেন্দ্র $(4, 30^0)$ ব্যাসার্ধ 5
   (b) কেন্দ্র $(3, 0^0)$ এবং পোলগামী
   (c) পোল, $(a, 0^0)$, $(b, 90^0)$ বিন্দুগামী।
2. প্রতিটি বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন:
   (a) $r^2 - 4\sqrt{3}r\cos\theta - 4r\sin\theta + 15 = 0$
   (b) $r = 2a\cos\theta$
3. একটি বৃত্তের কেন্দ্র x-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে 7 একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 4 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
4. একটি বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর, যা মূলবিন্দু থেকে ধনাত্মক দিকে ৪ একক দূরে অবস্থিত। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 5 একক হলে, বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $(3, 30^o)$ এবং বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
6. একটি বৃত্তের কেন্দ্র $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ এবং বৃত্তটি y অক্ষকে স্পর্শ করে; বৃত্তটির পোলার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৫.৩ বৃত্তের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ (Equation of Tangent and Normal to a Circle)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

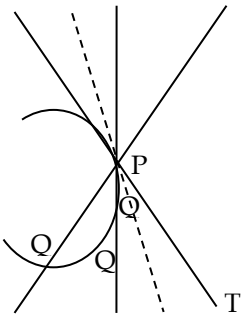
- বৃত্তের স্পর্শক ও অভিলম্বের চিত্র অংকন করে সনাক্ত করতে পারবেন,
- বৃত্তের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	স্পর্শক, অভিলম্ব

মূলপাঠ

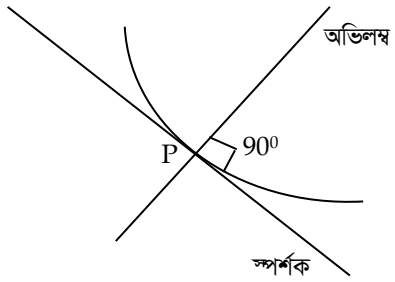
স্পর্শক (Tangent of a Curve)

মনে করুন, PQ সরলরেখা একটি বক্ররেখাকে P, Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। যদি PQ সরল রেখাটিকে P বিন্দুতে স্থির রেখে এমনভাবে ঘুরাই যেন Q বিন্দু ক্রমশ P বিন্দুর নিকটবর্তী হয়ে সর্বশেষে P বিন্দুতে সমাপতিত হয়ে স্থির হয় তবে সর্বশেষ সরল রেখাটি P বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক হবে।



কোনো সরলরেখা একটি বক্ররেখাকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করলে সরল রেখাটিকে বক্ররেখাটির ঐ বিন্দুতে স্পর্শক বলে।

যে বিন্দুতে স্পর্শকটি বক্ররেখাটির সাথে মিলিত হয় তাকে স্পর্শ বিন্দু (Point of Contact) বলে।



অভিলম্ব (Normal to a Curve): কোনো সমতলের একটি বক্ররেখার উপর যেকোনো P বিন্দুগামী একটি সরল রেখাকে ঐ বক্ররেখার P বিন্দুতে অভিলম্ব বলা হবে যদি সরলরেখাটি P বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শকের উপর লম্ব হয়। অভিলম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী। অর্থাৎ বক্ররেখার স্পর্শক ও অভিলম্ব পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করে।

(ক) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ:

মনে করুন, $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের উপর দুইটি বিন্দু, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$

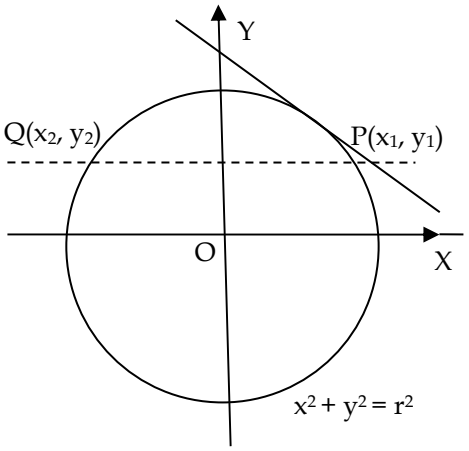
সুতরাং $x_1^2 + y_1^2 = r^2 = x_2^2 + y_2^2$

বা, $x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$

বা, $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = (y_2 + y_1)(y_2 - y_1)$

বা, $\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$ ---------- (i)



সুতরাং PQ সরলরেখার সমীকরণ:

