যোগজীকরণ
(Integrations)

ইউনিট ১০

ভুমিকা

Integration শব্দের আভিধানিক অর্থ হলো একাঙ্গীকরণ বা সমষ্টিকরণ। গাণিতিকভাবে Integrationকে যোগজীকরণ বলা হয়। যোগজীকরণ অর্থ হলো কোন বস্তুর অসংখ্য অতি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রফলের সমষ্টি। সরলরেখা বা বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতলকে ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশে বিভক্তিকরণের মাধ্যমে এদের সমষ্টি দ্বারা সামগ্রিকভাবে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার পদ্ধতি হিসাবেই যোগজীকরণের উৎপত্তি। যোগজীকরণ বা সমাকলন বিদ্যার (Integral Calculus) অন্যতম প্রধান অংশ। ইহা অন্তরজের বিপরীত প্রক্রিয়া ও সমষ্টিকরণ ধারণার সম্প্রসারণ। সর্বপ্রথম প্রাচীন গ্রীক জ্যোতির্বিদ এক্সোডাস যোগজীকরণের কলাকৌশল নিয়ে আলোচনা ও গবেষণা করেন। এক্সোডাস জানা বস্তুর ক্ষেত্রফল বা আয়তনকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অসংখ্য খণ্ডে বিভক্ত করে যোগজীকরণের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল বা আয়তন নির্ণয় করেন। পরবর্তীতে গ্রীক বিজ্ঞানী আর্কিমিডিস (287B.C-212B.C) তা সংস্কার করে বৃত্তের ও উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করেন।

তবে আধুনিক যোগজীকরণের প্রবক্তা হিসাবে সপ্তদশ শতাব্দীতে ব্রিটিশ বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন (Sir Issac Newton; 1642-1727) ও জার্মান গণিতবিদ ও দার্শনিক গটফ্রেড উইলিয়াম লিবনীজ (Gottfried William Leibniz;1646-1716) পৃথক পৃথক ভাবে যোগজীকরণের মূলনীতি লিপিবদ্ধ করেন। লিবনীজ Infinitesimal Calculus, Mechanical Calculusআবিষ্কার করেন।

ইউনিটের উদ্দেশ্য

এই ইউনিট শেষে আপনি -

- নির্দিষ্ট যোগজ এবং অনির্দিষ্ট যোগজ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে ও আংশিক ভগ্নাংশ ব্যবহার করে অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন,
- অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন,
- নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন,
- নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন,
- $y=f(x)$ সমীকরণের লেখ $X-$অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ১০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ১০.১ নির্দিষ্ট যোগজ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ক্ষেত্রফল হিসাবে নির্দিষ্ট যোগজ বর্ণনা করতে পারবেন,
- প্রতিঅন্তরজ কী ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য বর্ণনা করতে পারবেন,
- নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	নির্দিষ্ট যোগজ, প্রতিঅন্তরজ, যোজিত ফল, মূল উপপাদ্য, ক্ষেত্রফল

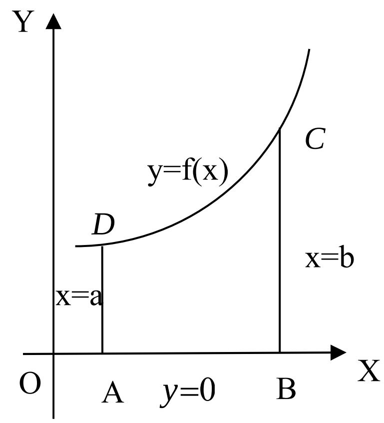
মূলপাঠ

ঐতিহাসিক দৃষ্টিকোণ থেকে যোজন বা সমষ্টি নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে বিশিষভাবে চিহ্নিত করার জন্য গ্রীক গণিতজ্ঞগণ গ্রীকবর্ণ Σ-কে ব্যবহার করতেন। ইংরেজি শব্দ Summation এর প্রথম অক্ষর ‘S’ কে সম্প্রসারণ (Elongated) করে যোগজীকরণ প্রতীক হিসাবে ‘$\int$’ চিহ্নটি সর্বপ্রথম লিবনীজ ব্যবহার করেন। সমষ্টিকরণ ও লিমিটের ধারণা ব্যবহার করে বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের উদ্দেশ্যেই যোগজীকরণের আবির্ভাব। জার্মান গণিতবিদ জর্জ ফ্রেডরিক বার্নাড রেইম্যান (George Friedrich Bernhard Reimann,1826 -1866) ফাংশনের যোগজীকরণের আধুনিক সংজ্ঞা প্রদান করেন। যোগজীকরণ প্রক্রিয়াকে দুইটি পৃথক উপায়ে আলোচনা করা যায়। যথাঃ প্রতিঅন্তরজ (Anti-Derivative) হিসাবে ও সমষ্টিকরণের সীমারূপে (As the Limit of Sum)। যোগজীকরণকে আবার, (১) নির্দিষ্ট যোগজ ও (২) অনির্দিষ্ট যোগজ; এই দুইভাগে ভাগ করা যায়।

নির্দিষ্ট যোগজের সংজ্ঞা: যদি $f(x)$ ফাংশনটি বদ্ধ ব্যবধি $[a,b]$-এ সীমাবদ্ধ হয় এবং উক্ত ব্যবধিকে n সংখ্যক উপব্যবধি, $\delta_r=[x_{r-1},x_r];\ r=1,2,\cdots,n$-এ এমনভাবে বিভক্ত করা হয় যেন, $n\to\infty$-এর জন্য সর্বাপেক্ষা দীর্ঘ উপব্যবধি $\delta\to 0$ হয় এবং $u_r\in[x_{r-1},x_r]$-এর জন্য $\underset{\delta\to 0}{Lim}\sum_{r=1}^{n} f(u_r)\delta_r$-এর একটি সসীম মান পাওয়া যায়, তবে সেই মানকে নিম্নপ্রান্ত a থেকে উর্ধ্বপ্রান্ত b পর্যন্ত $f(x)$-এর নির্দিষ্ট যোগজ বলা হয়। একে $\int_a^b f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব $\underset{\delta\to 0}{Lim}\sum_{r=1}^{n} f(u_r)\delta_r=\int_a^b f(x)dx$ নির্দেশ করে।

অন্যভাবে, স্বাধীন চলক x-এর জন্য $f(x)$ ফাংশনটির ব্যবধি $[a,b]$-এ অনির্দিষ্ট যোগজ $G(x)$ হলে, অর্থাৎ $\int f(x)dx=G(x)$ হলে, $G(b)-G(a)$ কে $f(x)$ ফাংশনটির নির্দিষ্ট যোগজের মান বলা হয় এবং ইহা $\int_a^b f(x)dx$ প্রতীক দ্বারা সূচিত। অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx=[G(x)]_a^b=G(b)-G(a)$; এখানে a হলো নির্দিষ্ট যোগজের নিম্নসীমা বা নিম্নপ্রান্ত এবং b উর্ধ্বসীমা বা উর্ধ্বপ্রান্ত।

$\int_a^b f(x)\,dx$ **-এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা ঃ** $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং $x = a, x = b$ ও $y = 0$ (X -অক্ষ) তিনটি সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে $\int_a^b f(x)\,dx$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



অর্থাৎ $\int_a^b f(x)\,dx = ABCDA$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

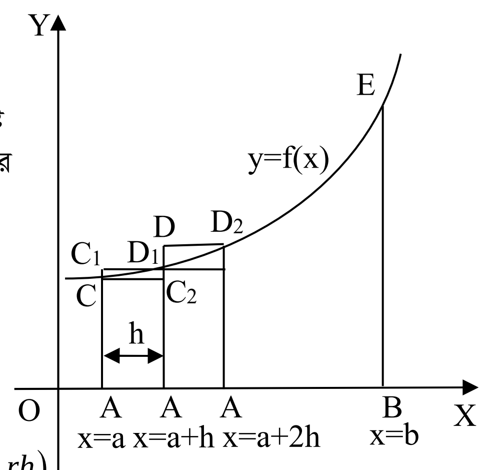
যদি x -কে চলরাশি ধরে $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটির যোগজ $G(x)$ হয়, অর্থাৎ $\int f(x)dx = G(x)$ হয়, তবে $G(b) - G(a)$ কে $f(x)$ ফাংশনটির নির্দিষ্ট যোগজের মান বলা হয় এবং একে $\int_a^b f(x)\,dx$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$. এখানে a হলো নির্দিষ্ট যোগজের নিম্নপ্রান্ত এবং b উর্ধ্বপ্রান্ত।

ক্ষেত্রফল হিসাবে নির্দিষ্ট যোগজ: ধরুন, $y = f(x)$ সমীকরণটি একটি বক্র রেখা নির্দেশ করে এবং $f(x)$ ফাংশনটি $a \le x \le b$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন, যেখানে $b > a$ ও a, b নির্দিষ্ট। $x = a, x = b$ বিন্দুতে দুইটি কোটি যথাক্রমে AC ও BE অংকন করুন। তাহলে $OA = a$ ও $OB = b$, যখন O মূলবিন্দু। কাজেই $AB = b - a$.

এখন, AB কে $x = a + h, a + 2h, \cdots$ বিন্দুতে h দৈর্ঘ্যের n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করুন যেন $nh = b - a$ বা, $b = a + nh$ হয়।

আবার, $x = a + h, a + 2h, \cdots$ বিন্দুতে $A_1D_1, A_2D_2, \cdots$ কোটি অংকন করুন। তাহলে $[a,b]$ ব্যবধির মধ্যে ক্ষেত্রটি কতকগুলি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আয়তক্ষেত্রে বিভক্ত হলো।



ধরুন, $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং $y = 0$ (X -অক্ষ) ও $x = a, x = b$ দুইটি কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র S দ্বারা সূচিত হলো।

আবার, নিচের আয়তক্ষেত্রগুলির (যথা: $ACC_2A_1, \cdots$) ক্ষেত্রফলের সমষ্টি S_1 এবং উপরিভাগসহ আয়তক্ষেত্রগুলির(যথা: $AC_1D_1A_1, \cdots$) ক্ষেত্রফলের সমষ্টি S_2 দ্বারা সূচিত হলো। তাহলে স্পষ্টতঃ $S_1 < S < S_2$; যেখানে,

$$S_1 = hf(a) + hf(a+h) + \cdots + hf\left(a + \overline{n-1}.h\right)$$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) \cdots \text{(i)}$$

এবং

$$S_2 = hf(a+h) + hf(a+2h) + \cdots + hf(a+nh) = h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

$$= hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) + \cdots + hf\left(a + \overline{n-1}.h\right) + hf(b) - hf(a) [\because b = a + nh]$$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} \{ f(a+rh) + f(b) - f(a) \} \cdots \text{(ii)}$$

এখন n এর মান খুব বেশি বৃদ্ধি করলে অর্থাৎ $n \to \infty$ হলে $h \to 0$ হবে এবং (i) থেকে পাই,

$$S_1 = \lim_{h \to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) = \int_a^b f(x)dx$$

আবার, (ii) থেকে পাই, $S_2 = \lim_{h \to 0} h \sum_{r=0}^{n-1} \{ f(a+rh) + f(b) - f(a) \} = \int_a^b f(x)dx$; যেহেতু $\lim_{h \to 0} hf(a) = 0$

এবং $\lim_{h \to 0} hf(b) = 0$ ফলে $S_1 = S_2 = S$. সুতরাং $S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$

