ম্যাট্রিক্স ও নির্ণায়ক
(Matrices and Determinants)

ইউনিট ১

ভূমিকা

ম্যাট্রিক্স এর ধারণা ব্যবহার করে সহজে এবং সংক্ষিপ্ত ভাবে তথ্য পরিবেশন করা যায়। ম্যাট্রিক্স এবং নির্ণায়কের ধারণা ব্যবহার করে বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা যায়। এই ইউনিটে ম্যাট্রিক্স এবং নির্ণায়ক সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- ম্যাট্রিক্স ও ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ বর্ণনা করতে পারবেন,
- ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ ও গুণ করতে পারবেন,
- নির্ণায়ক কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে পারবেন,
- নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে পারবেন,
- নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৭ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১.১ ম্যাট্রিক্স ও এর প্রকারভেদ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা বর্ণনা করতে পারবেন,
- বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্স সম্মন্ধে লিখতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ম্যাট্রিক্স, রো-ম্যাট্রিক্স, বর্গ ম্যাট্রিক্স, মুখ্য কর্ণ, কর্ণ ম্যাট্রিক্স

মূলপাঠ

ম্যাট্রিক্স (Matrix): কতকগুলো সংখ্যার আয়তকার বিন্যাস হলো ম্যাট্রিক্স। [ ], ( ) বা ‖ ‖ প্রতীক দ্বারা ম্যাট্রিক্স প্রকাশ করা হয়।

যেমন – $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$ একটি 2×4 ম্যাট্রিক্স

ম্যাট্রিক্সের নিজের কোন মান নেই। যে সংখ্যা বা রাশি নিয়ে ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় তাদেরকে ম্যাট্রিক্সের ভুক্তি (enrty) বা উপাদান (element) বলা হয়। অনুভূমিক বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা ভুক্তি সমূহকে ”সারি” এবং উলম্ব বরাবর অবস্থিত ভুক্তি বা ভুক্তি সমূহকে ”কলাম” বলা হয়।

$$\text{যেমন} - \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{১ম সারি} \\ \longrightarrow \text{২য় সারি} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{১ম কলাম} & \text{২য় কলাম} & \text{৩য় কলাম} & \text{৪র্থ কলাম} \end{array} \end{array}$$

ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা পর্যায় (Order of Matrix): কোন ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা m এবং কলামের সংখ্যা n হলে সেই ম্যাট্রিক্সের ক্রম হবে $m\times n$ (m বাই n পড়তে হবে)।

বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrix): কোন ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান হলে তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন – $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ একটি 3×3 বর্গ ম্যাট্রিক্স।

রো-ম্যাট্রিক্স (Row Matrix): একটি মাত্র সারি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে সারি ম্যাট্রিক্স বা রো-ম্যাট্রিক্স বা সারি ভেক্টর বলা হয়। যেমন – $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

কলাম-ম্যাট্রিক্স (Column Matrix): একটি মাত্র কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক্স বা কলাম ভেক্টর বলা হয় ।

যেমন – $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ একটি 3×1 ম্যাট্রিক্স

মুখ্য কর্ণ (Principal Diagonal): কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি এবং ১ম কলামের সাধারণ (common) ভূক্তি বরাবর কর্ণকে মুখ্য কর্ণ বলা হয়।

যেমন – $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ মুখ্য কর্ণ অর্থাৎ, a_{11} , a_{22} , a_{33} মুখ্য কর্ণের উপাদান বা ভূক্তি।

কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrix): যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভূক্তি ব্যতিত সকল ভূক্তি শূন্য তাকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন – $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ একটি 3×3 কর্ণ ম্যাট্রিক্স।

স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrix): যে ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভূক্তিগুলো সমান তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স বলা হয় ।

যেমন – $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

অভেদক ম্যাট্রিক্স (Identity or Unit Marix): যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভূক্তি গুলো 1 এবং অবশিষ্ট ভূক্তি গুলো শূন্য তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং n পর্যায় বিশিষ্ট অভেদক ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন - $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ও $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ দুটি অভেদক ম্যাট্রিক্স।