$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

বা, $y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1)$ ---------- (ii)

Q বিন্দুটি P বিন্দুর উপর সমাপতিত হলে, $x_1 = x_2$ এবং $y_1 = y_2$

(ii) নং সমীকরণটি হবে, $y - y_1 = -\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1)$

$\Rightarrow yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2 \Rightarrow xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 \Rightarrow xx_1 + yy_1 = r^2$

$\therefore x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ: $xx_1 + yy_1 = r^2$

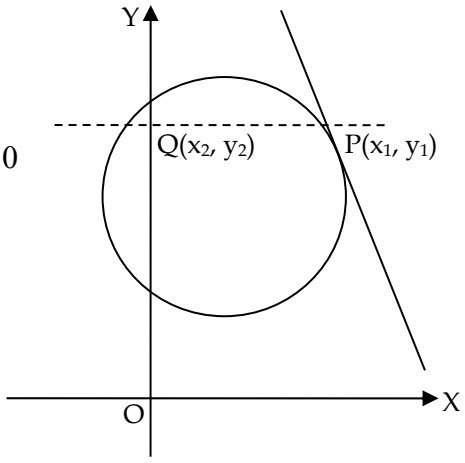
মনে করুন, অভিলম্বের সমীকরণ, $xy_1 - yx_1 = k$ ---------- (iii)

(iii) নং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে যায় বলে, $x_1y_1 - y_1x_1 = k$ বা, $k = 0$.

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ, $xy_1 - yx_1 = 0$.

খ. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ:

মনে করুন, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ---------- (i)



বৃত্তের উপর $P(x_1,y_1)$ ও $Q(x_2,y_2)$ দুইটি বিন্দু।

সুতরাং $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ ------ (ii)

$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$ ---------- (iii)

(ii)–(iii): $x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 + 2g(x_1 - x_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0$

বা, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$
$+ 2g(x_1 - x_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0.$

বা, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2g) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_2 + 2f) = 0.$

বা, $-\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ---------- (iv)

এখন PQ সরলরেখার সমীকরণ,

$y - y_1 = -\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

বা, $y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}(x - x_1)$ ---------- (v)

Q, P-এর উপর সমাপতিত হলে, $x_1 = x_2, y_1 = y_2$

এবং (v) সমীকরণটি, $y - y_1 = -\frac{2x_1 + 2g}{2y_1 + 2f}(x - x_1)$

বা, $(y - y_1)(y_1 + f) = -(x_1 + g)(x - x_1)$

বা, $yy_1 - y_1^2 + fy - fy_1 + xx_1 - x_1^2 + gx - gx_1 = 0$

বা, $xx_1 + yy_1 + gx + fy + gx_1 + fy_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1$

বা, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) = -c$
বা, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

> সুতরাং $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ,
> $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

যেহেতু অভিলম্ব স্পর্শকের উপর লম্ব, তাই মনে করুন, (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,
$(y_1 + f)x - (x_1 + g)y = k$ ---------- (vi)
যেহেতু (vi) নং সমীকরণ (x_1, y_1) বিন্দুগামী, তাই $(y_1 + f)x_1 - (x_1 + g)y_1 = k$
বা, $x_1y_1 + fx_1 - x_1y_1 - gy_1 = k$
বা, $fx_1 - gy_1 = k$
k-এর মান (vi) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$(y_1 + f)x - (x_1 + g)y = fx_1 - gy_1$
বা, $xy_1 - yx_1 + fx - gy - fx_1 + gy_1 = 0$
বা, $xy_1 - yx_1 + f(x - x_1) - g(y - y_1) = 0$.

> সুতরাং $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,
> $xy_1 - yx_1 + f(x - x_1) - g(y - y_1) = 0$

উদাহরণ 1: $(-2, 5)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 3x - 8y + 17 = 0$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $(-2, 5)$ বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 3x - 8y + 17 = 0$ বৃত্তে স্পর্শকের সমীকরণ,

$$-2.x + 5.y + \frac{3}{2}(x - 2) - \frac{8}{2}(y + 5) + 17 = 0$$

বা, $-4x + 10y + 3x - 6 - 8y - 40 + 34 = 0$
বা, $-x + 2y - 12 = 0$
$\therefore x - 2y + 12 = 0$
এখন স্পর্শকের ঢাল $= \frac{1}{2}$
$\therefore$ অভিলম্বের ঢাল $= -2$
$\therefore$ নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ, $y - 5 = -2(x + 2)$
$\therefore 2x + y - 1 = 0$