প্রতিঅন্তরজ (Anti-derivative) **হিসাবে যোগজঃ** সমাকলনবিদ্যার একটি গুরুত্বপূর্ণ দিক আছে, আর তা হলো কোন ফাংশনের চলকের সাপেক্ষে অন্তরজ জানা থাকলে মূল ফাংশনটি নির্ণয় করা যায়। কোনো ফাংশনের অন্তরজ থেকে উক্ত ফাংশনটি ফিরে পাওয়ার প্রক্রিয়াই হলো প্রতিঅন্তরজ বা যোগজ। যোগজীকরণ হলো অন্তরজ-এর বিপরীত প্রক্রিয়া (Integration is the inverse process of differentiation)। কোনো স্বাধীন চলক x-এর একটি ফাংশন $G(x)$ যার অন্তরজ $G'(x) = f(x)$ অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\{G(x)\} = f(x)$ হলে, $G(x)$ ফাংশনটিকে $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ অথবা অনির্দিষ্ট যোগজ (Indefinite Integral) বা সমাকলিত মান বা যোগজ বা যোজিত ফল বলা হয় এবং ইহাকে $\int f(x)dx = G(x)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। কোন ফাংশনের যোগজ নির্ণয়ের পদ্ধতিকে যোগজীকরণ (Integration) বলা হয়। ফাংশন $f(x)$ কে যোজ্য রাশি (Integrand), $\int$ প্রতীককে যোগজ চিহ্ন (Integral sign), dx দ্বারা x-এর সাপেক্ষে (With respect to x) এবং x কে যোগজীকরণ চলক বলে। $\int f(x)dx$-কে পড়তে হবে, $f(x)$ এর যোগজ (Integration of $f(x)dx$)।

সুতরাং $\frac{d}{dx}$ এবং $\int dx$ পরস্পর বিপরীত প্রক্রিয়া যারা পরস্পরকে প্রশমিত করে। যেমন- (১) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, কাজেই $\cos x$ এর যোজিত ফল $\sin x$ অর্থাৎ $\int \cos dx = \sin x$. (২) $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ যেখানে, $\int 2xdx = 2\int xdx = 2\frac{x^2}{2} = x^2$

নোট ঃ যদি $\frac{d}{dx}(G(x)) = f(x)$ হয়, তবে যোগজীকরণের সংজ্ঞা হতে পাওয়া যায়, $\int f(x)dx = G(x)$ অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \frac{d}{dx}(G(x)) = f(x)$. আবার যদি $\frac{d}{dx}(G(x)) = f(x)$ এবং $\int f(x)dx = G(x)$ হয়, তবে $\int\left(\frac{d}{dx}(G(x))\right)dx = G(x)$ হবে। কাজেই $G'(x) = f(x)$. এ কারণেই অন্তরজ ও যোগজীকরণ প্রক্রিয়াদ্বয়ের একটিকে অপরটির বিপরীত প্রক্রিয়া বলা হয়।

নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত মূল উপপাদ্য (Fundamental Theorem on Definite Integrals)- **ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাসের মূল উপপাদ্যঃ বর্ণনাঃ** যদি $f(x)$ ফাংশনটি বদ্ধ ব্যবধি $[a,b]$-তে অবিচ্ছিন্ন (Contineous) হয় এবং $G'(x) = f(x)$ হয় অর্থাৎ $f(x)$ ফাংশনের প্রতিঅন্তরজ $G(x)$ হয়, তবে $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

প্রমাণঃ ধরুন $[a,b]$ বদ্ধ ব্যবধিতে $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b$ এইরূপ বিন্দুসমূহ যেন, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ হয়। যেহেতু $x_0 = a$ এবং $x_n = b$, সেহেতু $G(x_0) = G(a)$ এবং $G(x_n) = G(b)$. সুতরাং বিন্দুসমূহ $[a,b]$ ব্যবধিকে $[a,x_1], [x_1,x_2], \cdots, [x_{n-1},b]$ উপব্যবধিতে বিভক্ত করে। ধরুন, উপব্যবধি সমূহের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$. যাদের মধ্যে সর্বাপেক্ষা দীর্ঘ উপব্যবধি $\delta \to 0$ এবং $u_r \in \delta_r$

যখন $\delta_r = [x_{r-1}, x_r] = x_r - x_{r-1}$ হয়। অতএব, নির্দিষ্ট যোগজের সংজ্ঞানুসারে
$\underset{\delta \to 0}{Lim} \sum_{r=1}^{n} f(u_r)\delta_r = \int_a^b f(x)\,dx \cdots (i)$

যেহেতু $f(x)$ ফাংশনের প্রতিঅন্তরজ $G(x)$ অর্থাৎ $G'(x) = f(x)$. অতএব $G(x)$ ফাংশন ডিফারেনশিয়াল ক্যালকুলাসের মধ্যমান উপপাদ্যের সকল শর্ত সিদ্ধ করে। সুতরাং অন্তত পক্ষে একটি বিন্দু $u_r \in [x_{r-1}, x_r]$, এমন পাই যখন $x_{r-1} < u_r < x_r$ এর জন্য $G(x_r) - G(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1})G'(u_r) = \delta_r f(u_r)$,(যেহেতু $G'(x) = f(x)$)। অনুরূপভাবে,

$G(x_1) - G(x_0) = (x_1 - x_0)G'(u_1) = \delta_1 f(u_1)$, যখন $x_0 < u_1 < x_1$
$G(x_2) - G(x_1) = (x_2 - x_1)G'(u_2) = \delta_2 f(u_2)$, যখন $x_1 < u_2 < x_2$
$G(x_3) - G(x_2) = (x_3 - x_2)G'(u_3) = \delta_3 f(u_3)$, যখন $x_2 < u_3 < x_3$
$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$
$G(x_n) - G(x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1})G'(u_n) = \delta_n f(u_n)$, যখন $x_{n-1} < u_n < x_n$

যোগ করে পাই, $G(x_n) - G(x_0) = \sum_{r=1}^{n} (x_r - x_{r-1})G'(u_r) = \delta_r f(u_r)$

বা, $G(b) - G(a) = \sum_{r=1}^{n} \delta_r f(u_r)$, যেহেতু $\delta_r = x_r - x_{r-1}$

যেহেতু $f(x)$ ফাংশন অবিচ্ছিন্ন এবং উপব্যবধি সমূহ $\delta_r, (r = 1, 2, \cdots, n)$-এ $n \to \infty$-এর জন্য সর্বাপেক্ষা দীর্ঘ উপব্যবধি $\delta \to 0$ হবে। সুতরাং $\underset{\delta \to 0}{Lim}\{G(b) - G(a)\} = \underset{\delta \to 0}{Lim} \sum_{r=1}^{n} \delta_r f(u_r)$

বা, $G(b) - G(a) = \underset{\delta \to 0}{Lim} \sum_{r=1}^{n} \delta_r f(u_r) = \int_a^b f(x)dx$,((i) থেকে)

সুতরাং $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.(প্রমাণিত)

নোটঃ ঐতিহাসিক দৃষ্টিকোণ থেকে অসীম ধারার সমষ্টিই যোগজীকরণের প্রথম দৃষ্টিভঙ্গী। দ্বিতীয় দৃষ্টিভঙ্গী অর্থাৎ 'যোগজীকরণকে, অন্তরীকরণের বিপরীত প্রক্রিয়া বলা হয়। সমাকলন বিদ্যার 'মৌলিক উপপাদ্য' (Fundamental Theore) - এ এই দুটি দৃষ্টিভঙ্গীর সমন্বয় সাধিত হয়েছে।

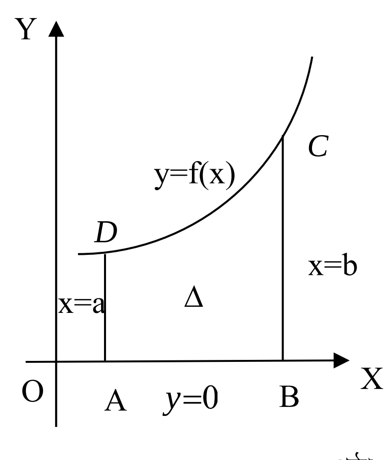
নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল (Area by using definite integral): ক্ষেত্রফলের সংজ্ঞা ঃ কোনো সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা কোনো সমতল ক্ষেত্রে আবদ্ধ তল বা পৃষ্ঠের সীমাবদ্ধ অংশের পরিমাণকে ক্ষেত্রফল বা কালি বলে।

$(\mathrm{i})(a)$ $y = f(x)$ **বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:**

যদি $f(x)$ ফাংশনটি বদ্ধ ব্যবধি $[a,b]$-তে অবিচ্ছিন্ন (Contineous) হয়, তবে $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং $y = 0$ (X -অক্ষ) ও $x = a, x = b$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

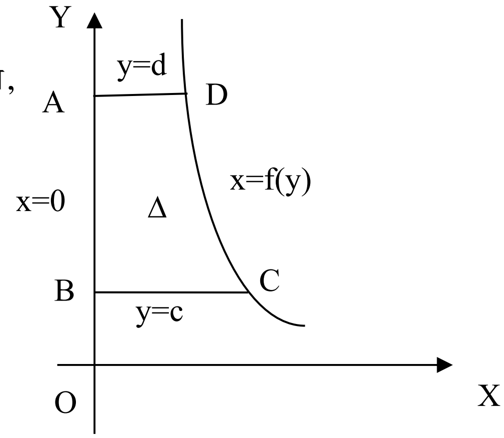
Δ হলে, $\Delta = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b y\,dx.$

চিত্রে, $ABCDA$ ক্ষেত্রটি $y = f(x)$ বক্ররেখা এবং $y = 0$ (X -অক্ষ) ও $x = a, x = b$ দ্বারা আবদ্ধ।



সুতরাং $ABCDA$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\Delta = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx.$

$(i)(b)$ $x = f(y)$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:



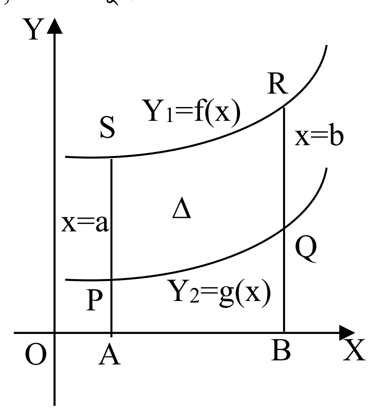
যদি $f(y)$ ফাংশনটি বদ্ধ ব্যবধি $[c,d]$-তে অবিচ্ছিন্ন (Contineous) হয়, তবে $x = f(y)$ বক্ররেখা এবং $x = 0$ (Y-অক্ষ) ও $y = c, y = d$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δ হলে, $\Delta = \int_c^d f(y)dy = \int_c^d xdy.$

চিত্রে, $ABCDA$ ক্ষেত্রটি $x = f(y)$ বক্ররেখা এবং $x = 0$ (Y-অক্ষ) ও $y = c, y = d$ দ্বারা আবদ্ধ।

সুতরাং $ABCDA$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\Delta = \int_c^d f(y)dy = \int_c^d xdy.$

(ii) দুইটি বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল:

$(ii)(a)$ ধরুন, $y_1 = f(x),\ y_2 = g(x)$ দুইটি বক্ররেখা এবং $x = a, x = b$ দুইটি কোটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δ হলে, অর্থাৎ $\Delta = PQRSP$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



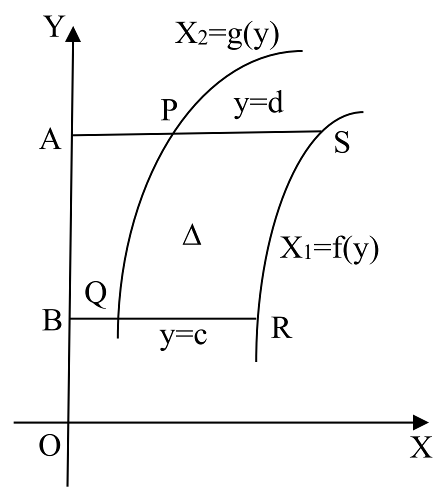
এখন, $PQRSP$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= ABRSA$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $-$ $ABQPA$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

