বিন্যাস ও সমাবেশ
(Permutations and Combinations)

ইউনিট ৩

ভূমিকা

বৈচিত্র্যময় পৃথিবী তথা সৌরজগতের গ্রহ ও নক্ষত্ররাজির অবস্থান বিচিত্রভাবে সাজানো যায়। এই বৈচিত্রময় সাজানো সম্পর্কে জানতে কৌতুহলী হয়েই বিন্যাস ও সমাবেশের ধারণার সৃষ্টি হয়েছে। ক্রম বিবেচনা করে সাজানোর প্রক্রিয়া হলো বিন্যাস এবং ক্রম উপেক্ষা করে সাজানোর প্রক্রিয়া হলো সমাবেশ। ভারতীয় গাণিতবিদ ও জ্যোতির্বিদ ভাস্কারা–II (Bhaskara–II) 1150 সালে সর্বপ্রথম n সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয়ের সূত্র প্রদান করেন। ফেবিয়ান স্টেডম্যান (Febian Stedman) 1677 সালে ফ্যাকটোরিয়াল সম্পর্কে ধারণা প্রদান করেন। ভারতীয় চিকিৎসক সুশ্রুতা (Sushruta) খ্রীষ্টপূর্ব ষষ্ঠ শতাব্দীতে সর্বপ্রথম Combinatorics-এর ধারণা দেন। গণিতের বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিন্যাস ও সমাবেশের ধারণার বিশেষ অবদান রয়েছে। এই ইউনিটে আমরা বিন্যাস ও সমাবেশ সম্পর্কিত বিষয়াবলি নিয়ে আলোচনা করব।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- বিন্যাস সম্পর্কে ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- সমাবেশ ও সম্পূরক সমাবেশ নির্ণয় করতে পারবেন,

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৩.১ বিন্যাস

উদ্দেশ্য

এ পাঠ শেষে আপনি-

- গণনার যোজন ও গুণনবিধি ব্যাখ্যা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- বিন্যাস কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ফ্যাকেটারিয়াল ($n!$) ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বিন্যাস, ফ্যাকেটারিয়াল।

মূলপাঠ

গণনার যোজন ও গুণন বিধি (Addition and multiplication law of counting)

গণনার যোজন বিধি: যদি কোনো একটি কাজ সম্ভাব্য m সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায় এবং অপর একটি কাজ স্বতন্ত্রভাবে n সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তবে ঐ দুইটি কাজ $(m+n)$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করাকেই গণনার যোজন বিধি বলা হয়।

A ও B দুইটি খেলনা নির্মাতা প্রতিষ্ঠান। কোম্পানী A এর 10 টি মডেলের খেলনা ও কোম্পানী B এর 15 টি মডেলের খেলনা আছে। তাহলে একজন ক্রেতা A অথবা B কোম্পানীর যে কোনো মডেলের একটি খেলনা পছন্দ করতে পারবে সম্ভাব্য (10+15) বা 25 উপায়ে। এটিই গণনার যোজন বিধি।

উদাহরণ 1: একটি বিদ্যালয়ের পরিচালনা কমিটিতে 4 জন পুরুষ সদস্য ও 3 জন মহিলা সদস্য আছেন। শুধু পুরুষ অথবা শুধু মহিলা সদস্য নিয়ে 2 সদস্য বিশিষ্ট কতগুলি উপকমিটি গঠন করা যায় তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরা যাক, পুরুষ সদস্য, a, b, c, d এবং মহিলা সদস্য p, q, r

শুধু পুরুষ সদস্য নিয়ে 2 সদস্যবিশিষ্ট যে সকল উপকমিটি গঠন করা যায়, তা হলো:

$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}$ $\{c, d\}$, এদের মোট সংখ্যা 6

শুধু মহিলা সদস্য নিয়ে 2 সদস্যবিশিষ্ট সে সকল উপ-কমিটি গঠন করা যায় তাহলো:

$\{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}$, এদের মোট সংখ্যা 3

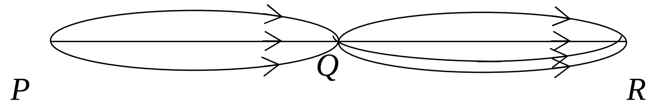
সুতরাং গণনার যোজন বিধি অনুযায়ী শুধু পুরুষ অথবা শুধু মহিলা সদস্য নিয়ে 2 সদস্য বিশিষ্ট উপকমিটি মোট সংখ্যা 6+3=9

গণনার গুণন বিধি: যদি কোনো কাজ p সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায় এবং ঐ কাজের ওপর নির্ভরশীল দ্বিতীয় একটি কাজ যদি q সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তবে কাজ দুইটি একত্রে $p\times q$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যাবে। এটাই গণনার গুণন বিধি।

এই বিধিটিকে দুইয়ের অধিক গুণনীয়কের জন্য সম্প্রসারণ করা যায়। উপরের ঐ দুইটি কাজের উপর নির্ভরশীল যদি অপর আরেকটি কাজ r সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তবে ঐ তিনটি কাজ একত্রে $p\times q\times r$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যাবে।

উদাহরণ 2: P থেকে Q যেতে 3টি পৃথক পথ আছে এবং Q থেকে R এ যেতে 4 টি পৃথক পথ আছে। এক ব্যক্তি কত প্রকারে P থেকে Q হয়ে R এ যেতে পারবে নির্ণয় করুন।

সমাধান:



চিত্রানুযায়ী, লোকটি P থেকে Q তে 3 টি পৃথক পথে যেতে পারে এবং Q থেকে R এ 4 টি পৃথক পথে যেতে পারে। সেহেতু P থেকে Q তে যাওয়ার প্রতিটি পথের জন্য Q থেকে R এ যাওয়ার 4 টি পথ আছে, সেহেতু গণনার গুণন বিধি অনুযায়ী, লোকটি P থেকে Q হয়ে R এ মোট $3\times4=12$ প্রকারে যেতে পারবে।

বিন্যাস (Permutation)

কতগুলি জিনিস থেকে প্রত্যেক বার কয়েকটি বা সব কয়টি জিনিস একবার নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলা হয়।

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস হতে প্রত্যেকবার $r(r\leq n)$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে প্রাপ্ত বিন্যাস সংখ্যাকে $^n p_r$ বা $p(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, p,q,r তিনটি ভিন্ন ভিন্ন অক্ষর থেকে প্রত্যেক বার 2 টি অক্ষর নিয়ে সাজালে আমরা পাই, pq, qp, qr, rq, rp, pr এখানে সাজানো সংখ্যা বা বিন্যাস সংখ্যা 6 যা $^3 p_2$ আকারে লেখা যায়।

ফ্যাকটোরিয়াল (Factorial)

কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা n এর ফ্যাকটোরিয়াল বলতে বুঝি 1 থেকে n পর্যন্ত সকল স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল।

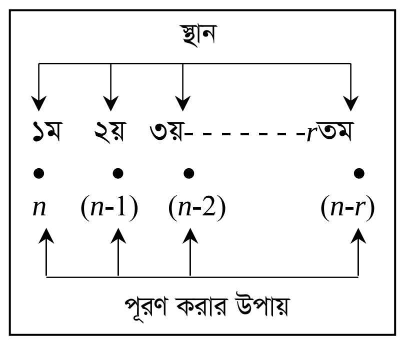
একে, ! (factorial) চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $4! = 4\times3\times2\times1=24,\ 3! = 3\times2\times1=6$

$$n!= n(n-1)!= n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)!$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)..................\{n-(n-2)\}\{n-(n-1)\}!$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)....................3.2.1$$