শিক্ষার্থীর কাজ	$x^2 + y^2 = 20$ বৃত্তের 2 ভুজ বিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 2: $x^2 + y^2 - 8x - 10y = 8$ বৃত্তে অংকিত স্পর্শক $5x - 12y - 9 = 0$ রেখার সমান্তরাল। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 5)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{16 + 25 + 8} = \sqrt{49} = 7$
$5x - 12y - 9 = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ, $5x - 12y + k = 0$ ---------- (i)
বৃত্তের কেন্দ্র $(4, 5)$ হতে (i) রেখার দূরত্ব $= \frac{|5 \times 4 - 12 \times 5 + k|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|k - 40|}{13}$

(i) রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক বলে, $\frac{|k-40|}{13} = 7 \Rightarrow k-40 = \pm 91$

$\therefore k = -51, 131$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ, $5x - 12y + 131 = 0$ এবং $5x - 12y - 51 = 0$

উদাহরণ 3: মূলবিন্দু থেকে $x^2 - y^2 - 10x + 20 = 0$ বৃত্তের উপর অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, মূলবিন্দু গামী স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx$ সরলরেখাটি যেহেতু স্পর্শক, সুতরাং কেন্দ্র হতে এর লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

বৃত্তের কেন্দ্র (5, 0) এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{5^2 + 0 - 20} = \sqrt{5}$

$\therefore \left|\frac{5m-0}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \sqrt{5}$ বা, $25m^2 = 5 + 5m^2$ বা, $20m^2 = 5$

বা, $m^2 = \frac{1}{4}$ $\therefore m = \pm 2$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \pm\frac{1}{2}x$ বা, $x - 2y = 0, x + 2y = 0$

শিক্ষার্থীর কাজ	$x^2 + y^2 + 3x - 5y + 2 = 0$ বৃত্তের উপরিস্থ (1, 2) বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 = r^2$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $xy_1 - yx_1 = 0$.
- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ, $xy_1 - yx_1 + f(x - x_1) - g(y - y_1) = 0$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৩

1. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ বৃত্তের অংকিত স্পর্শক $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর লম্ব। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বৃত্তের স্পর্শক অক্ষ দুইটি হতে একই চিহ্ন বিশিষ্ট সমমানের অংশ ছেদ করে। স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. $x^2 + y^2 - 3x + 10y - 15 = 0$ বৃত্তের (4,-11) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
4. $x^2 + y^2 = 13$ বৃত্তের 2 কোটি বিশিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. $px + qy = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। দেখান যে, (p, q) বিন্দুটি একই বৃত্তের উপর অবস্থিত।

পাঠ ৫.৪ দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ (Equation of Common Chord of Two Circles)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

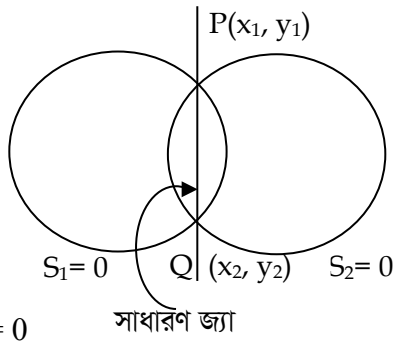
এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা সনাক্ত করতে পারবেন,
- দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সাধারণ জ্যা

মূলপাঠ

সাধারণ জ্যা (Common Chord): দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদবিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা।



মনে করুন, দুইটি বৃত্তের সমীকরণ $S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$
এবং $S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$
বৃত্ত দুইটি যদি পরস্পরকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তবে ধরুন
ছেদবিন্দু দুইটির স্থানাংক $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$
$\therefore x_1^2 + y_1^2 + 2g_1 x_1 + 2f_1 y_1 + c_1 = 0$ ---------- (i)
এবং $x_1^2 + y_1^2 + 2g_2 x_1 + 2f_2 y_1 + c_2 = 0$ ---------- (ii)
(i) – (ii) থেকে পাই, $2(g_1 - g_2)\, x_1 + 2(f_1 - f_2)\, y_1 + (c_1 - c_2) = 0$
অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $2(g_1 - g_2)\, x_2 + 2(f_1 - f_2)\, y_2 + (c_1 - c_2) = 0$
তাহলে, $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দুইটি
$2(g_1 - g_2)\, x + 2(f_1 - f_2)\, y + (c_1 - c_2) = 0$ ---------- (iii)
সমীকরণকে সিদ্ধ করে এবং উহা একটি একঘাত সরল সমীকরণ বলে একটি সরলরেখা নির্দেশ করে।
সুতরাং (iii) নং সমীকরণটিই বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ
আবার, $S_1 - S_2 = 0$
$\Rightarrow 2(g_1 - g_2)\, x + 2(f_1 - f_2)\, y + (c_1 - c_2) = 0$ যা (iii) নং সমীকরণের সাথে অভিন্ন।
সুতরাং বৃত্ত দুইটির সমীকরণ বিয়োগ করে তাদের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ পাওয়া যায়।

