ইউনিট ৪

সরলরেখা
(The Straight Line)

ভূমিকা

জ্যামিতি (Geometry) গণিতের একটি অতি সুপ্রাচীন শাখা। গ্রীক শব্দ (geo) মানে ভূমি বা স্থান আর মিতি (metron) মানে পরিমাপ অর্থাৎ জ্যামিতি হলো ভুমি বা স্থানের পরিমাপ। মূলত স্থানের পরিমাপের ধারনা থেকেই জ্যামিতির উৎপত্তি। প্রাচীন ইরাক, মিশর এবং সিন্ধু উপত্যাকায় খ্রিষ্টপূর্ব ৩০০০ অব্দ থেকে জ্যামিতির ব্যবহার হত বলে প্রমাণ পাওয়া যায়। প্রচীন মিশরীয়রা তাদের কৃষি ভুমির সীমানা সংক্রান্ত জরিপের কাজের মধ্যদিয়ে সর্বপ্রথম জ্যামিতির সূত্রপাত করেন। গ্রীক গণিতবিদ ইউক্লিড খ্রিষ্টপূর্ব ৩০০ অব্দে জ্যামিতিকে একটি সুবিন্যস্ত বৈজ্ঞানিক কাঠামোয় রূপান্তরিত করেন। এ কারনে ইউক্লিডকে জ্যামিতির জনক বলা হয়। ইউক্লিড রেখাকে "প্রস্থহীন দৈর্ঘ্য" হিসাবে সজ্ঞায়িত করেন। মূলত রেখা হল অবিরত বিন্দুর সেট যা ইচ্ছামত সামনের বা পিছনের দিকে বর্ধিত করা যায়। বিখ্যাত ফরাসি গণিতবিদ রেনে দেকার্ত (Rene Descartes: 1596-1650) জ্যামিতিতে কার্তেসীয় জ্যামিতি বা বিশ্লেষনমূলক জ্যামিতির প্রবর্তন করেন।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাংক ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করতে পারবেন,
- ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন,
- সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- সরলরেখা সম্পর্কিত বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১৫ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৪.১ সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্ক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সমতলে কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্র প্রতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

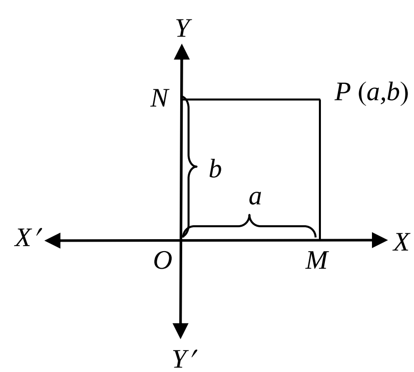
মুখ্য শব্দ	তল, সমতল, স্থানাঙ্ক, কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক, পোলার স্থানাঙ্ক, বিন্দু, অক্ষ, দূরত্ব

মূলপাঠ

সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Cartesian Co-ordinates on plane)

সাধারণত কোনো বস্তুর পৃষ্ঠকে তল বলে। কোনো তলে অবস্থিত যে কোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি ঐ তলে থাকে তবে ঐ তলকে সমতল (Plane) বলে। কোনো সমতলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখাকে আয়ত অক্ষ (Rectangular axes) এবং তাদের ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু (Origin) বলে। উক্ত রেখাদ্বয়ের অনুভূমিক রেখাটিকে x-অক্ষ, উলম্ব রেখাকে y-অক্ষ এবং এই সমতলকে কার্তেসীয় সমতল (Cartesian Plane) বলে। রেনে দেকার্ত এর নামানুসারে কার্তেসীয় সমতল নামকরন করা হয়েছে। সমতলে x-অক্ষ থেকে b দূরত্বে এবং y-অক্ষ থেকে a দূরত্বে কোনো বিন্দুকে (a, b) ক্রমজোড় দ্বারা চিহ্নিত করা হয় এবং একে ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলে।

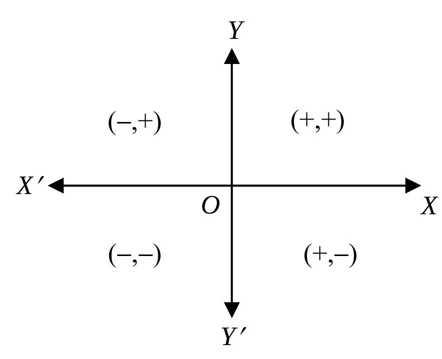
চিত্রে XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে y-অক্ষ বিবেচনা করুন। তাহলে O হবে তাদের মূলবিন্দু। সমতলে যে কোনো বিন্দু P হতে XOX' রেখার উপর PM এবং YOY' রেখার উপর PN লম্ব আঁকুন। তাহলে $ON = PM$ (y-অক্ষ হতে লম্ব দূরত্ব) কে P বিন্দুর ভুজ (abscissa) এবং $ON = PM$ (x-অক্ষ হতে লম্ব দূরত্ব) কে P বিন্দুর কোটি (ordinate) বলে। $ON = PM = b$ এবং $OM = PN = a$ হলে (a, b) কে P বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয় এবং একে $P(a, b)$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এভাবে সমতলের প্রত্যেকটি বিন্দুর একটি ক্রমজোড় পাওয়া যায় যার প্রথম ও দ্বিতীয় উভয় পদই বাস্তব সংখ্যা।



P বিন্দুর অবস্থানের উপর ভুজ ও কোটির চিহ্ন নির্ভর করে।

নিম্নে ছকে বিভিন্ন চতুর্ভাগে ভুজ ও কোটির চিহ্ন দেখানো হলো:

চতুর্ভাগ	ভুজের চিহ্ন	কোটির চিহ্ন
প্রথম	+	+
দ্বিতীয়	-	+
তৃতীয়	-	-
চতুর্থ	+	-



অর্থাৎ কোনো অক্ষের উপর অবস্থিত নয় এরূপ যে কোন বিন্দু:

(i) প্রথম চতুর্ভাগে থাকলে x ও y উভয় ধনাত্মক।

(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকলে x ঋণাত্মক, y ধনাত্মক ।

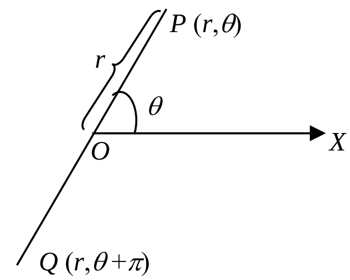
(iii) তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকলে x, y উভয় ঋণাত্মক।

(iv) চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকলে x ধনাত্মক, y ঋণাত্মক।

তবে x-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর কোটি শূন্য যেমন $(2,0)$ x-অক্ষের উপর একটি বিন্দু এবং y-অক্ষের উপর যে কোনো বিন্দুর ভুজ শূন্য যেমন $(0,4)$, y-অক্ষের উপর একটি বিন্দু।

সমতলে পোলার স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates on plane)

সমতলে কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করতে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ছাড়াও আরও এক প্রকার স্থানাঙ্ক ব্যাবহার করা হয় যাকে পোলার স্থানাঙ্ক (Polar Co-ordinates) বলা হয় এবং একে $P(r,\theta)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয় । এখানে r কে ব্যসার্ধ ভেক্টর (Radius vector) এবং θ কে ভেক্টরিয়াল কোণ (Vectorial angle) বলা হয় ।



এখানে উল্লেখ্য যে ভেক্টর কোণকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে পরিমাপ করলে ধনাত্মক মান এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে পরিমাপ করলে ঋণাত্মক মান পাওয়া যায়। এই পদ্ধতিতে কোনো বিন্দু $P(r,\theta)$ এর মান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে ভেক্টর কোণ θ অঙ্কন করে পরে r সমান ব্যসার্ধ কেটে নেওয়া হয়। চিত্রে PO রেখাকে Q পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করুন যেন $OP = OQ = r$ হয়। তাহলে $(r, \theta+\pi)$ অথবা $(-r,\theta)$ উভয় Q বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে। এখানে উল্লেখ্য যে মূল বিন্দুর পোলার স্থনাঙ্ক $(0,0)$ ।

কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক (Relation between polar and Cartesian coordinates)

মনে করুন কার্তেসীয় সমতলে (r,θ) এবং (x,y) যে কোনো বিন্দু P এর পোলার I কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্দেশ করে। OP যোগ করুন এবং OX এর উপর PM লম্ব আঁকুন।

তাহলে, $OP = r, \angle POM = \theta, OM = x$ এবং $PM = y$

ΔOMP এ $\angle POM =$ সমকোণ,

ভুমি $= \mathrm{OM} = \mathrm{x}$, লম্ব $= PM = y$ এবং অতিভুজ $= OP = r$

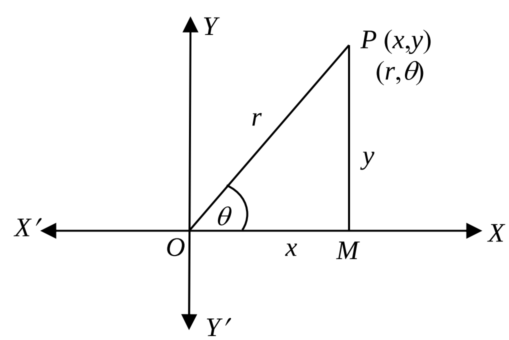
আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

$$\cos\theta = \frac{\text{ভুমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{r},$$

$$\therefore x = r\cos\theta \text{............(i)}$$

এবং $$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{r}$$

$$\therefore y = r\sin\theta \text{............(ii)}$$



(i) ও (ii) বর্গ করে যোগ করে পাই, $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = x^2 + y^2$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{..................(iii)} \quad [\text{যেহেতু}, \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1]$$

আবার, (ii) কে (i) দ্বরা ভাগ করে পাই,

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x} \text{ বা } \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \therefore \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \text{..........(iv)}$$

সুতরাং (i) ও (ii) দ্বারা কোনো বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r,θ) কে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x,y) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে এবং সমীকরণ (iii) ও (iv) দ্বারা কোনো বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x,y) কে পেলার স্থানাঙ্ক (r,θ) এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়েছে।

উদাহরণ 1: $\left(1,\sqrt{3}\right)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\left(1,\sqrt{3}\right)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক (r,θ)। তাহলে আমরা কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক হতে পাই, $r=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

এবং $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1}\right)=\tan^{-1}\sqrt{3}=60^\circ$

$\therefore \left(1,\sqrt{3}\right)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(r,\theta)=\left(2,60^\circ\right)$

উদাহরণ 2: $(1,1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $(1,1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক (r,θ)। তাহলে আমরা কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক হতে পাই, $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

এবং $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{1}\right)=\tan^{-1}1=45^\circ$

$\therefore (1,1)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},45^\circ\right)$

উদাহরণ 3: $\left(\sqrt{3},1\right)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\left(\sqrt{3},1\right)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক (r,θ)। তাহলে আমরা কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক হতে পাই, $r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

এবং $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=30^\circ$

$\therefore \left(\sqrt{3},1\right)$ বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $(r,\theta)=\left(2,30^\circ\right)$

উদাহরণ 4: $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x,y)। তাহলে আমরা কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক হতে পাই, $x=r\cos\theta=\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cos 45^e=\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$

এবং $y=r\sin\theta=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}\sin 45^e=\sqrt{2}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$

$\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (1, 1)

উদাহরণ 5: $\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

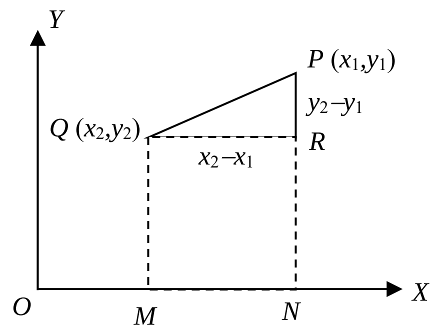
সমাধান: মনে করুন, $\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুটির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (x,y)। তাহলে আমরা কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক হতে পাই, $x=r\cos\theta=1.\cos\dfrac{\pi}{3}=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

এবং $y = r\sin\theta = 1.\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(1, \dfrac{\pi}{3}\right)$ বিন্দুর কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two points):

মনে করুন, একই সমতলে $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ যে কোনো দুইটি বিন্দু। P ও Q হতে OX অক্ষরেখার উপর PN ও QM লম্ব আঁকুন। আবার Q হতে PN এর উপর QR লম্ব আঁকুন।



তাহলে, চিত্র হতে পাই

$ON = x_1, \quad OM = x_2, \quad PN = y_1, \quad QM = y_2 = RN$

এবং $QR = MN = ON - OM, \quad PR = PN - RN$

এখন, ΔPQR সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই

$$PQ^2 = QR^2 + PR^2 = (ON - OM)^2 + (PN - RN)^2$$
$$= (ON - OM)^2 + (PN - QM)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$
$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$\therefore$ দুইটি বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$

উদাহরণ 6: $(2,-2)$ এবং $(3,1)$ বিন্দু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, বিন্দু দুটি $P(2,-2)$ এবং $Q(3,1)$

সুতরাং $PQ = \sqrt{(2-3)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

অতএব নির্ণেয় দূরত্ব $\sqrt{10}$

উদাহরণ 7: $(5,1)$ এবং $(2,-1)$ বিন্দু দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, বিন্দু দুটি $P(5,1)$ এবং $Q(2,-1)$

সুতরাং $PQ = \sqrt{(5-2)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

অতএব, নির্ণেয় দূরত্ব $\sqrt{13}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১

1. নিম্ন লিখিত কার্তেসীয় বিন্দুগুলির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন:
   (i) $(\sqrt{3},1)$ (ii) $(1,0)$ (iii) $(-1,-\sqrt{3})$
   (iv) $(1,\sqrt{3})$ (v) $(-3,-3)$
2. নিম্ন লিখিত পোলার বিন্দুগুলির কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন:
   (i) $(1,45^\circ)$ (ii) $\left(4,\dfrac{11\pi}{6}\right)$ (iii) $\left(3,\dfrac{\pi}{3}\right)$ (iv) $(4,135^\circ)$
3. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলিকে পোলার আকারে প্রকাশ করুন:
   (i) $xy = 4$ (ii) $x^2 + y^2 = 4$ (iii) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$
   (iv) $y = mx + c$

4. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলিকে কার্তেসীয় আকারে প্রকাশ করুন:
   (i) $r = a\sin\theta$ (ii) $\sin 2\theta = 1$ (iii) $r(1+\sin\theta) = 2$
5. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করুন:
   (i) $(-2,3)$ এবং $(2,2)$ (ii) $(0,4)$ এবং $(4,0)$ (iii) $(-6,4)$ এবং $(0,-4)$
6. (x, y) বিন্দুটি $(1,2)$ এবং $(-2,5)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদুরবর্তী হলে প্রমাণ করুন যে $x + 2y + 4 = 0$

পাঠ ৪.২ রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক (Coordinates of a line divisor point)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোনো রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন।

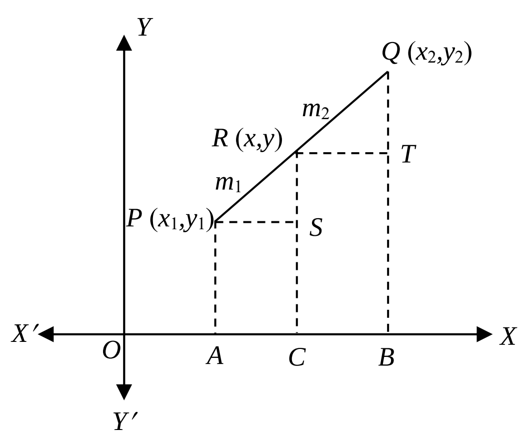
মুখ্য শব্দ	রেখাংশ, অনুপাত, অন্তর্বিভক্ত, বহির্বিভক্ত, ভরকেন্দ্র

মূলপাঠ

দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ কোনো বিন্দুতে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হলে, আমরা বিভক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারি। মনে করুন, সমতলে $P(x_1, y_1)$এবং $Q(x_2, y_2)$যে কোনো দুইটি বিন্দু এবং তাদের সংযোজক সরলরেখাংশ $R(x,y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হয় ।

অন্তর্বিভক্তির ক্ষেত্রে: মনে করুন, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ সংযোজক সরলরেখার $R(x, y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। অর্থাৎ $PR : RQ = m_1 : m_2$ বা $\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{m_1}{m_2}$ ।

P, Q এবং R বিন্দু হতে OX এর উপর যথাক্রমে PA, QB এবং RC লম্ব আঁকুন। আবার P হতে RC এর উপর PS এবং R হতে QB এর উপর RT লম্ব আঁকুন।



তাহলে আমরা পাই, $OA = x_1, OB = x_2, OC = x$

এবং $PA = y_1, QB = y_2, RC = y$

$\therefore PS = AC = OC - OA = x - x_1$

এবং $RS = RC - SC = RC - PA = y - y_1$

আবার, $RT = CB = OB - OC = x_2 - x$

এবং $QT = QB - TB = QB - RC = y_2 - y$

এখানে, PRS এবং QRT ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ '

$$\therefore \frac{PS}{RT} = \frac{PR}{RQ} = \frac{RS}{QT} \text{ বা } \frac{PS}{RT} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{RS}{QT} \cdots\cdots\cdots \text{(i)}$$

উপরোক্ত সমীকরণ হতে পাই, $\dfrac{PS}{RT} = \dfrac{m_1}{m_2}$

বা $\dfrac{x-x_1}{x-x_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$ বা $(m_1+m_2)x=m_1x_2+m_2x_1$

$\therefore x=\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$

আবার (i) নং হতে পাই,

$\dfrac{RS}{QT}=\dfrac{m_1}{m_2}$ বা $\dfrac{y-y_1}{y_2-y}=\dfrac{m_1}{m_2}$ বা $(m_1+m_2)y=m_1y_2+m_2y_1$ $\quad\therefore y=\dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$

সুতরাং অন্তর্বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $R(x,y)=\left(\dfrac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\dfrac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$

বি.দ্রঃ যদি R, PQ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে তবে, $m_1=m_2$

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ এবং $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

উদাহারণ 1: $(2,4)$এবং $(-2,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দুটি $1:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, অন্তর্বিভক্তি বিন্দুটি (x,y).