বিন্যাস সংক্রান্ত কয়েকটি উপপাদ্য:

(a) সবগুলি ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের বিন্যাস অর্থাৎ $^n p_r$ নির্ণয় অথবা, n সংখ্যাক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে যত প্রকারে বিন্যাস করা যায় তার সংখ্যা নির্ণয়, সেখানে $n,r \in \mathbb{N}$ এবং $n \geq r$



n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r সংখ্যক শূন্য স্থান যত রকমভাবে পূরণ করা যায়, তাই নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা।

প্রথম শূণ্য স্থানটি n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়, কেননা n সংখ্যক বস্তুর যেকোনো একটিকে ঐ স্থানে বসানো যায়, অতএব $^n p_1 = n$ প্রথম শূণ্য স্থানটি n প্রকারের যেকোনো এক প্রকারে পূরণ করার পর দ্বিতীয় শূণ্য স্থানটি অবশিষ্ট (n-1) সংখ্যক বস্তুর দ্বারা (n-1). সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। প্রথম দুইটি শূণ্যস্থান জোট $n(n-1)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়।

অতএব, $^n p_2 = n(n-1)$

আবার প্রথম ও দ্বিতীয় স্থান n সংখ্যক বস্তুর যে কোনো দুইটি দ্বারা পুরণ করার পর, তৃতীয় স্থানটি পূরণ করার জন্য (n-2) বস্তু অবশিষ্ট থাকে। প্রথম দুইটি স্থান পরপর পূরণ করার প্রত্যেকটি উপায়ের জন্য তৃতীয় স্থানটি পূরণের (n-2) সংখ্যক উপায় থাকে। সুতরাং প্রথম তিনটি স্থান মোট $n(n-1)(n-2)$ সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়।

অতএব, $^n p_3 = n(n-1)(n-2)$

এভাবে অগ্রসর হয়ে দেখা যায় যে, যতগুলি স্থান পূরণ করা হয়, উৎপাদকের সংখ্যা তার সমান এবং উৎপাদকের মান n থেকে শুরু করে প্রতিবারে 1 করে কমে যায়।

অতএব r সংখ্যক শূণ্য স্থান একত্রে n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা যত প্রকারে পূরণ করা যায়, তার মোট সংখ্যা

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)....................\text{ যেখানে উৎপাদকের সংখ্যা } r$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)..................\{n-(r-1)\}$$
$$= n(n-1)(n-2)...................(n-r+1)$$

$\therefore\ {}^n p_r = n(n-1)(n-2)---(n-r+1)$ ------------------ (i)

অনুসিদ্ধান্ত 1: সমীকরণ (i) হতে পাই-

$$
\begin{aligned}
{}^n p_r &= n(n-1)(n-2)................(n-r+1)\\
&= \frac{n(n-1)(n-2)...................(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}\\
&= \frac{n!}{(n-r)!} \text{ ------------------ (ii)}
\end{aligned}
$$

অনুসিদ্ধান্ত 2: $r=n$ হলে সমীকরণ (i) হতে পাই-

$$ {}^n p_n = n(n-1)(n-2)..................3.2.1 = n! $$

অনুসিদ্ধান্ত 3: $r=n$ হলে সমীকরণ (ii) হতে পাই-

$$ {}^n p_n = \frac{n!}{(n-n)!} $$

বা, $n! = \dfrac{n!}{0!}$ $\quad \left[\because {}^n p_n = n!\right]$

বা, $0! = \dfrac{n!}{n!}$

$\therefore\ 0! = 1$

উদাহরণ 3: ইংরেজি বর্ণমালা হতে প্রত্যেক বার 5 টি বর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, ইংরেজি বর্ণমালায় মোট 26 টি বর্ণ আছে। এই 26 টি বর্ণ হতে প্রত্যেকবার 5 টি করে বর্ণ নিয়ে গঠিত শব্দের সংখ্যা = ${}^{26} p_5 = \dfrac{26!}{21!} = 7893600$

উদাহরণ 4: Equation শব্দটির সবগুলো অক্ষর একত্রে নিয়ে কতগুলো শব্দ তৈরি করা যায় নির্ণয় করুন।

সমাধান: Equation শব্দটিতে 8 টি অক্ষর আছে। এখন 8 টি অক্ষরের সবকয়টি একত্রে নিয়ে মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে ${}^8 p_8 = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40{,}320$

(b) নির্দিষ্ট p সংখ্যক জিনিসকে সর্বদা গ্রহণ করে n সংখ্যক জিনিসের মধ্য থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস নির্ণয় (যেখানে $p \le r \le n$):

মনে করুন, n সংখ্যক জিনিস হতে নির্দিষ্ট p সংখ্যক জিনিসকে পৃথক করে রাখা হলো। অতঃপর ($n-p$) সংখ্যক জিনিস হতে ($r-p$) সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস গঠন করা হলে মোট ${}^{n-p} p_{r-p}$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাবে।

আবার, p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিস একটির পর একটি বিবেচনা করলে, প্রথম জিনিসটি সাজানো যাবে $(r-p+1)$ প্রকারে দ্বিতীয় জিনিসটি সাজানো যাবে $(r-p+2)$ প্রকারে এবং এভাবে p-তম জিনিসটিকে সাজানো যাবে $r-p+p$ বা r প্রকারে।

$\therefore$ p সংখ্যক নির্দিষ্ট জিনিসকে সাজানো যাবে- $(r-p+1),(r-p+2),................r$ বা ${}^r p_p$ প্রকারে

সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = ${}^{n-p} p_{r-p} \times {}^r p_p$

উদাহরণ 5: 12 টি বস্তুর একবারে 5 টি নিয়ে কতগুলি বিন্যাসের মধ্যে 2 টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: 5 টি বস্তুর মধ্যে 2 টি বিশেষ বস্তু নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা ${}^{5}p_2$ এবং অবশিষ্ট (12-2) টি বা 10 টি বস্তুর মধ্যে 3 টি বস্তু নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা ${}^{10}p_3$

$\therefore$ 12 টি বস্তু হতে 5টি নিয়ে যাতে সর্বদা 2 টি বিশেষ বস্তু অন্তর্ভুক্ত থাকে এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{5}p_2 \times {}^{10}P_3$

$$= \frac{5!}{3!} \times \frac{10!}{7!} = 20 \times 720 = 14,400$$

(c) p সংখ্যক জিনিসকে সর্বদা বর্জন করে n সংখ্যক জিনিসের মধ্যে থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস নির্ণয়:

সেহেতু p সংখ্যক জিনিস কোনো বিন্যাসেই অন্তর্ভুক্ত হয় না তখন একে একেবারে বর্জন করলে অবশিষ্ট $(n-p)$ সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে বিন্যাস গঠন করতে হবে।

সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= {}^{n-p}p_r$

উদাহরণ 6: 8টি বস্তুর একবারে দুইটি নিয়ে কতগুলি বিন্যাসের মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে না?