সূত্র: $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$ সমীকরণ বিশিষ্ট দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 0$.

উদাহরণ 1: $x^2 + y^2 - 2ax + 4ay = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 3ax + 5ay + c = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বৃত্তদ্বয়, $x^2 + y^2 - 2ax + 4ay = 0$ ---------- (i)
এবং $x^2 + y^2 - 3ax + 5ay + c = 0$ ---------- (ii)
(i) – (ii) থেকে পাই, $ax - ay - c = 0$
ইহাই নির্ণেয় সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ।

শিক্ষার্থীর কাজ	$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 21 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

বি. দ্র.: $S_1 = 0$ ও $S_2 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী যেকোনো বৃত্তের সমীকরণ $S_1 + k(S_1 - S_2) = 0$ অথবা $S_2 + k(S_1 - S_2) = 0$ ---------- (i)

$S_1 = 0$ ও $S_2 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা $S_1 + S_2 = 0$ কে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তের সমীকরণ (i) হলে, (i) বৃত্তটির কেন্দ্র সাধারণ জ্যা এর উপর অবস্থিত হবে।

বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করলে $S_1 - S_2 = 0$ সরলরেখাটি বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শক হবে এবং যে কোনো একটি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে রেখাটির উপর অংকিত লম্ব-দূরত্ব উক্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে।

সারসংক্ষেপ

- পরস্পরচ্ছেদী দুইটি বৃত্তের ছেদ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাংশটি উভয় বৃত্তেরই জ্যা, এই জ্যা-কে সাধারণ জ্যা বলা হয়।
- $S_1 = 0$ এবং $S_2 = 0$ সমীকরণ বিশিষ্ট দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ, $S_1 - S_2 = 0$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৪

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 5x + 8y - 43 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
2. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 8x + y + 10 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা যে বৃত্তের ব্যাস তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৫.৫ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ সমীকরণের লেখচিত্র (মুক্তহস্তে ও গ্রাফপেপারে) অঙ্কন করতে পারবেন।

মূলপাঠ

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ সমীকরণের লেখচিত্র (মুক্তহস্তে ও গ্রাফপেপারে) অঙ্কন [Drawing of the Graph of the Equation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ (both free hand and in graph paper)]

সমস্যা নং 1	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ সমীকরণের লেখচিত্র (মুক্তহস্তে ও গ্রাফপেপারে) অঙ্কন	তারিখ:

সমস্যা: মুক্ত হস্তে $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

তত্ত্ব: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$ সমীকরণটি (a, b) কেন্দ্র ও c একক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্দেশ করে যখন $c \geq 0$.

বৃত্তটি মূল বিন্দু দিয়ে যাবে যদি $a^2 + b^2 = c^2$ হয়। আবার, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করবে যদি $|b| = c$, ছেদ করবে যদি $|b| < c$ এবং স্পর্শ বা ছেদ করবে না যদি $|b| > c$ হয়। অনুরূপভাবে, বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করবে যদি $|a| = c$, ছেদ করবে যদি $|a| < c$ এবং স্পর্শ বা ছেদ করবে না যদি $|a| > c$ হয়।

কাজের বিবরণ:

1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ কে $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2, b = -1, c = 2$.
2. $a^2 + b^2 = c^2$ কিনা যাচাই করুন।
3. $|a|, |b|$ নির্ণয় করুন এবং c এর সাথে তাদের সম্পর্ক বিবেচনা করুন। যদি অক্ষের ছেদ বিন্দু থাকে তবে তা নির্ণয় করুন।
4. সাদা কাগজে XOX' এবং YOY' রেখা অংকন করুন। উপযুক্ততা অনুসারে উভয় অক্ষ বরাবর একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে একক ধরুন।
5. বৃত্তের কেন্দ্র ও অক্ষগুলির ছেদ বিন্দু (যদি থাকে) চিহ্নিত করুন।
6. কেন্দ্র হতে পরিধির উপর যেকোনো বিন্দুর দূরত্বকে ব্যাসার্ধ ধরে মুক্ত হস্তে বৃত্তটি অংকন করুন।