শূন্য ম্যাট্রিক্স (Null matrix or Zero Matrix): যে ম্যাট্রিক্স এর সকল ভূক্তি শূন্য তাকে শূন্য ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ একটি 3×3 শূন্য ম্যাট্রিক্স।

সারসংক্ষেপ

- কতগুলো সংখ্যাকে আয়তকারে সাজিয়ে উভয় পাশে [ ], ( ) বা || || প্রতীক দ্বারা আবদ্ধ করলে ম্যাট্রিক্স তৈরী হয়। ম্যাট্রিক্সের নিজের কোন মান নেই।
- কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের ১ম সারি এবং ১ম কলামের সাধারণ (common) ভূক্তি বরাবর কর্ণকে মুখ্য কর্ণ বলা হয়।
- একটি মাত্র কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক্স বা কলাম ভেক্টর বলা হয়।
- যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের মূখ্য কর্ণের ভূক্তি গুলো 1 এবং অবশিষ্ট ভূক্তি গুলো শূন্য তাকে অভেদক ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং n পর্যায় বিশিষ্ট অভেদক ম্যাট্রিক্সকে I_n দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.১

1. নিচের কোনটি রো-ম্যাট্রিক্স?

(ক) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের (i) ভূক্তি 6 (ii) সারি 2 (iii) কলাম 3, তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি –

(i) বর্গ ম্যাট্রিক্স
(ii) স্কেলার ম্যাট্রিক্স
(iii) অভেদক ম্যাট্রিক্স

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i),(ii) ও (iii)

পাঠ ১.২ ম্যাট্রিক্সের সমতা, যোগ, বিয়োগ এবং গুণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ ও গুণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে যোগ, বিয়োগ ও গুণ প্রয়োগ করতে পারবেন ।

মুখ্য শব্দ	ম্যাট্রিক্সের সমতা, ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক, ম্যাট্রিক্সের গুণ

মূলপাঠ

ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of Matrix): দুইটি ম্যাট্রিক্স সমান হবে যদি এবং কেবল যদি তাদের ক্রম সমান হয় এবং তাদের ভূক্তি গুলি সমান হয়।

যেমন - $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ও $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ হবে যদি এবং কেবল যদি $a = x, b = y$, $c = z$ এবং $d = w$ হয়।

ম্যাট্রিক্সের যোগ ও বিয়োগ (Addition and Subtraction of Marix): দুইটি ম্যাট্রিক্স A এবং B যোগের জন্য বা বিয়োগের জন্য উপযোগী হবে যদি তাদের ক্রম একই হয়। ম্যাট্রিক্স দ্বয়ের যোগফল বা বিয়োগফল অপর একটি ম্যাট্রিক্স হবে যার ক্রম (Order) A এবং B ম্যাট্রিক্সের অনুরূপ হবে। যোগফল বা বিয়োগফল সংশ্লিষ্ট অনুরূপ ভুক্তি গুলোর যোগফল বা বিয়োগফল।

যেমন - মনে করুন, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

অতএব, $A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & -2+0 & 3+2 \\ 4-6 & -5+1 & 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ এবং

$$A-B=\begin{pmatrix}1-3 & -2-0 & 3-2\\ 4-(-6) & -5-1 & 6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 10 & -6 & 4\end{pmatrix}$$

$$B-A=\begin{pmatrix}3-1 & 0+2 & 2-3\\ -6-4 & 1+5 & 2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -10 & 6 & -4\end{pmatrix}$$

$\therefore A+B\neq A-B\neq B-A$

ম্যাট্রিক্সের স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a Matrix): k একটি ধ্রুব (Constant) সংখ্যা এবং A একটি ম্যাট্রিক্স হলে kA এমন একটি ম্যাট্রিক্স যার প্রত্যেকটি ভুক্তি A এর প্রতিসঙ্গী ভূক্তির k গুণ।

যেমন - $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$ হলে $kA=\begin{pmatrix}k.1 & k.2 & k.-3\\ k.4 & k.3 & k.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 2k & -3k\\ 4k & 3k & 0\end{pmatrix}$