সমাধান: 8টি বস্তুর মধ্যে 2টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত না থাকলে অবশিষ্ট বস্তু থাকে (8-2) টি বা 6টি

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা ${}^{6}p_2 = \frac{6!}{4!} = 30$

শিক্ষার্থীর কাজ	• Courage শব্দটির সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে কতগুলো শব্দ গঠন করা যায়। • 8 টি বস্তুর একবারে 4 টি নিয়ে কতগুলি বিন্যাসের মধ্যে 2 টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

(d) সবগুলি ভিন্ন নয় এরূপ বস্তুর বিন্যাস নির্ণয়:

n সংখ্যক বস্তুর সব কয়টি একবার নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যখন তাদের p সংখ্যক বস্তু এক প্রকার, q সংখ্যক বস্তু দ্বিতীয় প্রকার, r সংখ্যক বস্তু তৃতীয় প্রকার এবং বাকী বস্তুগুটি ভিন্ন ভিন্ন।

মনে করি, নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা x; এদের যেকোনো একটি থেকে, যদি p সংখ্যক একজাতীয় বস্তু স্বতন্ত্র হতো, তবে সাজানোর পদ্ধতি পরিবর্তন করে $p!$ সংখ্যক নতুন বিন্যাস তৈরি করা যেত। অতএব, যদি $p!$ এক জাতীয় বস্তুর সবগুলি স্বতন্ত্র হয়, তবে $x \times p!$ সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়।

অনুরূপভাবে, যদি q সংখ্যক এক জাতীয় বস্তু স্বতন্ত্র হয়, তবে দ্বিতীয় সেট বিন্যাসের প্রত্যেকটি থেকে $q!$ সংখ্যক নতুন বিন্যাস পাওয়া যায়।

অতএব, যদি p সংখ্যক এক জাতীয় বস্তু ও q সংখ্যক এক জাতীয় বস্তুর সবগুলি স্বতন্ত্র হয়, তবে আমরা $x \times p! \times q!$ সংখ্যক বিন্যাস পাই। আবার, যদি r সংখ্যক এক জাতীয় বস্তু স্বতন্ত্র হয়, তবে আমরা মোট $x \times p! \times q! \times r!$ সংখ্যক বিন্যাস পাই।

এখন সবগুলি বস্তুই স্বতন্ত্র, ফলে n সংখ্যক বস্তুর সবকটি একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা $n!$.

$\therefore\ x \times p! \times q! \times r! = n!$

অতএব, $x = \frac{n!}{p!q!r!}$ অর্থাৎ বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{n!}{p!q!r!}$

উদাহরণ 7: Engineering শব্দটির সবকয়টি বর্ণকে কত প্রকার বিভিন্ন রকমে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন। তাদের কতগুলিতে e বর্ণ তিনটি পাশাপাশি স্থান দখল করবে এবং কতগুলিতে এরা প্রথম স্থান দখল করবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: Engineering শব্দটিতে মোট 11টি বর্ণ আছে যার মধ্যে 3 টি e, 3 টি n, 2 টি i, 2 টি g এবং 1 টি r আছে।

সুতরাং মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{11!}{3!\,3!\,2!\,2!\,1!} = 277200.$

e বর্ণ তিনটি পাশাপাশি থাকায় একটি বর্ণ ধরে আমরা পাই 9টি বর্ণ যাদের 3 টি n, 2 টি g এবং 2 টি i

অতএব, যখন e বর্ণ তিনটি পাশাপাশি থাকবে তখন বিন্যাস সংখ্যা $\frac{9!}{3!2!2!} = 15120$

e বর্ণ তিনটি প্রথম স্থান দখল করায় এদের বিন্যাস সংখ্যা বিবেচনার বাইরে রেখে অবশিষ্ট ৪টি বর্ণ যার মধ্যে 3 টি n, 2 টি g, 2 টি i এর বিন্যাস নির্ণয় করতে হবে।

সুতরাং তিনটি e দ্বারা আরম্ভ হয় এরূপ বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{8!}{3!\,2!\,2!} = 1680$

(e) পুনরাবৃত্তিমূলক বস্তুর বিন্যাস নির্ণয়:

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r সংখ্যক একবারে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে, যখন যে কোনো বিন্যাসের প্রত্যেকটি বস্তু r সংখ্যকবার পুনরাবৃত্ত হতে পারে। n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r সংখ্যক শূন্য স্থান যত রকমভাবে পূরণ করা যাবে তাই নির্ণেয় বিন্যাসের সংখ্যা।

প্রথম স্থানটি n প্রকারে পূরণ করা যায় এবং প্রথম স্থানটি পূরণ করার পর, দ্বিতীয় স্থানটিও পূরণ করা যায় n প্রকারে, কেননা সবগুলি বস্তুই পুনরায় ব্যবহার করা যায়।

অতএব, প্রথম দুইটি স্থান মোট $n \times n = n^2$ প্রকারে পূরণ করা যায়।

অনুরূপভাবে, তৃতীয় স্থানটিও n সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যায়। অতএব প্রথম তিনটি স্থান $n^2 \times n = n^3$ প্রকরে পূরণ করা যায়। এভাবে দেখানো যায় যে, r সংখ্যক স্থান n^r সংখ্যক উপায়ে পূরণ করা যাবে। অতএব নির্ণয় বিন্যাস সংখ্যা n^r.

উদাহরণ 8: টেলিফোন ডায়ালে 0 থেকে 9 পর্যন্ত লেখা থাকে। যদি ভোলা শহরের টেলিফোন নম্বরগুলি 5 অঙ্কবিশিষ্ট হয়, তবে ঐ শহরের কতজনকে টেলিফোন সংযোগ দেওয়া যাবে?

সমাধান: ভোলা শহরের টেলিফোন নম্বরগুলি 0 অঙ্কবিশিষ্ট, সুতরাং 5 অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার ১ম অঙ্কটি ০ বাদে 9 টি অঙ্কদ্বারা পূরণ করা যাবে 9 উপায়ে, কারণ টেলিফোন নম্বর শূন্য দিয়ে শুরু হয় না। ২য় স্থানটি 10 টি অঙ্ক দ্বারা পূরণ করা যাবে। অতএব ৩য়, ৪র্থ, ৫ম স্থানগুলির প্রত্যেকটি পূরণ করা যায় 10 উপায়ে।

অতএব নির্ণেয় টেলিফোন সংযোগ সংখ্যা $= 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 90{,}000$

(f) চক্র বিন্যাস: একটি বস্তুকে স্থির ধরে n সংখ্যক বস্তুর সবগুলি নিয়ে চক্রবিন্যাস $(n\text{-}1)!$

কিন্তু যদি চক্রকার বিন্যাস বামাবর্তে ও ডানাবর্তে একই হয় তবে বিন্যাস সংখ্যা $= \dfrac{(n-1)!}{2}$

উদাহরণস্বরূপ, 5 জন ব্যক্তি গোলাকার হয়ে দাঁড়াতে পারবে (5-1)! বা 24 উপায়ে।

উদাহরণ 9: স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে '*Triangle*' শব্দটির অক্ষরগুলি কত রকমে সাজানো যায় নির্ণয় কর?

সমাধান: Triangle শব্দটিতে মোট ৪টি অক্ষর আছে, যাদের 3 টি স্বরবর্ণ। এ অক্ষরগুলি সবই বিভিন্ন। সুতরাং সবগুলি অক্ষর একবারে নিয়ে এদেরকে মোট $^{8}p_{8} = 8! = 40320$ রকমে সাজানো যায়।

এখন স্বরবর্ণ 3 টিকে একটি অক্ষর মনে করলে মোট 6 টি অক্ষর দিয়ে সাজানো যায়। আবার এই 3 টি স্বরবর্ণকে নিজের মধ্যে $3! = 6$ রকমে সাজানো যায়।

সুতরাং স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে অক্ষরগুলিকে $6! \times 6 = 720 \times 6 = 4320$ প্রকারে সাজানো যায়।

সুতরাং স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে মোট বিন্যাস সংখ্যা $= 40320 - 4320 = 36000$.