ফলাফল ও হিসাব:

(i) $a = 2, b = -1, c = 2, a^2 + b^2 = 5, c^2 = 4$

$\therefore a^2 + b^2 > c^2$

$\therefore$ বৃত্তটি মূল বিন্দগামী নয়

(ii)) $|a| = 2,\ c = 2\ \therefore |a| = c$

$\therefore$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

(iii) $|b| = 1,\ c = 2,\ |b| < c$

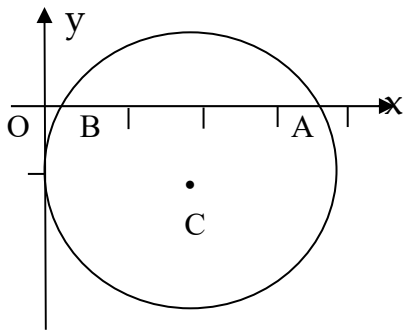
$\therefore$ বৃত্তটি x-অক্ষকে ছেদ করে।

$\therefore y = 0$ হলে, $(x-2)^2 + 1 = 4$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3} + 2 = \sqrt{3} + 2, 2 - \sqrt{3} = 3.73, 0.27$

$\therefore$ বৃত্তটি x অক্ষকে $A(3.73, 0)$ ও $B(0.27, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(iv) বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $C(2, -1)$



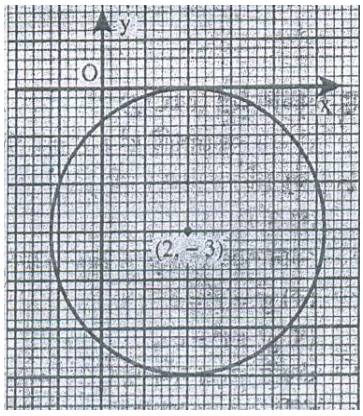
সমস্যা নং 2	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ সমীকরণের লেখচিত্র (মুক্তহস্তে ও গ্রাফপেপারে) অঙ্কন	তারিখ:

সমস্যা: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$ বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন করুন

তত্ত্ব: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ সমীকরণ একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (a, b) এবং ব্যাসার্ধ $= c$.

কাজের বিবরণ:

1. বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।
2. ছক কাগজে পরস্পর লম্ব XOX' ও YOY' রেখা অঙ্কন করুন।
3. উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ধরে বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান দৈর্ঘ্যের একটি রেখাংশ c অঙ্কন করুন।



4. ছক কাগজে বৃত্তের কেন্দ্র চিহ্নিত করুন এবং ব্যাসার্ধ c-এর সমান করে কম্পাস দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করুন।

হিসাব ও ফল সংকলন:

(i) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$-কে $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$-এর সাথে তুলনা করে পাই, $a=2, b=-3, c=3$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(2, -3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= 3$

বৃত্তের বৈশিষ্ট্য:

1. বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে।
2. বৃত্তটি y-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।
3. বৃত্তটি মূল বিন্দুগামী নয়।