$(iii)(b)$ যদি $x_1 = f(y),\ x_2 = g(y)$ দুইটি বক্ররেখা এবং $y = c, y = d$ দুইটি ভুজ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δ হলে, অর্থাৎ $\Delta = PQRSP$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।



এখন, $PQRSP$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= ABRSA$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $-$ $ABQPA$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \int_c^d f(y)dy - \int_c^d g(y)dy$$

$$= \int_c^d \left[f(y) - g(y)\right]dy$$

$$= \int_c^d (x_1 - x_2)dy$$

উদাহরণ 1: $\int_2^4 (x+4)dx$ **নির্ণয় করুন।**

সমাধান: $\int_2^4 (x+4)dx = \int_2^4 xdx + \int_2^4 4dx = \int_2^4 xdx + 4\int_2^4 dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4 + 4[x]_2^4 = \frac{1}{2}\left(4^2-2^2\right)+4(4-2)$

$= \frac{1}{2}(16-4)+4(2) = \frac{12}{2}+8 = 6+8 = 14$

উদাহরণ 2: $\int_1^3 3x^2 dx$ **নির্ণয় করুন।**

সমাধান: $\int_1^3 3x^2dx = 3\int_1^3 x^2dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 3\times\frac{1}{3}\left(3^3-1^3\right) = 27-1 = 26$

শিক্ষার্থীর কাজ	মান নির্ণয় করুন, 1. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx$, 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx$, 3. $\int_0^4 \ln xdx$

উত্তর মিলিয়ে নিন: 1. $\ln 4 - 1 \approx 0.38629$ 2. $\frac{1}{4}(2+\sin 2) \approx 0.72732$ 3. $\ln 256 - 4 \approx 1.5452$

পাঠ ১০.২ অনির্দিষ্ট যোগজ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- প্রতি অন্তরজকে অনির্দিষ্ট যোগজরূপে প্রকাশ করতে পারবেন,
- কতিপয় প্রমিত ফাংশনের যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	অনির্দিষ্ট যোগজ, যোগজীকরণ ধ্রুবক, যোগজের স্কেলার গুণ, প্রমিত ফাংশন

মূলপাঠ

প্রতিঅন্তরজকে অনির্দিষ্ট যোগজ (Indefinite Integral) রূপে প্রকাশ: ইতোপূর্বে প্রতিঅন্তরজ আলোচিত হয়েছে। প্রতিঅন্তরজই হচ্ছে অনির্দিষ্ট যোগজ। $G(x)$ ফাংশনটির অন্তরজ $\frac{d}{dx}(G(x)) = G'(x) = f(x)$ হলে, $G(x)$ ফাংশনটি $f(x)$ এর প্রতিঅন্তরজ বা অনির্দিষ্ট যোগজ। অনির্দিষ্ট যোগজ অনন্য নয়, অসংখ্য। কারণ, উদাহরণ দিয়ে আলোচনা করা যাক ঃ

(i) $\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x=f\left(x\right)$, (ii) $\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)=2x=f\left(x\right)$, (iii) $\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)=2x=f\left(x\right)$,
(iv) $\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right)=2x=f\left(x\right)$, (v) $\frac{d}{dx}\left(x^2-2\right)=2x=f\left(x\right)$, (vi) $\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)=2x=f\left(x\right)$,
(vii) $\frac{d}{dx}\left(x^2-5\right)=2x=f\left(x\right);\cdots$ ইত্যাদি।

এখানে, $x^2,\ x^2+1,\ x^2-1,\ x^2+2,\ x^2-2,\ x^2+5,\ x^2-5,\cdots$ ইত্যাদি প্রতিটি রাশি $f\left(x\right)=2x$-এর প্রতিঅন্তরজ বা অনির্দিষ্ট যোগজ। $f(x)$-এর প্রতিঅন্তরজ বা অনির্দিষ্ট যোগজকে $\int f(x)dx$ আকারে লিখা হয়। সুতরাং $\int 2xdx=x^2+C$, যেখানে C -এর মান যথাক্রমে $0,1,-1,2,-2,5,-5,\cdots$ ইত্যাদি। একারণেই অনির্দিষ্ট যোগজীকরণের সর্বক্ষেত্রে একটি ধ্রুবক C অন্তর্ভূক্ত থাকবে।

যোগজীকরণ ধ্রুবক (Constant of Integration): মনে করুন, x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ ফাংশনের জন্য $\frac{d}{dx}\left(G\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$ হলে, সংজ্ঞানুসারে $\int f\left(x\right)dx=G\left(x\right)$.

আবার, $\frac{d}{dx}\left(G\left(x\right)+C\right)=\frac{d}{dx}\left(G\left(x\right)\right)+\frac{d}{dx}\left(C\right)=f\left(x\right)+0=f\left(x\right)$; হলে, $\int f\left(x\right)dx=G\left(x\right)+C$. যেখানে C একটি x-নিরপেক্ষ ও ইচ্ছামূলক ধ্রুবক (Arbitrary Constant)।

অনুরূপভাবে, $\frac{d}{dx}\left\{G(x)+C_1\right\}=\frac{d}{dx}\left\{G\left(x\right)\right\}+\frac{d}{dx}\left(C_1\right)=f\left(x\right)+0=f\left(x\right)$; হলে, $\int f\left(x\right)dx=G\left(x\right)+C_1$.

$\frac{d}{dx}\left\{G(x)+C_2\right\}=\frac{d}{dx}\left\{G\left(x\right)\right\}+\frac{d}{dx}\left(C_2\right)=f\left(x\right)+0=f\left(x\right),\cdots$; হলে, $\int f\left(x\right)dx=G\left(x\right)+C_2,\cdots$ ইত্যাদি। যেখানে $C_1,C_2,\cdots$; x-নিরপেক্ষ ও ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, $G\left(x\right)$; x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ যোজ্যের একটি যোগজ। অনুরূপভাবে, $G\left(x\right)+C$; x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ যোজ্যের অন্য একটি যোগজ। $G\left(x\right)+C_1$; x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ যোজ্যের অন্য আরো একটি যোগজ। $G\left(x\right)+C_2$; x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ যোজ্যের অন্য আরো একটি যোগজ। এভাবে, x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ যোজ্যের জন্য অসংখ্য যোগজ পাওয়া যাবে।

উপরের আলোচনা হতে স্পষ্ট বোঝা যায় যে, C ধ্রুবকটির বিভিন্ন মানের জন্য x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ এর বিভিন্ন যোগজ পাওয়া যাচ্ছে। সুতরাং $G\left(x\right)+C$; x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ এর যোগজের অর্থাৎ $\int f\left(x\right)dx$ এর সাধারণ আকার। এই C-কে **ইচ্ছামূলক ধ্রুবক বা ইচ্ছাধীন ধ্রুবক** বা **যোগজীকরণ ধ্রুবক** (Constant of Integration) বলে।

নোট: অতএব, দেখা যাচ্ছে যে, কোন চলক x এর সাপেক্ষে কোন $f(x)$ ফাংশন বা যোজ্যের একাধিক যোগজ পাওয়া যায়। অর্থাৎ কোন ফাংশনকেই নির্দিষ্ট করে বলা যায় না যে, এটিই একমাত্র x চলকের সাপেক্ষে $f(x)$ এর যোগজ। এই কারণেই $\int f\left(x\right)dx$ আকারের যোগজকে **অনির্দিষ্ট যোগজ** (Indefinite Integral) বলা হয়।

'0' শূন্য-এর যোগজ ধ্রুবক (Integral of '0' (Zero) is Constant): আমরা জানি, $\frac{d}{dx}\left(\text{Any Constant, } C\right)=0$ বা, $\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\text{Any Constant, } C\right)\right\}dx=\int 0dx=C\left(\text{Constant}\right)$. অর্থাৎ '0' শূন্য-এর যোগজ বা যোজিত ফল ধ্রুবক (Constant)।

যোগজের ধর্ম (Properties of integration):

(ক) যোগজের স্কেলার গুণ: কোন ধ্রুবক ও ফাংশনের গুণফলের যোজিত ফল ঐ ধ্রুবক এবং ফাংশনের যোজিত ফলের গুণফলের সমান হবে। অর্থাৎ যে কোন x-নিরপেক্ষ ধ্রুবক A এর জন্য, $\int A\, f(x)\, dx = A\int f(x)\, dx$

প্রমাণ: ধরুন, $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ যেখানে C একটি যোগজীকরণ ধ্রুবক।

সুতরাং যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}(F(x)+C) = f(x)$

এখন A যদি কোন x-নিরপেক্ষ ধ্রুবক হয়, তবে $\frac{d}{dx}(A\{F(x)+C\}) = A\frac{d}{dx}(F(x)+C) = Af(x)$

অতএব, যোগজীকরণের সংজ্ঞা হতে পাওয়া যাবে, $\int \mathbf{A}\, \boldsymbol{f}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} = \mathbf{A}\int \boldsymbol{f}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}$

(খ) যে কোন দুটি ফাংশন, $f(x)$ ও $g(x)$ এর জন্য, $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

প্রমাণ: মনে করুন, $\int f(x)\,dx = F(x)$ এবং $\int g(x)\,dx = G(x)$

সুতরাং যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x)$ এবং $\frac{d}{dx}(G(x)) = g(x)$ হবে।

এখন $\frac{d}{dx}(F(x) \pm G(x)) = \frac{d}{dx}(F(x)) \pm \frac{d}{dx}(G(x)) = f(x) \pm g(x)$

অতএব, যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int [\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) \pm \mathbf{g}(\mathbf{x})]\, \mathbf{dx} = \int \boldsymbol{f}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} \pm \int \mathbf{g}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}$

(গ) এবার যদি $A_1, A_2, A_3, \ldots \ldots A_n$ প্রভৃতি n সংখ্যক x নিরপেক্ষ ধ্রুবক এবং $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots \ldots \ldots, f_n(x)$ প্রভৃতি n সংখ্যক যোজ্য ফাংশন হয় ,তবে (ক) ও (খ) অনুচ্ছেদে প্রমাণিত ধর্মাবলী হতে সার্বজনীন ভাবে এ তথ্যকে প্রমাণিত বলে ধরে নেওয়া যায় যে,

$$\int [A_1 f_1(x) \pm A_2 f_2(x) \pm A_3 f_3(x) \pm \ldots \ldots \ldots \pm A_n f_n(x)]\,dx$$
$$= A_1\int f_1(x)\,dx \pm A_2\int f_2(x)\,dx \pm A_3\int f_3(x)\,dx \pm \ldots \ldots \ldots \pm A_n\int f_n(x)\,dx$$

(ঘ) নির্দিষ্ট সংখ্যক কতকগুলি ফাংশনের বীজগণিতীয় সমষ্টির যোজিত ফল তাদের পৃথক পৃথক যোজিত ফলের বীজগণিতীয় সমষ্টির সমান অর্থাৎ

$$\int [f(x) + g(x) + \varphi(x) + \phi(x) + \cdots]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + \int \varphi(x)dx + \int \phi(x)dx + \cdots$$

কতিপয় প্রমিত(Standard) ফাংশনের অন্তরজ ও প্রতিঅন্তরজ বা যোগজ নিচে দেয়া হলো:

(a) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (এখানে, $n \neq -1$) যেহেতু $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

(b) $\int dx = x + c$; বা, $\int 1dx = x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(x) = 1$

(c) $\int 0dx = c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(c) = 0$

(d) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c, x \neq 0$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, (x > 0)$

(e) $\int e^x dx = e^x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(e*) $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m}e^{mx} + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(e^{mx}) = me^{mx}$

(f) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.\ln a$

(g) $\int \cos x dx = \sin x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(h) $\int -\sin x dx = \cos x + c$; বা, $\int \sin x dx = -\cos x + c;$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(i) $\int \cos mx dx = \frac{1}{m}\sin mx + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$