ম্যাট্রিক্সের গুণ (Multiple of Matrix): ম্যাট্রিক্স A এবং B দুইটি গুণ যোগ্য হবে যদি ১ম ম্যাট্রিক্স A এর কলাম সংখ্যা ও ২য় ম্যাট্রিক্স B এর সারির সংখ্যা সমান হয়। অন্যথায় তারা গুণযোগ্য হবে না।

যদি A একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স এবং B একটি 2×3 ম্যাট্রিক্স হয় তবে AB হবে 2×3 ম্যাট্রিক্স।

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ এবং $B=\begin{pmatrix}x & y & p\\ z & w & q\end{pmatrix}$ হলে $AB=\begin{pmatrix}ax+bz & ay+bw & ap+bq\\ cx+dz & cy+dw & cp+dq\end{pmatrix}$ হবে।

উদাহরণ 1: $A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ হলে

i. $A+B$ ii. $B+C$ iii. $C-A$ iv. $3A+4B-2C$ নির্ণয় করুন।

v. দেখান যে, $A+(B-C)=(A+B)-C$

সমাধান: (i) $A+B$

$$=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1 & -5-2 & 1-3\\ 3+0 & 0-1 & 4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -7 & -2\\ 3 & -1 & 9\end{pmatrix}$$

(ii) $B+C=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1+0 & -2+1 & -3+2\\ 0+1 & -1-1 & 5+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

(iii) $C-A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}0-2 & 1+5 & 2-1\\ 1-3 & -1-0 & 1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6 & 1\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

(iv) $3A+4B-2C$

$$=3\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & -15 & 3\\ 9 & 0 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -8 & -12\\ 0 & -4 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6+4-0 & -15-8-2 & 3-12-4\\ 9+0-2 & 0-4+2 & 12+20-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -25 & -13\\ 7 & -2 & 30\end{pmatrix}$$

(v) বামপক্ষ $= A + (B - C)$

$$=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & 4\end{pmatrix}+\left\{\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\0 & -1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-0 & -2-1 & -3-2\\0-1 & -1+1 & 5-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -3 & -5\\-1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+1 & -5-3 & 1-5\\3-1 & 0+0 & 4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -8 & -4\\2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

ডানপক্ষ $= (A+B)-C$

$$=\left\{\begin{pmatrix}2 & -5 & 1\\3 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\0 & -1 & 5\end{pmatrix}\right\}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -7 & -2\\3 & -1 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-0 & -7-1 & -2-2\\3-1 & -1+1 & 9-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -8 & -4\\2 & 0 & 8\end{pmatrix}$$

$\therefore A+(B-C)=(A+B)-C$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 2: $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ এবং $C=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ হলে প্রমাণ করুন যে, $(AB)C=A(BC)$ ।

প্রমাণ: $AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+(-1)\times2 & 3-1 & 1-0\\0\times1+2\times2 & 0+2 & 0+0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1-2 & 3-1 & 1-0\\0+4 & 0+2 & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\4 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+3\times2+1\times4\\2\times1+1\times2+0\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6+4\\2+2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}$$

বামপক্ষ $=(AB)C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\4 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4+4\\4+4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$

ডানপক্ষ $=A(BC)=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11-4\\0+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$

বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 3: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & -3\end{pmatrix}$ হলে দেখান যে $A^2+2A-11I$ একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স ।

সমাধান: $A^2=A.A=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & -3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times1+4\times2 & 1\times2+2\times(-3)\\4\times1+(-3)\times4 & 4\times2+(-3)\times(-3)\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

এখন, $A^2 + 2A - 11I = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 9+2-11 & -4+4 \\ -8+8 & 17-6-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

উদাহরণ 4: কোন একটি দোকানের তিন দিনের বিভিন্ন ব্রান্ডের কলম বিক্রয়ের তথ্য নিম্নের তালিকায় দেখানো হলো ঃ

কলমের সংখ্যা				
	পাইলট	ইয়োথ	মনটেক্স	ম্যাটাডোর
১ম দিন	3	4	10	20
২য় দিন	2	3	15	20
৩য় দিন	1	5	12	14
প্রতিকলমে লাভ(টাকায়)	0.50	0.75	0.50	0.40

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে দোকানের তিন দিনের লাভ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 & 20 \\ 2 & 3 & 15 & 20 \\ 1 & 5 & 12 & 14 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.40 \end{pmatrix}$ এবং