শিক্ষার্থীর কাজ	নিচের বৃত্তগুলির লেখচিত্র (মুক্ত হস্তে ও গ্রাফ পেপারে) অঙ্কন করুন। 1. $x^2+y^2+4x+6y-3=0$ 2. $(x-3)^2+(y+4)^2=5^2$ 3. $3x^2+3y^2+6x-3y-2=0$ 4. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ বৃত্তের যে ব্যাসটি $3x-4y+5=0$ রেখার উপর লম্ব তার সমীকরণ কোনটি?
   (ক) $4x+3y-10=0$ (খ) $4x+3y+10=0$
   (গ) $4x+3y-25=0$ (ঘ) $4x+3y+20=0$
2. $(1, 2)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি?
   (ক) $x^2+y^2+4x+2y-4=0$ (খ) $x^2+y^2-4x+2y+2=0$
   (গ) $x^2+y^2-6x+4y-9=0$ (ঘ) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$
3. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ এবং $x^2+y^2-8x+6y+16=0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা-এর সমীকরণ কোনটি?
   (ক) $x+y-2=0$ (খ) $x-y-3=0$
   (গ) $2x+y-3=0$ (ঘ) $x+2y+1=0$
4. $x^2+y^2-6x+9=0$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত?
   (ক) 0 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 3
5. $(-4, 3)$ ও $(12, -1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগরেখাকে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তের সমীকরণ কোনটি?
   (ক) $x^2+y^2-8x-2y+51=0$ (খ) $x^2+y^2+8x+2y-51=0$
   (গ) $x^2+y^2+8x-2y-51=0$ (ঘ) $x^2+y^2-8x-2y-51=0$
6. একটি বৃত্ত x-অক্ষকে $(4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং এর কেন্দ্র $2x-y-5=0$ রেখার উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি?
   (ক) $x^2+y^2-8x-6y+16=0$ (খ) $x^2+y^2+8x+6y+16=0$
   (গ) $x^2+y^2+8x-6y+16=0$ (ঘ) $x^2+y^2-8x+6y-16=0$
7. $(4, -8)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করে তার সমীকরণ কোনটি?
   (ক) $x^2+y^2-8x-16y+64=0$ (খ) $x^2+y^2-8x+16y+64=0$

(গ) $x^2 + y^2 + 8x + 16y + 64 = 0$ (ঘ) কোনটি নয়।

8. (4, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি?
(ক) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 21 = 0$ (খ) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$
(গ) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 25 = 0$ (ঘ) $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$

9. নিচের তথ্যগুলি লক্ষ করুন:
(i) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 9 = 0$ বৃত্তটি y-অক্ষকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -3)$.
(ii) $x^2 + y^2 = 0$ সমীকরণটি বিন্দুবৃত্ত নির্দেশ করে।
(iii) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$ বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দুইটি (1, 2), (3, 4)
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

10. k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ একটি বৃত্ত সূচিত করে?
(ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) – 2

11. c এর মান কত হলে, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + c = 0$ বৃত্ত y-অক্ষকে স্পর্শ করবে?
(ক) 4 (খ) 9 (গ) 16 (ঘ) 18

12. (1, 2) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। y-অক্ষ থেকে বৃত্তটি দ্বারা খণ্ডিত অংশের পরিমাণ কত?
(ক) $\sqrt{3}$ (খ) $2\sqrt{2}$ (গ) $2\sqrt{3}$ (ঘ) 3

13. $3x + 4y = k$ রেখাটি $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তকে স্পর্শ করে। k-এর একটি মান–
(ক) 20 (খ) 30 (গ) 40 (ঘ) 45

14. $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(-2, 3)$ হলে ঐ জ্যা-এর সমীকরণ কোনটি?
(ক) $2x + 3y + 12 = 0$ (খ) $2x - 3y + 13 = 0$
(গ) $2x - y + 5 = 0$ (ঘ) $x + 2y - 11 = 0$

15. একটি বৃত্ত y–অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(2, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি?
(ক) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ (খ) $x^2 + y^2 - 4x = 0$
(গ) $2(x^2 + y^2) - 5x = 0$ (ঘ) $2(x^2 + y^2) - 3x = 0$

16. $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত?
(ক) 4π (খ) 6π (গ) 8π (ঘ) কোনটি নয়।

17. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 5y + 8 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাংক কোনটি?
(ক) (4, 5) (খ) $(2, \frac{5}{2})$ (গ) $(2, \frac{5}{4})$ (ঘ) (2, 5)

18. c এর মান কত হলে, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + c = 0$ বৃত্তটি বিন্দু বৃত্ত হবে?
(ক) 10 (খ) 11 (গ) 13 (ঘ) 15

19. $x^2 + y^2 = r^2$ এবং $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ বৃত্ত দুইটি পরস্পর অন্তস্থভাবে স্পর্শ করলে r এর মান কত?
(ক) 1 (খ) 2 (গ) 3 (ঘ) 5

20. $x^2 + y^2 - kx + 2y - 4 = 0$ বৃত্তের একটি ব্যাসের সমীকরণ $2x + y - 3 = 0$ হলে, k- এর মান কত?
(ক) – 3 (খ) – 2 (গ) 3 (ঘ) 4