(j) $\int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx + c$,বা, $\int (-\sin mx) dx = \frac{1}{m} \cos mx + c$; যেহেতু $\frac{d}{dx}(\cos mx) = -m \sin mx$

(k) $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(l) $\int co\sec^2 x dx = -\cot x + c$; বা, $\int (-co\sec^2 x) dx = \cot x + c$; যেহেতু $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$

(m) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

(n) $\int co\sec x \cot x dx = -co\sec x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\cos ecx) = -\cos ecx \cot x$

(o) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(p) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

(q) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(r) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\cos^{-1} x + c$,বা, $\int -\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = \cos^{-1} x + c$; যেহেতু $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(s) $\int -\left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \cot^{-1} x + c$, বা, $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\cot^{-1} x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

(t) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\cos ec^{-1} x + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\cos ec^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(u) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$ যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

প্রতিঅন্তরজের সংজ্ঞা হতে যোগজ নির্ণয়:

ফাংশনের অন্তরীকরণের ফলাফল হতে যোজ্য ফাংশনের যোগজ সরাসরি নির্ণয় করা যায়। নিচে কতিপয় প্রমিত বা মৌলিক ফাংশনের যোগজ দেয়া হলো। প্রতিটি ক্ষেত্রে C-কে যোগজীকরণ ধ্রুবক বুঝতে হবে।

(ক) যে কোন x -নিরপেক্ষ ধ্রুবক n হলে, $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ যেখানে $n \neq -1$

প্রমাণ: যেহেতু $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C\right) = \frac{n+1}{n+1} x^n + 0$ যেখানে $n + 1 \neq 0$

অতএব, যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

(খ) $\int \frac{1}{x} dx = \log_e |x| + C$ যেখানে $x \neq 0$

প্রমাণ: $x > 0$ হলে, $\log_e x$ বাস্তব হয় এবং $\frac{d}{dx}(\log_e x + C) = \frac{1}{x}$

সুতরাং $x > 0$ হলে, যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int \frac{1}{x} dx = \log_e x + C$ ... ... (1)

আবার $x < 0$ হলে, $-x > 0$ এবং $\frac{d}{dx}(\log_e(-x) + C) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

সুতরাং $x < 0$ হলে, যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int \frac{1}{x} dx = \log_e(-x) + C$ ... ... (2)

অতএব, সাধারণভাবে বলা যায় যে, $\int \frac{1}{x}\,dx = \log_e|x| + C = \ln|x| + C$

(গ) $\int e^x dx = e^x + C$

প্রমাণ: যেহেতু $\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$ $\therefore$ যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int e^x\,dx = e^x + C$

(ঘ) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C$ যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$

প্রমাণ: যেহেতু $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a} + C\right) = \frac{\log_e a}{\log_e a}\,a^x = a^x$ যেখানে $\log_e a \neq 0$

অতএব, যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a} + C$

(ঙ) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

প্রমাণ: যেহেতু $\frac{d}{dx}(-\cos x + C) = \sin x$ $\therefore$ যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(চ) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

প্রমাণ: যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$ $\therefore$ যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(ছ) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

প্রমাণ: যেহেতু $\frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$ $\therefore$ যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(জ) $\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

প্রমাণ: যেহেতু $\frac{d}{dx}(-\cot x + C) = \text{cosec}^2 x$ $\therefore$ যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

(ঝ) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

প্রমাণ: যেহেতু $\frac{d}{dx}(\sec x + C) = \sec x \tan x$ $\therefore$ যোগজীকরণের সংজ্ঞানুসারে, $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

(ঞ) $\int \text{cosec}\,x \cot x\,dx = -\text{cosec}\,x + C$

প্রমাণ: $\frac{d}{dx}(-\text{cosec}\,x + C) = \text{cosec}\,x \cot x$ বলে, সংজ্ঞানুসারে, $\int \text{cosec}\,x \cot x\,dx = -\text{cosec}\,x + C$

উদাহরণ 1: যোগজ নির্ণয় করুনঃ (i) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^3}}dx$, (ii) $\int \frac{x^5}{x-1}dx$, (iii) $\int \frac{(x^2-1)^3}{\sqrt{x}}dx$, (iv) $\int 16x^{15}dx$, (v) $\int\left(\frac{8}{3}x^3 - x^q\right)dx$

সমাধানঃ (i) $\int \frac{x}{\sqrt[5]{x^3}}dx = \int x.x^{-\frac{3}{5}}dx = \int x^{\frac{2}{5}}\,dx = \frac{5}{7}x^{\frac{7}{5}} + C$

(ii) $\int \frac{x^5}{x-1}dx = \int \frac{x^5-1+1}{x-1}dx = \int \frac{x^5-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = \int \frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$

$= \int (x^4+x^3+x^2+x+1)\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$

(iii) $\int \frac{(x^2-1)^3}{\sqrt{x}}dx = \frac{x^6-3x^4+3x^2-1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^6-3x^4+3x^2-1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{6-\frac{1}{2}} - 3x^{4-\frac{1}{2}} + 3x^{2-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$$= \int \left(x^{\frac{11}{2}} - 3x^{\frac{7}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{2}{13} x^{\frac{13}{2}} - \frac{2}{3} x^{\frac{9}{2}} + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$(iv) \int 16x^{15} dx = 16 \int x^{15} dx = 16.\frac{x^{15+1}}{15+1} + C = \frac{16}{16} x^{16} + C = x^{16} + C$

$(v) \int \left(\frac{8}{3} x^3 - x^q \right) dx = \int \frac{8}{3} x^3 dx - \int x^q dx = \frac{8}{3} \int x^3 dx - \int x^q dx = \frac{8}{3}.\frac{x^4}{4} - \frac{x^{q+1}}{q+1} + C = \frac{2}{3} x^4 - \frac{1}{q+1} x^{q+1} + C$

উদাহরণ 2: যোগজ নির্ণয় করুনঃ (i) $\int pvdv$, (ii) $\int \frac{1+\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} d\theta$, (iii) $\int \sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)\, d\theta$

সমাধানঃ (i) $\int pvdv = p \int vdv = p.\frac{v^2}{2} + C = \frac{1}{2} pv^2 + C$

(ii) $\int \frac{1+\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta} d\theta = \int \frac{2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta} d\theta = \int \cot^2\theta\, d\theta = \int (\mathrm{cosec}^2\theta - 1)\, d\theta = -\cot\theta - \theta + C$

(iii) $\int \sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)\, d\theta = \int (\sec^2\theta + \sec\theta \tan\theta)\, d\theta = \tan\theta + \sec\theta + C$

উদাহরণ 3: (i) $\int e^{5 \log_e 2x} dx$, (ii) $\frac{9^{1+x}+3^{1+x}}{3^x} dx$, (iii) $\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}} dx$, (vi) $\int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx$

সমাধান: (i) $\int e^{5 \log_e 2x} dx = \int e^{\log_e (2x)^5} dx = \int (2x)^5 dx = \frac{32}{6} x^6 + C = \frac{16}{3} x^6 + C$

(ii) $\int \frac{9^{1+x}+3^{1+x}}{3^x} dx = \int \frac{9.9^x+3.3^x}{3^x} dx = \int (9.3^x+3)dx = 9.\frac{3^x}{\log_e 3} + 3x + C$

(iii) $\int \frac{e^{3x}+e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}} dx = \int e^x \cdot \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} dx = \int e^x dx = e^x + C$

$(iv) \int \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \left(1 + \tan^2 x\right) \operatorname{cosec}^2 x dx = \int \operatorname{cosec}^2 x dx + \int \sec^2 x dx = -\cot x + \tan x + C$

উদাহরণ 4: $(i) \int \frac{\sin x - \cos 2x}{1+\sin x} dx$, $(ii) \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$, $(iii) \int \frac{a\sin^2 x + b\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$, $(iv) \int \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} d\theta$

সমাধানঃ $(i) \int \frac{\sin x - \cos 2x}{1+\sin x} dx = \int \frac{\sin x - 1 + 2\sin^2 x}{1+\sin x} dx = \int \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{1+\sin x} dx$

$$= \int \frac{(1+\sin x)(2\sin x - 1)}{1+\sin x} dx = \int (2\sin x - 1) dx = \int 2\sin x dx - \int dx = -2\cos x - x + C$$

$(ii) \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)}{\sin^2 x} dx$

$$= \int (\mathrm{cosec}^2 x - 2 + \sin^2 x)\, dx = -\cot x - 2x + \frac{1}{2} \int (1-\cos 2x)\, dx = -\cot x - \frac{5}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$(iii) \int \frac{a\sin^2 x + b\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int a\sec^2 x + b\,\mathrm{cosec}^2 x)\, dx = a\tan x - b\cot x + C$

$(iv)\int\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}d\theta=\int\frac{2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta}d\theta=\int\tan^2\theta d\theta=\int\left(\sec^2\theta-1\right)d\theta=\int\sec^2\theta d\theta-\int d\theta$
$=\tan\theta-\theta+C$

উদাহরণ 5: $(i)\int\frac{1}{1+\sin x}\,dx\quad(ii)\int\sqrt{1-\sin x}\,dx$ - এর যোজিত ফল নির্ণয় করুন ।

সমাধান: $(i)\int\frac{1}{1+\sin x}\,dx=\int\frac{1}{1+\sin x}\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\,dx=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int\sec^2 x\,dx-\int\sec x\tan x\,dx=\tan x-\sec x+c$

$(ii)\int\sqrt{1-\sin x}\,dx=\int\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx=\int\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}\,dx$

$=\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx=\int\sin\frac{x}{2}dx-\int\cos\frac{x}{2}dx=-\frac{\cos\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}+C$

$=-2\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)+C=-2\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}+C=-2\sqrt{1+\sin x}+C$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.২

নিম্নলিখিত যোগজগুলির যোজিত ফল নির্ণয় করুন:

1. $(i)\int\frac{1}{1-\sin x}\,dx$, $(ii)\int\frac{1}{1+\cos x}\,dx$, $(iii)\int\frac{1}{1-\cos x}\,dx$, $(iv)\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$, $(v)\int\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

   $(vi)\int\sqrt{1+\sin x}\,dx$, $(vii)\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx$, $(viii)\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$, $(ix)\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}dx$

   $(x)\int\frac{1}{1+\cos 2x}dx$, $(xi)\sqrt{1+\cos x}\,dx$, $(xii)\sqrt{1-\cos 4x}\,dx$

2. (i) $\int\sin^4\theta d\theta$, $(ii)\int\operatorname{cosec} y\,dy$, $(iii)\int\cos^2 t\,dt$, $(iv)\int\sin^2 t\cos^2 t\,dt$, $(v)\int\cos^4 x\,dx$,

   $(vi)\int\sin^5\theta d\theta$, $(vii)\int\sin^3 2x\,dx$, $(viii)\int\cos^2 2x\,dx$, $(ix)\int\sin pt\cos qt\,dt,(p>q)$,

   $(x)\int\sin 3x\cos 5x\,dx$, $(xi)\int\sin 2x\sin 4x\,dx$, $(xii)\int\sin^2 3x\,dx$, $(xiii)\int\sin^2 x\cos 2x\,dx$,

   $(xiv)\int\sin 3x\sin 5x\,dx$

3. $(i)\cos 2x$ -এর সূত্রগুলি / অভেদগুলি লিখুন।

   $(ii)\int\cos^5 x\,dx$ নির্ণয় করুন।

   $(iii)\int\sin 5x\cos 7x\,dx$ নির্ণয় করুন।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

4. $\int e^{5x}dx$ -এর যোজিত ফল কোনটি?

   (ক) $\frac{1}{5}e^{5x}$ (খ) $-\frac{1}{5}e^{5x}+C$ (গ) $\frac{1}{5}e^{5x}+C$ (ঘ) $\frac{1}{5x}e^{5x}+C$

5. $\int x^9 dx$ -এর যোজিত ফল কোনটি?