উদাহরণ 10: প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে 6, 5, 2, 3, 0 দ্বারা পাঁচ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা গঠন করা যায়?

সমাধান: এখানে, প্রত্যেকটি বিজোড় সংখ্যার শেষ অঙ্ক 3 বা 5 হবে।

শেষ অবস্থানে 3 নির্দিষ্ট রেখে বাকি 4 অঙ্ক $4! = 24$ উপায়ে সাজানো যায়।

আবার, প্রথম অবস্থানে 0 রেখে প্রাপ্ত সংখ্যা 5 অঙ্কের নয়। সুতরাং প্রথম অবস্থানে 0 এবং শেষ অবস্থানে 3 রেখে বাকি 3টি অঙ্ক $= 3! = 6$ উপায়ে সাজানো যায়।

সুতরাং শেষ অবস্থানে 3 নিয়ে প্রাপ্ত অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা $= 24 - 6 = 18$

অনুরূপভাবে শেষ অবস্থানে 5 নিয়ে প্রাপ্ত অর্থপূর্ণ বিজোড় সংখ্যা $=18$

$\therefore$ নির্ণেয় বিজোড় সংখ্যা $= 18 + 18 = 36$

উদাহরণ 11: Permutation শব্দটির বর্ণগুলির মধ্যে স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে বর্ণগুলিকে কতরকমে পুনরায় সাজানো যেতে পারে।

সমাধান: Permutation শব্দটিতে মোট 11 টি অক্ষর আছে, যার মধ্যে 5 টি স্বরবর্ণ এবং 6 টি ব্যঞ্জনবর্ণ আছে। যেহেতু স্বরবর্ণগুলি এদের অবস্থান পরিবর্তন করবে না, কাজেই এদের স্থান নির্দিষ্ট করে 6 টি ব্যঞ্জনবর্ণ দ্বারা সাজানোর সংখ্যা বের করতে হবে যার মধ্যে t দুই বার থাকবে।

সুতরাং সাজানোর সংখ্যা $=\dfrac{6!}{2!}=360$ টি

এবং Permutation শব্দটি নিজেই একটি সাজানো সংখ্যা।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সাজানো সংখ্যা $= 360-1 = 359$.

শিক্ষার্থীর কাজ	• 'Digital' শব্দটির বর্ণগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকবে। • স্বরবর্ণগুলিকে পাশাপাশি না রেখে 'Daughter' শব্দটির অক্ষরগুলি কত সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন।

সারসংক্ষেপ

- যদি কোনো একটি কাজ সম্ভাব্য m সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায় এবং অপর একটি কাজ স্বতন্ত্রভাবে n সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়, তবে ঐ দুইটি কাজ $(m+n)$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করাকেই গণনার যোজন বিধি বলা হয়।
- যদি কোনো কাজ p সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায় এবং ঐ কাজের উপর নির্ভরশীল দ্বিতীয় একটি কাজ যদি q সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়। তবে কাজ দুইটি একত্রে $p\times q$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যাবে। এটাই গণনার গুণন বিধি।
- কতগুলি জিনিস থেকে প্রত্যেকবার কয়েকটি বা সব কয়টি জিনিস একবার নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি বিন্যাস বলা হয়।
- সবগুলি ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের বিন্যাস $^{n}p_{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!}$
- সবগুলি ভিন্ন নয় এরূপ বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা $=\dfrac{n!}{p!q!r!}$
- পুনরাবৃত্তিমূলক বস্তুর বিন্যাস সংখ্যা $= n^{r}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.১

সঠিক উত্তরের পাশে টিক ($\surd$) চিহ্ন দিন।

1. $^{n}p_{0}$ কত?

   ক. 0 খ. 1 গ. $n!$ ঘ. n

2. $0! =$ কত?

   ক. 0 খ. n গ. 1 ঘ. অসীম

3. $^{6}p_{4}=$ কত?

   ক. 320 খ. 360 গ. 120 ঘ. 720

4. 6 টি মুদ্রা 5 টি দান বাক্সে কতভাবে ফেলা যায়?

   ক. 5^{6-1} খ. 6^{5} গ. 5^{6} ঘ. 6^{6}

5. ইংরেজি বর্ণমালা হতে প্রত্যেকবার 5 টি বর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যাবে?
   ক. 7893600 খ. 26! গ. 78063 ঘ. 30360
6. $n!$ এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?
   ক. $n \in INU\{0\}$ খ. $n \in Z$ গ. $n \in IR$ ঘ. কোনটিই নয়।
7. $\frac{n!}{(n-2)!3!} = 5$ হলে n কত?
   ক. -5 খ. 0 গ. 5 ঘ. 6
8. ${}^{n}p_{r} =$ কত?
   ক. $\frac{n!}{r!}$ খ. $\frac{n!}{(n-r)!}$ গ. $n!$ ঘ. $\frac{n!}{r!(n-r)!}$
9. 'Postage' শব্দটির অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যেতে পারে যাতে স্বরবর্ণগুলি জোড় স্থান দখল করবে নির্ণয় করুন। কতগুলিতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলি একত্রে থাকবে তা নির্ণয় করুন।
10. 'Second' শব্দটির অক্ষরগুলি থেকে 1 টি স্বরবর্ণ ও 2 টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কতগুলি শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যাতে স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করবে নির্ণয় করুন।
11. 10 টি বস্তুর একবারে 5 টি নিয়ে কতগুলি বিন্যাসের মধ্যে 2 টি বিশেষ বস্তু সর্বদা অন্তর্ভুক্ত থাকবে তা নির্ণয় করুন।
12. দেখান যে, 'Rajshahi' শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যা 'Barisal' শব্দটির অক্ষরগুলির একত্রে বিন্যাস সংখ্যার চারগুণ।
13. 'Parallel' শব্দটির অক্ষরগুলির সবগুলি একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন এবং স্বরবর্ণগুলিকে পৃথক না রেখে অক্ষরগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায় তাও নির্ণয় করুন।
14. 'Mathematics' শব্দটির বর্ণগুলিকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় এবং এদের কতগুলিতে স্বরবর্ণগুলি একত্রে থাকবে তাও নির্ণয় করুন।
15. প্রত্যেক অঙ্ককে প্রত্যেক সংখ্যায় একবারমাত্র ব্যবহার করে 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি দ্বারা কতগুলি বিভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যাবে যাদের প্রথমে এবং শেষে জোড় অঙ্ক থাকবে তা নির্ণয় করুন।
16. প্রত্যেক সংখ্যায় প্রত্যেকটি অঙ্ক কেবল একবার ব্যবহার করে 2, 3, 5, 7, 8, 9 দ্বারা তিন অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় তা নির্ণয় করুন।
17. 3, 4, 5, 6, 7, 8 অঙ্কগুলির একটিকেও পুনরাবৃত্তি না করে 5000 এবং 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে তা নির্ণয় করুন।
18. 'Immediate' শব্দটির সব কয়টি বর্ণকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা নির্ণয় করুন, কতগুলির প্রথমে T এবং শেষে a থাকবে তা নির্ণয় করুন।
19. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলি প্রত্যেক সংখ্যায় কেবল একবার ব্যবহার করে-
   ক. 5000 ও 6000 এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।
   খ. 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।
   গ. 5 অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলি জোড় সংখ্যা গঠন করা যাবে তা নির্ণয় করুন।
20. 'Communication' শব্দটি দিয়ে-
   ক. কোনো প্রকার শর্ত আরোপ না করে শব্দটির অক্ষরগুলিকে কতভাবে সাজানো যায় নির্ণয় করুন।
   খ. শব্দটির অক্ষরগুলিকে কতভাবে সাজানো যাবে যেন সবগুলি জোড়া অক্ষরগুলি পাশাপাশি না থাকে তা নির্ণয় করুন।
   গ. স্বরবর্ণগুলিকে জোড় স্থানে রেখে অক্ষরগুলিকে মোট সাজানোর সংখ্যা নির্ণয় করুন।