তাহলে $x=\dfrac{1\times(-2)+3\times 2}{1+3}=1$ এবং $y=\dfrac{1\times(-1)+3\times 4}{1+3}=\dfrac{11}{4}$

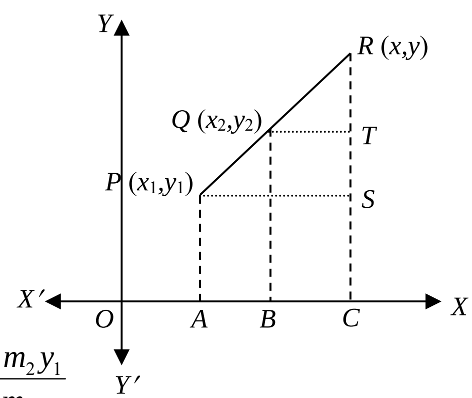
অতএব নির্ণেয় বিন্দু $\left(1,\dfrac{11}{4}\right)$

উদাহারণ 2: $(4,3)$ এবং $(3,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দুটি $3:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, অন্তর্বিভক্তি বিন্দুটি (x,y).

তাহলে $x=\dfrac{3\times 3+1\times 4}{3+1}=\dfrac{9+4}{4}=\dfrac{13}{4}$ এবং $y=\dfrac{3\times(-1)+1\times 3}{3+1}=\dfrac{-3+3}{4}=0$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\left(\dfrac{13}{4},0\right)$



বহির্বিভক্তির ক্ষেত্রেঃ মনে করুন, R, PQ কে এমনভাবে বহির্বিভক্তি করে যে $PR:QR=m_1:m_2$ বা $\dfrac{PR}{QR}=\dfrac{m_1}{m_2}$ হয়।

এখানে, PRS ও QRT ত্রিভূজদুটি সদৃশ।

$\therefore \dfrac{PS}{QT}=\dfrac{PR}{QR}=\dfrac{m_1}{m_2}$ বা $\dfrac{x-x_1}{x-x_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$ বা $x=\dfrac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}$

অনুরুপভাবে, $\therefore \dfrac{RS}{RT}=\dfrac{PR}{QR}=\dfrac{m_1}{m_2}$ বা $\dfrac{y-y_1}{y-y_2}=\dfrac{m_1}{m_2}$ বা $y=\dfrac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}$

সুতরাং বিভক্তকারী বিন্দু R এর স্থানাঙ্ক = $\left(\dfrac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2},\dfrac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$

উদাহরণ 3: $(3,6)$ এবং $(-5,-6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দুটি $3:1$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, বহির্বিভক্তি বিন্দুটি (x, y).

তাহলে $x=\dfrac{3\times(-5)-1\times 3}{3-1}=-9$ এবং $y=\dfrac{3\times(-6)-1\times 6}{3-1}=-12$

অতএব নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $(-9,-12)$

উদাহরণ 4: $(2,3)$ এবং $(-3,1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশকে যে বিন্দুটি $2:1$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাংক নির্ণয় করুন।

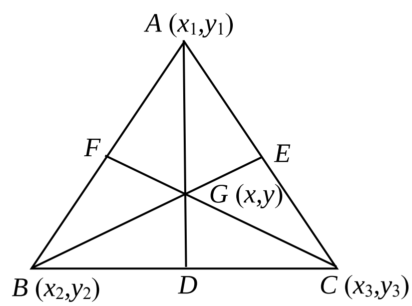
সমাধান: মনে করুন, বহির্বিভক্তি বিন্দুটি (x, y)

তাহলে $x=\dfrac{2\times(-3)-1\times 2}{2-1}=-8$ এবং $y=\dfrac{2\times 1-1\times 3}{2-1}=-1$

অতএব নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাংক $(-8,-1)$

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র

মনে করুন ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$এবং BC, CA ও AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F। এখন AD, BE, এবং CF বাহুগুলো যোগ করুন এবং মনে করুন তারা পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয় । এই G বিন্দুকেই ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয় যা প্রত্যেক মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে অর্থাৎ $AG:GD = 2:1$



যেহেতু BC বাহুর মধ্যবিন্দু D, সুতরাং D এর স্থানাংক $\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$. মনে করুন G বিন্দুর স্থানাংক (x, y)।

সুতরাং $x=\dfrac{2\left(\dfrac{x_2+x_3}{2}\right)+1\times x_1}{2+1}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$

এবং $y=\dfrac{2\left(\dfrac{y_2+y_3}{2}\right)+1\times y_1}{2+1}=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ [অন্তর্বিভক্তির নিয়ম অনুসারে]

সুতরাং ভরকেন্দ্র G এর স্থানাংক $(x,y)=\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

অর্থাৎ ত্রিভুজ ABC এর ভরকেন্দের স্থানাংক $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

উদাহরণ 5: $A(3,5), B(-2,5)$ এবং $C(5,-4)$ বিন্দুত্রয় ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দু হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র (x, y)

সুতরাং $x=\dfrac{3+(-2)+5}{3}=2$ এবং $y=\dfrac{5+5+(-4)}{3}=2$

$\therefore$ নির্ণেয় ভরকেন্দ্র $(2,2)$ ।

উদাহরণ 6: $A(1,1), B(-2,3)$ এবং $C(0,-1)$ বিন্দুত্রয় ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দু হলে, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র (x, y)

সুতরাং $x=\frac{1+(-2)+0}{3}=-\frac{1}{3}$ এবং $y=\frac{1+3+(-1)}{3}=1$

∴নির্ণেয় ভরকেন্দ্র $\left(-\frac{1}{3},1\right)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.২

1. $(2,t)$ বিন্দুটি $(3,7)$ ও $(1,5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে t এর মান নির্ণয় করুন।
2. $(4,-1)$ এবং $(-5,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুটি $1:2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
3. $(2,1)$ এবং $(-3,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুটি $2:3$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে, তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
4. ΔABC এর ভরকেন্দ্র $(2,1)$এবং B ও C বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(4,2)$ ও $(3,0)$। A বিন্দুর স্থানাঙ্ক কত?
5. $(5,-3)$ এবং $(-2,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা অক্ষদ্বয় দ্বারা যে অনুপাতে বিভক্ত হয় তা নির্ণয় করুন। বিভক্তকারী বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
6. $P(2,2)$ এবং $Q(5,8)$ বিন্দু দুইটি AB সরলরেখাকে সমত্রিখণ্ডিত করলে A ও B এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
7. A ও B বিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-2,4)$ এবং $(4,-5)$। AB রেখাকে C পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন $AB=3BC$। C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
8. $(5,3)$ বিন্দুটি $(4,5)$ এবং $(7,-1)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে অনুপাতে বিভক্ত করে তার নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪.৩ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাংকের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র প্রতিষ্ঠা ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

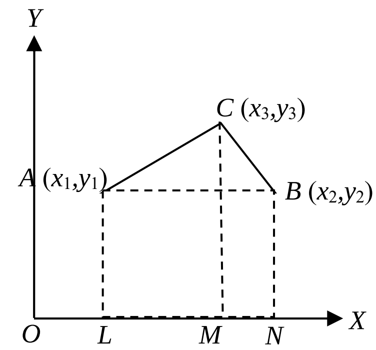
মুখ্য শব্দ	শীর্ষবিন্দু, অক্ষ, ক্ষেত্রফল, ট্রাপিজিয়াম

মূলপাঠ

মনে করুন, ΔABCএর শীর্ষবিন্দু তিনটি যথাক্রমে $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ এবং $C(x_3,y_3)$। A, B, C হতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে AL, BN ও CM লম্ব টানুন। তাহলে $OL=x_1, ON=x_2, OM=x_3$ এবং $AL=y_1, BN=y_2, CM=y_3$.

তাহলে $LM = x_3 - x_1, MN = x_2 - x_3, LN = x_2 - x_1$

পাশের চিত্র হতে পাই, ΔABC এর ক্ষেত্রফল



$\Delta =$ ট্রাপিজিয়াম $ALMC +$ ট্রাপিজিয়াম $CMNB -$ ট্রাপিজিয়াম $ALNB$

$$= \frac{1}{2}(AL + CM)LM + \frac{1}{2}(CM + BN)NM - \frac{1}{2}(AL + BN)LN$$

$$= \frac{1}{2}[(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)]$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

নির্ণায়কের মাধ্যমে প্রকাশ করলে আমরা পাই, $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ বা, $2\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

নির্ণায়কের সাহায্যে কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার সময় ঘড়ির কাটার বিপরীত দিক অনুযায়ী শীর্ষবিন্দুগুলো নিয়ে নির্ণায়কের সারিতে বসালে ক্ষেত্রফল ধনাত্বক $(+)$ এবং ঘড়ির কাটার দিক অনুযায়ী বসালে ক্ষেত্রফল ঋণাত্বক $(-)$ চিহ্নযুক্ত হয়। $(-)$ ঋণাত্বক চিহ্নযুক্ত ক্ষেত্রফল আসলে $(-)$ ঋণাত্বক চিহ্ন বাদ দিয়ে ক্ষেত্রফল লিখতে হয় কারন ক্ষেত্রফল সর্বদা ধনাত্বক হয়।

অনুসিদ্ধান্তঃ A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে। সুতরাং $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

উদাহারণ 1: ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো $A(-2,1)$, $B(4, 1)$ এবং $C(2, -3)$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[(-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right]$

$$= \frac{1}{2}[(-2)(1+3) - 1(4-2) + 1(-12-2)] = \frac{1}{2}(-8-2-14) = -12$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 12 বর্গ একক।

উদাহারণ 2: ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো A (0,1), B (3, 2) এবং C (-3,2) হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\right]$

$$= \frac{1}{2}[0 - 1(3-(-3)) + (6-(-6))] = \frac{1}{2}(-6+12) = 3$$

সুতরাং নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 3 বর্গ একক।

উদাহারণ 3: $(4,2)$, $(5, -3)$ এবং $(a,0)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে 'a' এর মান নির্ণয় করুন।
সমধানঃ আমরা জানি, তিনটি বিন্দু সমরেখ হলে তাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়

অর্থাৎ $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

বা $4\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ a & 0 \end{vmatrix} = 0$

বা $4(-3-0)-2(0-a)+1(0+3a)=0$ বা $-12+2a+3a=0$ বা $a=\frac{12}{5}$ অতএব $a=\frac{12}{5}$

উদাহারণ 4: 'k' এর মান কত হলে $(3, 0)$, $(2, 5)$ এবং $(-2, k)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে নির্ণয় করুন।
সমধানঃ আমরা জানি, তিনটি বিন্দু সমরেখ হলে তাদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়

অর্থাৎ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$

বা $3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -2 & k \end{vmatrix} = 0$

বা $3(5-k)-0+1(2k+10)=0$ বা $15-3k+2k+10=0$ বা $k=25$. অতএব $k=25$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৩

1. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলো $A(-3,-2)$, $B(-4, 1)$ এবং $C(2, -3)$ হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
2. $(-4,3), (-1,-2)$ এবং $(3,-2)$ বিন্দুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
3. a এর মান কত হলে $(a,2-2a), (1-a,2a)$ এবং $(-4-a,6-2a)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে?
4. $(3,4), (2t,5)$ এবং $(6,t)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $19\frac{1}{2}$ বর্গ একক হলে t এর মান নির্ণয় করুন।
5. ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $(t+1,1), (2t+1,3)$ এবং $(2t+2,2t)$ হলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন এবং প্রমাণ করুন যে $t=2$ অথবা $t=-\frac{1}{2}$ হলে ঐ ত্রিভুজটি সমরেখ হবে।
6. যদি একটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক $A(x,y), B(1,-3)$ এবং $C(2,1)$ হয় এবং ক্ষেত্রফল 5 বর্গ একক হয় তবে প্রমাণ করুন যে $4x-y-17=0$
7. দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় যথাক্রমে $(3,0), (0,7), (1,1)$ এবং $(13,3), (2,3), (-11,2)$। প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান এবং তাদের ভরকেন্দ্র একই বিন্দু।
8. প্রমাণ করুন যে, $(t,t-2), (t+3,t)$ এবং $(t+2,t+2)$ বিন্দুগুলো দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল t বর্জিত।

পাঠ ৪.৪ সঞ্চারপথ (Locus)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

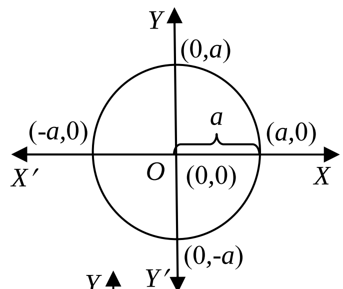
এই পাঠ শেষে আপনি-

- সঞ্চারপথ কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- দূরত্ব সূত্র প্রয়োগ করে সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

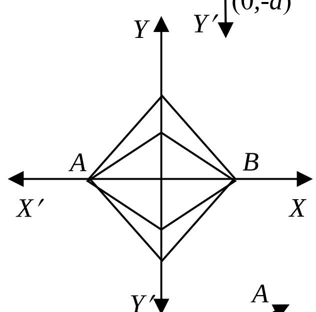
মুখ্য শব্দ	সঞ্চারপথ, চলমান বিন্দু, সমীকরণ

মূলপাঠ

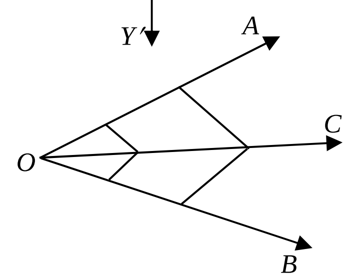
যদি কোনো বিন্দু এক বা একাধিক নির্দিষ্ট শর্তে একটি সমতলে গতিশীল থাকে তবে যে পথে ইহা সঞ্চারণ বা বিচরন করে তাকে উক্ত বিন্দুর সঞ্চারপথ বলে এবং ঐ বিন্দুকে চলমান বিন্দু বলে। গতিশীল বা চলমান বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x,y) দ্বারা সূচিত করা হয়। নির্দিষ্ট শর্ত সমূহকে x ও y এর সাহায্যে প্রকাশ করলে আমরা x ও y এর মধ্যে একটি সম্বন্ধ (relation) পাব, যাকে চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ বলে।



সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য প্রদত্ত সকল শর্ত ব্যবহার করে বিন্দুর ভুজ (x) ও কোটি (y) এর মধ্যে বীজগাণিতিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে হয়। যেমন: মূলবিন্দুর চতুর্দিকে a একক দূরত্ব বজায় রেখে অবস্থিত সকল বিন্দুসমূহের সেট একটি সঞ্চারপথ তৈরি করে। এই সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত, যার কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ a এবং যার সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$. আবার দুইটি নির্দ্রিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি রেখাংশের সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।



একই ভাবে একটি নির্দিষ্ট কোণ এর বাহু দুইটি হতে যে চলমান বিন্দুর লম্ব দূরত্ব সমান, তার সঞ্চারপথ উক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্দেশ করে।



উদাহারণ 1: $(3,4)$ এবং $(-3,1)$ বিন্দুদ্বয় হতে সর্বদা সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $P(x,y)$ সঞ্চারপথের উপর যে কোন একটি বিন্দু, এবং $A(3,4)$ এবং $B(-3,1)$.