সৃজনশীল প্রশ্ন

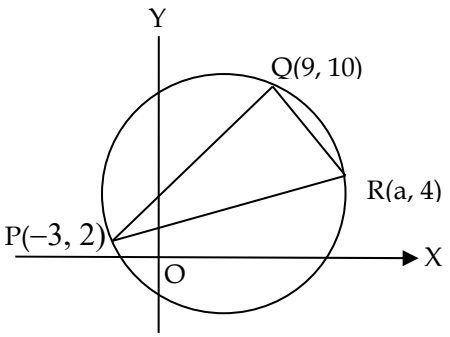
21. (i) (1, –3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের একটি স্পর্শক $2x - y = 4$. (ii) তিনটি রেখার সমীকরণ $x = 0$, $y = 4$, $y = 10$.
(ক) উদ্দীপকের বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(খ) বৃত্তটির দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা প্রদত্ত স্পর্শকের উপর লম্ব।
(গ) উদ্দীপক (*ii*) এ বর্ণিত তিনটি রেখাকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

22. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (1, 5) ও (7, –3) এবং (a, 6) বিন্দুটি এ বৃত্তের উপর অবস্থিত।
(ক) (–2, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(গ) উদ্দীপকের বৃত্তটির উপর উল্লেখিত বিন্দুটির ভুজ a এর মান কত? বৃত্তটির অপর একটি ব্যাসের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা প্রদত্ত ব্যাসের উপর লম্ব।

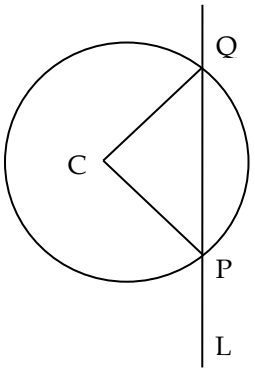
23. (i) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$, (ii) $x^2 + y^2 = 4$;
(ক) (ii) নং বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (–1, 1) হলে, ঐ জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(খ) দেখান যে, (i) ও (ii) নং বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে বহিস্থভাবে স্পর্শ করে।
(গ) বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শকের সমীকরণ ও স্পর্শ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

24. একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক (2, 5) ও (4, 7)
(ক) বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
(খ) এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা প্রদত্ত বৃত্তের সাথে এককেন্দ্রিক এবং (4, 3) বিন্দুগামী।
(গ) উদ্দীপকে উল্লেখিত ব্যাসটি যে বর্গের কর্ণ ঐ বর্গের অন্তর্লিখিত বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

25. তিনটি বিন্দু $P(-3, 2)$, $Q(9, 10)$ এবং $R(a, 4)$ একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত, যেখানে বৃত্তটির একটি ব্যাস PR.
(ক) $lx + my = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে দেখান যে, $a^2m^2 + 2al = 1$.
(খ) R বিন্দুটির x-স্থানাংক a এর মান নির্ণয় করুন।
(গ) উদ্দীপকের বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং বৃত্তটি দ্বারা অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশের পরিমাণ নির্ণয় করুন।



26. একটি বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 139 = 0$.
(ক) বিন্দু বৃত্ত বলতে কী বুঝায়? দেখান যে, $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$ একটি বিন্দু বৃত্ত।
(খ) L রেখাটির সমীকরণ $x = 13$, যা বৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। P ও Q এর y-স্থানাংক এবং $\angle PCQ$ নির্ণয় করুন, যখন বৃত্তের কেন্দ্র C.
গ. (–3, –1) হতে উদ্দীপকের বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।



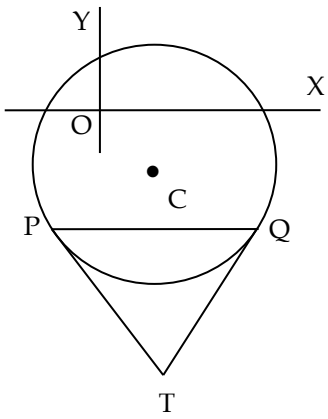
27. একটি বৃত্তের সমীকরণ $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 100$, একটি সরলরেখার সমীকরণ $4x - 3y - 40 = 0$ এবং $P(10, 0)$ একটি বিন্দু।
(ক) দেখান যে, P বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত এবং P বিন্দুগামী ব্যাসের অপর প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
(খ) প্রমাণ করুন যে, রেখাটি $P(10, 0)$ বিন্দুতে বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং P বিন্দুগামী ব্যাস রেখাটির উপর লম্ব।
(গ) বৃত্তের দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন যা প্রদত্ত রেখাটির উপর লম্ব।

28. চিত্রে $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 87 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র C.