(ক) $\frac{1}{10}x^{10}+C$ (খ) $\frac{1}{9x}x^9+C$ (গ) $\frac{1}{9}x^{10}+C$ (ঘ) $-\frac{1}{10}x^{10}+C$

6. দেওয়া আছে, $\int \sin^4 x dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

(i) যোজিত ফলে যোগজীকরণ ধ্রুবক না দিলেও উত্তর সঠিক হবে।

(ii) যোজিত ফল নির্ণয়ে $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ সুত্রটি ব্যবহৃত হয়েছে।

(iii) C-কে যোগজীকরণ ধ্রুবক বলা হয়, যা থাকতে হবে।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) $(i), (ii)$ ও (iii)

পাঠ ১০.৩ প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে অনির্দিষ্ট যোগজ (Method of Substitution for Indefinite Integrals)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	প্রতিস্থাপন পদ্ধতি, চলক পরিবর্তন, আদর্শ যোগজ, বীজগাণিতিক একঘাত ফাংশন, ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

মূলপাঠ

অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের বিভিন্ন কৌশল: প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে, আংশিক ভগ্নাংশ ব্যবহার করে, অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করা যায়। যোগজীকরণ প্রক্রিয়ায় যে কোন যোজনযোগ্য (Integrable) যোগজের যোগজীকরণ করার কোনরূপ ধরা বাঁধা নিয়ম পাওয়া যায় না। যোগজীকরণের পদ্ধতিসমূহ মূলতঃ পরীক্ষামূলক (Tentative)। এই কারণে অন্তরীকরণ অপেক্ষা যোগজীকরণ প্রক্রিয়া জটিলতর। যোগজীকরণ প্রক্রিয়ার মূল লক্ষ্য হলো যোজ্য ফাংশনকে আদর্শ আকারে পরিণত করার চেষ্টা করা। প্রতিস্থাপন পদ্ধতি এদের মধ্যে অন্যতম।

প্রতিস্থাপন পদ্ধতি (Method of substitution) - চলক পরিবর্তন: যোগজীকরণ প্রক্রিয়ার সবচেয়ে প্রয়োজনীয় পদ্ধতির নাম প্রতিস্থাপন পদ্ধতি। এ পদ্ধতিতে প্রদত্ত ফাংশনের চলককে পরিবর্তন করে একটি নতুন চলক সাপেক্ষে যোগজীকরণ করা হয়। প্রদত্ত যোজ্য রাশি(Integrand) এর অন্তর্ভুক্ত কোনো ফাংশনের পরিবর্তে একটি চলরাশি স্থাপন করে যোজিত ফল নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি বলা হয়।

ধরুন, $f(x)$ দ্বারা সূচিত ফাংশনে $x=g(z)$ বসিয়ে চলকের পরিবর্তন করা হলো। আবার ধরুন, $G=\int f(x)dx$ এবং $x=g(z)$. তাহলে, সংজ্ঞানুসারে, $\frac{dG}{dx}=f(x)$ এবং $\frac{dx}{dz}=g'(z)$. এখন $\frac{dG}{dz}=\frac{dG}{dx}.\frac{dx}{dz}=f(x).g'(z)$ $=f[g(z)]g'(z)$. সুতরাং $G=\int f[g(z)]g'(z)dz$ বা, $\int f(x)dx=\int f[g(z)]g'(z)dz$

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয়ের কৌশল:

নিয়ম ১: $\int$ f(ax+b) dx প্রতিটি **ধ্রুবক এবং** $n \neq -1$.**আকারের যোগজ**

[যোজ্য ফাংশনটি যদি একটি ফাংশনের ফাংশন হয় এবং অন্তবর্তী ফাংশনটির অন্তরক একটি x নিরপেক্ষ ধ্রুবক হয়, তবে অন্তবর্তী ফাংশনটিকে z ধরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।]

উদাহরণ 1: (a) $\int(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C; a, b, n$ প্রতিটি ধ্রুবক এবং $n \neq -1$.

(b) $\int \sin(ax+b)\, dx$ (c) $\int(3x+5)^6 dx$ (d) $\int e^{a-bx} dx$

সমাধানঃ (a) মনে করুন, $z = ax+b$ $\therefore$ $dz = a\, dx$ $\therefore dx = \frac{1}{a}dz$

$$\therefore \int(ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int z^n dz = \frac{1}{a}.\frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

(b) ধরুন, $z = ax+b$ $\therefore$ $dz = a\, dx$

$$\therefore \int \sin(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\, a\, dx = \frac{1}{a}\int \sin z\, dz = -\frac{1}{a}\cos z + C = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

বিকল্প পদ্ধতিঃ ইহাকে সংক্ষেপে $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$ নির্ণয় করা যায়।

(c) ধরুন, $z = 3x+5$ $\therefore$ $dz = 3\, dx$

$$\therefore \int (3x+5)^6 dx = \frac{1}{3}\int (3x+5)^6 3\, dx = \frac{1}{3}\int z^6\, dz = \frac{1}{21} z^7 + C = \frac{1}{21}(3x+5)^7 + C$$

বিকল্প পদ্ধতিঃ ইহাকে সংক্ষেপে $\int(3x+5)^6 dx = \frac{(3x+5)^{6+1}}{3(6+1)} + C = \frac{1}{21}(3x+5)^7 + C$ নির্ণয় করা যায়।

(d) ধরুন, $z = a-bx$ $\therefore$ $dz = -b\, dx$

$$\therefore \int e^{a-bx} dx = -\frac{1}{b}\int e^{a-bx}(-b)\, dx = -\frac{1}{b}\int e^z dz = -\frac{1}{b} e^z + C = -\frac{1}{b} e^{a-bx} + C$$

বিকল্প পদ্ধতিঃ ইহাকে সংক্ষেপে $\int e^{a-bx}dx = \frac{e^{a-bx}}{-b} + C = -\frac{1}{b}e^{a-bx} + C$ নির্ণয় করা যায়।

টীকা: প্রতিস্থাপনযোগ্য ফাংশনের অন্তরজ ধ্রুবক হলে, বহুপদী যোগজের একটি পদের ক্ষেত্রে সরাসরি ঐ পদের যোগজীকরণ করে, অন্তরক সহগ দ্বারা ভাগ করে যোগজ নির্ণয় করা যাবে।

নিয়ম ২: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$ আকারের যোগজ:

[যোজ্য ফাংশনটি দুটি ফাংশনের ভাগফল আকারে থাকলে এবং হরে অবস্থিত ফাংশনটির অন্তরক লবে অবস্থান করলে, হরকে z ধরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।]

উদাহরণ 2: (a) $\int \frac{1}{a+bx}\, dx$ **(b)** $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\, dx$ **(c)** $\int \frac{\cot x}{\ln \sin x}dx$

সমাধানঃ (a) ধরুন, $z = a+bx$ $\therefore$ $dz = b\, dx$

সুতরাং $\int \frac{1}{a+bx}\, dx = \frac{1}{b}\int \frac{b}{a+bx}\, dx = \frac{1}{b}\int \frac{1}{z}\, dz = \frac{1}{b}\ln|z| + C = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C$

(b) ধরুন, $z = x+\sin x$ $\therefore$ $dz = (1+\cos x)\, dx$

সুতরাং $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\, dx = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + C = \ln|x+\sin x| + C$

(c) ধরুন, $z = \ln|\sin x|$ $\therefore$ $dz = \frac{1}{\sin x}.\cos x dx = \cot x dx$

সুতরাং $\int \frac{\cot x}{\ln \sin x} dx = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + C = \ln|\ln \sin x| + C$

টীকা: কোন যোজ্য ফাংশন যদি এইরূপ একটি ভগ্নাংশের আকারে থাকে যেখানে যোজ্যের লব = হরের সঠিক অন্তরক হয়, তবে যোগজ হবে হরের লগারিদম। বহুপদী যোগজের একটি পদের ক্ষেত্রে এরূপ হলে সরাসরি ঐ পদের যোগজ হিসাবে $\ln$ (হর) বা $\log_e$(হর) লেখা যাবে।

এই পদ্ধতির কয়েকটি আদর্শ যোগজ:

(i) $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C$

প্রমাণ: $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$ এবার ধরুন, $z = \cos x \therefore dz = -\sin x\, dx$

$= -\int \frac{1}{z}\, dz = -\ln|z| + C = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

(ii) $\int \cot x\, dx\, dx = \ln|\sin x| + C$

প্রমাণ: $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$ এবার ধরুন, $z = \sin x$

$\therefore dz = \cos x dx = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + C = \ln|\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x\, dx = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$ **অথবা,** $\ln|\sec x + \tan x| + C$

প্রমাণ : $\int \sec x dx = \int \frac{1}{\cos x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} = \int \frac{dx}{2\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})}\, dx$

এবার ধরুন, $z = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \therefore dz = \frac{1}{2}\sec^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) dx$

অতএব, $\int \sec x dx = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C$

বিকল্প প্রমাণ: ধরুন, $z = \sec x + \tan x$ সুতরাং $dz = \sec x\, (\sec x + \tan x)\, dx$

সুতরাং $\int \sec x\, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$ **অথবা,** $\ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

প্রমাণ: $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}\, dx$

এবার ধরুন, $z = \tan\frac{x}{2} \quad \therefore \quad dz = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\, dx$

অতএব, $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

বিকল্প প্রমাণ: ধরুন, $z = \operatorname{cosec} x - \cot x$ সুতরাং $dz = \operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x - \cot x)\, dx$

$\therefore \int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \operatorname{cosec} x \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x}\, dx = \int \frac{1}{z}\, dz = \ln|z| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

নিয়ম ৩: $\int\{f(x)\}^n f'(x)\ dx$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটি যদি দুটি ফাংশনের গুণফল হয় যার একটি $f(x)$ এর ঘাতবিশিষ্ট এবং অপরটি $f(x)$ এর অন্তরক হয় তবে $f(x) = z$ ধরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।]

উদাহরণ 3: (a) $\int \frac{4x-3}{\sqrt[3]{4x^2-6x+9}}\ dx$ **(b)** $\int \frac{1-\sin x}{\sqrt[4]{x+\cos x}}\ dx$ **(c)** $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log e x^2}}{x}\ dx$

সমাধান: (a) ধরুন, $z = (4x^2-6x+9)$ সুতরাং $dz = (8x-6)\ dx$

এখন $\int\frac{4x-3}{\sqrt[3]{4x^2-6x+9}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{8x-6}{\sqrt[3]{4x^2-6x+9}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt[3]{z}}dz$

$$=\frac{1}{2}\int z^{\frac{-1}{3}}dz=\frac{1}{2}.\frac{z^{\frac{-1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{1}{2}.\frac{z^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}z^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{4}\left(4x^2-6x+9\right)^{\frac{2}{3}}+C$$

(b) ধরুন, $z = x+\cos x$ সুতরাং $dz = (1-\sin x)\ dx$

এখন $\int\frac{1-\sin x}{\sqrt[4]{x+\cos x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt[4]{z}}\ dz=\int z^{\frac{-1}{4}}dz=\frac{z^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+C=\frac{z^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C=\frac{4}{3}z^{\frac{3}{4}}+C=\frac{4}{3}\left(x+\cos x\right)^{\frac{3}{4}}+C$

(c) ধরুন, $z = 1+\log_e x^2$ সুতরাং $dz = \frac{2x}{x^2}\ dx = \frac{2}{x}\ dx$

এখন $\int\frac{\sqrt[3]{1+\log_e x^2}}{x}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{1+\log_e x^2}\,\frac{2}{x}dx=\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{z}\ dz=\frac{1}{2}\int z\ dz=\frac{3}{8}z+C=\frac{3}{8}(1+\log_e x^2)+C$