পাঠ ৩.২ সমাবেশ ও সম্পূরক সমাবেশ (Combination and Complementary Combination)

উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সমাবেশ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সমাবেশ সংখ্যা নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- সম্পূরক সমাবেশ কী তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন;
- সম্পূরক সমাবেশ সংখ্যার সূত্র প্রমাণ করতে পারবেন;
- ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ সূত্রটি প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবেন;
- শর্তাধীন সমাবেশের সূত্র প্রতিপাদন ও প্রয়োগ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সমাবেশ, সম্পূরক সমাবেশ।

মূলপাঠ

সমাবেশ (Combination)

কতগুলি বস্তু থেকে কয়েকটি বা সবকটি একবারে নিয়ে যত প্রকারে নির্বাচন বা দল (ক্রম বর্জন করে) গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে।

n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে প্রত্যেকবার r $(r \le n)$ সংখ্যক বস্তু নিয়ে প্রাপ্ত সমাবেশ সংখ্যাকে সাধারণত ${}^nC_r$ বা $C(n,r)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণস্বরূপ, a, b, c অক্ষর তিনটি থেকে প্রতি বার দুইটি করে অক্ষর নিয়ে দল গঠন করলে আমরা তিনটি দল পাই- যেমন ab বা ba, ac বা ca, bc বা cb.

অতএব, তিনটি বিভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার দুইটি করে নিয়ে প্রাপ্ত সমাবেশের সংখ্যা 3.

সমাবেশ সংখ্যা বা ${}^nC_r$ এর মান নির্ণয়:

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস বা বস্তু থেকে প্রতিবার r সংখ্যক জিনিস বা বস্তু নিয়ে যতগুলি সমাবেশ হতে পারে, তার সংখ্যা নির্ণয়, যেখানে $n, r \in N$ এবং $n \ge r$

মনে করি, নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা ${}^nC_r$ প্রত্যেক সমাবেশে r সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস আছে। এখন প্রত্যেক সমাবেশের অন্তর্গত r সংখ্যক জিনিকে তাদের নিজেদের মধ্যে $r!$ প্রকারে সাজানো যায়। এরূপ ${}^nC_r$ সংখ্যক সমাবেশকে ${}^nC_r \times r!$ প্রকারে সাজানো যায় এবং যা n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যার সমান।

$$\therefore \quad {}^nC_r \times r! = {}^np_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\text{বা, } {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r!)}$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r!)} \quad \text{-----------(i)}$$

$n=r$ হলে, (i) থেকে পাই- ${}^nC_n=\dfrac{n!}{n!\,0!}=\dfrac{n!}{n!.1}=1$

r=0 হলে, (i) থেকে পাই- ${}^nC_o=\dfrac{n!}{0!\,n!}=1$

উদাহরণস্বরূপ, 15 জন খেলোয়ার হতে 11 জনের একটি ক্রিকেট দল গঠন করা যায়,

$${}^{15}C_{11}=\frac{15!}{11!(15-11)!}=\frac{15!}{11!\times 4!}=\frac{15\times 14\times 13\times 12}{4\times 3\times 2}=1365 \text{ উপায়ে}$$

অনুসিদ্ধান্তঃ n সংখ্যক জিনিসের p সংখ্যক জিনিস এক প্রকার বাকী জিনিসগুলি ভিন্ন ভিন্ন হলে, তাদের $r\geq p$ সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা,

$$=\sum_{i=0}^{p}{}^{n-p}C_{r-i}={}^{n-p}C_r+{}^{n-p}C_{r-1}+{}^{n-p}C_{r-2}+---+{}^{n-p}C_{r-p}$$

উদাহরণস্বরূপ, 'THESIS' শব্দটিতে S আছে 2টি এবং অন্য 4টি বর্ণ ভিন্ন। প্রতিবারে 4টি বর্ণ নিয়ে গঠিত মোট সমাবেশ সংখ্যা = S অন্তর্ভুক্ত না করে সমাবেশ সংখ্যা + 1 টি S অন্তর্ভুক্ত করে সমাবেশ সংখ্যা + 2 টি S অন্তর্ভুক্ত করে সমাবেশ সংখ্যা-

$$={}^{6-2}C_4+{}^{6-2}C_{4-1}+{}^{6-2}C_{4-2}={}^4C_4+{}^4C_3+{}^4C_2=1+4+6=11$$

সম্পূরক সমাবেশ (Complementary Combination)

n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেকবার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা, n সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেকবার (n-r) সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যার সমান অর্থাৎ, ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$

এরূপ সমাবেশকে সম্পূরক সমাবেশ বলে।

প্রমাণঃ সমাবেশের সংজ্ঞা থেকে পাই-

$${}^nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!(n-n+r)!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}={}^nC_r$$

$$\therefore\ {}^nC_r={}^nC_{n-r}$$

সূত্রঃ প্রমাণ করুন যে, ${}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r$

প্রমাণঃ L.HS. $={}^nC_r+{}^nC_{r-1}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}+\dfrac{n!}{(r-1)!\{n-(r-1)\}!}$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$=\frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1).(n-r)!}\qquad [\because n!=n(n-1)!\ ]$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right\}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{n+1}{r(n-r+1}-\right\}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left\{\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right\}=\frac{(n+1)n!}{r(r-1)!(n-r+1)(n-r)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!\{(n+1)-r\}!}={}^{n+1}C_r=\text{R.H.S (proved)}$$

শর্তাধীন সমাবেশ (Conditional Combination)

(i) p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত করে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার $r \geq p$ সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা = ${}^{n-p}C_{r-p}$

p সংখ্যক বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত হলে অবশিষ্ট $(n\text{-}p)$ সংখ্যক বস্তু থেকে $(r\text{-}p)$ সংখ্যক বস্তু নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = ${}^{n-p}C_{r-p}$

(ii) p সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত না করে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা = ${}^{n-p}C_r$

p সংখ্যক বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত না করে অবশিষ্ট $(n\text{-}p)$ সংখ্যক বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা = ${}^{n-p}C_r$

উদাহরণ 1: 8 জন বালক ও 2 জন বালিকার মধ্য থেকে বালিকাদের (i) সর্বদা গ্রহণ করে (ii) সর্বদা বর্জন করে 6 জনের একটি কমিটি কত উপায়ে গঠন করা যাবে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: (i) বালিকা 2 জনকে সর্বদা গ্রহণ করলে 8 জন বালক থেকে 4 জনকে নিতে হবে।

$\therefore$ মোট কমিটি সংখ্যা = ${}^{8}C_4 \times {}^{2}C_2 = 70$

(ii) বালিকা 2জনকে সর্বদা বর্জন করলে 8 জন বালক থেকে 6 জন বালক নিয়ে কমিটি গঠন করতে হবে।