তাহলে $PA=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$ $PB=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$

প্রশ্নমতে, $PA=PB$

বা, $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$

বা, $x^2-6x+9+y^2-8y+16=x^2+6x+9+y^2-2y+1$

বা, $x^2-6x+9+y^2-8y+16-x^2-6x-9-y^2+2y-1=0$

বা, $-12x-6y+15=0$

বা, $4x+2y-5=0$

নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ $4x+2y-5=0$

উদাহারণ 2: $A(2,0)$ বিন্দু থেকে একটি সেটের বিন্দু সমূহের দূরত্ব, $B(-2,1)$ থেকে তাদের দূরত্বের দ্বিগুণ। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ মনে করুন, যে কোন বিন্দু P এর স্থানাংক (x,y)। সুতরাং $P(x,y)$ হতে $A(2,0)$এর দূরত্ব

$AP=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$ এবং $P(x,y)$ হতে $B(-2,1)$ বিন্দুর দূরত্ব $PB=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$

প্রশ্নমতে, $AP = 2PB$

বা, $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$

বা, $\left(x^2-4x+4+y^2\right)=4\left(x^2+4x+4+y^2-2y+1\right)$

বা, $3x^2+20x+16+3y^2-8y=0$

নির্ণেয় সঞ্চারপথ $3x^2+3y^2+20x-8y+16=0$

উদাহারণ 3: $(3,-2)$ বিন্দু থেকে একটি সেটের বিন্দু সমূহের দূরত্ব 4 একক। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ সেটের যে কোন একটি বিন্দু $P(x,y)$ হতে $A(3,-2)$বিন্দুর দূরত্ব

$PA=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}$

প্রশ্নমতে, $PA=4$

বা, $\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=4$ বা, $(x-3)^2+(y+2)^2=16$

নির্ণেয় সঞ্চারপথ $(x-3)^2+(y+2)^2=16$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৪

1. (1,2) এবং (-1,2) বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী বিন্দু সমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. মূল বিন্দু এবং (0,4) বিন্দু থেকে যে সকল বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত 3:4 তাদের সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. $A(x,y)$, $B(1,2)$, $C(-1,-2)$এই তিনটি শীর্ষ বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 5 একক হলে A বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
4. $(a,0)$ বিন্দু এবং y -অক্ষ থেকে একটি সেটের বিন্দুগুলির দূরত্ব সমান। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. $(a,0)$ এবং $(0,a)$ বিন্দু দুইটি থেকে একটি সেটের বিন্দু সমূহের দূরত্বের বর্গের অন্তরফল সবর্দা $2a$। সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪.৫ সরলরেখার ঢাল (Slope of the straight line)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

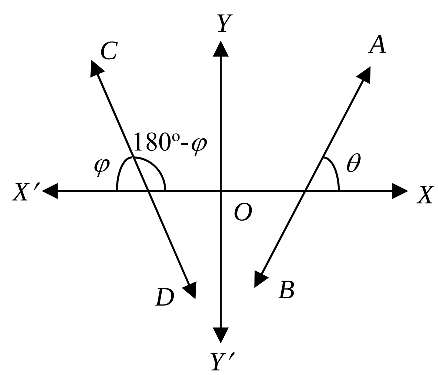
এই পাঠ শেষে আপনি-

- সরলরেখার ঢাল ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখার ঢাল নির্ণয় করতে পারবেন,
- দুইটি সরলরেখা লম্ব ও সমান্তরাল হবার শর্ত বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ঢাল, লম্ব, সমান্তরাল, ট্যানজেন্ট

মূলপাঠ

কোন সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ত্রিকোনমিতিক ট্যানজেন্ট (tangent) এর মানকে ঐ সরলরেখার ঢাল বলে। ঢালকে সাধারনত m দ্বারা সূচিত করা হয়। মনে করুন, AB রেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে $\left(0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}\right)$ এবং CD রেখাটি x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকের সাথে φ কোণ অর্থাৎ ধনাত্মক দিকের সাথে $\left(180^{\circ} - \varphi\right)$ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং AB রেখার ঢাল $m = \tan\theta$ এবং CD রেখার ঢাল হবে $m = \tan\left(180^{\circ} - \varphi\right) = -\tan\varphi$



দ্রষ্টব্য:

1. যদি রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে $\theta = 0^{\circ}$ এবং $m = \tan 0^{\circ} = 0$ অর্থাৎ x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল শূন্য (0).
2. যদি রেখাটি y-অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে $\theta = 90^{\circ}$ এবং $m = \tan 90^{\circ} = \infty$ অর্থাৎ y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল সংজ্ঞায়িত নয় ।
3. দুইটি সরলরেখার ঢাল সমান হলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হবে।
4. দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হলে তাদের ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হবে অর্থাৎ $m_1 m_2 = -1$ হবে।

দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখার ঢাল

মনে করুন, AB সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে এবং $P(x_1, y_1)$ ও $Q(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে যায়। P ও Q বিন্দু হতে OX এর উপর যথাক্রমে PM ও QN এবং P হতে QN এর উপর PR লম্ব আঁকুন।

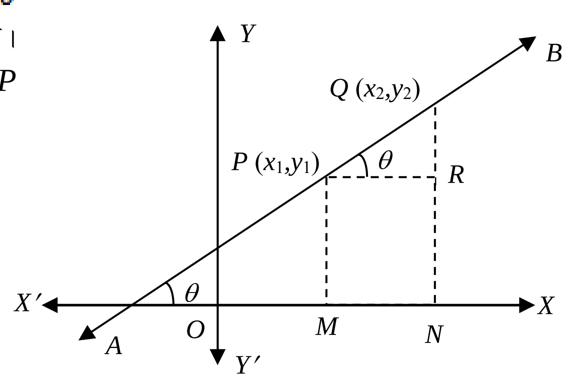
তাহলে, $OM = x_1$; $PM = y_1$; $ON = x_2$; $QN = y_2$;

$MN = PR = x_2 - x_1$;

$QR = QN - RN = QN - PM = y_2 - y_1$

এবং $\angle BAX = \angle QPR = \theta$

অতএব AB রেখার ঢাল,



$$m=\tan\theta=\tan\angle BAX=\tan\angle QPR=\frac{QR}{PR}=\frac{QN-RN}{PR}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

সুতরাং দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল = $\dfrac{\text{বিন্দুদ্বয়ের কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{বিন্দুদ্বয়ের ভুজদ্বয়ের অন্তর}}$

উদাহারণ 1: $(5,6)$এবং$(-4,2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোন উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: রেখাটির ঢাল $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2-6}{-4-5}=\dfrac{4}{9}$ এবং নির্ণেয় কোণ θ হলে আমরা পাই,

$m=\tan\theta$ বা $\dfrac{4}{9}=\tan\theta$ বা $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{9}\right)$

অতএব নির্ণেয় ঢাল $\dfrac{4}{9}$ এবং নির্ণেয় কোণ, $\theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{9}\right)$

উদাহারণ 2: $(3,1)$এবং$(2,2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোন উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: রেখাটির ঢাল $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{2-1}{2-3}=-1$ এবং নির্ণেয় কোণ θ হলে আমরা পাই,

$m=\tan\theta$ বা $-1=\tan\theta$ বা $\tan\theta=-1$

বা $\theta=\tan^{-1}(-1)=\tan^{-1}\tan(-45^\circ)=\tan^{-1}\tan(180^\circ-45^\circ)=135^\circ$

অতএব নির্ণেয় ঢাল -1 এবং নির্ণেয় কোণ, $\theta=135^\circ$

উদাহারণ 3: $(3,-4)$এবং$(5,0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: রেখাটির ঢাল $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{0-(-4)}{5-3}=2$ এবং নির্ণেয় কোণ θ হলে আমরা পাই,

$m=\tan\theta$ বা $2=\tan\theta$ বা $\tan\theta=2$ বা $\theta=\tan^{-1}(2)=63.44^\circ$

অতএব নির্ণেয় ঢাল 2 এবং নির্ণেয় কোণ, $\theta=63.44^\circ$

উদাহারণ 4: $y-\sqrt{3}x=5$ সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে যায় তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y-\sqrt{3}x=5$ বা $y=\sqrt{3}x+5$

উপরোক্ত রেখাকে $y=mx+c$ রেখার সাথে তুলনা করলে আমরা পাই, $m=\sqrt{3}$ বা, $\tan\theta=\sqrt{3}$

বা, $\theta=\tan^{-1}(\sqrt{3})=60^\circ$

অতএব নির্ণেয় কোণ 60°

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৫

1. (3,4) এবং (1,0) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন এবং x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।
2. (2, 3) এবং (0,0) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন এবং x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।
3. (0,4) এবং (0,2) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন এবং x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।
4. (-3,1) এবং (1,1) বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় করুন এবং x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় করুন।
5. $\sqrt{3}y - x = 5$ সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে যে কোণ করে যায় তা নির্ণয় করুন।
6. $y - x = 5$ সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে যে কোণ করে যায় তা নির্ণয় করুন।
7. $y = 5$ সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে যে কোণ করে যায় তা নির্ণয় করুন।
8. $x - 9 = 0$ সরলরেখাটি x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে যে কোণ করে যায় তা নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪.৬ সরলরেখার প্রমিত সমীকরণ সমূহ
(Standard equations of straight line)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন আকারের সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- দুইটি চলকের একঘাত সমীকরণ একটি সরলরেখায় প্রকাশ ও প্রমাণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	চলক, ঘাত, অক্ষ, সমান্তরাল, লম্ব, সঞ্চারপথ

মূলপাঠ

(a) x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ

মনে করুন, x-অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা AB, y-অক্ষকে $C(0,b)$ বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore OC = b$

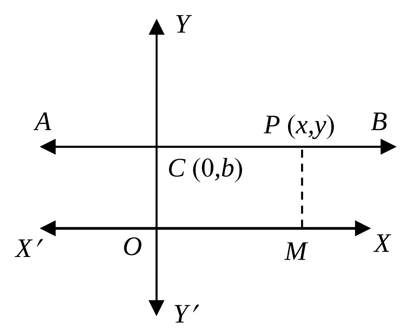
ধরুন, $P(x, y)$, AB সরলরেখার উপর যে কোন একটি বিন্দু।

P হতে OX এর উপর PM লম্ব আঁকুন।

$\therefore OC = PM = y = b$

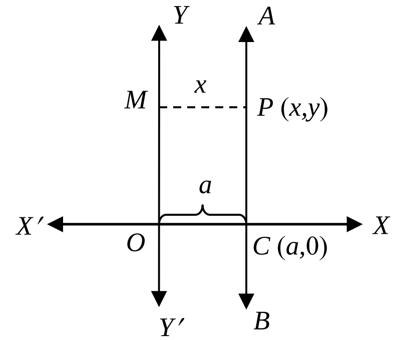
সুতরাং AB সরলরেখার উপর বিন্দু সমুহের সঞ্চারপথের সমীকরন $y = b$.

x-অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ $y = b$.



দ্রষ্টব্য:
(i) b এর মান ধনাত্বক হলে, রেখাটি x-অক্ষের b একক উপরে এবং b এর মান ঋণাত্বক হলে রেখাটি x-অক্ষের b একক নিচে থাকবে।
(ii) $b=0$ হলে সমীকরণটি $y=0$ হয় যা x-অক্ষের সমীকরণ সুতরাং $b=0$ হলে রেখাটি x-অক্ষের উপর সমাপতিত হয়।

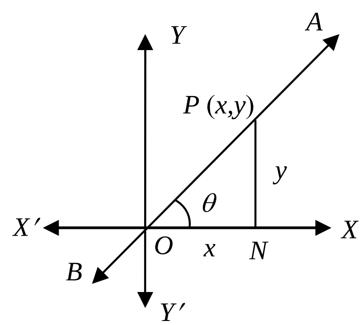
(b) y-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ



মনে করুন, y-অক্ষের সমান্তরাল যে কোন সরলরেখা AB, x-অক্ষকে $C(a,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং $OC=a$
ধরুন, AB রেখার উপর $P(x,y)$ যে কোন একটি বিন্দু, P হতে $PM\perp OY$ আঁকুন।
$\therefore PM=x=OC=a$ বা $x=a$
P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $x=a$
অতএব, y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x=a$.

দ্রষ্টব্য: a এর মান ধনাত্বক হলে, রেখাটি y অক্ষ হতে a একক ডানে এবং a এর মান ঋণাত্বক হলে y-অক্ষ হতে a একক বামে অবস্থিত হবে এবং $a=0$ হলে রেখাটি y-অক্ষের সাথে মিলে যাবে।

(c) মুল বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

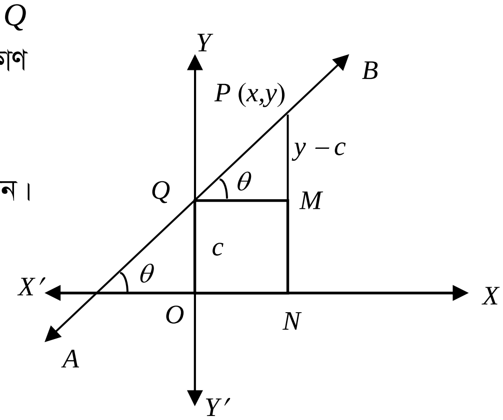


মনে করুন, মুলবিন্দু O বরাবর AB একটি সরলরেখা এবং $P(x,y)$, AB এর উপর যে কোনো বিন্দু। P হতে OX এর উপর PN লম্ব টানুন।
$\therefore ON=x$ এবং $PN=y$

ধরুন, $\angle PON=\theta$ $\therefore \Delta OPN$ এ $\tan\theta=\dfrac{PN}{ON}=\dfrac{y}{x}$ বা, $m=\dfrac{y}{x}$

[$\because$ ঢাল $m=\tan\theta$]
সুতরাং মুলবিন্দুগামী সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $y=mx$ যেখানে ঢাল $=m$ যা P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ।

(d) y-অক্ষকে কোন নির্দ্রিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের সাথে ধনাত্বক কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ



মনে করুন, AB সরলরেখাটি y-অক্ষকে মুলবিন্দু হতে c একক দূরত্বে Q বিন্দুতে ছেদ করে এবং x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে $\theta(\neq 90^\circ)$ কোণ উৎপন্ন করে।
ধরুন, AB রেখার উপর $P(x,y)$ যে কোনো একটি বিন্দু ।
P হতে x-অক্ষের উপর PN এবং Q হতে PN এর উপর QM লম্ব আঁকুন।
এখানে $\angle BAX=\angle BAN=\theta=\angle PQM$ এবং
$OQ=c=MN$, $ON=QM=x$ এবং $PN=y$
সুতরাং $PM=PN-MN=PN-OQ=y-c$
এখন ΔPQM হতে পাই,

$$\tan\theta=\frac{PM}{QM}=\frac{y-c}{x} \quad \text{বা,}\ y-c=x\tan\theta$$

বা, $y=mx+c$ $[\because m=\tan\theta]$

দ্রষ্টব্য: c ধনাত্বক, ঋণাত্বক বা শুন্য হতে পারে।

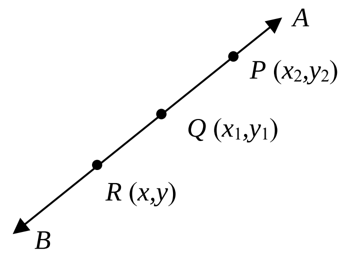
$c=0$ হলে রেখাটি মূলবিন্দুগামী এবং তখন রেখাটির সমীকরণ হবে $y=mx$.

(e) (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণঃ

মনে করুন, সরলরেখাটির সমীকরণ $y=mx+c$ ....(i) যেখানে c একটি ধ্রুবক।
যেহেতু সলররেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী, সুতরাং $y_1 = mx_1 + c$ বা, $c = y_1 - mx_1$;
c এর মান (i) সমীকরণে বসিয়ে পাই, $y = mx + y_1 - mx_1$ বা, $y - y_1 = m(x - x_1)$
সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং m ঢাল বিশিষ্ট সরল রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$ ।

(f) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

মনে করুন, AB সরলরেখাটি $Q(x_1, y_1)$ এবং $P(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং রেখাটির উপর $R(x, y)$ যে কোনো একটি বিন্দু।



তাহলে PQ এর ঢাল $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ এবং QR এর ঢাল $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

যেহেতু P, Q, R একই রেখায় অবস্থিত।
সুতরাং PQ এর ঢাল = QR এর ঢাল

বা, $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ বা, $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

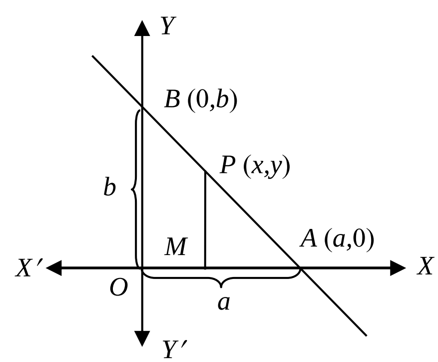
বা, $y - y_1 = m(x - x_1)$ [এখানে m = রেখাটির ঢাল]

অতএব, দুইটি নির্দ্রিষ্ট বিন্দু $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

যেখানে $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

(g) অক্ষ দুইটি থেকে নির্দিষ্ট দৈঘ্যের অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ (Intercept form)

মনে করুন, AB সরলরেখা x-অক্ষকে মুলবিন্দু হতে a একক দূরত্বে $A(a,0)$ বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে মূলবিন্দু হতে b একক দূরত্ব $B(0,b)$ বিন্দুতে ছেদ করে। ধরুন, $P(x,y)$, AB রেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু। P থেকে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টানুন।



তাহলে $OM = x, PM = y, OA = a$ এবং $OB = b$.
এখন ΔAOB এবং ΔPMA সদৃশ্যকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{MA}{MP}$ বা, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{OA - OM}{y}$ বা, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a - x}{y}$ বা, $\dfrac{y}{b} = \dfrac{a - x}{a}$

বা, $\dfrac{y}{b} = 1 - \dfrac{x}{a}$ বা $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

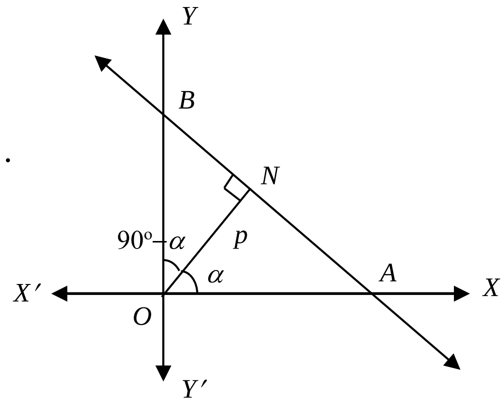
অর্থাৎ $\dfrac{x}{x - \text{অক্ষের খন্ডিতাংশ}} + \dfrac{y}{y - \text{অক্ষের খন্ডিতাংশ}} = 1$

দ্রষ্টব্যঃ উপরের সমীকরণটিকে $lx+my=1$ আকারেও লিখা যায় যেখানে $l = \dfrac{1}{a}, m = \dfrac{1}{b}$

(h) মুল বিন্দু থেকে সরলরেখার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য p এবং x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে উক্ত লম্ব α কোন উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণঃ

মনে করুন, AB রেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং রেখাটি দ্বারা x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $=OA$
এবং y-অক্ষের খন্ডিতাংশ $=OB$ ।
মূলবিন্দু O হতে AB এর উপর ON লম্ব টানুন।
তাহলে $ON = p$ এবং $\angle AON = \alpha$ সুতরাং $\angle BON = 90^\circ - \alpha$.