নিয়ম ৪: অনুসিদ্ধান্তঃ $\int f(x)\, f'(x)\ dx$ আকারের যোগজ

[উপরের আকারের যোগজে যদি $n = 1$ হয় তবে যোজ্য ফাংশনদ্বয়ের একটি $f(x)$ এবং অপরটি $f'(x)$ এর অন্তরজ হবে এক্ষেত্রে $f(x) = z$ ধরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।]

উদাহরণ 4: (a) $\int\frac{1}{1+x^2}\ \tan^{-1}x\ dx$ **(b)** $\int \tan x\sec^2x\ dx$

সমাধান: (a) ধরুন, $z = \tan^{-1}x$ $\therefore\ dz = \frac{1}{1+x^2}\ dx$

সুতরাং $\int\frac{1}{1+x^2}\ \tan^{-1}x\ dx = \int z\ dz = \frac{1}{2}\ z^2 + C = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2 + C$

(b) ধরুন, $z = \tan x$ $\therefore\ dz = \sec^2x\ dx$

সুতরাং $\int \tan x\sec^2x\ dx = \int z\ dz = \frac{1}{2}\ z^2 + C = \frac{1}{2}(\tan x)^2 + C$

নিয়ম ৫: $\int\varphi\,(f(x))\,f'(x)\ dx$ আকারের যোগজ

এখানে $f(x) = z$ ধরলে, $dz = f'(x)\ dx$ হবে। সুতরাং $\int\varphi\,(f(x))\ f'(x)\ dx = \int\varphi(z)\ dz$ হবে।

[সুতরাং যোজ্য ফাংশনটি যদি একটি যোজনযোগ্য ফাংশনের ফাংশন, $\varphi(f(x))$ এবং দ্বিতীয় ফাংশনটির অন্তরক $f'(x)$ এর গুণফল হয়, তবে ২য় ফাংশন, $f(x)=z$ ধরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করা যাবে।]

উদাহরণ 5: (a) $\int x^2\cos x^3dx$ **(b)** $\int\frac{\tan(\log_e x)}{x}\ dx$ **(c)** $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{a\sin^{-1}x}dx$

সমাধান: (a) মনে করুন, $z = x^3$ $\therefore\ dz = 3x^2\ dx$

এখন $\int x^2\cos x^3\,dx = \frac{1}{3}\int \cos x^3\,(3x^2)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos z\,dz = \frac{1}{3}\sin z + C = \frac{1}{3}\sin x^3 + C$

(b) ধরুন, $z = \log_e x \quad \therefore \quad dz = \frac{1}{x}\,dx$

$\therefore \int \frac{\tan(\log_e x)}{x}\,dx = \int \tan(\log_e x)\frac{1}{x}dx = \int \tan z\,dz = \log_e|\sec z| + C = \log_e|\sec(\log_e x)| + C$

(c) মনে করুন, $z = e^{\sin^{-1}x} \quad \therefore \quad dz = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}e^{a\sin^{-1}x}\,dx = \int e^{az}\,dz = -\frac{1}{a}e^{az} + C = -\frac{1}{a}e^{a\sin^{-1}x} + C$

নিয়ম ৬: $\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটি যদি কোন ফাংশন $f(x)$ এবং এর অন্তরক $f'(x)$ এর সমষ্টির সাথে e^x অথবা a^x জাতীয় পূনরাবৃত্ত ফাংশনের গুণফল হয়, তবে যোজ্য ফাংশনটি হতে $e^x f(x)$ পদটিকে z প্রতিস্থাপন করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে]

উদাহরণ 6: (a) $\int e^x(\tan x+\sec^2 x)\,dx$ **(b) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx$** (c) $\int e^x(\tan x - \log_e\cos x)dx$

সমাধান: (a) মনে করুন, $z = e^x\tan x \quad \therefore \; dz = e^x(\tan x+\sec^2 x)\,dx$

সুতরাং $\int e^x(\tan x+\sec^2 x)\,dx = \int dz = z+C = e^x\tan x+C$

(b) মনে করুন, $z = \frac{e^x}{1+x} \quad \therefore \; dz = \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2}dx = \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}dx$

সুতরাং $\int \frac{x\,e^x}{(1+x)^2}\,dx = \int dz = z+C = \frac{e^x}{1+x}+C$

(c) ধরুন, $I = \int e^x(\tan x - \ln\cos x)\,dx$

এখন, ধরুন, $f(x) = -\ln\cos x \quad \therefore f'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \tan x$

$\therefore I = \int e^x\{f'(x)+f(x)\}dx = e^x f(x) + C = -e^x\ln\cos x + C$

নিয়ম ৭: $\int\tan^n x\,dx$ অথবা $\int\cot^n x\,dx$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটি যদি tan অথবা cot অনুপাতের যে কোন পূর্ণ সাংখ্যিক ঘাত বিশিষ্ট হয়, তবে $\tan^2 A = \sec^2 A - 1$ অথবা $\cot^2 A = \mathrm{cosec}^2 A - 1$ সূত্রের সাহায্যে পরিবর্তন করে পরবর্তীতে $z = \tan x$ অথবা $z = \cot x$ প্রতিস্থাপন করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে। যেমন,

উদাহরণ 7: (i) $\int\tan^5 x\,dx$ **(ii) $\int\cot^4 x\,dx$**

সমাধান: (i) মনে করুন, $z = \tan x \;\therefore\; dz = \sec^2 x\,dx$

সুতরাং $\int\tan^5 x\,dx = \int\tan^3 x(\sec^2 x-1)\,dx = \int\tan^3 x\sec^2 x\,dx - \int\tan x(\sec^2 x-1)\,d\,dx$

$= \int(\tan^3 x - \tan x)\sec^2 x\,dx + \int\tan x\,dx = \log_e\sec x + \int(\tan^3 x-\tan x)\sec^2 x\,dx$

$= \log_e\sec x + \int z^3\,dz - \int z\,dz = \log_e\sec x + \frac{1}{4}z^4 - \frac{1}{2}z^2 + C = \log_e\sec x + \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

(ii) মনে করুন, $z = \cot x \quad \therefore \quad dz = -\mathrm{cosec}^2 x\,dx$

সুতরাং $\int\cot^4 x\,dx = \int\cot^2 x(\mathrm{cosec}^2 x-1)\,dx = \int\cot^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx - \int\cot^2 x\,dx$

$= \int\cot^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx - \int(\mathrm{cosec}^2 x - 1)\,dx = x + \cot x + \int\cot^2 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx = x + \cot x - \int z^2\,dz$

$= x + \cot x - \frac{1}{3}z^3 + C = x + \cot x - \frac{1}{3}\cot^3 x + C$

শিক্ষার্থীর কাজ	
(i) $\int \tan^3 x\, dx$ (ii) $\int \tan^4 x\, dx$ (iii) $\int \tan^6 x\, dx$	
(iv) $\int \cot^3 x\, dx$ (v) $\int \cot^5 x\, dx$	

নিয়ম 8: $\int \sec^n x\ dx$ অথবা $\int \operatorname{cosec}^n x\ dx$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটি যদি sec অথবা cosec অনুপাতের যে কোন পূর্ণ সাংখ্যিক ঘাত বিশিষ্ট হয়।]

(A) ঘাত, n যদি বিজোড় পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে, $\sec^2 x$ অথবা $\operatorname{cosec}^2 x$-কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে সখন্ড পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে হবে। পরবর্তীতে সখন্ড পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয়ের সময় এর উদাহরণ দেয়া হবে।

(B) ঘাত, n যদি জোড় পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে, $\sec^2 x$-কে tanx এবং $\operatorname{cosec}^2 x$-কে cotx এর ফাংশন রুপে প্রকাশ করে যথাক্রমে $z = \tan x$ অথবা $z = \cot x$ প্রতিস্থাপন করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে। যেমন,

উদাহরণ 8: (i) $\int \sec^6 x\ dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec}^4 x\ dx$

সমাধান: (i) এখানে $\int \sec^6 x\, dx = \int (1+\tan^2 x)^2 \sec^2 x\ dx = \int (1+z^2)^2\, dz$

মনে করুন, $z = \tan x \therefore dz = \sec^2 x dx = \int (1+2z^2+z^4)\ dz = z + \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 + C$

$$= \tan x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$$

(ii) মনে করুন, $z = \cot x \therefore\ dz = -\operatorname{cosec}^2 x\ dx$

এখন $\int \operatorname{cosec}^4 x\, dx = -\int (1+\cot^2 x)(-\operatorname{cosec}^2 x)\, dx = -\int (1+z^2)\, dz = -z - \frac{2}{3} z^3 + C = -\cot x - \frac{2}{3}\cot^5 x + C$

শিক্ষার্থীর কাজ	
(i) $\int \sec^2 x\, dx$ (ii) $\int \sec^4 x\, dx$ (iii) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx$	
(iv) $\int \operatorname{cosec}^6 x\, dx$	

নিয়ম ৯: একটি ঘাত যদি ভগ্নাংশ হয় কিন্তু অপর ঘাতটি বিজোড় হয তবে যেটির ঘাত ভগ্নাংশ তাকে z প্রতিস্থাপন করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ 9: $\int \sqrt{\sin x}\ \cos^3 x\ dx$

সমাধান: মনে করুন, $z = \sin x \quad \therefore \quad dz = \cos x\ dx$

এখন $\int \sqrt{\sin x}\ \cos^3 x\, dx = \int \sqrt{\sin x}\,(1-\sin^2 x)\cos x\, dx = \int \sqrt{z}\,(1-z^2)\, dz$

$$= \int z\ dz - \int z\, dz = \frac{2}{3}\ z - \frac{2}{7}\ z += \frac{2}{3}\ \sin x - \frac{2}{7}\ \sin x + C$$

নিয়ম ১০: উভয় ঘাত যদি যে কোন বাস্তব সংখ্যা হয় কিন্তু ঘাতদ্বয়ের যোগফল একটি ঋণাত্মক জোড় পূর্ণসংখ্যা হয় তবে, $z = \tan x$ প্রতিস্থাপন করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ 10: $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos^5 x}}\ dx$

সমাধান: মনে করুন, $z = \tan x \quad \therefore \quad dz = \sec^2 x\, dx$

এখন $\int \sqrt{\tan x}\ \sec^2 x dx = \int \sqrt{z}\ dz = \int z\ dz = \frac{2}{3}\ z + C = \frac{2}{3}\ \tan x + C$

ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের কতিপয় বিশেষ আকার

নিয়ম ১১: (ক) $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\ dx$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটির লব এবং হরে যদি একই অনুপাতের যৌগিক কোণের উপস্থিতি থাকে তবে, হরে অবস্থিত অনুপাতের কোণটিকে z প্রতিস্থাপন করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ 11: $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)}\ dx$

সমাধান: মনে করুন, $z = x+a \Rightarrow x = z-a \therefore dz = dx$

এখন $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx = \int \frac{\sin(z-a)}{\sin z} dz = \int [\cos a - \sin a \cot z]\, dz$

$= z\cos a - \sin a \log_e \sin z + C = (x+a)\cos a - \sin a \log_e \sin(x+a) + C$

নিয়ম ১২: $\int \frac{1}{a\sin x + b\cos x} dx$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটির হরে যদি বিভিন্ন সহগবিশিষ্ট sin এবং cos অনুপাতের যোগফল থাকে তবে যোগফলকে cos অথবা sin এর একটিমাত্র অনুপাতে প্রকাশ করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।]

উদাহরণ 12: $\int \frac{1}{2\sin x + 3\cos x} dx$

সমাধান: মনে করুন, $2 = r\cos\alpha$ ও $3 = r\sin\alpha \therefore 2^2+3^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{13}$ এবং $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{2}$