মোট লাভ $= P \times Q$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 10 & 20 \\ 2 & 3 & 15 & 20 \\ 1 & 5 & 12 & 14 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.75 \\ 0.50 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5+3+5+8 \\ 1+2.25+7.5+8 \\ .50+3.75+6+5.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 18.75 \\ 15.85 \end{pmatrix}$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.২

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ এবং $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ হলে
   $(i)\ 3A - 4B \quad (ii)\ A + B \quad (iii)\ B - A$ এর মান নির্ণয় করুন।
2. মান নির্ণয় করুন: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ।
3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ হলে, AB ও BA নির্ণয় করুন।
4. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 \\ -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ হলে, প্রমাণ করুন $AB \neq BA$ ।

পাঠ ১.৩ নির্ণায়কের ধারণা ও বিস্তৃতি

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়ক কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- নির্ণায়কের মান নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	নির্ণায়ক, নির্ণায়কের বিস্তৃতি

মূলপাঠ

নির্ণায়কের সংজ্ঞা: আমরা আগের পাঠগুলোতে ম্যাট্রিক্স সমন্ধে জেনেছি। কোন ম্যাট্রিক্সকে যেমন $\left[a_{ij}\right]$ বা $\left(a_{ij}\right)$ বা $\left\|a_{ij}\right\|$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়, যেখানে $i=1,2,3,........,m$; $j=1,2,3,........,n$ । তেমনি নির্ণায়ককে $\left|a_{ij}\right|$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ একটি 2×2 বর্গ ম্যাট্রিক্স এর সংশ্লিষ্ট নির্ণায়ক হবে $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$ । দুইটি সারি ও দুইটি কলাম আছে বিধায় একে দ্বিতীয় পর্যায়ের নির্ণায়ক বলে।

নির্ণায়কের মান আছে যদিও ম্যাট্রিক্সের মান নেই। নির্ণায়কের ক্ষেত্রে সারির সংখ্যা এবং কলামের সংখ্যা সমান হতে হয়।

নির্ণায়কের বিস্তৃতি $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ এর মান

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

যেমন: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 12 = 24$

3×3 আকারের $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

যেমন: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

$= 2(6+4) - 3(18-8) + 1(-6-4) = 2\times10 - 3\times10 + 1\times(-10)$
$= 20 - 30 - 10) = 20 - 40 = -20$

পাঠ ১.৪ নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্ণায়কের মৌলিক গুণাবলী লিখতে পারবেন,
- অনুরাশি ও সহগুণক এর ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অনুরাশি এবং সহগুণকের সাহায্যে নির্ণায়কের বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অনুরাশি, সহগুণক

মূলপাঠ

নির্ণায়কের অনুরাশি এবং সহগুণক: যে সকল সংখ্যা বা প্রতীক দ্বারা নির্ণায়ক গঠন করা হয় তারা নির্ণায়কের ভূক্তি। প্রত্যেক ভূক্তি যে সারি এবং কলামে অবস্থান করে সেই সারি ও কলাম বাদ দিয়ে অবশিষ্ট নির্ণায়কই ঐ ভূক্তির অনুরাশি। উপযুক্ত চিহ্ন সহ অনুরাশিকে বলা হয় সহগুণক।

ম্যাট্রিক্স (a_{ij}) এ a_{ij} এর সহগুণক হবে $(-1)^{i+j}a_{ij}$ ।

যেমন- $|D| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের একটি ভূক্তি -4 এর অবস্থান ১ম সারি ও ২য় কলাম

$\therefore -4$ এর অনুরাশি = ১ম সারি ও ২য় কলাম বাদ দিয়ে উৎপন্ন নির্ণায়ক $= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = (-3).9 - 6.1 = -27 - 6 = -33$

-4 এর সহগুণক $= (-1)^{1+2} \times -4$ এর অনুরাশি $= (-1) \times (-33) = 33$

অনুরূপ ভাবে 1 এর অনুরাশি $= \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 - (-24) = 14 + 24 = 38$