ΔOBN হতে পাই,

$\frac{ON}{OB} = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ বা, $\frac{OB}{ON} = \operatorname{cosec}\alpha$

বা, $OB = ON \operatorname{cosec}\alpha = p \operatorname{cosec}\alpha$

এবং ΔONA হতে পাই,

$\frac{ON}{OA} = \cos\alpha$ বা, $OA = ON \sec\alpha = p\sec\alpha$

সুতরাং AB রেখার সমীকরণ

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \text{ বা, } \frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1 \text{ বা, } x\cos\alpha + y\sin\alpha = p, \quad p > 1$$

দ্রষ্টব্য: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরলরেখা দুইটি একই সরলরেখা নির্দেশ করে যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ হয়।

উদাহরণ 1: এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(-4,-1)$ এবং $(4,-2)$ বিন্দু দিয়ে যায়।

সমাধান: আমরা জানি $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$$

সুতরাং $(-4,-1)$ এবং $(4,-2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - (-1) = \left(\frac{-1-(-2)}{-4-4}\right)(x - (-4))$$

বা, $y + 1 = \frac{-1+2}{-8}(x+4)$

বা, $-8(y+1) = 1.(x+4)$ বা, $x + 8y + 12 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x + 8y + 12 = 0$.

উদাহরণ 2: $4x - 5y + 40 = 0$ রেখাটি x ও y অক্ষ থেকে যে অংশ ছেদ করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, x-অক্ষ থেকে a এবং y-অক্ষ থেকে b অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$..(1)

দেওয়া আছে, $4x - 5y + 40 = 0$..................(2)

(2) কে (1) নং এর মত সাজিয়ে পাই,

$4x - 5y = -40$

বা $\frac{4x}{-40} + \frac{-5y}{-40} = 1$

বা $\frac{x}{-10}+\frac{y}{8}=1$

$\therefore a=-10, \quad b=8$

অর্থাৎ রেখাটি x-অক্ষ থেকে -10 একক এবং y-অক্ষ থেকে 8 একক অংশ ছেদ করে।

উদাহরণ 3: $A(h,k)$ বিন্দুটি $3x-y=2$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B(k,h)$ বিন্দুটি $x-y=4$ রেখার উপর অবস্থিত হলে AB সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $A(h,k)$ বিন্দুটি $3x-y=2$ রেখার উপর অবস্থিত, সুতরাং $3h-k=2$..............(1)

আবার, $B(k,h)$ বিন্দুটি $x-y=4$ রেখার উপর অবস্থিত সুতরাং $k-h=4$ বা $k=4+h$...........(2)

(2) নং হতে k এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$3h-(4+h)=2$

বা, $3h-4-h=2$

বা, $2h=6$

বা $h=3$

(2)নং থেকে পাই ,$k=4+3=7$

সতরাং $A(h,k)=(3,7)$এবং $B(k,h)=(7,3)$

অতএব, AB রেখার সমীকরণ

$y-7=\left(\frac{7-3}{3-7}\right)(x-3)$ বা $y-7=-1(x-3)$ বা $x+y-10=0$.

উদাহরণ 4: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুণ যা মূলবিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং x-অক্ষের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান: আমরা জানি, মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y=mx$ এখানে $m=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$.

$\therefore y=\sqrt{3}x$ বা $y-\sqrt{3}x=0$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $y-\sqrt{3}x=0$

উদাহরণ 5: মূলবিন্দু হতে কোনো সরলরেখার উপার অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য 5 একক এবং x-অক্ষের সাথে 135^0 কোণ উৎপন্ন করে। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ এখানে $p=5, \alpha=135^\circ$

$\therefore x\cos 135^\circ+y\sin 135^\circ=5$ বা $-x\cos 45^\circ+y\sin 45^\circ=5$

বা $-x.\frac{1}{\sqrt{2}}+y.\frac{1}{\sqrt{2}}=5$ বা, $x-y+5\sqrt{2}=0$

অতএব নির্ণেয় সমীকরণ $x-y+5\sqrt{2}=0$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৬

1. মুলবিন্দু $O(0,0)$ এবং $P(4,3)$ হলে OP এর সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. একটি সরলরেখার সমীকরণ $4x-3y=5$ এর ঢাল নির্ণয় করুন।
3. যে সরলরেখা $(3,-1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে 45^0 কোণ উৎপন্ন করে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন ।

4. $5x+4y=20$ রেখা দ্বারা x ও y অক্ষের খন্ডিতাংশ নির্ণয় করুন।
5. $(2,-1)$ এবং $(1,-3)$ বিন্দু দিয়ে গমন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
6. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 60^0 কোণ উৎপন্ন করে এবং মূল বিন্দু হতে যাহার উপর অংকিত লম্বের দৈর্ঘ্য 3 একক।
7. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(2,3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের ধনাত্মক দিক হতে 7 একক অংশ খন্ডিত করে।
8. একটি সরলরেখা $(2,5),(-1,3)$ বিন্দুগামী এবং (x,y) বিন্দুটি উক্ত সরলরেখার উপর অবস্থিত। প্রমাণ করুন যে, $2x-3y+11=0$.
9. দেখান যে, $(a,0),(0,b)$ এবং $(1,1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ হয়।
10. কোনো সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(3,4)$ বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হলে রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
11. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশ $(-4,3)$ বিন্দুতে $3:4$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।
12. একটি সরলরেখা $(2,6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখাটি দ্বারা অক্ষদ্বয় হতে খন্ডিত অংশের সমষ্টি 15 হলে তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
13. একটি সরলরেখা অক্ষদ্বয় হতে সমমানের যোগবোধক অংশ ছেদ করে এবং মূল বিন্দু থেকে তার উপর লম্ব দূরত্ব 5 একক হলে রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।
14. একটি সরলরেখা $(1,4)$ বিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয়ের সাথে প্রথম চতুর্ভাগে 8 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। সরলরেখাটি নির্ণয় করুন।
15. $3x+7y=21$ এবং $2ax-3by+12=0$ সমীকরণদ্বয় একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, a এবং b এর মান নির্ণয় করুন।
16. $ax+by=c$ এবং $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ একই সরলরেখা নির্দেশ করলে, p এর মান a,b ও c এর মাধ্যমে প্রকাশ করুন।
17. $4x+3y=12$ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী খন্ডিত অংশের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন । উপরিউক্ত খন্ডিতাংশ কোনো বর্গের বাহু হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
18. একটি সরলরেখা x-অক্ষ হতে 3 একক অংশ ছেদ করে এবং উহার ঢাল 1। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪.৭ লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন (Graph of straight line)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	লেখচিত্র, ফাংশন, ব্যবধি, ছক কাগজ, বৃত্তচাপ

মূলপাঠ

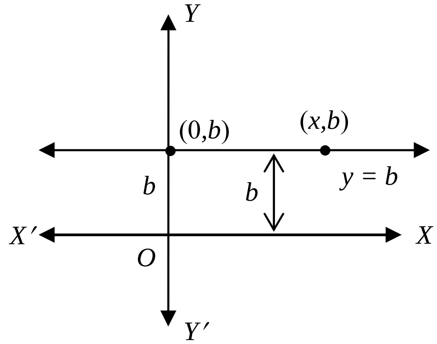
লেখচিত্রে সরলরেখা উপস্থাপন

সরলরেখা হল এক বা একাধিক চলক বিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ । এটি একটি এক-এক ফাংশন। লেখচিত্র হচ্ছে ফাংশনের জ্যামিতিক উপস্থাপন।

$y = mx + c$ আকারের সরলরেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য যে কোন ব্যবধিতে x কে স্বাধীন চলক ধরে y এর বিভিন্ন মান পাওয়া যায়। এই x ও y এর মান সম্বলিত অসংখ্য বিন্দু বা ক্রমজোড় পাওয়া যায়। এরূপ কয়েকটি বিন্দু ছক কাগজে XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে y-অক্ষ ধরে স্থাপন করে এদের পরস্পর সংযুক্ত করলেই উক্ত সরলরেখার লেখচিত্র পাওয়া যায়। এখানে উল্লেখ্য যে সরলরেখা অঙ্কনের জন্য অন্তত দুইটি বিন্দু প্রয়োজন।

x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার লেখচিত্র অংকন

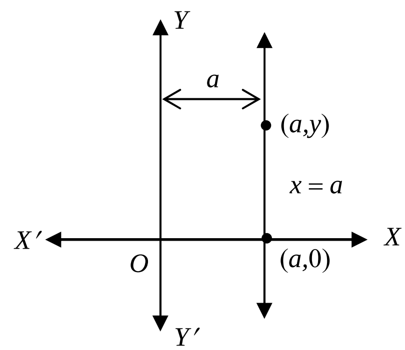
আমরা জানি x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $y = b$ যা y - অক্ষকে $(0,b)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং x-অক্ষের সমান্তরাল রেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য এমন একটি সরলরেখা আঁকতে হবে যা $(0,b)$ এবং (x,b) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে যেখানে x এর মান যে কোন ধ্রুব সংখ্যা।



y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার লেখচিত্র অংকন

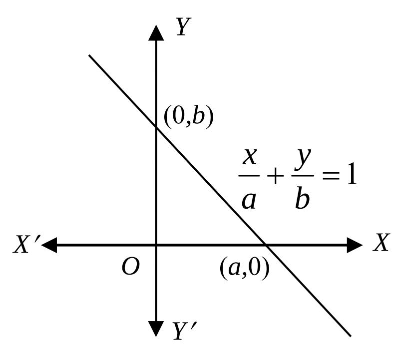
আমরা জানি, y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x = a$ যা x-অক্ষকে $(a,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখার লেখচিত্র অংকনের জন্য এমন একটি সরলরেখা আঁকতে হবে যা $(a,0)$ এবং (a,y) বিন্দু দিয়ে যায় যেখানে y এর মান যে কোন ধ্রুব সংখ্যা।



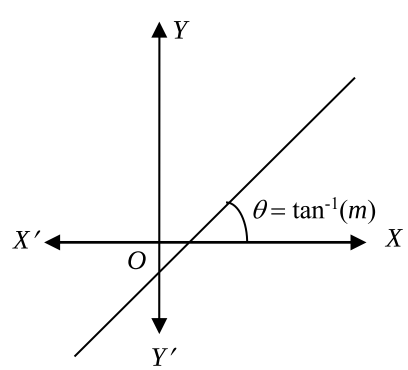
অক্ষদ্বয়ের খন্ডিতাংশ জানা আছে এমন সরলরেখার লেখচিত্র অংকন

আমরা জানি, অক্ষদ্বয়কে খন্ডিত করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ যা x-অক্ষকে $(a,0)$ এবং y-অক্ষকে $(0,b)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং ছক কাগজে $(a,0)$ ও $(0,b)$ বিন্দুদ্বয়কে স্থাপন করে সংযোগ করলেই উক্ত সরলরেখার লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



m ঢাল বিশিষ্ট মূলবিন্দুগামী সরলরেখার লেখচিত্র অংকন

m ঢাল বিশিষ্ট মূলবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y = mx$ যেখানে $m = \tan\theta$ বা $\theta = \tan^{-1}(m)$ অর্থাৎ x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে $\theta = \tan^{-1}(m)$ কোণ উৎপন্ন করে। সুতরাং এরূপ সরলরেখার লেখচিত্র অংকন করার জন্য ছক কাগজের xy-সমতলে x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে θ এর সমান চাপ নিয়ে কোণ এঁকে উক্ত সরলরেখার লেখচিত্র অংকন করা হয়।



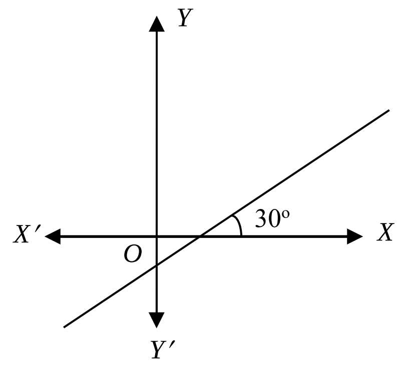
উদাহরণ 1: $\sqrt{3}y = x$ সরলরেখাটির লেখচিত্র অংকন করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sqrt{3}y = x$ বা $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$

সুতরাং প্রদত্ত রেখাটি মূল বিন্দুগামী যার ঢাল $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

সুতরাং $\theta = \tan^{-1}(m) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ$

অতএব, মূলবিন্দুকে কেন্দ্র করে চাঁদার সাহায্যে x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে 30° কোণ একে সরলরেখাটির লেখচিত্র পাওয়া যায়।



উদাহরণ 2: $(3,2)$ এবং $(-4,-2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার লেখচিত্র অংকন করুন।

সমাধান: ছক কাগজে XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে y-অক্ষ ধরে ছোট বর্গের প্রত্যেক বর্গকে এক একক ধরে $(3,2)$ এবং $(-4,-2)$ বিন্দুদ্বয় স্থাপন করুন। এবার বিন্দুদ্বয় যোগ করুন যা নির্ণেয় সরলরেখার লেখচিত্র।

উদাহরণ 3: এরূপ সরলরেখার সমীকরণ অংকন করুন যা x- অক্ষের সাথে $\theta = 45^\circ$ কোণ করে এবং ধনাত্বক দিক হতে $c = 2$ অংশ ছেদ করে।

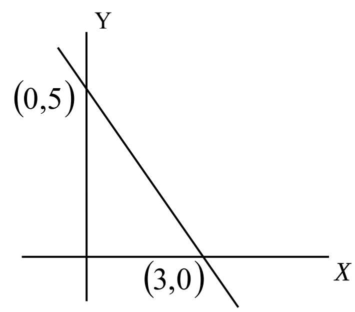
সমাধান: ছক কাগজে XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে y-অক্ষ ধরে ছোট বর্গের প্রত্যেক বর্গকে এক একক ধরে x-অক্ষর ধনাত্বক দিক হতে 2 একক অংশ কাটুন। মনে করুন, তা x-অক্ষকে $A(2,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। এবার চাঁদার সাহায্যে A বিন্দুতে x-অক্ষর ধনাত্বক দিকে 45° কোণ আঁকুন এবং A বিন্দুর সাথে যোগ করুন যা নির্ণেয় সরলরেখার লেখচিত্র।

উদাহরণ 4: পাশের লেখচিত্রটি কোন সরলরেখা নির্দেশ করে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: লেখচিত্র হতে দেখা যায় সরলরেখাটি x-অক্ষকে $(3,0)$ এবং y-অক্ষকে $(0,5)$ বিন্দুতে ছেদ করে অর্থাৎ x-অক্ষের খন্ডিতাংশ $a = 3$ এবং y- অক্ষের খন্ডিতাংশ $b = 5$

সুতরাং সরলরেখার সমীকরণ হবে $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ বা $5x + 3y = 1$

সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $5x + 3y = 1$.



পাঠ ৪.৮ দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু ও অন্তর্ভুক্ত কোণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

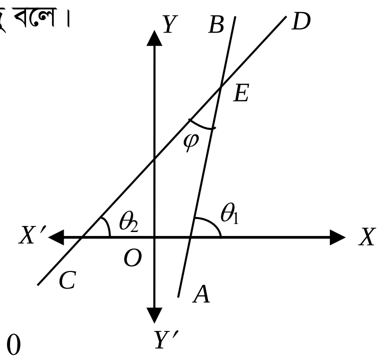
- দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন,
- সমান্তরাল নয় এমন দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সরলরেখা, ছেদবিন্দু, অন্তর্ভুক্ত কোণ

মূলপাঠ

দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু (Point of intersection of two straight lines)

মনে করুন, দুইটি সরলরেখার সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ । সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল না হলে তাদের একটি ছেদবিন্দু থাকবে । উক্ত ছেদবিন্দুকে তাদের সাধারণ বিন্দু বলে।



ধরুন, তাদের সাধারণ বিন্দুর স্থানাংক (x_1, y_1)

সুতরাং (x_1, y_1) দ্বারা উপরোক্ত সমীকরণ দুইটি সিদ্ধ হবে।

অর্থাৎ $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$

বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x_1}{b_1c_2-c_1b_2}=\frac{y_1}{c_1a_2-a_1c_2}=\frac{1}{a_1b_2-b_1a_2}$$

$\therefore x_1=\dfrac{b_1c_2-c_1b_2}{a_1b_2-b_1a_2}$ এবং $y_1=\dfrac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}$ যেখানে $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$

$\therefore$ ছেদ বিন্দুর স্থানাংক $\left(\dfrac{b_1c_2-c_1b_2}{a_1b_2-b_1a_2}, \dfrac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}\right)$

দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণ (Angle between two straight lines)

মনে করুন, E বিন্দুতে AB ও CD রেখা দুইটি পরস্পরকে ছেদ করে অন্তর্ভুক্ত কোণ φ উৎপন্ন করে। $\therefore \angle AEB=\varphi$

মনে করুন, $\angle BAX=\theta_1$ এবং $\angle DCX=\theta_2$ এবং $\theta_1>\theta_2$.সুতরাং $\varphi=\theta_1-\theta_2$

(i) মনে করুন, AB ও CD রেখা দুইটির সমীকরণ

$y=m_1x+c_1$ এবং $y=m_2x+c_2$

$\therefore \tan\theta_1=m_1$ এবং $\tan\theta_2=m_2$

$$\therefore \tan\varphi=\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

বা, $\tan\varphi=\dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

আবার, যদি $\theta_2>\theta_1$ হয় তখন $\varphi=\theta_2-\theta_1$

$$\therefore \tan\varphi=\tan(\theta_2-\theta_1)=\tan\{-(\theta_1-\theta_2)\}=-\tan(\theta_1-\theta_2)=-\left(\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right)=-\left(\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right)$$

সুতরাং $\tan\varphi=\pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

(ii) মনে করুন, সরলরেখা দুইটির সমীকরণ

$a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$

অর্থাৎ $y=-\dfrac{a_1}{b_1}x-\dfrac{c_1}{b_1}$ এবং $y=-\dfrac{a_2}{b_2}x-\dfrac{c_2}{b_2}$

$\therefore m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$ এবং $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$

$$\therefore \tan\varphi = \pm \frac{\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)-\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)}{1+\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right)} = \pm \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$$

বিঃ দ্রঃ $ax+by+c=0$ সরলরেখার ঢাল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে আমরা পাই, $by=-ax-c$ বা, $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ অর্থাৎ $ax+by+c=0$ সরলরেখার ঢাল $m=-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$ ।

উদাহরণ 1: $3x-4y+5=0$ এবং $x-2y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-c_1b_2}{a_1b_2-b_1a_2}, \frac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}\right).$$

সুতরাং $3x-4y+5=0$ এবং $x-2y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাংক

$$\left(\frac{-4\times1-5\times(-2)}{3\times(-2)-(-4)\times1}, \frac{5\times1-3\times1}{3\times(-2)-(-4)\times1}\right) \text{ বা } \left(\frac{-4+10}{-6+4}, \frac{5-3}{-6+4}\right) \text{ বা, } \left(\frac{6}{-2}, \frac{2}{-2}\right) \text{ বা, } (-3,-1).$$

অতএব নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $(-3,-1)$.