এখন $\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x} = \int \frac{dx}{r\cos\alpha \sin x + r\sin\alpha \cos x} = \frac{1}{r}\int \frac{1}{\sin(x+\alpha)} dx = \frac{1}{\sqrt{13}}\int \operatorname{cosec}(x+\alpha)\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{13}} \log_e \left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{13}} \log_e \left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right| + C$

নিয়ম ১৩: $\int \frac{1}{a\cos x + b\sin x + c} dx$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটির হরে যদি বিভিন্ন সহগবিশিষ্ট sinএবংcosএর যোগফলের সাথে একটি ধ্রুবক পদ থাকে তবে, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$; $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ এবং $1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}$ বসিয়ে, লব ও হর উভয়কে $\cos^2\frac{x}{2}$ দ্বারা ভাগ করার পরে $z = \tan\frac{x}{2}$ প্রতিস্থাপন করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।]

উদাহরণ 13: (i) $\int \frac{dx}{3+2\sin x}$ (ii) $\int \frac{dx}{2\cos x + 3\sin x + 4}$ (iii) $\int \frac{dx}{3 + 2\sin x + \cos x}$

সমাধান: (i) $\int \frac{dx}{3+2\sin x} = \int \frac{dx}{3 + 2.\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \int \frac{1+\tan\frac{x}{2}}{3+3\tan^2\frac{x}{2} + 4\tan\frac{x}{2}} dx = \int \frac{\sec^2\frac{x}{2} dx}{3\tan^2\frac{x}{2} + 4\tan\frac{x}{2} + 3}$

ধরুন, $\tan\frac{x}{2} = z \therefore \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} dx = dz$ বা, $\sec^2\frac{x}{2} dx = 2dz$

$$\therefore \int \frac{\sec^2\frac{x}{2} dx}{3\tan^2\frac{x}{2} + 4\tan\frac{x}{2} + 3} = \int \frac{2dz}{3z^2 + 4z + 3} = \int \frac{2dz}{3\left(z^2 + \frac{4}{3}z + 1\right)} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z^2 + 2.z.\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}}$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}.\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \tan^{-1}\frac{\left(z+\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C$$

$$=\frac{2}{3}.\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(x/2)+\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{3\tan(x/2)+2}{\sqrt{5}}\right)+C$$

(ii) $I=\int\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\sin^2\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{3+\tan^2\frac{x}{2}+3\tan\frac{x}{2}}\ dx$

মনে করুন, $z=\tan\frac{x}{2}$ $\therefore$ $dz=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx$ $\therefore$ $I=\int\frac{dz}{z^2+3z+3}=\int\frac{dz}{(z+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

এবার $z+\frac{3}{2}=y$ হলে, $dz=dy$ অতএব, $\int\frac{dx}{2\cos x+3\sin x+4}=\int\frac{dy}{y^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}}+C$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}[\frac{2}{\sqrt{3}}(z+\frac{3}{2})]+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}[\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{3}]+C$

(iii) যেহেতু, $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$$\therefore\int\frac{dx}{3+2\sin x+\cos x}=\int\frac{dx}{3+2.\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}=\int\frac{dx}{3+2.\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\int\frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{3+3\tan^2\frac{x}{2}+4\tan\frac{x}{2}+1-\tan^2\frac{x}{2}}dx=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan^2\frac{x}{2}+4\tan\frac{x}{2}+4}dx$$

$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\tan^2\frac{x}{2}+4\tan\frac{x}{2}+4}dx=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{2\left(\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+2\right)}=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{2\left\{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2+1\right\}}$$

এবার ধরুন, $\tan\frac{x}{2}=z\therefore\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx=dz$ বা, $\sec^2\frac{x}{2}dx=2dz$

$$\therefore\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{2\left\{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2+1\right\}}=\int\frac{2dz}{2\left\{(z+1)^2+1\right\}}=\int\frac{dz}{(z+1)^2+1}=\tan^{-1}(1+z)+C=\tan^{-1}\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)+C$$

কতিপয় বীজগাণিতিক একঘাত ফাংশনের যোগজ নির্ণয়

নিয়ম ১৪: $\int\frac{ax+b}{cx+d}\ dx$ **আকারের যোগজ**

[যোজ্য ফাংশনটি যদি দুটি একঘাত রাশির ভাগফল আকারে থাকে তবে হরে অবস্থিত রাশিটিকে z ধরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে হবে। যেমন,

উদাহরণ 14: $\int \frac{2x+3}{3x-4}\,dx$

সমাধানঃ মনে করুন, $z = 3x-4 \quad \therefore \quad x = \frac{z+4}{3}$ এবং $dz = 3\,dx$

এখন $\int \frac{2x+3}{3x-4}\,dx = \int \frac{2(\frac{z+4}{3})+3}{z}\,dz = \frac{1}{3}\int \frac{2z+17}{z}\,dz = \frac{2}{3}\, z + \frac{17}{3}\,\log_e|z| + C$

অতএব, নির্ণেয় যোগজ $= \frac{2}{3}(3x-4)+\frac{17}{3}\,\log_e|3x-4| + C$

নিয়ম ১৫: $\int (ax+b)\sqrt{cx+d}\,dx$; $\int \frac{cx+d}{\sqrt{ax+b}}\,dx$ **অথবা** $\int \frac{1}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}\,dx$

[যোজ্য ফাংশনটি যদি দুটি একঘাত রাশির গুণফল অথবা ভাগফল অথবা হরে অবস্থিত গুণফল আকারে থাকে কিন্তু একটি রাশি বর্গমূল চিহ্নের ভিতরে থাকে তবে, বর্গমূল চিহ্নের ভিতরে অবস্থিত রাশিটিকে z^2 ধরে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে হবে। যেমন,

উদাহরণ 15: (i) $\int (2x+1)\sqrt{x+3}\,dx$ (ii) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x+2}}\,dx$ (iii) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}$

সমাধানঃ (i) মনে করুন, $z^2 = x+3 \quad \therefore x = z^2-3$ এবং $2z\,dz = dx$

এখন $\int (2x+1)\sqrt{x+3}\,dx = \int [\,2(z^2-3)+1]\sqrt{z^2}\,2z\,dz = 2\int (2z^2-5)\,z^2\,dz$

$= 4\int z^4\,dz - 10\int z^2\,dz = \frac{4}{5}\,z^5 - \frac{10}{3}\,z^3 + C = \frac{4}{5}\,\sqrt{(x+3)^5} - \frac{10}{3}\,\sqrt{(x+3)^3} + C$

(ii) মনে করুন, $z^2 = 3x+2 \quad \therefore \; x = \frac{z^2-2}{3} \quad \therefore \; 2\,z\,dz = 3\,dx$

এখন $\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{\sqrt{3x+2}}\,3\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{2z^2-1}{\sqrt{z^2}}\,2z\,dz = \frac{2}{9}\int (2z^2-1)\,dz$

$= \frac{4}{27}\,z^3 - \frac{2}{9}\,z + C = \frac{4}{27}(\sqrt{3x+2})^3 - \frac{2}{9}\sqrt{3x+2} + C$

(iii) মনে করুন, $z^2 = x+2 \quad \therefore 2z\,dz = dx$ এবং $x = z^2-2$

এখন $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}} = \int \frac{1}{(z^2-1)\sqrt{z^2}}\,2z\,dz = \int \frac{2}{(z^2-1)}\,dz = \log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \log\frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1} + C$

নিয়ম ১৬: $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}\,dx$ **আকারের যোগজ**

[যোজ্য ফাংশনটির হর যদি x এর সমান সহগ বিশিষ্ট দুটি একঘাত রাশির বর্গমূলের সমষ্ঠি বা অন্তর হয় তবে, সার্ডের আনুপাতিকরণ নিয়ম দ্বারা সার্ডদ্বয়কে লবে তুলে নিয়ে আলাদাভাবে z প্রতিস্থাপন করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে। যেমন,

উদাহরণ 16: মান নির্ণয় করুন $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}}$

সমাধানঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}} = \int \frac{1}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}}\;\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}}\,dx$

$= \frac{1}{6}\int \sqrt{2x+3}\,dx - \frac{1}{6}\int \sqrt{2x-3}\,dx = \frac{1}{18}(2x+3)\sqrt{2x+3} - \frac{1}{18}(2x-3)\sqrt{2x-3} + C$

কয়েকটি আদর্শ/ প্রমিত যোগজ (Standard Integral)

(i) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C.$

প্রমাণঃ ধরুন, $x = a\tan\theta$ তাহলে, $dx = a\sec^2\theta d\theta$ এবং $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$$\therefore \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \int\frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta} = \int\frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)} = \int\frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \int\frac{1}{a}d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

নোটঃ $x = a\cot\theta$ ধরে প্রমাণ করা যায় $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{-1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a} + C.$

অনুসিদ্ধান্তঃ $\int\frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C.$

(ii) $\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, (a > x).$

প্রমাণঃ এখানে, $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$

$$\therefore \int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)dx = \frac{1}{2a}\left\{\int\frac{dx}{a+x} + \int\frac{dx}{a-x}\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}\left\{\ln|a+x| - \ln|a-x|\right\} + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

(iii) $\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, (x > a).$

প্রমাণঃ (ii) এর অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়।

নোটঃ $\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C.$

(iv) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C.$

প্রমাণঃ মনে করুন, $x = a\sin\theta \therefore dx = a\cos\theta d\theta$ এবং $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$

তাহলে, $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}} = \int\frac{a\cos\theta d\theta}{a\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int\frac{a\cos\theta d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C.$

নোট ঃ $x = a\cos\theta$ ধরে প্রমাণ করা যায় $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} + C.$

অনুসিদ্ধান্তঃ $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + C$ অথবা $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1}x + C$

(v) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right).$

প্রমাণঃ ধরুন, $\sqrt{x^2\pm a^2} = z - x$ তাহলে, $z = x + \sqrt{x^2\pm a^2}$

$$\therefore dz = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)dx = \left(\frac{\sqrt{x^2\pm a^2} + x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right)dx = \frac{zdx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

বা, $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ সুতরাং $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \int\frac{dz}{z} = \ln z + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2\pm a^2}\right) + C.$

(vi) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$

প্রমাণঃ ধরুন, $x=a\sin\theta$ তাহলে, $\therefore dx=a\cos\theta d\theta$ এবং $\theta=\sin^{-1}\frac{x}{a}$

$$\therefore\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2\left(1-\sin^2\theta\right)}a\cos\theta d\theta$$

$$=\int a^2\cos^2\theta d\theta=\frac{a^2}{2}\int\left(1+\cos2\theta\right)d\theta=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)=\frac{a^2}{2}\left(\theta+\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)=\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

$\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ $(a\neq0)$ আকারের যোগজের কতিপয় বিশেষ রূপ

দ্বিঘাত রাশি ax^2+bx+c -কে সাধারণত দ্বিপদী, ত্রিপদী অথবা দুটি সরল উৎপাদক হিসাবে পাওয়া যেতে পারে। অর্থাৎ ax^2+c, ax^2+bx+c অথবা $a(x+\alpha)(x+\beta)$। এখন যোজ্য ফাংশনটির হরে অবস্থিত দ্বিঘাত রাশিটির আকৃতি ভেদে নিচে কয়েকটি বিশেষ প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে যোগজ নির্ণয় পদ্ধতি দেয়া হলো। অপরদিকে x^2 এর সহগ একক হলে, বা উৎপাদক আকারে বের করে নিলে, দ্বিঘাত রাশিটিকে x^2+k^2, x^2-k^2 এবং k^2-x^2 আকারে পাওয়া যাবে এবং এই আকারের যোগজগুলোকে অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে যোগজ নির্ণয় করা যেতে পারে।