(ক) বৃত্তের কেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

(খ) x-অক্ষের নিচে অবস্থিত PQ জ্যা x-অক্ষের সমান্তরাল। $PQ = 16$ হলে, P ও Q এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

(গ) P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর T বিন্দুতে মিলিত হয়। T বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।



29. $A(-6, 5)$, $B(0, -3)$, $C(2, 1)$ বিন্দু তিনটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত।

(ক) দেখান যে, $AC \perp BC$.

(খ) বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(গ) উদ্দীপকের বৃত্তটিকে বহিস্থভাবে স্পর্শ করে এরূপ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করুন যার কেন্দ্র $(3, 9)$.

30. কোনো বৃত্তের একটি ব্যাস OA, যেখানে A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2, -4)$ এবং O মূলবিন্দু।

(ক) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। স্পর্শ বিন্দু নির্ণয় করুন।

(খ) উদ্দীপকে বর্ণিত বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

(গ) যদি বৃত্তটি x-অক্ষের উপর B বিন্দু দিয়ে যায়, তবে B এর স্থানাঙ্ক এবং B বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.১

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
3. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 21 = 0$
5. কেন্দ্রের স্থানাংক $(-2, 3)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{7}{2}$
6. $15(x^2 + y^2) - 94x + 18y + 55 = 0$
7. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.২

1. (*a*) $r^2 - 8r\cos(\theta - \frac{\Pi}{6}) - 9 = 0$ (*b*) $r = 6\cos\theta$ (*c*) $r = a\cos\theta + b\sin\theta$
2. (*a*) $(4, \frac{\Pi}{6}), 1$ (*b*) $(a, 0^0), a$
3. $r^2 - 14r\cos\theta + 33 = 0$
4. $r^2 - 16\sin\theta + 39 = 0$
5. $4r^2 - 24r\cos(\theta - 30^0) + 27 = 0$
6. $r^2 - 8r\cos(\theta - \frac{\Pi}{3}) + 12 = 0$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৩

1. $4x + 3y - 25 = 0$, $4x + 3y + 5 = 0$.
2. $x + y + 4 = 0$, $x + y - 8 = 0$.
3. $5x - 12y - 152 = 0$.
4. $3x + 2y - 13 = 0$, $3x - 2y + 13 = 0$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৫.৪

1. $x - 2y + 7 = 0$, 4 একক. 2. $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$.
3. $5(x^2 + y^2) + 26x + 12y + 22 = 0$.

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. ক	2. ঘ	3. খ	4. ক	5. ঘ	6. ক	7. খ	8. খ
9. ঘ	10. খ	11. খ	12. গ	13. গ	14. খ	15. খ	16. ক
17. গ	18. গ	19. ঘ	20. ঘ।				

21. (ক) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 30y + 49 = 0$, (খ) $x + 2y + 6 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$
(গ) $x^2 + y^2 \pm 6x - 14y + 49 = 0$.
22. (ক) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$, (খ) $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$, (গ) $a = 4$, $3x - 8y = 4$.
23. (ক) $x - y + 1 = 0$, (গ) $4x + 3y - 10 = 0$, $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$
24. (ক) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 43 = 0$, (খ) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 35 = 0$,
(গ) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 44 = 0$.
25. (খ) 13, (গ) $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 31 = 0$.
26. (খ) 4, 12, $\angle PCQ = 106^0$ (প্রায়), (গ) $4x - 3y + 9 = 0$, $7x - 24y - 3 = 0$.
27. (ক) $(-6, 12)$, (খ) P বিন্দুগামী ব্যাস $3x + 4y - 30 = 0$, যা $4x - 3y - 40 = 0$ এর উপর লম্ব,
(গ) $3x + 4y + 20 = 0$, $3x + 4y - 80 = 0$.
28. (ক) $(2, -3)$, 10, (খ) $P(-6, -9)$, $Q(10, -9)$, (গ) $T(2, -\frac{59}{3})$.
29. (খ) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$, (গ) $x^2 + y^2 - 6x - 18y + 65 = 0$.
30. (ক) $(2, 0)$, (খ) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, (গ) $(2, 0)$, $2x + y - 2 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$.