উদাহরণ 2: $x-2y=3$ এবং $2x-y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{b_1c_2-c_1b_2}{a_1b_2-b_1a_2}, \frac{c_1a_2-a_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2}\right).$$

সুতরাং $x-2y=3$ বা, $x-2y-3=0$ এবং $2x-y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাংক

$$=\left(\frac{-2\times1-(-3)\times(-1)}{1\times(-1)-(-2)\times2}, \frac{(-3)\times1-1\times1}{1\times(-1)-(-2)\times2}\right) \text{ বা } \left(\frac{-4-3}{-1+4}, \frac{-6-1}{-1+4}\right) \text{ বা, } \left(-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

অতএব নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left(-\dfrac{7}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$

উদাহরণ 3: $3x-y+4=0$ এবং $2x+3y-5=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $3x-y+4=0$ রেখার ঢাল $m_1=\dfrac{-3}{-1}=3$

এবং $2x+3y-5=0$ রেখার ঢাল $m_2=-\dfrac{2}{3}$

ধরুন, নির্ণেয় কোণ φ

$\therefore$ আমরা পাই, $\tan\varphi = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm\dfrac{3 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)}{1 + 3\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)} = \pm\dfrac{11}{3} = \dfrac{11}{3}$ এবং $-\dfrac{11}{3}$

$\therefore \tan\varphi = \dfrac{11}{3} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\dfrac{11}{3}\right) = 74.75^\circ$

এবং $\tan\varphi = -\dfrac{11}{3} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(-\dfrac{11}{3}\right) = \tan^{-1}\left(-\tan 74.75^\circ\right) = \tan^{-1}\left(\tan 105.25^\circ\right) = 105.25^\circ$

অতএব নির্ণেয় কোণ 74.75°, 105.25°

উদাহরণ 4: $x - y + 4 = 0$ এবং $x + y - 5 = 0$ **:** হলে দেখান যে, রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

সমাধান: এখানে, $x + y - 5 = 0$ রেখার ঢাল $m_1 = -\dfrac{1}{1} = -1$

এবং $2x + 3y - 5 = 0$ রেখার ঢাল $m_2 = -\dfrac{2}{3}$

ধরুন, নির্ণেয় কোণ φ

$\therefore$ আমরা পাই, $\tan\varphi = \pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm\dfrac{1 - (-1)}{1 + 1\times(-1)} = \dfrac{2}{0} = \infty$

$\therefore \tan\varphi = \infty \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(\infty) = 90^\circ$

অর্থাৎ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমান 90°, সুতরাং তারা পরস্পর লম্ব।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৮

1. $3x - 4y + 1 = 0$ ও $6x - 5y + 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
2. $x - y - 4 = 0$ ও $x + y + 8 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
3. $5x + 3y = 10$ এবং x-অক্ষের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
4. $3x - y + 7 = 0$ এবং $5x + y = 1$ রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করুন।
5. $x - \sqrt{3}y - 7 = 0$ এবং $\sqrt{3}x - y + 5 = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত স্থূলকোণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪.৯ দুইটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- দুইটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমান্তরাল, লম্ব

মূলপাঠ

দুইটি সরলরেখার পরস্পর সমান্তরাল বা লম্ব হওয়ার শর্ত (Condition of parallel and perpendicular of two straight lines)

$y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি তাদের অন্তর্গত কোণ $\varphi = 0^\circ$ হয় অর্থাৎ $\tan\varphi = \tan 0^\circ = 0$

অর্থাৎ $\pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = 0$ বা, $m_1 - m_2 = 0$ #বা, $m_1 = m_2$ #

সুতরাং $m_1 = m_2$ হলে রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে।

আবার, $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ সমান্তরাল হবে যদি

$\pm\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = 0$ বা $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ বা $a_2b_1 = a_1b_2$ বা $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$

সুতরাং দুইটি সরলরেখার সমীকরণে x এর সহগ এবং y এর সহগ একই এবং ধ্রুবক পদদ্বয় ভিন্ন হলে তারা পরস্পর সমান্তরাল হবে।

উদাহারণস্বরূপ $3x + 4y - 5 = 0$ এবং $3x + 4y - 11 = 0$ সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

আবার, $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ সরলরেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে যদি রেখা দ্বয়ের অর্ন্তগত কোণ $\varphi = 90^\circ$ হয়।

অর্থাৎ $\tan\varphi = \tan 90^\circ = \infty = \dfrac{1}{0}$

অর্থাৎ $\pm\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \dfrac{1}{0}$ বা $1 + m_1m_2 = 0$ বা $m_1m_2 = -1$

অনুরূপভাবে $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি

$\pm\dfrac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} = \tan 90^\circ = \infty = \dfrac{1}{0}$ বা $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ বা $\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right) = -1$

সুতরাং যে কোনো সরল রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হলে প্রদত্ত সমীকরনের (i) x ও y-এর সহগ পরিবর্তন করতে হবে (ii) x ও y-এর যে কোনো একটির পূর্বের চিহ্ন পরিবর্তন করতে হবে এবং ধ্রুবক পদের পরিবর্তে অন্য কোনো ধ্রুবক পদ বসাতে হবে।

উদাহারণস্বরূপ $2x - 3y + 10 = 0$ রেখার সাথে লম্ব রেখার সমীকরণ হবে $3x + 2y + k = 0$ এখানে k যে কোনো একটি ধ্রুবক সংখ্যা।

উদাহারণ 1: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(2,3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $5x - 4y = 11$ রেখার সমান্তরাল।

সমাধান: আমরা জানি, $5x - 4y = 11$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $5x - 4y + k = 0$................(i) যেখানে k যে কোনো ধ্রুবক সংখ্যা।

(i)নং সমীকরণটি $(2,3)$ বিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং $(2,3)$ বিন্দু দিয়ে (i) সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ

$(5\times 2) - (4\times 3) + k = 0$ বা $k = 2$

সুতরাং $k = 2$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $5x - 4y + 2 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $5x - 4y + 2 = 0$

উদাহারণ 2: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(1,2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x - 5y + 10 = 0$ রেখার সমান্তরাল।

সমাধানঃ আমরা জানি, $x-5y+10=0$ রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x-5y+k=0$.......................(i)
যেখানে k যে কোনো ধ্রুবক সংখ্যা।
(i) নং সমীকরণটি $(1,2)$ বিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং $(1,2)$ বিন্দু দিয়ে (i) সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ
$1-(5\times 2)+k=0$ বা $k=9$
সুতরাং $k=9$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x-5y+9=0$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $x-5y+9=0$

উদাহরণ 3: সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(-2,7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $2x-5y=7$ রেখার উপর লম্ব।
সমাধানঃ $2x-5y=7$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ $5x+2y+k=0$....................(i)
যেখানে k যে কোনো ধ্রুবক সংখ্যা।
(i) নং সমীকরণটি $(-2,7)$ বিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং $(-2,7)$ বিন্দু দিয়ে (i) সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ
$(5\times -2)+(2\times 7)+k=0$ বা $k=-4$
সুতরাং $k=-4$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $5x+2y-4=0$
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $5x+2y-4=0$.

উদাহরণ 4: $(3,2)$বিন্দু থেকে $2x-3y+5=0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
সমাধানঃ $2x-3y+5=0$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ $3x+2y+k=0$ যা $(3,2)$ বিন্দুগামী।
সুতরাং $3\times 3+2\times 2+k=0$ বা $k=-13$
$\therefore (3,2)$ বিন্দুগামী $2x-3y+5=0$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ $3x+2y-13=0$
$\therefore 2x-3y+5=0$ এবং $3x+2y-13=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুই হবে প্রদত্ত রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দু
$\therefore$ বজ্রগুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{39-10}=\frac{y}{15+26}=\frac{1}{4+9} \text{ বা, } x=\frac{29}{13}, \text{ এবং } y=\frac{41}{13}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $\left(\frac{29}{13},\frac{41}{13}\right)$।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৯

1. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x+2y-2=0$ ও $x+3y+4=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।
2. এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $5x+3y-7=0$ রেখার সমান্তরাল এবং $3x-2y+5=0$ ও $x+y+4=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।
3. $(3,-2)$ বিন্দুগামী এবং $x-3y+5=0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
4. $(1,-2)$ বিন্দুগামী এবং $(3,5)$ ও $(-4,3)$ সংযোজক রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. $(2,-1)$ বিন্দু থেকে $2x+3y+6=0$ রেখার উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক বের করুন।
6. $(4,-3)$ বিন্দুগামী এবং $2x+11y-2=0$ রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
7. k এর মান কত হলে $2x-y+3=0$ এবং $4x+ky-5=0$ রেখা দুইটি পরস্পর লম্ব হবে?

পাঠ ৪.১০ বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বিভিন্ন শর্তাধীনে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু কিনা তা নির্ণয়ে দক্ষতা অর্জন করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ছেদবিন্দু, সমবিন্দু, একঘাত সমীকরণ

মূলপাঠ

দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

মনে করুন, সরলরেখা দুইটি

$a_1x+b_1y+c_1=0$........................(i)

$a_2x+b_2y+c_2=0$.......................(ii)

ধরুন, উপরোক্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (x_1, y_1).

$\therefore \quad a_1x_1+b_1y_1+c_1+k(a_2x_1+b_2y_1+c_2)=0$.......................(iii)

যেখানে k যেকোনো একটি ধ্রুবক এবং $k\neq 0 \quad [\because \quad 0+k.0=0]$

(iii) নং হতে স্পটতই বলা যায় যে (x_1, y_1) বিন্দুটি

$a_1x+b_1y+c_1+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$...........................(iv)

সমীকরণকে সিদ্ধ করে। (iv) নং সমীকরণটি x ও y এর একটি একঘাত সমীকরণ। অর্থাৎ এটি একটি সরলরেখার সমীকরণ।

সুতরাং (iv) নং সমীকরণটি (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুগামী একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। এখানে k এর বিভিন্ন মানের $k\neq 0$ জন্য (iv) নং সমীকরণটি দ্বারা বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যায় যাদের প্রত্যেকটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী। উল্লেখ্য যে, একটি বিন্দু দিয়ে অসংখ্য সরলরেখা আঁকা যায়। সুতরাং (iv) নং সমীকরণটি (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুগামী যে কোনো সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ নির্দেশ করে।

তিনটি সরলরেখা সমবিন্দু হওয়ার শর্ত

মনে করুন, $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, এবং $a_3x+b_3y+c_3=0$ সরলরেখা তিনটি (x_1, y_1) বিন্দু দিয়ে যায়।

$\therefore (x_1, y_1)$বিন্দু দ্বারা রেখা তিনটি সিদ্ধ হবে, অর্থাৎ

$a_1x_1+b_1y_1+c_1=0$........................(i)

$a_2x_1+b_2y_1+c_2=0$.......................(ii)

$a_3x_1+b_3y_1+c_3=0$.......................(ii)

(i), (ii), ও (iii)নং সমীকরণ হতে (x_1, y_1) অপসারণ করে পাই,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$, যা তিনটি রেখার সমবিন্দু হওয়ার নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ 1: একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন যা $(2,5)$ বিন্দু এবং $2x-5y-3=0$ ও $4x+3y+1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায়।

সমাধান: ধরুন, রেখাটির সমীকরণ $2x-5y-3+k(4x+3y+1)=0$................(i)

(i) নং রেখাটি $(2,5)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 2\times 2-5\times 5-3+k(4\times 2+3\times 5+1)=0$

বা, $4-25-3+k(8+15+1)=0$

বা, $24k=24$

বা, $k=1$

সুতরাং $k=1$, (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2x-5y-3+1(4x+3y+1)=0$

বা, $6x-2y-2=0$

বা, $3x-y-1=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $3x-y-1=0$ ।

উদাহরণ 2: $x-2y+2=0,\quad 2x-y+1=0,\quad x-ay-2=0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে, a এর মান কত?

সমাধান: $x-2y+2=0,\quad 2x-y+1=0,\quad x-ay-2=0$ সমবিন্দু হলে, আমরা পাই,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -a & -2 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $1\times(2+a)-(-2)(-4-1)+2\times(-2a+1)=0$

বা, $2+a-10-4a+2=0$

বা, $-3a=6$ বা, $a=-2$

সুতরাং $a=-2$ হলে প্রদত্ত রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে।

উদাহরণ 3: x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x+2y+3=0$ ও $x-2y-7=0$, রেখা দুইটির সমবিন্দু এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, $x+2y+3=0$ ও $x-2y-7=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$x+2y+3+k(x-2y-7)=0$......................(i)

বা, $x(1+k)+y(2-2k)+(3-7k)=0$

এটি x-অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় x-এর সহগ শূন্য হবে।

অর্থাৎ $1+k=0$ বা $k=-1$

$k=-1$ (i) নং সমীকরণ বসিয়ে পাই,

$x+2y+3+(-1)(x-2y-7)=0$

বা, $x+2y+3-x+2y+7=0$ বা, $4y+10=0$ বা $2y+5=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $2y+5=0$ ।

উদাহরণ 4: y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $3x-y+2=0$ ও $x+y+10=0$ রেখা দুইটির সমবিন্দু এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, $3x-y+2=0$ ও $x+y+10=0$ রেখা দুইটির ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$3x-y+2+k(x+y+10)=0$..................(i)

বা, $x(3+k)+y(-1+k)+(2+10k)=0$

এটি y-অক্ষের সমান্তরাল হওয়ায় y এর সহগ শূন্য হবে।

অর্থাৎ $-1+k=0$ বা $k=1$

$k=1$, (i)নং সমীকরণ বসিয়ে পাই,

$3x-y+2+1.(x+y+10)=0$

বা, $3x-y+2+x+y+10=0$

বা, $4x+12=0$ বা $x+3=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $x+3=0$ ।

উদাহরণ 5: $(1,2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x+2y-5=0$ রেখার সাথে 45^{o} কোণ করে যায়, এরূপ সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $x+2y-5=0$ রেখার ঢাল $m_1=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$. ধরুন, নির্ণেয় রেখার ঢাল $=m_2$

সুতরাং $\tan 45^{\circ}=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$

বা, $1=\pm\frac{-\frac{1}{2}-m_2}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)m_2}$ বা, $2-m_2=\pm(-1-2m_2)$

$(-)$ ধরে পাই, $2-m_2=-(-1-2m_2)$ বা, $2-m_2-1-2m_2=0$ বা, $3m_2=1$ বা, $m_2=\frac{1}{3}$.

$(+)$ ধরে পাই, $2-m_2=(-1-2m_2)$ বা, $2-m_2=-1-2m_2$ বা, $m_2=-3$

সুতরাং $(1,2)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{3}$ ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ

$y-2=\frac{1}{3}(x-1)$ বা, $3y-6=x-1$ বা $x-3y+5=0$

অনুরূপভাবে, $(1,2)$ বিন্দুগামী এবং -3 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y-2=-3(x-1)$ বা, $3x+y-5=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x-3y+5=0$ এবং $3x+y-5=0$.