$\therefore$ মোট কমিটি সংখ্যা = ${}^{8}C_6 \times {}^{2}C_0 = 28$

(iii) n সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেকবার অন্তত একটি জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা $2^n - 1$

প্রত্যেক জিনিসকে গ্রহণ করা বা বর্জন করা যায়।

সুতরাং প্রত্যেকট জিনিসের জন্য 2 টি উপায় গ্রহণ করা যায়। এরূপ n সংখ্যক জিনিসের জন্য গৃহীত উপায় $=2^n$ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত $=2^n$ কিন্তু এর ভিতর সকলকে বর্জন করার উপায়ও অন্তর্ভুক্ত।

সুতরাং মোট সমাবেশ সংখ্যা = 2^n-1

(iv) p সংখ্যক এক জাতীয়, q সংখ্যক অন্য এক জাতীয়, r সংখ্যক অন্য আর এক জাতীয় এবং k সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন যে কোনো সংখ্যক জিনিস নিয়ে উৎপন্ন সমাবেশ সংখ্যা = $(p+1)(q+1)(r+1)2^k - 1$

p সংখ্যক এক জাতীয় জিনিস থেকে 0 বা 1 ....., বা 3 ..., বা p সংখ্যক জিনিস বাছাই করা যায়। অতএব $(p+1)$ সংখ্যক উপায়ে বাছাই করা যায়। অনুরূপভাবে, q সংখ্যক এক জাতীয় এবং r সংখ্যক এক জাতীয় জিনিসের জন্য যথাক্রমে $(q+1)$ এবং $(r+1)$ উপায়ে বাছাই করতে পারি।

আবার, k সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিসের প্রত্যেকটির জন্য দুই রকম উপায় গ্রহণ করা যায়। সুতরাং, মোট 2^k সংখ্যক উপায় গ্রহণ করা যায়। কিন্তু সকলকে বর্জন করার ঘটনাও এদের অন্তর্ভুক্ত বলে নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা = $(p+1)(q+1)(r+1)2^k - 1$

উদাহরণ 2: সুমনের নিকট 8 টি দশ টাকার, 4 টি পাঁচ টাকার, 2 টি দুই টাকার এবং 2 টি এক টাকার নোট আছে। সুমন কত প্রকারে দরিদ্র ভান্ডারে দান করতে পারেন নির্ণয় করুন।

সমাধান: দরিদ্র ভান্ডারে দান করার সংখ্যা-

$$= (8+1)(4+1)(2+1)(2+1) - 1 = 9 \times 5 \times 3 \times 3 - 1 = 405 - 1 = 404$$

(v) p সংখ্যক এক জাতীয়, q সংখ্যক অন্য এক জাতীয় ও r সংখ্যক অন্য আর এক জাতীয় হলে প্রতিটির অন্ততঃ একটি নিয়ে উৎপন্ন সমাবেশ সংখ্যা-

$$= \sum_{i=1}^{p} {}^{p}C_i \times \sum_{i=1}^{q} {}^{q}C_i \times \sum_{i=1}^{r} {}^{r}C_i = (2^p - 1)(2^q - 1)(2^r - 1)$$

(vi) $(p+q)$ সংখ্যক জিনিসকে দুইটি দলে বিভক্ত করতে হবে যেন এক দলে p সংখ্যক ও অন্যদলে q সংখ্যক জিনিস থাকে।

$(p+q)$ সংখ্যক জিনিস থেকে প্রতিবারে p সংখ্যক জিনিস নির্বাচন করা যায় ${}^{p+q}C_p$ উপায়ে। অতঃপর অবশিষ্ট q সংখ্যক জিনিস থেকে q সংখ্যক জিনিস নির্বাচন করা যায় ${}^{q}C_q = 1$ উপায়ে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা = ${}^{p+q}C_p \times 1 = \dfrac{(p+q)!}{p!(p+q-p)!} = \dfrac{(p+q)!}{p!q!}$

যেমন: 10 জন খেলোয়াড় দ্বারা 6 সদস্য ও 4 সদস্যের দুইটি দল করা যাবে, $\dfrac{10!}{6!\,4!} = \dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} = 210$

$p=q$ হলে অর্থাৎ $2q$ সংখ্যক জিনিস সমান দুই ভাগে ভাগ করলে সমাবেশ সংখ্যা হবে $\dfrac{(2q)!}{2!(q!)^2}$ তবে $2q$ সংখ্যক জিনিস দুইজনের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করে দেওয়া হলে সমাবেশ সংখ্যা হবে $\dfrac{(2q)!}{(q!)^2}$

বিন্যাস ও সমাবেশের মধ্যে সম্পর্ক হলো: ${}^np_r = {}^nC_r \times {}^rp_r = {}^nC_r \times r!$

উদাহরণ 3: যদি ${}^nC_{12} = {}^nC_8$ হয়, তবে ${}^{22}C_n$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, ${}^nC_{12} = {}^nC_8$

বা, ${}^nC_{n-12} = {}^nC_8$ $\quad \left[\because {}^nC_{12} = {}^nC_{n-12}\right]$

$\therefore\ n-12 = 8$

বা, $n = 8+12$

$\therefore\ n = 20$

$\therefore\ {}^{22}C_n = {}^{22}C_{20} = {}^{22}C_{22-20} = {}^{22}C_2 = \dfrac{22!}{2!(22-2)!} = \dfrac{22!}{2!20!} = \dfrac{22\times21}{2\times1} = 231$

$\therefore\ {}^{22}C_n = 231$

উদাহরণ 4: 3টি শূন্য পদের জন্য 12 জন প্রার্থী আছে। একজন ভোটার 3 টির বেশি ভোট দিতে পারবেন না। তিনি কত প্রকারে ভোট দিতে পারবেন তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন ভোটার 12 জন প্রার্থীর মধ্যে 1 জনকে বা 2 জনকে বা 3 জনকে ভোট দিতে পারবেন।

সুতরাং নির্ণেয় ভোট দেয়ার উপায়-

$$= {}^{12}C_1 + {}^{12}C_2 + {}^{12}C_3 = 12 + \frac{12\times11}{2} + \frac{12\times11\times10}{3\times2} = 12+66+220 = 298$$

উদাহরণ 5: 6 জন ও 8 জন খেলোয়াড়ের দুইটি দল থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি ক্রিকেট টিম গঠন করতে হবে যাতে 6 জনের দল থেকে অন্তত 4 জন খেলোয়াড় ঐ টিমে থাকে। ক্রিকেট টিমটি কত প্রকারে গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।

সমাধান: 11 জন খেলোয়াড়ের দলটি নিম্নরূপে গঠন করা যায়:

6 জন বিশিষ্ট দল	8 জন বিশিষ্ট দল	টিম গঠন করার উপায়
6	5	${}^6C_6 + {}^8C_5 = 1\times56 = 56$
5	6	${}^6C_5 + {}^8C_6 = 6\times28 = 168$
4	7	${}^6C_4 + {}^8C_7 = 15\times8 = 120$