1 এর সহগুণক $= (-1)^{2+3} \times 1$ এর অনুরাশি $= (-1) \times 38 = -38$

অনুরাশি ও সহগুণকের সাহায্যে নির্ণায়কের বিস্তৃতি: কোন নির্ণায়কের যে কোন সারি বা কলামের ভূক্তিসমূহ ও তাদের নিজ নিজ সহগুণকের সমষ্টিই নির্ণায়কের মান।

2×2 আকারের নির্ণায়ক $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের a_{11}, a_{12}, a_{13} ভূক্তিগুলির সহগুণক যথাক্রমে A_1, A_2, A_3 হলে নির্ণায়কের মান হবে

$$a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

তৃতীয় মাত্রার নির্ণায়কের চিহ্ন $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

নির্ণায়কের ধর্মাবলী:

(i) যদি কোন নির্ণায়কের কোন কলাম বা সারির প্রত্যেক ভূক্তি শূন্য হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন – $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

(ii) নির্ণায়কের সারিকে কলাম বা কলামকে সারিতে পরিবর্তন করলে নির্ণায়কের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

যেমন– $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(iii) নির্ণায়কের দুটি কলাম বা সারি পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের সংখ্যামানের চিহ্নের পরিবর্তন হয়।

যেমন– $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$

(iv) যদি কোন নির্ণায়কের দুইটি সারি বা কলাম একই হয় বা একটি অন্যটির গুণিতক হয় তবে নির্ণায়কের মান শূন্য হবে।

যেমন– $\begin{vmatrix} a & a & c \\ a & a & f \\ a & a & e \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & na & c \\ a & na & f \\ a & na & e \end{vmatrix} = 0$

(v) নির্ণায়কের কোন সারি বা কলাম প্রত্যেক ভূক্তিকে কোন সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কের মানকেও সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হয়।

যেমন – $A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ হলে $\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = mA$

(vi) কোন নির্ণায়কের কোন একটি সারি বা কলামের ভূক্তিগুলোকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর একটি সারি বা কলামের ভূক্তিগুলোর সাথে যোগ বা বিয়োগ করলে যে নির্ণায়ক উৎপন্ন হয় তার মান প্রথমোক্ত নির্ণায়কের মানের সমান।

যেমন – $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + nb_1 & b_1 - mc_1 & c_1 \\ a_2 + nb_2 & b_2 - mc_2 & c_2 \\ a_3 + nb_3 & b_3 - mc_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) যদি কোন নির্ণায়কের কোন কলাম বা সারির প্রত্যেক ভূক্তি দুটি পদের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশিত হয়, তবে সেই নির্ণায়ককে দুইটি নির্ণায়কের যোগফল বা বিয়োগফল রূপে প্রকাশ করা যায়।

যেমন- $D = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$

একইভাবে, $\begin{vmatrix} a_1+\alpha & b_1+\beta & d_1+\gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

উদাহরণ 1: $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$

১ম কলাম থেকে ২য় ও ৩য় কলামের যোগফল বিয়োগ করে প্রদত্ত নির্ণায়ক

$$= \begin{vmatrix} x+y-x-y & x & y \\ x-x-2z & x+z & z \\ y-2z-y & z & y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -2z & x+z & z \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix}$$

২য় সারি থেকে ৩য় সারি বিয়োগ করে

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ -2z & z & y+z \end{vmatrix} = -2z \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & -y \\ 1 & z & y+z \end{vmatrix} = -2z \begin{vmatrix} x & y \\ x & -y \end{vmatrix}$$

$$= -2z(-xy-xy) = -2z \times (-2xy) = 4xyz$$

উদাহরণ 2: $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত নির্ণায়ক: $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 67-3\times19 & 19 & 21 \\ 39-3\times13 & 13 & 14 \\ 81-3\times24 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} \quad (c_1' = c_1 - 3c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21-19 \\ 0 & 13 & 14-13 \\ 9 & 24 & 26-24 \end{vmatrix} \quad (c_3' = c_3 - c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 10(26-24) + 9(19-26) = 10\times2 + 9\times(-7) = 20 - 63 = -43$$

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(c-a)$

সমাধান: বাম পক্ষ $= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-b & b-c & c \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} \qquad (c_1' = c_1 - c_2 \quad \& \quad c_2' = c_2 - c_3)$$

$$= abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b & b+c \end{vmatrix}$$