উদাহরণ 6: $x-4y+1=0$ এবং $x+y-2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, রেখাটির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$ বা, $x-y=a$............(i)

এখন $x-4y+1=0$ এবং $x+y-2=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাংক

$$(x,y)=\left(\frac{(-4)\times(-2)-1\times 1}{1\times 1-(-4)\times 1},\frac{1\times 1-1\times(-2)}{1\times 1-(-4)\times 1}\right)=\left(-\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$$

শর্ত মতে, (i)নং রেখাটি $\left(-\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$ বিন্দুগামী

সুতরাং $-\frac{9}{5}-\frac{3}{5}=a$ বা $a=-\frac{12}{5}$

$a=-\frac{12}{5}$, (i) নং এ বসিয়ে পাই, $x-y=-\frac{12}{5}$ বা $5x-5y+12=0$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $5x-5y+12=0$ ।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১০

1. x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x+y-5=0$ ও $x+2y-8=0$ রেখা দুইটির সমবিন্দু এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x-4y+3=0$ ও $x-y-6=0$ রেখা দুইটির সমবিন্দু এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. $x-3y+2=0, x-6y+3=0, x+ay-1=0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে a এর মান কত?
4. $3x+4y-2=0, 2x+3y=0, ax+by+1=0$ রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে a ও b এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করুন।
5. $(3,2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $x-2y-3=0$ রেখার সাথে 45° কোণ করে যায়, এরূপ সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
6. $(6,7)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং $3x+y-5=0$ রেখার সাথে 45° কোণ করে যায়, এরূপ সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
7. $x-2y-7=0, x-3y-11=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
8. $3x-4y+1=0$ এবং $5x+y-1=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং অক্ষদ্বয় হতে একই চিহ্ন বিশিষ্ট সমান অংশ ছেদ করে এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪.১১ সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয়

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

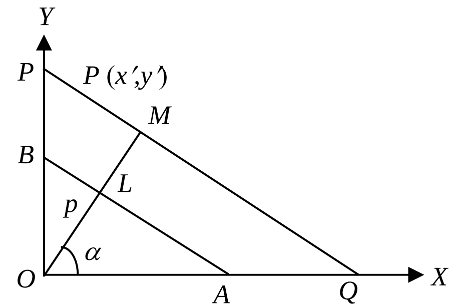
এই পাঠ শেষে আপনি-

- কোনো বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমান্তরাল সরলরেখা, লম্ব দূরত্ব, সমদ্বিখণ্ডক

মূলপাঠ

কোনো বিন্দু থেকে একটি সরলরেখার লম্ব দূরত্ব নির্ণয়:



মনে করুন, যে কোনো বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x', y')।

(a) ধরুন, AB সরলরেখার সমীকরণ

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$.............(i)

মূল বিন্দু O হতে AB এর উপর OL লম্ব আঁকুন।

$\therefore OL = p$ এবং $\angle XOL = \alpha$

P বিন্দু হতে AB এর সমান্তরাল করে PQ সরলরেখা আঁকুন। রেখাটি OL এর বর্ধিতাংশকে M বিন্দুতে ছেদ করে। ধরুন, $OM = p'$

$\therefore PQ$ রেখার সমীকরণ $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p'$...........(ii) $[\because AB \| PQ]$

যেহেতু PQ রেখার উপর $P(x', y')$ বিন্দুটি অবস্থিত, সুতরাং (ii)নং সীকরণটি (x', y') দ্বারা সিদ্ধ হবে।

অর্থাৎ $x'\cos\alpha + y'\sin\alpha = p'$

সুতরাং নির্ণেয় দূরত্ব $ML = OM - OL = p' - p = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p$ ....(iii)

(iii) নং এর ডান পক্ষের সংখ্যার পরম মানই নির্ণেয় লম্ব দূরত্ব।

(b) মনে করুন, সরলরেখাটির সমীকরণ $ax + by + c = 0$ যেখানে $a, b \neq 0$। সমীকরণটিকে $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ এর সরুপ বিবেচনা করে পাই,

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{-p}{c} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ এবং } p = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\therefore (x', y')$ বিন্দু হতে রেখাটির লম্ব দূরত্ব

$$= |x'\cos\alpha + y'\sin\alpha - p|$$

$$= \left| x'\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + y'\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{(-c)}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{ax' + by' + c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| = \frac{|ax' + by' + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\therefore (x', y')$ বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $\dfrac{|ax' + by' + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

দ্রষ্টব্য: মূল বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

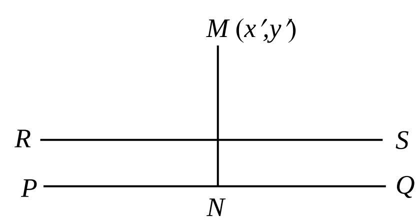
দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব:

মনে করুন, $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা। চিত্রে এদেরকে PQ ও RS দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।

ধরুন, PQ রেখার উপর যে কোনো একটি বিন্দু $M(x', y')$

$\therefore ax' + by' + c_1 = 0$ বা $ax' + by' = -c_1$.............(i)

এখন, M হতে RS এর উপর MN লম্ব অঙ্কন করুন।

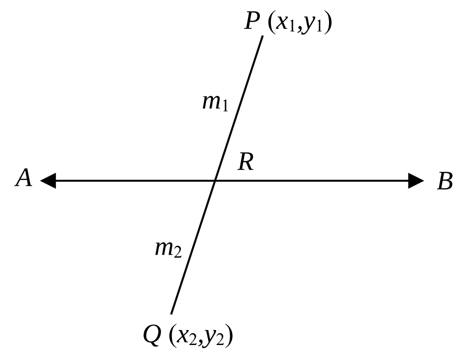


তাহলে, $MN = \dfrac{|ax' + by' + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|-c_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

সুতরাং দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব $= \dfrac{|\text{ধ্রুবকদ্বয়ের অন্তর}|}{\sqrt{(x\text{ - এর সহগ})^2 + (y\text{ - এর সহগ})^2}}$

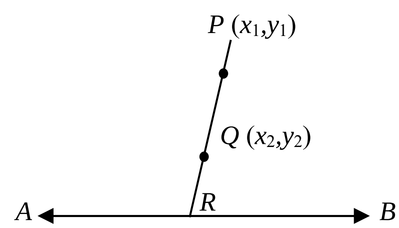
সরলরেখার ধনাত্বক পার্শ্ব ও ঋণাত্বক পার্শ্ব

মনে করুন, AB সরলরেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0$ এবং $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ যে কোনো দুইটি বিন্দু। ধরুন, PQ রেখাংশ R বিন্দুতে AB সরলরেখাকে এমন ভাবে ছেদ করে যেন $PR : RQ = m_1 : m_2$ হয়।



(a) যদি P ও Q বিন্দু AB সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে (অর্থাৎ একটি যে পার্শ্বে অপরটি তার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত) অবস্থান করে তবে R এর স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right).$$



$\because R$ বিন্দুটি AB রেখার উপর অবস্থিত

$\therefore a\left(\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}\right) + b\left(\dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) + c = 0$

বা, $a(m_1x_2 + m_2x_1) + b(m_1y_2 + m_2y_1) + c(m_1 + m_2) = 0$

বা, $m_1(ax_2 + by_2 + c) + m_2(ax_1 + by_1 + c) = 0$

বা, $\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = -\dfrac{m_1}{m_2}$, যা ঋণাত্বক চিহ্ন বিশিষ্ট।

সুতরাং $ax_1 + by_1 + c$ ও $ax_2 + by_2 + c$ রাশি দুইটির মান বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

$\therefore (x_1, y_1)$ এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $ax_1 + by_1 + c$ ও $ax_2 + by_2 + c$ রাশি দুইটির মান বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

(b) যদি P ও Q বিন্দু AB সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থান করে, তবে R এর স্থানাঙ্ক হবে

$$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$

$\because R$ বিন্দুটি AB রেখার উপর অবস্থিত

$\therefore a\left(\dfrac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}\right) + b\left(\dfrac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right) + c = 0$

বা, $a(m_1x_2 - m_2x_1) + b(m_1y_2 - m_2y_1) + c(m_1 - m_2) = 0$

বা, $m_1(ax_2 + by_2 + c) - m_2(ax_1 + by_1 + c) = 0$

বা, $\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = \dfrac{m_1}{m_2}$ যা ধনাত্বক

সুতরাং $ax_1 + by_1 + c$ ও $ax_2 + by_2 + c$ রাশি দুইটির মান একই চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

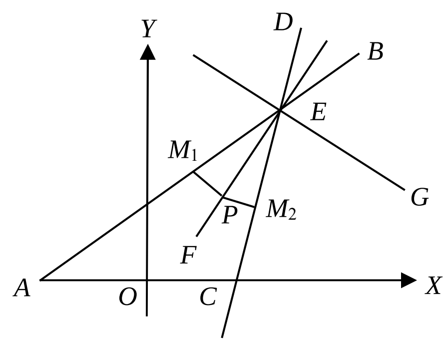
$\therefore (x_1, y_1)$ এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax+by+c=0$ রেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি ax_1+by_1+c ও ax_2+by_2+c রাশি দুইটির মান একই চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

ধনাত্মক পার্শ্ব ও ঋণাত্মক পার্শ্ব: $ax+by+c=0$ সরলরেখার কোনো পার্শ্বের যে কোনো বিন্দু (x_1, y_1) এর জন্য যদি ax_1+by_1+c সর্বদা ধনাত্মক হয় তবে ঐ পার্শ্বকে সরলরেখাটির ধনাত্মক পার্শ্ব বলে এবং অপর পার্শ্বটিকে ঋণাত্মক পার্শ্ব বলে।

মূল বিন্দুর অবস্থান: যদি $ax+by+c=0$ সমীকরণের c ধনাত্মক হয় তবে মূল বিন্দু সরলরেখার ধনাত্মক পার্শ্বে এবং c ঋণাত্মক হয় তবে মূল বিন্দু সরলরেখাটির ঋণাত্মক পার্শ্বে অবস্থিত।

মূল বিন্দু ও অপর যে কোনো বিন্দুর অবস্থান: যদি ax_1+by_1+c এবং c একই চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে মূল বিন্দু $(0,0)$ এবং (x_1, y_1) একই পার্শ্বে অবস্থিত হবে। আর যদি ভিন্ন চিহ্ন বিশিষ্ট হয় তবে মূল বিন্দু $(0,0)$ এবং (x_1, y_1) বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হবে।

দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ



মনে করুন, AB এবং CD সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে $ax_1+by_1+c_1=0$ এবং $ax_2+by_2+c_2=0$

মনে করুন, AB এবং CD রেখাদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করে এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখন্ডকদ্বয় EF এবং EG। ধরুন, $\angle AEC$ এর সমদ্বিখন্ডক EF এর উপর $P(x', y')$ যে কোনো একটি বিন্দু।

P হতে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে PM_1 ও PM_2 লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে PM_1 ও PM_2 এর দৈর্ঘ্য সমান।

আবার $P(x', y')$ এবং মূল বিন্দু AB ও CD একই পার্শে অবস্থিত, সুতরাং PM_1 ও PM_2 একই চিহ্নবিশিষ্ট হবে।

$\therefore PM_1 = PM_2$

বা $\dfrac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \dfrac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$............(i)

অনুরূপভাবে, ধরুন, $\angle CEB$ এর সমদ্বিখন্ডক EG এর উপর যে কোনো বিন্দু $Q(x', y')$। Q হতে AB ও CD এর উপর যথাক্রমে QN_1 ও QN_2 লম্ব অঙ্কন করুন। তাহলে QN_1 ও QN_2 এর দৈর্ঘ্য সমান। আবার, $Q(x', y')$ ও মূলবিন্দু AB রেখার একই পার্শে কিন্তু CD রেখার বিপরীত পার্শে অবস্থিত। সুতরাং QN_1 ও QN_2 বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হবে।

$\therefore QN_1 = -QN_2$

বা, $\dfrac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = -\dfrac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$............(ii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$$\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

সুতরাং $ax_1+by_1+c_1=0$ এবং $ax_2+by_2+c_2=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহের সমদ্বিভন্ডকের সমীকরণ হবে

$$\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

উদাহরণ 1: $3x-4y-11=0$ রেখার 2 একক দূরবর্তী সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $3x-4y-11=0$..................(i)

ধরুন, প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $3x-4y+k=0$...................(ii)

সুতরাং (i) ও (ii) এর মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব $\dfrac{|k-(-11)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{k+11}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{k+11}{\sqrt{25}}=\dfrac{k+11}{5}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{k+11}{5}=\pm 2$ বা, $k+11=\pm 10$ বা, $k=\pm 10-11$ $\therefore k=-1,-21$

k এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $3x-4y-1=0$ এবং $3x-4y-21=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $3x-4y-1=0$ এবং $3x-4y-21=0$.

উদাহরণ 2: $4x+3y=2c$ এবং $12x+5y=2(c+8)$ রেখা দুইটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হলে c এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: মূলবিন্দু, $(0,0)$ থেকে $4x+3y=2c$ বা, $4x+3y-2c=0$, রেখার দূরত্ব $\dfrac{|4\times 0+3\times 0-2c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{2c}{5}$

এবং মূলবিন্দু, $(0,0)$ থেকে $12x+5y=2(c+8)$ বা $12x+5y-2(c+8)=0$ রেখার দূরত্ব

$$\frac{|12\times 0+5\times 0-2(c+8)|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{2c+16}{13}$$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{2c}{5}=\dfrac{2c+16}{13}$ বা, $26c=10c+80$ বা $16c=80$ বা $c=5$.

অতএব $c=5$.

উদাহরণ 3: $3x-4y+9=0$ রেখার উপর লম্ব এবং মূলবিন্দু থেকে লম্ব দূরত্ব 7 একক এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $3x-4y+9=0$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ $4x+3y+k=0$..............(i)

মূলবিন্দু $(0,0)$ থেকে (i)নং রেখার লম্ব দূরত্ব $=\dfrac{4\times 0+3\times 0+k}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{k}{5}$

প্রশ্নমতে, $\dfrac{k}{5}=\pm 7$ বা, $k=\pm 35$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $4x+3y\pm 35=0$.

উদাহরণ 4: $3x+4y-5=0$ এবং $4x-3y+6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $3x+4y-5=0$ এবং $4x-3y+6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{3x+4y-5}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{4x-3y+6}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

বা, $3x+4y-5=\pm(4x-3y+6)$

বা, $3x+4y-5=4x-3y+6$ এবং $3x+4y-5=-(4x-3y+6)$

বা, $x-7y+11=0$ এবং $7x+y+1=0$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $x-7y+11=0$ এবং $7x+y+1=0$.

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১১

1. $(-5,3)$ বিন্দু হতে $2x-5y+5=0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।
2. $5x-12y-11=0$ রেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 5 একক দূরবর্তী সরলরেখা সমূহের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. $3x-4y-15=0$ রেখার সমান্তরাল এবং তা থেকে 7 একক দূরবর্তী সরলরেখা সমূহের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
4. মূলবিন্দু থেকে 5 একক দূরত্বে এবং $4x-3y+9=0$ রেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. $(2,4)$ ও $(1,-3)$ বিন্দু দুইটি $3x+5y+7=0$ রেখার কোন পার্শ্বে অবস্থিত তা নির্ণয় করুন। মূলবিন্দু যে পার্শ্বে অবস্থিত সেই পার্শ্বের বিন্দু কোনটি?
6. $(-3,4)$ ও $(-4,-1)$ বিন্দু দুইটি $x-4y+1=0$ রেখার কোন পার্শ্বে অবস্থিত তা নির্ণয় করুন। মূলবিন্দু যে পার্শ্বে অবস্থিত সেই পার্শ্বের বিন্দু কোনটি?
7. (a,b) বিন্দুটি $3x-4y+4=0$ এবং $4x+3y-9=0$ হতে সমদূরবর্তী হলে, প্রমাণ করুন যে $7a-b-5=0$ এবং $a+7b-13=0$।
8. $3x+y-5=0$ এবং $x-3y+6=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করুন।
9. $2x+3y-11=0$ এবং $3x+2y-4=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক সরলরেখা x-অক্ষকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে PQ এর দূরত্ব নির্ণয় করুন।
10. $x-3y-12=0$ এবং $3x+y-4=0$ সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডক সরলরেখা y-অক্ষকে R ও S বিন্দুতে ছেদ করলে RS এর দূরত্ব নির্ণয় করুন।

পাঠ ৪.১২ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

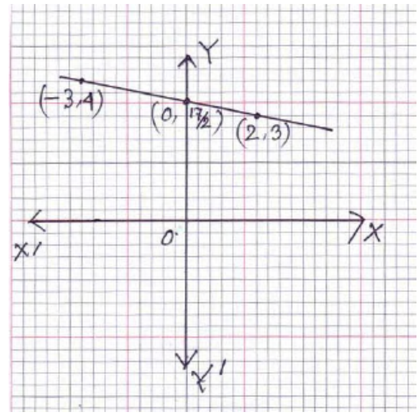
- রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে পারবেন,
- শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন,
- সরলরেখার সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবেন,
- লেখচিত্র হতে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে পারবেন,
- নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলপাঠ

রেখা বিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্কঃ

সমস্যা নং 1	বিভক্তিকরণ সূত্রর সাহায্যে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্ত হলে বিভক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।	তারিখঃ

সমস্যাঃ $(2,3)$ এবং $(-3,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুটি $2:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।



তত্ত্বঃ $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ $C(x, y)$ বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তর্বিবক্ত হলে

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \text{ এবং } y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

উপকরণঃ কাগজ, ছক কাগজ, কলম, পেন্সিল, রাবার, স্কেল, ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতিঃ বিন্দুগুলি যথাযথ ভাবে ছক কাগজে স্থাপন করে প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের বিভক্ত বিন্দুর স্থানঙ্ক নির্ণয় করুন।