$\therefore$ টিমটি গঠন করা যাবে, $(56+168+120) = 344$ প্রকারে।

উদাহরণ 6: 20 বাহু বিশিষ্ট একটি সুসম সমতলিক ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুর সংযোগে প্রাপ্ত রেখা দ্বারা কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায় ও ঐ সমতলিক ক্ষেত্রটির কতগুলি কর্ণ আছে তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: (i) 20 বাহু বিশিষ্ট একটি সমতালিক ক্ষেত্রের 20 টি কৌণিক বিন্দু আছে এবং 20 টি বিন্দুর যেকোনো তিনটির সংযোগ রেখার সাহায্যে একটি ত্রিভুজ গঠন করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের সংখ্যা $^{22}C_3 = \dfrac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$

(ii) কৌণিকে বিন্দুগুলির যে কোনো দুইটিকে সংযুক্ত করলে একটি কর্ণ উৎপন্ন হয়।

সুতরাং 20 টি কৌণিক বিন্দু দ্বারা গঠিত কর্ণের সংখ্যা $^{20}C_2 = 190$

কিন্তু এদের মধ্যে সমতালিক ক্ষেত্রের 20 টি বাহুও অন্তর্ভুক্ত।

$\therefore$ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা = (190-20) = 170

উদাহরণ 7: 5 জন বিজ্ঞান ও 3 জন কলা বিভাগের ছাত্রের মধ্যে থেকে 4 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে। যদি প্রত্যেক কমিটিতে (i) অন্তত 1 জন বিজ্ঞানের ছাত্র থাকে, (ii) অন্তত 1 জন বিজ্ঞান ও 1 জন কলা বিভাগের ছাত্র থাকে, তাহলে কত বিভিন্নভাবে এ কমিটি গঠন করা যেতে পারে নির্ণয় করুন।

সমাধান: (i) 4 জনের কমিটি নিম্নরূপে গঠন করা যায়:

5 জন বিজ্ঞানের	3 জন কলা বিভাগের ছাত্র	কমিটি গঠন করার উপায়
1	3	$^5C_1\times{}^3C_3 = 5\times1 = 5$
2	2	$^5C_2\times{}^3C_2 = 10\times3 = 30$
3	1	$^5C_3\times{}^3C_1 = 10\times3 = 30$
4	0	$^5C_4\times{}^3C_0 = 5\times1 = 5$

$\therefore$ কমিটি গঠন করা যায় =5+30+30+5=70

(ii) সেহেতু অন্তত 1জন বিজ্ঞান ও 1জন কলা বিভাগের ছাত্র থাকবে সুতরাং কমিটি গঠন করা যাবে =5+30+30=65

উদাহরণ 8: 17 টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 5 টি স্বরবর্ণ থেকে 3 টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2 টি স্বরবর্ণ নিয়ে মোট কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।

সমাধান: 17 টি ব্যঞ্জনবর্ণ থেকে 3 টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে বাছাই করার উপায়, $^{17}C_3$ এবং 5 টি স্বরবর্ণ থেকে 2টি স্বরবর্ণ নিয়ে বাছাই করার উপায়, $^5C_2$

একত্রে বাছাই করার উপায়, $^{17}C_3\times{}^5C_2$

আবার, ঐ 5 টি অক্ষরকে তাদের নিজেদের মধ্যে $^5P_5$ বা 5! উপায়ে সাজানো যায়।

সুতরাং মোট শব্দ সংখ্যা $^{17}C_3\times{}^5C_2\times{}^5P_5 = \dfrac{17\times16\times15}{3\times2\times1}\times\dfrac{5\times4}{2\times1}\times(5\times4\times3\times2\times1) = 816000$

উদাহরণ 9: 'PROFESSOR' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবার 4 টি করে বর্ণ নিয়ে সমাবেশ ও বিন্যাস সংখ্যা নির্ণয় করুন।

সমাধান: 'PROFESSOR' শব্দটির মোট বর্ণের সংখ্যা 9 যাদের মধ্যে 2 টি R, 2 টি O এবং 2 টি S রয়েছে। 9 টি বর্ণ হতে 4 টি বর্ণ নিম্নরূপে নির্বাচন করা যায়-

(i) সবগুলি বর্ণ ভিন্ন ভিন্ন (ii) 2 টি এক জাতীয় ও 2 টি ভিন্ন ভিন্ন এবং (iii) 2 টি এক জাতীয় ও অন্য 2 টি আরেক জাতীয়

(i) 6 টি ভিন্ন ভিন্ন বর্ণ থেকে 4 টি বর্ণ নিয়ে বাছাইয়ের উপায় $^6C_4$

আবার, এই বেছে নেওয়া 4 টি ভিন্ন বর্ণ নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হবে $^4P_4$ বা 4! প্রকারে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাবেশ সংখ্যা, $^6C_4 = 15$

এবং বিন্যাস সংখ্যা, = $^6C_4\times{}^4P_4 = 15\times4! = 15\times24 = 360$

(ii) 3 প্রকারের 3 জোড়া এক জাতীয় বর্ণ থেকে 1 জোড়া (2টি) বর্ণ নিয়ে বাছাইয়ের উপায়, $^3C_1$

এবং অবশিষ্ট 5টি ভিন্ন বর্ণ থেকে 2 টি বর্ণ নিয়ে বাছাইয়ের উপায় $^5C_2$

এই বেছে নেওয়া 4 টি বর্ণ (যাদের 2 টি এক জাতীয়) নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হবে, $\dfrac{4!}{2!}$ প্রকারে।

$\therefore$ সমাবেশ সংখ্যা, $= {}^{3}C_{1} \times {}^{5}C_{2} = 3 \times 10 = 30$

এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 30 \times \dfrac{4!}{2!} = 360$

(iii) 3 প্রকারের 3 জোড়া এক জাতীয় বর্ণ থেকে (ও অন্য 2 টি অন্য এক জাতীয়)2 জোড়া (4টি বর্ণ) নিয়ে বাছাইয়ের উপায়, ${}^{3}C_{2}$

এই বেছে নেওয়া 4 টি বর্ণ (যাদের 2 টি এক জাতীয়) নিজেদের মধ্যে বিন্যস্ত হবে, $\dfrac{4!}{2!2!}$ প্রকারে।

$\therefore$ সমাবেশ সংখ্যা $= {}^{3}C_{2} = 3$

এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 3 \times \dfrac{4!}{2!2!} = 3 \times 6 = 18$

$\therefore$ মোট সমাবেশ সংখ্যা $= 15 + 30 + 3 = 48$

এবং বিন্যাস সংখ্যা $= 360 + 360 + 18 = 738$

শিক্ষার্থীর কাজ

1. 'DEGREE' শব্দটির বর্ণগুলি থেকে প্রতিবারে 4 টি বর্ণ নিয়ে কত প্রকারে বাছাই করা যেতে পারে?
2. একটি প্রশ্নের দুইটি গ্রুপে 5টি করে মোট 10টি প্রশ্ন আছে। একজন পরীক্ষার্থীকে মোট 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে এই শর্তে যে সে কোনো গ্রুপ থেকেই 4টি প্রশ্নের বেশি উত্তর দিতে পারবে না। সে কতভাগে প্রশ্নগুলো বাছাই করতে পারে?