$= abc(a-b)(b-c)(b+c-a-b) = abc(a-b)(b-c)(c-a) =$ ডান পক্ষ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4: প্রমাণ করুন: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = p(p-1)^2(p^2-1)$

সমাধান: বামপক্ষ $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 \\ 1 & p-1 & p^2-p \\ 1 & p^2-1 & p^4-p^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & p-1 & p(p-1) \\ 1 & p^2-1 & p^2(p^2-1) \end{vmatrix} \quad (c_2' = c_2 - c_1 \quad \& \quad c_3' = c_3 - c_2)$$

$$= p(p-1)(p-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & p+1 & p(p+1) \end{vmatrix} = p(p-1)^2\{p(p+1)-(p+1)\}$$

$= p(p-1)^2(p^2+p-p-1) = p(p-1)^2(p^2-1) =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৪

প্রমাণ করুন:

1. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & a+b \\ b+c & a-c & a \\ b-c & a+c & b \end{vmatrix} = -2(a+b)(a-b)^2$

2. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2-bc & b^2-ca & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} -x^2 & xy & xz \\ xy & -y^2 & yz \\ xz & xy & -z^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2z^2$

5. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

6. $\begin{vmatrix}(b+c)^2 & a^2 & 1\\(c+a)^2 & b^2 & 1\\(a+b)^2 & c^2 & 1\end{vmatrix} = -2(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

7. $\begin{vmatrix}(q+r)^2 & p^2 & p^2\\q^2 & (r+p)^2 & q^2\\r^2 & r^2 & (p+q)^2\end{vmatrix} = 2pqr(p+q+r)^3$

পাঠ ১.৫ ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ব্যতিক্রমী ও অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা লিখতে পারবেন,
- বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে পারবেন,
- অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স, ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স, প্রতিসম ম্যাট্রিক্স, বর্গ ম্যাট্রিক্স

মূলপাঠ

ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular Matrix): কোন বর্গ ম্যাটিক্সের নির্ণায়কের মান শূন্য হলে ম্যাট্রিক্সটিকে ব্যতিক্রমী বা সিংগুলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন - $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\6 & -8\end{pmatrix}$ একটি সিংগুলার ম্যাট্রিক্স।

যেখানে, $|A|=\begin{vmatrix}3 & -4\\6 & -8\end{vmatrix}=-24+24=0$

অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Non Singular Matrix): কোন বর্গ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান অশূন্য হলে ম্যাট্রিক্সটিকে অব্যতিক্রমী বা নন সিংগুলার ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন- $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ একটি 2×2 অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স

যেখানে, $\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2$ যা অশূন্য।

উদাহরণ 1: $\begin{bmatrix}2 & 3\\-2x & -6\end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত ম্যাট্রিক্সটি $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2x & -6 \end{bmatrix}$

সুতরাং, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2x & -6 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2(-6)-(-2x).3=0$

$\Rightarrow -12+6x=0$

$\Rightarrow 6x=12$

$\therefore x=2$

ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স (Transpose of a Matrix): কোন ম্যাট্রিক্সের সারিগুলো কলাম ও কলামগুলো সারিতে পরিণত করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলা হয়। A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে A^T দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন - $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স $A^T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (Symetric Matrix): কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স A এর ক্ষেত্রে যদি $A^T=A$ হয় তবে A কে প্রতিসম ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

যেমন $A=\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}$ এটি একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স কেননা, $A^T=\begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix}=A$

আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স (Idempotent Matrix): কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স এর জন্য $A^2=A$ হলে ম্যাট্রিক্সটিকে আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স বলে।