ফল সংকলনঃ মনে করুন, $A(2,3)$ এবং $B(-3,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ $C(x, y)$ বিন্দুতে $2:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়। তাহলে,

$$x = \frac{2.(-3) + 3.2}{2+3} = \frac{-6+6}{5} = 0 \text{ এবং } y = \frac{2.4 + 3.3}{2+3} = \frac{8+9}{5} = \frac{17}{5}$$

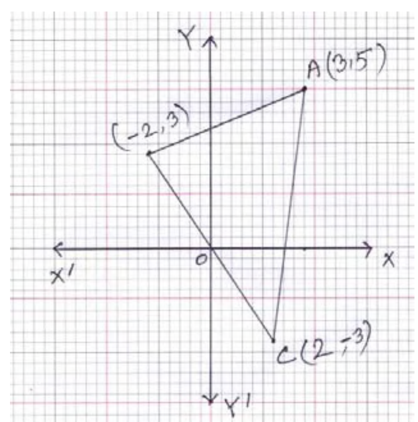
∴ নির্ণেয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(0, \frac{17}{5}\right)$।

ফলাফলঃ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $\left(0, \frac{17}{5}\right)$।

শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

সমস্যা নং 2	সাধারণ সূত্রের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।	তারিখঃ

সমস্যাঃ সাধারণ সূত্রের মাধ্যমে $A(3,5), B(-2,3)$ ও $C(2,-3)$ শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের চিত্র অঙ্কন ও ক্ষেত্রফল নির্ণয়।



তত্ত্বঃ ABC ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হয় তবে এর ক্ষেত্রফল

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

বা, $2\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

উপকরণঃ কাগজ, ছক কাগজ, কলম, পেন্সিল, রাবার, স্কেল, ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতিঃ বিন্দুগুলি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে ছক কাগজে ছোট 5 বর্গঘর $=1$ একক ধরে স্থাপন করুন।

তারপর বিন্দুগুলো যোগ করে ABC চিত্র অঙ্কন করুন এবং সূত্রের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

ফল সংকলনঃ ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right\} \text{ বর্গ একক}$$

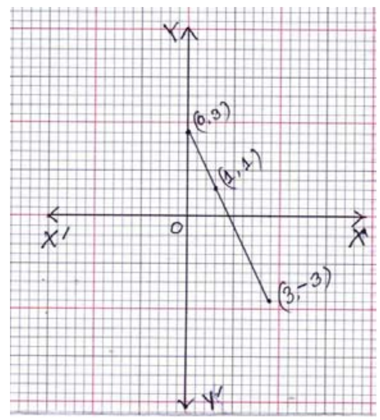
$$= \frac{1}{2}(9+10-6-6+10+9) \text{ বর্গ একক } = \frac{1}{2}.26 \text{ বর্গ একক } = 13 \text{ বর্গ একক}$$

ফলাফল: ত্রিভুজের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 13 বর্গ একক।

সরলরেখার রেখচিত্র অঙ্কন

সমস্যা নং 3	প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।	তারিখ:

সমস্যা: $2x+y-3=0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।



সূত্র: প্রদত্ত সমীকরণকে $y=mx+c$ আকারে প্রকাশ করলে পাই, $y=-2x+3$. সুতরাং এখানে $c=3$. অর্থাৎ প্রদত্ত সমীকরণটির y-অক্ষের খন্ডিতাংশের পরিমান 3 একক আবার, $2x+y-3=0$ হওয়ায় শুধুমাত্র লেখস্থিত সকল বিন্দু লেখচিত্রে অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

উপকরণ: কাগজ, ছক কাগজ, কলম, পেন্সিল, রাবার, স্কেল, ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

সাধারণ আকার নির্ণয়: $2x+y-3=0$

বা $y=-2x+3$.

কার্যপদ্ধতি:

1. $y=-2x+3$ সমীকরণে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করুন।

x	0	3	1
y	3	-3	1

2. ছক কাগজে XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে y-অক্ষ ধরে ছোট 5 বর্গঘর =1 একক ধরে বিন্দুগুলি স্থাপন করুন।
3. বিন্দুগুলি যোগ করে লেখচিত্র অঙ্কন করুন।

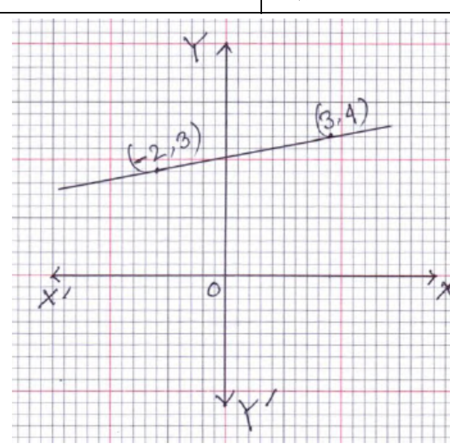
ফলাফল: প্রদত্ত সমীকরণের সাধারণ রূপ $y=-2x+3$ এবং ফাংশনের লেখচিত্র একটি সরলরেখা।

সতর্কতা: সতর্কতার সাথে বিন্দুগুলো স্থাপন করে সরলরেখা টানতে হবে।

লেখচিত্র হতে সরলরেখার সমীকরণ

সমস্যা নং 4	লেখচিত্র হতে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।	তারিখ:

সমস্যা: পাশের চিত্র হতে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।



তত্ত্ব: কোনো সরলরেখার উপরস্থ দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) জানা থাকলে, ঐ সররেখার সমীকরণ হবে

$y-y_1=m(x-x_1)$, যেখানে $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: কলম, পেন্সিল, ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি: ছক কাগজের নির্ধারিত এককে প্রদত্ত লেখচিত্র হতে দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

ফল সংকলন: এখানে, $(3,4)$ এবং $(-2,3)$ বিন্দু দুইটি প্রদত্ত লেখচিত্রের উপর অবস্থিত।

$$\therefore m=\frac{3-4}{-2-3}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$$

সুতরাং সরলরেখার সমীকরণ: $y-4=\frac{1}{5}(x-3)$ বা, $5y-20=x-3$ বা $x-5y+17=0$

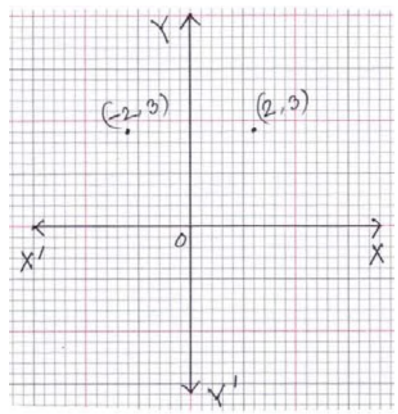
ফলাফল: নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ $x-5y+17=0$

সর্তকতা:

1. সতর্কতার সাথে বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।
2. হিসাবে সতর্কতা অবলম্বন করতে হবে।

অক্ষরেখার সাপেক্ষে বিন্দু ও রেখাংশের প্রতিচ্ছবি:

সমস্যা নং 5	অক্ষরেখার সাপেক্ষে কোনো বিন্দু প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।	তারিখ:



সমস্যা: উভয় অক্ষের সাপেক্ষে $(-2,3)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণয়।

তত্ত্ব: কোনো বিন্দু ও এর প্রতিচ্ছবি বিন্দুগামী সংযাজক রেখা প্রতিফলন রেখার উপর লম্ব এবং প্রতিফলন রেখা হতে সমদূরবর্তী। তাই x-অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণেয় বিন্দুর ভুজ বা x স্থানাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকে কিন্তু কোটি বা y স্থানাঙ্কের চিহ্ন বদলায়। সুতরাং x-অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর $P(x,y)$ এর প্রতিচ্ছবি $P'(x,-y)$।

আবার y-অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণেয় বিন্দুর কোটি বা y স্থানাঙ্ক অপরিবর্তিত থাকে কিন্তু ভুজ বা x স্থানাঙ্কের চিহ্ন বদলায়। সুতরাং y-অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর $Q(x,y)$ এর প্রতিচ্ছবি $Q'(-x,y)$।

উপকরণ: কাগজ, ছক কাগজ, কলম, পেন্সিল, রাবার, স্কেল, ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

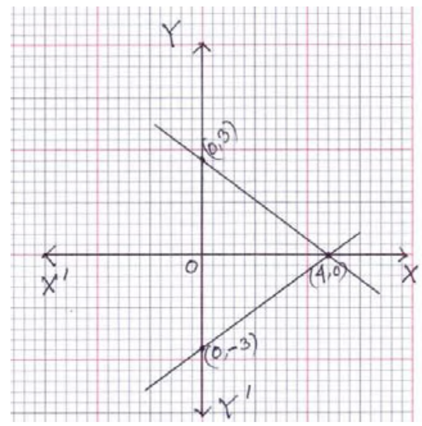
1. ছক কাগজে x-অক্ষ ও y-অক্ষ নির্বাচন করুন।
2. সুবিধামত এককে (এক্ষেত্রে ক্ষুদ্র 5 বর্গের বাহু = 1 একক) $(-2,3)$ বিন্দুটি স্থাপন করুন।
3. $(-2,3)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি বিন্দুটি চিহ্নিত করুন।

ফল সংকলন: x-অক্ষের সাপেক্ষে $(-2,3)$ বিন্দুটির প্রতিচ্ছবি $(-2,-3)$ এবং y-অক্ষের সাপেক্ষে $(-2,3)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(2,3)$।

সমস্যা নং 6	x-অক্ষের সাপেক্ষে কোনো রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।	তারিখ:

সমস্যা: x-অক্ষের সাপেক্ষে $3x+4y-12=0$ রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরলরেখার x-অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিচ্ছবির সমীকরণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{-b}=1$ যা x-অক্ষের সাপেক্ষে $(0,b)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(0,-b)$ এবং $(a,0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ।



উপকরণঃ কাগজ, ছক কাগজ, কলম, পেন্সিল, রাবার, স্কেল,ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতিঃ

1. প্রদত্ত সরররেখাকে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ আকারে প্রকাশ করুন।
2. সরলরেখার উভয় অক্ষের ছেদবিন্দু নির্ণয় করুন।
3. প্রদত্ত সরলরেখা ও y-অক্ষের ছেদবিন্দুর প্রতিচ্ছবি x-অক্ষের সাপেক্ষে নির্ণয় করুন।
4. ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 5 বাহু = 1 একক ধরে প্রতিচ্ছবি বিন্দু ও $(a,0)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ অঙ্কন করুন।

ফল সংকলনঃ $3x+4y-12=0 \Rightarrow \frac{3x}{12}+\frac{4y}{12}=1 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ যা অক্ষদ্বয়কে $(4,0)$ ও $(0,3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$(0,3)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(0,-3)$ (x-অক্ষের সাপেক্ষে)।

$\therefore (4,0)$ এবং $(0,-3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y-0=\frac{-3-0}{0-4}(x-4)$$

বা, $y=\frac{3}{4}(x-4)$

বা, $4y=3x-12$

বা, $3x-4y-12=0$

ফলাফলঃ x-অক্ষের সাপেক্ষে $3x+4y-12=0$ রেখাংশের প্রতিচ্ছবির সমীকরণ $3x-4y-12=0$ ।

নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে বিন্দু এবং রেখাংশের প্রতিচ্ছবিঃ

একটি নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর প্রতিচ্ছবি বলতে ঐ রেখা বরাবর একটি কাগজ ভাঁজ করলে বিন্দুটি কাগজের অপর পার্শ্বে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে তাকে বুঝায়। অর্থাৎ একটি নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে কোনো বিন্দু এবং তার প্রতিচ্ছবি বিন্দু সমদূরবর্তী এবং এই বিন্দুদ্বয় দ্বারা গঠিত সরলরেখা উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর লম্ব। মনে করুন, $ax+by+c=0$.............(i) সরলরেখার সাপেক্ষে $P(\alpha,\beta)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $P'(\alpha',\beta')$ নির্ণয় করতে হবে।

উপরোক্ত রেখার ঢাল $=\frac{-a}{b}$.

এটা স্পষ্ট যে, PP' রেখা $ax+by+c=0$ রেখার উপর লম্ব । ধরুন, $R(x_1,y_1)$, PP' রেখার মধ্যবিন্দু।

$\therefore \frac{\alpha+\alpha'}{2}=x_1$ এবং $\frac{\beta+\beta'}{2}=y_1$

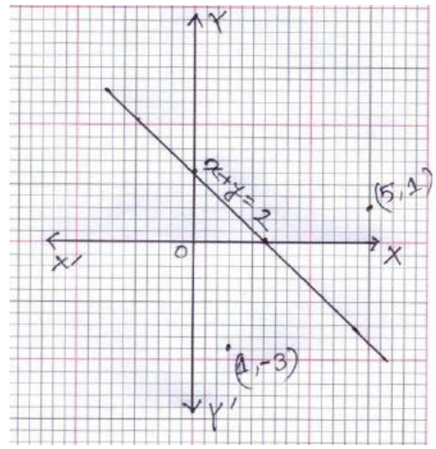
বা, $\alpha'=2x_1-\alpha$ এবং $\beta'=2y_1-\beta$

$\therefore P(\alpha,\beta)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(2x_1-\alpha, 2y_1-\beta)$.

সমস্যা নং 7	কোনো নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।	তারিখঃ

সমস্যাঃ $x+y-2=0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $(3,7)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব: $ax+by+c=0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $P(\alpha,\beta)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $P'(\alpha',\beta')$ যেখানে $\alpha'=2x_1-\alpha$ এবং $\beta'=2y_1-\beta$; $R(x_1,y_1)$, PP' রেখার মধ্যবিন্দু।



উপকরণ: কাগজ, ছক কাগজ, কলম, পেন্সিল, রাবার, স্কেল, ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

1. $P(\alpha,\beta)$ বিন্দুগামী $ax+by+c=0$ রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় করে তাদের ছেদবিন্দু নির্ণয় করতে হবে।
2. ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1,y_1) হলে $\alpha'=2x_1-\alpha$ এবং $\beta'=2y_1-\beta$ সূত্রের সাহায্যে (α,β) এর প্রতিচ্ছবি (α',β') নির্ণয় করতে হবে।
3. ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 5 বাহু = 1 একক ধরে প্রতিচ্ছবি বিন্দু (α',β') চিহ্নিত করুন।

ফল সংকলন: প্রদত্ত রেখা $x+y-2=0$ ....(i)

ধরুন, $P(3,7)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $P'(\alpha',\beta')$.

(i) নং রেখার লম্ব রেখার সমীকরণ $x-y+k=0$ যা $P(3,7)$ বিন্দুগামী।

সুতরাং $3-7+k=0$ বা $k=4$

সুতরাং PP' রেখার সমীকরণ $x-y+4=0$ ....(ii)

এখন, (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1,3)$.

সুতরাং (i) এর সাপেক্ষে $(3,7)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $\{2\times(-1)-3, 2\times3-7\}=(-5,-1)$

ফলাফল: $x+y-2=0$ সরলরেখার সাপেক্ষে $(3,7)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি $(-5,-1)$

সমস্যা নং 8	নির্দিষ্ট রেখার সাপেক্ষে রেখাংশের প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।	তারিখ:

সমস্যা: $x-y-3=0$ রেখার সাপেক্ষে $3x-y+5=0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করতে হবে।

তত্ত্ব: L_1 রেখার সাপেক্ষে L_2 রেখার প্রতিচ্ছবি L_3 হলে L_3 রেখার সমীকরণ $y-y_1=m_3(x-x_1)$ যেখানে m_3 হচ্ছে L_3 এর ঢাল , (x_1,y_1) হচ্ছে L_1 ও L_2 এর ছেদবিন্দু এবং $-\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\dfrac{m_3-m_1}{1+m_3m_1}$ সম্পর্কের সাহায্যে m_3 এর মান বের করা যায় যেখানে m_1 ও m_2 হচ্ছে যথাক্রমে L_1 ও L_2 এর ঢাল।

উপকরণ: কাগজ, ছক কাগজ, কলম, পেন্সিল, রাবার, স্কেল, ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি:

1. প্রদত্ত সমীকরণ দুটির ছেদবিন্দু ও ঢাল নির্ণয় করুন।
2. প্রতিচ্ছবি রেখার ঢাল নির্ণয় করুন।
3. সূত্রের মাধ্যমে প্রথম রেখার সাপেক্ষে দ্বিতীয় রেখার প্রতিচ্ছবির সমীকরণ নির্ণয় করুন।

ফল সংকলন:

$$L_1 : x-y-3=0 \Rightarrow y=x-3$$

$$L_2 : 3x-y+5=0 \Rightarrow y=3x+5$$

ঢাল $m_1 = 1, m_2 = 3$
সমাধান করে পাই, L_1 ও L_2 এর ছেদ বিন্দু $(-4,-7)$
এখানে $-\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2} = \dfrac{m_3 - m_1}{1+m_3m_1} \Rightarrow -\dfrac{3-1}{1+1\cdot 3} = \dfrac{m_3 - 1}{1+m_3\cdot 1} \Rightarrow -\dfrac{1}{2} = \dfrac{m_3-1}{1+m_3} \Rightarrow m_3 = \dfrac{1}{3}$.
$\therefore L_3$ এর সমীকরণ, $y+7 = \dfrac{1}{3}(x+4)$ বা, $x-3y-17=0$.