সারসংক্ষেপ

- কতগুলি বস্তু থেকে কয়েকটি বা সবকটি একবারে নিয়ে যত প্রকারে নির্বাচন বা দল (ক্রম বর্জন করে) গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে। n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হতে প্রত্যেকবার $r(r \le n)$ সংখ্যক বস্তু নিয়ে প্রাপ্ত সমাবেশ সংখ্যাকে সাধারণ ${}^{n}C_{r}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- ${}^{n}C_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন জিনিস থেকে প্রত্যেক বার r সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা, n সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেকবার (n-r) সংখ্যক জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যার সমান অর্থাৎ, ${}^{n}C_{r} = {}^{n}C_{n-r}$ । এরূপ সমাবেশকে সম্পূরক সমাবেশ বলে।
- P সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত করে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার $r \ge P$ সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা, ${}^{n-p}C_{r-p}$
- P সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদাই অন্তর্ভুক্ত না করে n সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থেকে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা, ${}^{n-p}C_{r}$
- n সংখ্যক জিনিস থেকে প্রত্যেকবার অন্তত একটি জিনিস নিয়ে গঠিত সমাবেশ সংখ্যা $2^{n} - 1$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.২

সঠিক উত্তরের পাশে টিক (✓) চিহ্ন দিন।

1. ${}^{n}C_{r}$ কত?

ক. $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ খ. $\dfrac{n!}{(n-r)!}$ গ. $n!$ ঘ. $\dfrac{n}{r(n-r)}$

2. $^{n}C_{r}+^{n}C_{r-1}$ = কত?

   ক. $^{n+1}C_{r}$ খ. $^{n+1}C_{r+1}$ গ. $^{n+1}C_{r-1}$ ঘ. $^{n}C_{r+1}$

3. $^{n}C_{r}$ এর সম্পূরক সমাবেশ কোনটি?

   ক. $^{n}C_{r}\times r!$ খ. $^{n}C_{n-r}$ গ. $^{n}C_{r+1}$ ঘ. $^{n+1}C_{r+1}$

4. $^{n}C_{r}=120$ ও $^{n}C_{r}=20$ হলে r এর মান কত?

   ক. 6   খ. 5   গ. 2   ঘ. 3

5. 16 বাহু বিশিষ্ট একটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলি ত্রিভুজ গঠন করা যায়?

   ক. 120   খ. 240   গ. 560   ঘ. 3360

6. কতভাবে 7 জন লোক একটি গোল টেবিলে আসন গ্রহণ করতে পারে?

   ক. 720   খ. 2519   গ. 2520   ঘ. 2521

7. ‘ELEPHANT’ শব্দটির স্বরবর্ণ গুলি একত্রে রেখে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

   ক. 720   খ. 2160   গ. 4320   ঘ. 20160

8. ‘BANANA’ শব্দটির সবগুলি বর্ণ ব্যবহার করে কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়?

   ক. 720   খ. 180   গ. 6   ঘ. 60

9. 4 জন ভদ্রমহিলাসহ 10 ব্যক্তির মধ্যে থেকে 5 জনের একটি কমিটি কত রকমে গঠন করা যেতে পারে, যাতে অন্তত একজন ভদ্র মহিলা থাকবেন নির্ণয় করুন।

10. 14 জন ক্রিকেট খেলোয়াড়ের মধ্যে 5 জন বোলার এবং 2 জন উইকেট রক্ষক। এদের মধ্য থেকে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি দল কত প্রকারের বাছাই করা যেতে পারে যাতে অন্তত 3 জন বোলার ও 1 জন উইকেট রক্ষক থাকে নির্ণয় করুন।

11. সাতটি সরল রেখার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1, 2, 4, 5, 6, 7 সে.মি.। দেখান যে, একটি চতুর্ভুজ গঠন করার জন্য চারটি সরল রেখা যত প্রকারে বাছাই করা যায় তার সংখ্যা 32।

12. 6 জন গণিত ও 4 জন পদার্থ বিজ্ঞানের ছাত্র থেকে 6 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যাতে গণিতের ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠতা থাকে। কত প্রকারে কমিটি গঠন করা যায় নির্ণয় করুন।

13. একজন পরিক্ষার্থীকে 12 টি প্রশ্ন থেকে 6 টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হবে। তাকে প্রথম 5 টি থেকে ঠিক 4 টি প্রশ্ন বাছাই করতে হবে। সে কত প্রকারে প্রশ্নগুলি বাছাই করতে পারবে নির্ণয় করুন।

14. এক ব্যক্তির 6 জন বন্ধু আছে। সে কত প্রকারে এক বা একাধিক বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারে নির্ণয় করুন।

15. 12 টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 5 টি বিভিন্ন স্বরবর্ণ থেকে 3 টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2 টি স্বরবর্ণ সমন্বয়ে গঠিত কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন শব্দ গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।

16. 9 ব্যক্তির একটি দল দুইটি যানবাহনে ভ্রমণ করবে, যার একটিতে 7 জনের বেশি এবং অন্যটিতে 4 জনের বেশি ধরে না। দলটি কত প্রকারে ভ্রমণ করতে পারবে নির্ণয় করুন।

17. 6 জন গণিত, 4 জন পদার্থ বিজ্ঞান ও 5 জন রসায়ন বিজ্ঞানের থেকে 7 জনের একটি কমিটি গঠন করতে হবে যেন প্রত্যেক বিভাগের কমপক্ষে একজন ছাত্র থাকে।

   ক. কোনো শর্ত আরোপ না করে কত উপায়ে এক বা একাধিক ছাত্রকে বাছাই করা যাবে নির্ণয় করুন।

   খ. কতটি কমিটিতে গণিত ছাত্রদের সংখ্যা গরিষ্ঠতা থাকবে নির্ণয় করুন।

   গ. দুইজন গণিতের ছাত্রকে পাশাপাশি না বসিয়ে কতভাবে একটি গোলটেবিলে বসানো যাবে নির্ণয় করুন।

18. কলেজের বার্ষিক ক্রীড়া প্রতিযোগিতা পরিচালনার জন্য পুরস্কার ক্রয় কমিটিতে 5 জন, অতিথি আপ্যায়নে 4 জন এবং শৃঙ্খলা রক্ষার দায়িত্বে 3 জন লোক নিয়োজিত।

   ক. $7\times{}^{n}P_{3}={}^{n+1}P_{4}$ হলে n এর মান নির্ণয় করুন।

   খ. উক্ত বার্ষিক ক্রিয়া সুষ্ঠুভাবে পরিচালনার্থে প্রত্যেক কমিটি থেকে অনন্তঃপক্ষে 1 জন অন্তর্ভুক্ত রেখে 6 জন সদস্যের কমিটি কতভাবে বাছাই করা যায় নির্ণয় করুন।

গ. কমপক্ষে আপ্যায়ন কমিটির 2 জন এবং শৃঙ্খলা কমিটির 1 জনকে অন্তর্ভুক্ত রেখে 7 জনের দল কতভাবে গঠন করা যাবে নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.১

1. ক 2. গ 3. খ 4. গ 5. ক 6. ক 7. ঘ 8. খ
9. 144, 576 10. 24 11. 6720 12. 13. 3360, 360 14. 4989600, 120960
15. 60480 16. 120 17. 60 18. 45360, 630 19. ক. 210 খ. 92 টি গ) 3000

20. ক. $\frac{13!}{(2!)^5}$ বা, 19,45,94,400 খ. $\frac{13!}{(2!)^5}-8!$ বা, 19,45,54,080

গ. $\frac{6!.7!}{(2!)^5}$ বা, 1,13,400

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৩.২

1. ক 2. গ 3. খ 4. ঘ 5. গ 6. ক 7. খ 8. খ 9. 246
10. 342 11. 115 12. E 13. 105 14. 63 15. 2,64,000
16. 246 17. ক. 17279 খ. 2370 গ. $40320\times{}^9P_6$ 18. ক. $n=6$ খ. 805 গ. 636