যেমন - $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ একটি 2×2 আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স (Adjoint Matrix): কোন বর্গ ম্যাট্রিক্স দ্বারা গঠিত নির্ণায়ক $|A|$ এর সহগুণক দ্বারা গঠিত ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে A এর অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্স বলা হয়। অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্সকে $Adj(\mathrm{A})$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বিপরীত ম্যাট্রিক্স (Inverse of a Matrix): কোন অব্যতিক্রমী (Non Singular) ম্যাট্রিক্স A এর অ্যাডজয়েন্ট ম্যাট্রিক্সকে তার নির্ণায়ক $|A|$ এর মান দ্বারা ভাগ করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে A ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয়। ইহাকে A^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

$$\therefore A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}$$

উদাহরণ 2: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন।

সমাধান: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ এর নির্ণায়ক

$|A| = 1(4+5)-0(-4-15)-4(2-6) = 9+0+16=25$

$|A|$ এর সহগুণক গুলি,

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4+5=9$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-15)=19$, $A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2-6=-4$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(0-4)=4$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2+12=14$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-0)=1$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0+8=8,$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(5-8)=3$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2-0=2$

$$\therefore Adj\ A = \begin{bmatrix} 9 & 19 & -4 \\ 4 & 14 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 19 & 14 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 19 & 14 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

উদাহরণ 3: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করুন।

সমাধান: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ এর নির্ণায়ক,

$|A| = 0(2-3)-1(1-9)+2(1-6) = 0+8-10=-2$

$|A|$ এর সহগুণক গুলি,

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2-3=-1$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-9)=8$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6=-5$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-2)=1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0-6=-6$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(0-3)=3$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4=-1,$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0-2)=2$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0-1=-1$

$$\therefore Adj\ A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 1 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 4 & 1\\ 8 & -6 & 2\\ -5 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

উদাহরণ 4: $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ করুন, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}1\times(-2)+(-1)\times 1 & 1\times 1+(-1)\times(-1)\\ 0\times(-2)+(-2)\times 1 & 1\times 0+(-2)\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix}-2-1 & 1+1\\ 0-2 & 0+2\end{bmatrix}$$

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$|AB|=(-3)\times 2-2\times(-2)$$

$$\Rightarrow |AB|=-6+4$$

$$\therefore |AB|=-2$$

$$A_{11}=2, A_{12}=-(-2)=2, A_{21}=-(2)=-2, A_{22}=-3$$

সুতরাং, $adj\ AB=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

$$\therefore (AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}adj(AB)=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-2+0=-2$$

$$A_{11}=-2, A_{12}=-(0)=0, A_{21}=-(-1)=1, A_{22}=1$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{-2}\\ 0 & \frac{1}{-2}\end{bmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2-1=1$$

$$A_{11}=-1, A_{12}=-1, A_{21}=-1, A_{22}=-2$$

$$adj(B)=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{-1}.A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{-2} \\ 0 & \frac{1}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1+(-1).0 & (-1).(\frac{1}{-2})+(-1).(\frac{1}{-2}) \\ -1.1+(-2).0 & (-1).(\frac{1}{-2})+(-2).(\frac{1}{-2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2}+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ (প্রমাণিত)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৫

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ এর A^T মান নিচের কোনটি?

   (ক) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} m-3 & 6 \\ 5 & m-4 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি ব্যতিক্রমী হলে m এর মান নিচের কোন দুইটি?

   (ক) 1,-2 (খ) 9, -2 (গ) -9,2 (ঘ)-9,-2

3. $\begin{bmatrix} 5+t & -2 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স হলে x এর মান নির্ণয় করুন।

   (ক) 6 (খ) -6 (গ) 9 (ঘ)-9

4. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নিচের কোনটি?

   (ক) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি কোন প্রকৃতির?

   (ক) অভেদকঘাতি (খ) প্রতিসম (গ) স্কেলার (ঘ) সমঘাতি

6. নিচের কোনটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স?

   (ক) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (খ) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (গ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (ঘ) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

7. দেখান যে, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ একটি আইডেমপোটেন্ট ম্যাট্রিক্স।

পাঠ ১.৬ ক্রেমার নিয়মের সাহায্যে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ক্রেমারের নিয়ম কি তা ব্যাখ্যা করতে পারবেন।
- ক্রেমারের নিয়মের সাহায্যে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ক্রেমারের নিয়ম, সমীকরণ জোট

মূলপাঠ

নির্ণায়কের সাহায্যে একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান নির্ণয়:

ক্রেমারের নিয়ম (Cramer's Rule):

মনে করুন, $a_1x + b_1y = c_1$...........(i)

$a_2x + b_2y = c_2$...........(ii)

একটি সমীকরণ জোট-

$(\text{i}) \times b_2 \Rightarrow a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2$...........(iii)