ফলাফল: প্রতিচ্ছবি রেখার সমীকরণ $x-3y-17=0$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১২

1. $(2,-5)$ এবং $(-3,4)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুটি $1:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
2. $(-1,3)$ এবং $(-2,-2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুটি $2:3$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
3. $(0,-2)$ এবং $(5,-3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে বিন্দুটি $3:2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে তার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
4. সাধারণ সূত্রের মাধ্যমে $A(-1,4), B(2,3)$ ও $C(-3,-3)$ শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের চিত্র অঙ্কন ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
5. সাধারণ সূত্রের মাধ্যমে $A(1,5), B(3,-2)$ ও $C(-4,1)$ শীর্ষ বিশিষ্ট ত্রিভুজের চিত্র অঙ্কন ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
6. $x+3y-3=0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।
7. $2x-5y-3=0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করুন।
8. উভয় অক্ষের সাপেক্ষে $(3,-5)$ বিন্দুর প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করুন।
9. $x-3y-1=0$ রেখার সাপেক্ষে $3x-4y+5=0$ রেখার প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করুন।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

সৃজনশীল প্রশ্ন

1. কাব্য $A(-2,1)$ অবস্থান হতে যাত্রা করে সোজা $B(3,2)$ অবস্থানে পৌছায় এবং সেখান হতে পূনরায় যাত্রা করে $C(3,-3)$ অবস্থানে গিয়ে পৌঁছায়।
   (i) কাব্য মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করল?
   (ii) কাব্য তার আদি অবস্থান হতে বর্তমানে কত দূরে আছে?
2. একটি মেসে 10 জন ছাত্র থাকলে মোট খরচ হয় 1200 টাকা এবং 15 ছাত্র থাকলে মোট খরচ হয় 1400 টাকা। তাহলে
   (i) ঐ মেসের ছাত্র এবং মোট খরচের মধ্যকার সরলরৈখিক সম্পর্ক নির্ণয় করুন।
   (ii) ঐ মেসে 25 জন ছাত্র থাকলে তাদের মোট খরচ কত হবে?

বহুনির্বচনী প্রশ্ন

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন (1-36):

1. দ্বিতীয় চতুর্ভাগে-
   (ক) x ও y উভয়ই ধনাত্মক   (খ) x ও y উভয়ই ঋণাত্মক

(গ) x ধনাত্মক এবং y ঋণাত্মক　　　(ঘ) x ঋণাত্মক এবং y ধনাত্মক

2. $(-4,1)$ বিন্দুটি কোন চতুর্ভগে অবস্থিত

(ক) প্রথম চতুর্ভাগে　　(খ) দ্বিতীয় চতুর্ভাগে　　(গ) তৃতীয় চতুর্ভাগে　　(ঘ) চতুর্থ চতুর্ভাগে

3. $(1,1)$ বিন্দুটির পোলার স্থানাঙ্ক কোনটি

(ক) $(1,0)$　　(খ) $(\sqrt{2},\pi)$　　(গ) $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$　　(ঘ) $(\sqrt{3},45^{\circ})$

4. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন:

(i) কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক একই সমতলে (x,y) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(ii) পোলার স্থানাঙ্ক একই সমতলে (r,θ) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(iii) কার্তেসীয় ও পোলার স্থানাঙ্কের মধ্যে সম্পর্ক: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ এবং $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i)　　(খ) (ii)　　(গ) (i) এবং (ii)　　(ঘ) (i), (ii) এবং (iii)

5. $(2,5)$ এবং $(-4,-7)$ বিন্দু দুইটির সংযোগ রেখাংশের সমদ্বিখন্ডক বিন্দুর স্থানাঙ্ক-

(ক) $(-1,1)$　　(খ) $(-1,-1)$　　(গ) $(1,-1)$　　(ঘ) $(1,1)$

6. $(-1,5)$ বিন্দুটি $(-3,5)$ এবং $(2,5)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা হল-

(ক) $2:3$　　(খ) $3:1$　　(গ) $2:5$　　(ঘ) $3:4$

7. $(1,-4)$ এবং $(5,2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে x-অক্ষ যে অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা হল-

(ক) $1:2$　　(খ) $2:3$　　(গ) $2:1$　　(ঘ) $1:4$

8. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন:

(i) ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র প্রত্যেক মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে ।

(ii) বহির্বিভক্তিকারী বিন্দু $R(x,y)$ এর স্থানাঙ্ক $=\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ ।

(iii) সমদ্বিখন্ডিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক, $(x,y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ।

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) এবং (ii)　　(খ) (ii)　　(গ) (i) এবং (iii)　　(ঘ) (i), (ii) এবং (iii)

9. $(2,1)$ $(3,5)$এবং $(-4,1)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল হবে-

(ক) -12　　(খ) 12　　(গ) 15　　(ঘ) -10

10. $(-1,0)$ $(3,a)$ এবং $(2,\ 3)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে a এর মান হবে-

(ক) 5　　(খ) 3　　(গ) 2　　(ঘ) 4

11. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন:

(i) ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়।

(ii) $\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\}=0$.

(iii) একটি শীর্ষ বিন্দু মূল বিন্দু হলে, ক্ষেত্রফল $\Delta=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) এবং (ii)　　(খ) (ii)　　(গ) (i) এবং (iii)　　(ঘ) (i), (ii) এবং (iii)

12. $(3,4)$ এবং $(\ \ 1,3)$ বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সেট দ্বারা সৃষ্ট সঞ্চারপথের সমীকরণ-

(ক) $5x+3y=1$　　(খ) $4y-5x=5$　　(গ) $8x+2y=15$　　(ঘ) $y^2=4ax$

13. x-অক্ষ হতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ এর সমীকরণ কোনটি-

(ক) $x^2+y^2=a^2$　　(খ) $y=b$　　(গ) $x=a$　　(ঘ) $x^2=4ay$

14. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন:

(i) সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য কোনো শর্তের প্রয়োজন হয় না।

(ii) সঞ্চারপথের গতিশীল বিন্দুকে ”চলমান বিন্দু” বলে।
(iii)সঞ্চারপথের সমীকরণ সর্বদা সরলরেখা নির্দেশ করে।
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) এবং (ii) (খ) (ii) (গ) (i) এবং (ii) (ঘ) (i), (ii) এবং (iii)

15. $(3,-2)$ এবং $(-1,4)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে গমনকারী সরলরেখার ঢাল-

(ক) 1 (খ) $\frac{3}{2}$ (গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $-\frac{3}{2}$

16. যদি একটি সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 135° কোণ করে যায়, তবে ঢাল হবে-

(ক) 1 (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ঘ) -1

17. $2x+3y=5$ সরলরেখার ঢাল কোনটি-

(ক) $\frac{5}{3}$	(খ) $-\frac{2}{3}$	(গ) $\frac{2}{3}$	(ঘ) $-\frac{3}{2}$

18. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন:
(i) x-অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার ঢাল শূন্য (0).
(ii) y-অক্ষের সমন্তরাল সরলরেখার ঢাল সজ্ঞায়িত নয়।
(iii) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল $= \dfrac{\text{বিন্দুদ্বয়ের ভুজদ্বয়ের অন্তর}}{\text{বিন্দুদ্বয়ের কোটিদ্বয়ের অন্তর}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) এবং (ii) (খ) (ii) এবং (iii) (গ) (i) এবং (ii) (ঘ) (i), (ii) এবং (iii)

19. $(2,-1)$এবং $((5,2)$)বিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ-

(ক) $x+3y=1$ (খ) $y-x=5$ (গ) $x-y=3$ (ঘ) $2x+y=4$

20. কোনো সরলরেখা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল হবে-

(ক) $\sqrt{3}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (গ) ১ (ঘ) অসংজ্ঞায়িত

21. x-অক্ষ সমান্তরাল এবং তার নিচে 5 একক দূরে অবস্থিত সরলরেখার সমীকরণ-

(ক) $y=5$ (খ) $y=-5$ (গ) $x=5$ (ঘ) $x=-5$

22. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন:
(i) y- অক্ষের সমীকরণ $y=0$ ।
(ii) x- অক্ষের সমান্তরাল রেখার সমীকরণ $x=a$।
(iii) (x_1,y_1)বিন্দুগামী এবং m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ $y-y_1=m(x-x_1)$।
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) এবং (ii) (খ) (ii) (গ) (i) এবং (ii) (ঘ) (i), (ii) এবং (iii)

23. $3x-y+4=0$ এবং $2x+3y-5=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক-

(ক) $(-1,2)$ (খ) $\left(-\frac{17}{11},-\frac{7}{11}\right)$ (গ) $\left(\frac{7}{11},\frac{4}{11}\right)$ (ঘ) $(-3,4)$

24. $2x \quad y \quad 7=0$ এবং $x \mid 2y \mid 5=0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ-

(ক) $75^{\circ}, 105^{\circ}$ (খ) $45^{\circ}, 135^{\circ}$ (গ) 90° (ঘ) $60^{\circ}, 120^{\circ}$

25. নিচের তথ্যগুলো লক্ষ করুন:
(i) দুইটি সরলরেখা সমান্তরাল হলে তাদের একটি ছেদবিন্দু থাকবে ।
(ii) যদি $\theta_2>\theta_1$ হয় তখন $\varphi=\theta_1-\theta_2$
(iii) $\tan\varphi=\pm\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) এবং (ii) (খ) (i) এবং (iii) (গ) (iii) (ঘ) (ii)

26. $4x - 3y + 9 = 0$ এবং $4x + ay - 5 = 0$ রেখাদ্বয় সমান্তরাল হলে a এর মান কত?
 (ক) 4 (খ) -3 (গ) 3 (ঘ) কোনোটাই নয়

27. $4x + 5y + 6 = 0$ রেখার উপর লম্ব এবং $(2, 3)$ বিন্দুদিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ-
 (ক) $5x - 4y + 2 = 0$ (খ) $4x + 5y + 23 = 0$
 (গ) $4x + 5y + 2$ (ঘ) $5x - 4y + 23 = 0$

28. x-অক্ষের সমান্তরাল এবং $x + y - 2 = 0$ ও $x + 3y + 4 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এরূপ সরলরেখার সমীকরণ-
 (ক) $4y + 2 = 0$ (খ) $y + 3 = 0$ (গ) $x + 5y + 2 = 0$ (ঘ) $x - 3 = 0$

29. নিচের তথ্যগুলি লক্ষ করুন-
 (i) দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$
 (ii) দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত $m_1 m_2 = -1$.
 (iii) দুইটি সরলরেখা পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \cdot \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$.

 নিচের কোনটি সঠিক?
 (ক) (i) এবং (ii) (খ) (i) এবং (iii) (গ) (iii) (ঘ) (i), (ii) এবং (iii)

30. $(2,5)$ বিন্দু এবং $x - y - 3 = 0$ ও $x + y + 1 = 0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ-
 (ক) $x - 7y + 2 = 0$ (খ) $7x - y - 9 = 0$ (গ) $x + 5y = 9$ (ঘ) $7x + y = 9$

31. k এর মান কত হলে $kx - y + 3 = 0, x - 2y = 0, 3x - y + 1 = 0$ রেখাত্রয় সমবিন্দু হবে।
 (ক) 5 (খ) 7 (গ) 8 (ঘ) 9

32. নিচের তথ্যগুলি লক্ষ করুন-
 (i) একটি বিন্দু দিয়ে অসংখ্য সরলরেখা আঁকা যায়।
 (ii) দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $ax_1 + by_1 + c + k(ax_2 + by_2 + c) = 0$
 (iii) তিনটি রেখার সমবিন্দু হওয়ার শর্ত $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$

 নিচের কোনটি সঠিক?
 (ক) (i) এবং (ii) (খ) (i) এবং (iii) (গ) (iii) (ঘ) (i), (ii) এবং (iii)

33. $2x + 3y - 5 = 0$ এবং $2x + 3y + 10 = 0$ সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব-
 (ক) 13 (খ) 12 (গ) 3 (ঘ) 5

34. মূলবিন্দু থেকে $3x - 4y + 10 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব -
 (ক) 3 (খ) 2 (গ) 4 (ঘ) 10

35. $(2,3)$ বিন্দু থেকে $x - 3y + 13 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব -
 (ক) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (খ) $\frac{6}{\sqrt{13}}$ (গ) $\frac{5}{\sqrt{12}}$ (ঘ) 7

36. নিচের তথ্যগুলি লক্ষ করুন-
 (i) মূল বিন্দু হতে $ax + by + c = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব $= \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(ii) (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় $ax + by + c = 0$ রেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হবে যদি $ax_1 + by_1 + c = 0$ ও $ax_2 + by_2 + c = 0$ রাশি দুইটির মান বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

(iii) $ax_1 + by_1 + c = 0$ এবং $ax_2 + by_2 + c = 0$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণসমূহের সমদ্বিখন্ডকের সমীকরণ হবে $\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{ax_2 + by_2 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ।

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) এবং (ii) (খ) (i) এবং (iii) (গ) (iii) (ঘ) (i)

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১

1. (i) $(2, 30^\circ)$ (ii) $(1, 0^\circ)$ (iii) $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ (iv) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ **(v)** $\left(2\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}\right)$

2. (i) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $(2\sqrt{3}, -2)$ (iii) $\left(\frac{3}{2}, 3\sqrt{3}\right)$ (iv) $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

3. (i) $r^2 \sin 2\theta$ (ii) $r = 2$ (iii) $r^2(1 - \sin 2\theta)$ (iv) $r(\tan\theta - m) = c\sec\theta$

4 (i) $x^2 + y^2 - ax = 0$ (ii) $(x - y)^2$ (iii) $x^2 = 4(1 - y)$

5. (i) $\sqrt{17}$ (ii) $4\sqrt{2}$ (iii) 10

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.২

1. $t = 6$ 2. $(-2, 0)$ 3. $(12, -5)$ 4. $(-1, 1)$

5. 3:4, $(2, 0)$ এবং $5:2$, $(0, 2)$ 6. $(-1, -4)$ ও $(8, 14)$ 7. $(6, -8)$ 8. 1:2

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৩

1. 7 2. 10 বর্গ একক 3. $a - \frac{1}{2}$ বা -1 4. $-2, \frac{15}{2}$

5. $\frac{1}{2}(2t^2 - 3t - 2)$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৪

1. $x = 0$, y-অক্ষ 2. $7x^2 + 7y^2 + 72x - 144 = 0$ 3. $2x + y = \pm 5$

4. $y^2 = a(2x - 1)$ 5. $y - x \pm 1$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৫

1. ঢাল $= 2$ এবং $\theta = 63.44^\circ$ 2. ঢাল $= \frac{3}{2}$ এবং $\theta = 56.30^\circ$ 3. ঢাল $= \infty$ এবং $\theta = 90^\circ$

4. ঢাল $= 0$ এবং $\theta = 0^\circ$ 5. 30° 6. 45°

7. 0° 8. 90°

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৬

1. $3x - 4y = 0$ 2. $\frac{4}{3}$ 3. $x - y = 4$ 4. 4 এবং 5

5. $2x - y = 5$ 6. $x + \sqrt{3}y = 6$ 7. $3x - 5y = 21$ 10. $4x + 3y = 24$

11. $12x - 9y + 84 = 0$ 12. $2x + y - 10 = 0;\ 3x + 2y - 18 = 0$

13. $x + y = 5\sqrt{2}$ 14. $4x + y = 8$ 15. $a = -\frac{6}{7}$ এবং $b = \frac{4}{3}$

16. $p = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 17. $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, 25 বর্গ একক 18. $x + y + 3 = 0$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৮

1. $(-3, -2)$ 2. $(-2, -6)$ 3. $(2, 0)$ 4. $\pm\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

5. 150°

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.৯

1. $x = 14$ 2. $25x + 15y + 86 = 0$ 3. $3x + y - 7 = 0$ 4. $7x + 2y - 3 = 0$

5. $\left(\frac{12}{13}, -\frac{34}{13}\right)$ 6. $11x - 2y = 50$ 7. $k = 6$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১০

1. $2y + 3 = 0$ 2. $5x = 21$ 3. $a = 6$ 4. $6a - 4b + 1 = 0$

5. $3x - y - 7 = 0,\ x + 3y - 9 = 0$ 6. $x + 2y = 8,\ 2x - y = 5$

7. $x - y - 3 = 0$ 8. $23x + 23y = 11$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৪.১১

1. $\frac{20}{\sqrt{29}}$ 2. $5x - 12y + 54 = 0,\ 5x - 12y - 76 = 0$

3. $3x - 4y + 50 = 0,\ 3x - 4y - 20 = 0$ 4. $3x + 4y \pm 25 = 0$

5. $(2, 4)$, ধনাত্বক পার্শ্বে; $(1, -3)$, ঋণাত্বক পার্শ্বে; $(2, 4)$

6. $(-4, -1)$ ধনাত্বক পার্শ্বে; $(-3, 4)$ ঋণাত্বক পার্শ্বে; $(-4, -1)$

8. $2x + 4y = 11,\ 4x - 2y + 1 = 0$ 9. $2\sqrt{13}$ 10. $2\sqrt{17}$

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1.	(ঘ)	2.	(খ)	3.	(গ)	4.	(গ)	5.	(খ)
6.	(খ)	7.	(গ)	8.	(গ)	9.	(খ)	10.	(গ)
11.	(ঘ)	12.	(গ)	13.	(খ)	14.	(খ)	15.	(ঘ)
16.	(খ)	17.	(খ)	18.	(ক)	19.	(গ)	20.	(খ)
21.	(খ)	22.	(ঘ)	23.	(খ)	24.	(গ)	25.	(গ)
26.	(খ)	27.	(ক)	28.	(খ)	29.	(ঘ)	30.	(খ)
31.	(গ)	32.	(ক)	33.	(গ)	34.	(খ)	35.	(খ)
36.	(ঘ)								