$(\text{ii}) \times b_1 \Rightarrow a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1$...........(iv)

$(\text{iii}) - (\text{iv}) \Rightarrow x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2c_1 - b_1c_2$

$$\therefore x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}, \text{ যখন } D \neq 0$$

একই পদ্ধতিতে ত্রিচলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান পাওয়া যায়।

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$...........(i)

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$...........(ii)

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$...........(iii)

সমাধান: $D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $D_x = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $D_y = \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix}$ এবং $D_z = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}$

$$\therefore x = \frac{D_x}{D}, \ , y = \frac{D_y}{D} \text{ এবং } z = \frac{D_z}{D}$$

বি:দ্র: $|D| = 0$ হলে সমীকরণ জোটের সমাধান থাকবে না বা অসংখ্য সমাধান থাকবে যা এই সূত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয় করা যায় না।

উদাহরণ 1: নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করুন, $2x + 3y = 4$

$x - y = 7$

সমাধানঃ $2x+3y=4$

$x-y=7$

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 7 & -1\end{vmatrix}=-4-21=-25$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 7\end{vmatrix}=14-4=14-4=10$$

$$\therefore x=\frac{D_x}{D}==\frac{-25}{-5}=5 \quad ,y=\frac{D_y}{D}=\frac{10}{-5}=-2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(5,-2)$

উদাহরণ 2: নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করুন,

$x+y+z=1$

$x+2y+z=2$

$x+y+2z=0$

সমাধানঃ $x+y+z=1$

$x+2y+z=2$

$x+y+2z=0$

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=1(4-1)-1(2-1)+1(1-2)=3-1-1=1$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=1(4-1)-1(4-0)+1(2-0)=3-4+2=1$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=1(4-0)-1(2-1)+1(0-2)=4-1-2=1$$

$$D_z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1(0-2)-1(0-2)+1(1-2)=-2+2-1=-1$$

$$\therefore x=\frac{D_x}{D}==\frac{1}{1}=1 \quad ,y=\frac{D_y}{D}=\frac{1}{1}=1 \quad ,z=\frac{D_z}{D}=\frac{-1}{1}=-1$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৬

বহু নির্বাচনি প্রশ্নঃ

নিচের তথ্যের আলোকে $(1-3)$ নং প্রশ্নের উত্তর দিনঃ

$$A=\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ 3 & 3 & -4\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

1. ১ম সারি ও ২য় কলাম এর অনুরাশির মান কোনটি?

(ক) -8 (খ) 8 (গ) -9 (ঘ) 9

2. ৩য় সারি ও ৩য় কলাম এর অনুরাশির মান কোনটি?

(ক) 11 (খ) 20 (গ) 18 (ঘ) -10

3. নির্ণায়ক $|A|$ এর মান কোনটি?

(ক) 65 (খ) -65 (গ) 56 (ঘ) -56

সৃজনশীল প্রশ্ন:

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

(ক) উপরের ম্যাট্রিক্সগুলির আলোকে AB এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) ABC এর মান নির্ণয় করুন এবং

(গ) দেখান যে, $(AB)C = A(BC)$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(ক) A^T ও B^T এর মান নির্ণয় করুন।

(খ) AB এর মান নির্ণয় করুন এবং

(গ) দেখান যে, $(AB)^T = (BA)^T$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} x & 2 & -2 \\ y & 5 & -4 \\ z & 7 & -5 \end{bmatrix}$

(ক) $AB = I_3$ হলে x, y, z সম্বলিত সমীকরণ গঠন করুন।

(খ) x, y, z এর মান ক্রেমার পদ্ধতিতে নির্ণয় করুন এবং B ম্যাট্রিক্সটি তৈরি করুন।

(গ) AB নির্ণয় করুন এবং A ও B এর মধ্যে সম্পর্ক নিরূপণ করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.১

1. (খ) 2. (ঘ) 3. (ঘ)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.২

1. (i) $\begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$ 5. $AB = \begin{bmatrix} 16 & -9 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ এবং $BA = \begin{bmatrix} 4 & 24 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৫

1. গ 2. খ 3. খ 4. ঘ 5. খ 6. (ক)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১.৬

1. ক 2. গ 3. ঘ 4. 5.