নিয়ম ১৭: $\int\frac{1}{ax^2+c}dx$ $(a\neq0)$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটির হরে যদি দ্বিপদী দ্বিঘাত আকারের বৈজিক রাশি থাকে এবং a ও c উভয় সহগই ধনাত্মক হয়, তবে, $x=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\tan\theta$ প্রতিস্থাপন করে যোগজীকরণ করা যাবে]

উদাহরণ 17: $(i)\int\frac{1}{5x^2+3}dx$ $(ii)\int\frac{dx}{9x^2+4}$

সমাধানঃ (i) মনে করুন, $x=\frac{\sqrt3}{\sqrt5}\tan\theta$ সুতরাং $dx=\frac{\sqrt3}{\sqrt5}\sec^2\theta\,d\theta$

এখন $\int\frac{dx}{5x^2+3}=\int\frac{\frac{\sqrt3}{\sqrt5}\sec^2\theta\,d\theta}{3\tan^2\theta+3}=\frac{1}{\sqrt{15}}\int d\theta=\frac{1}{\sqrt{15}}\theta+C=\frac{1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\frac{\sqrt5\,x}{\sqrt3}+C$

মন্তব্য : আবার $x=\frac{\sqrt3}{\sqrt5}\cot\theta$ ধরলে, $\int\frac{dx}{5x^2+3}=-\frac{1}{\sqrt{15}}\cot^{-1}\frac{\sqrt5\,x}{\sqrt3}+C$ হবে।

এখন আমরা জানি $\tan^{-1}\frac{\sqrt5\,x}{\sqrt3}+\cot^{-1}\frac{\sqrt5\,x}{\sqrt3}=\frac{\pi}{2}$

অতএব, $\frac{1}{\sqrt{15}}\tan^{-1}\frac{\sqrt5\,x}{\sqrt3}$ এবং $-\frac{1}{\sqrt{15}}\cot^{-1}\frac{\sqrt5\,x}{\sqrt3}$ এর অন্তরফল ধ্রুবক বিধায় উভয় যোগজই সঠিক।

$$(ii)\int\frac{dx}{9x^2+4}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{\frac{4}{9}+x^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{\left(\frac{2}{3}\right)^2+x^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)+C$$

অনুসিদ্ধান্তঃ $\int\frac{1}{x^2+k^2}dx=\frac{1}{k}\tan^{-1}\frac{x}{k}+C$

মন্তব্য : উপরোক্ত অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে, $\int \frac{dx}{5x^2+3} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2+(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})^2} = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{3}} + C$

নিয়ম ১৮: $\int \frac{1}{ax^2-c}\, dx \quad (a\neq 0)$ **আকারের যোগজ**

[যোজ্য ফাংশনটির হরে যদি দ্বিপদী দ্বিঘাত রাশি হয় এবং ধ্রুবক ঋণাত্মক হয়, তবে, $x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \sec\theta$ প্রতিস্থাপন করে যোগজীকরণ করা যাবে]

উদাহরণ 18: $(i) \int \frac{1}{2x^2-9} dx \quad (ii) \int \frac{dx}{9x^2-16}$

সমাধান: (i) মনে করুন, $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta$ সুতরাং $dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

এখন $\int \frac{1}{2x^2-9} dx = \int \frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta \tan\theta\, d\theta}{9 \sec^2\theta - 9} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \int \operatorname{cosec}\theta\, d\theta = \frac{1}{3\sqrt{2}} \log|\tan\frac{\theta}{2}| + C = \frac{1}{6\sqrt{2}} \log|\tan^2\frac{\theta}{2}| + C$

$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \log|\frac{\sqrt{2}x-3}{\sqrt{2}x+3}| + C$ যেহেতু $\sec\theta = \frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}x}{3} = \frac{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}x-3}{\sqrt{2}x+3} = \tan^2\frac{\theta}{2}$

$$(ii) \int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{16}{9}} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{4}{3}} \ln\left|\frac{x-\frac{4}{3}}{x+\frac{4}{3}}\right| + C = \frac{1}{24} \ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right| + C$$

অনুসিদ্ধান্ত: $\int \frac{1}{x^2-k^2} dx = \frac{1}{2k} \log|\frac{x-k}{x+k}| + C$

নিয়ম ১৯: $\int \frac{1}{c-ax^2}\, dx \quad (a\neq 0)$ **আকারের যোগজ**

[যোজ্য ফাংশনটি যদি দ্বিপদী দ্বিঘাত আকারের হয় এবং ধ্রুবক পদটি ধনাত্মক কিন্তু x^2 এর সহগ যদি ঋণাত্মক হয়, তবে $x = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \sin\theta$ প্রতিস্থাপন করে যোগজীকরণ করা যাবে।]

উদাহরণ 19: $(i) \int \frac{1}{2-3x^2} dx \quad (ii) \int \frac{dx}{5-x^2}$

সমাধান: মনে করুন, $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin\theta$ সুতরাং $dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos\theta\, d\theta$

$\therefore \int \frac{1}{2-3x^2} dx = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos\theta\, d\theta}{2-2\sin^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \sec\theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{6}} \log|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})| + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \log|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}})| + C$

$$(ii) \int \frac{dx}{5-x^2} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}\right)^2 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{\sqrt{5}-x}{\sqrt{5}+x}\right| + C$$

অনুসিদ্ধান্ত: $\int \frac{1}{k^2-x^2} dx = \frac{1}{2k} \log|\frac{k+x}{k-x}| + C$

নিয়ম ২০: $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\, dx$ $(a \neq 0)$ **আকারের যোগজ**

[যোজ্য ফাংশনটির হরে অবস্থিত দ্বিঘাত রাশিটিকে যদি দুটি সরল উৎপাদকে বিভক্ত করা যায় তবে, ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।]

উদাহরণ 20: $\int \frac{1}{6x^2+17x+12}\, dx$

সমাধান: $\int \frac{1}{6x^2+17x+12}\, dx = \int \frac{1}{(2x+3)(3x+4)}\, dx = \int \left[\frac{3}{3x+4} - \frac{2}{2x+3}\right] dx$

$= \int \frac{3}{3x+4}\, dx - \int \frac{2}{2x+3}\, dx = \log(3x+4) - \log(2x+3) + C = \log \frac{3x+4}{2x+3} + C$

নিয়ম ২১: টীকা - রাশিটির দুটি সরল উৎপাদক না হলে, $ax^2+bx+c = a(x+\frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ আকারে প্রকাশ করে,

$x+\frac{b}{2a} = z$ ধরলে, এটি az^2+c আকারের রাশিতে রূপান্তরিত হবে, পরে উপরের নিয়মে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

নিয়ম ২২: $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\, dx$ **অথবা** $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\, dx$ **আকারের যোগজ**

[যোজ্য বৈজিক ফাংশনটির হরে বর্গমূলের ভিতরে অবস্থিত দ্বিঘাত রাশিটির উৎপাদক করা গেলে, উৎপাদকদ্বয়ের যে কোন একটিকে z^2 প্রতিস্থাপন করে যোগজীকরণ করা যাবে অপরদিকে উৎপাদকদ্বয়ের মধ্যে যদি কোন একটি x ঋণাত্মক হয় তবে $\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$ দ্বারা বিশেষ ত্রিকোণমিতিক প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে যোগজ নির্ণয় করা যাবে।]

উদাহরণ 21: (i) $\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)(x-2)}}\, dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}\, dx$

সমাধান: (i) মনে করুন $z^2 = x-3 \therefore 2z\, dz = dx$ এবং $x = 3+z^2$

অতএব, $\int \frac{1}{\sqrt{(x-3)(x-2)}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{z^2(1+z^2)}} 2z dz = 2\int \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} dz$

$= 2\log(z+\sqrt{z^2+1}) + C = 2\log(\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}) + C$

(ii) ধরুন, $x = 2\cos^2\theta+3\sin^2\theta \Rightarrow x=3-\cos^2\theta,\ x=2+\sin^2\theta \therefore dx = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}} = \int \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta}} d\theta = 2\int d\theta = 2\theta + C = 2\sin^{-1}\sqrt{x-2} + C$

নিয়ম ২৩: $\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}}\, dx$ **অথবা** $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$ **আকারের যোগজ**

[যোজ্য বৈজিক ফাংশনটি যদি বর্গমূলের ভিতরে দুটি একঘাত রাশির ভাগফল আকারের হয় তবে লব দ্বারা আনুপাতিকরণ করে প্রথমে লবের সার্ড মুক্ত করে, পরবর্তীতে হরে অবস্থিত দ্বিঘাত রাশিটির অবস্থাভেদে যোগজীকরণ করা যাবে।]

উদাহরণ 22: (i) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$ (ii) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x2+2x+5}}\, dx$

সমাধান: (i) মনে করুন, $I = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx = \int \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \int \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$

মনে করুন, $x=a\sin\theta \therefore dx = a\cos\theta d\theta \therefore I = \int \frac{a.a\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}} d\theta + \int \frac{a.\sin\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}} a\cos\theta\, d\theta$

$= a\int d\theta + a\int \sin\theta\, d\theta = a\theta + a\cos\theta + C = a\sin^{-1}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$

(ii) যোগজটির লবে অবস্থিত 2x+3কে $1.\frac{d}{dx}(x^2+2x+5)+1$ আকারে প্রকাশ করে পাওয়া যাবে

$$\int\frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{\frac{d}{dx}(x^2+2x+5)}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=2\sqrt{x^2+2x+5})+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$=2\sqrt{x^2+2x+5})+\int\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx=2\sqrt{x^2+2x+5})+\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}+C$$

নিয়ম ২৪: $\int\frac{1}{(ax+b)\sqrt{px^2+qx++r}}$ **dx আকারের যোগজ**

[যোজ্য ফাংশনটির হরে অবস্থিত দ্বিঘাত রাশিটি যদি বর্গমূলের ভিতরে কিন্তু একঘাত রাশিটি বাইরে থাকে তবে বাইরের একঘাত রাশিটিকে $\frac{1}{z}$ প্রতিস্থাপন করে যোগজীকরণ করা যাবে।]

উদাহরণ 23: $\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx$

সমাধান ঃ মনে করুন, $x+1=\frac{1}{z}\ \therefore\ dx=-\frac{1}{z^2}\,dz$ এবং $x=\frac{1}{z}-1\ \therefore\ 1+2x-x^2=\frac{4z-1-2z^2}{z^2}$

এখন $\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx=-\int\frac{1}{\sqrt{4z-1-2z^2}}\,dz=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-(z-1)^2}}\,dz$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\{\sqrt{2}(z-1)\}+C=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{2}x}{1+x}+C$

শিক্ষার্থীর কাজ	(i) $\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$	(ii) $\int\frac{1}{x\sqrt{2+x^2}}\,dx$	(iii) $\int\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}dx$

নিয়ম ২৫: $\int\frac{1}{(cx^2+d)\sqrt{ax^2+b}}$ **dx আকারের যোগজ**

[যোজ্য বৈজিক ফাংশনটির হরে যদি দ্বিঘাত আকারের একটি রাশি থাকে এবং অপর দ্বিঘাত রাশিটি বর্গমূলের ভিতরে অবস্থিত হয় তবে, বর্গমূলের ভিতরে অবস্থিত রাশিটিকে z^2x^2 প্রতিস্থাপন করে যোগজীকরণ করা যাবে।

উদাহরণ 24: $(i)\int\frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{3+2x^2}}$ $(ii)\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$

সমাধান: (i)মনে করুন, $3+2x^2=x^2z^2\ \therefore\ 4xdx=x^2\,2zdz+2xz^2dx$

$\Rightarrow\ 2dx=xzdz+z^2dx\Rightarrow\ 2dx-z^2dx=xzdz\ \therefore\ dx=\frac{xz}{2-z^2}dz$

$\therefore$ ধরুন $I=\int\frac{dx}{(4-x^2)\sqrt{3+2x^2}}=\int\frac{\frac{xz}{2-z^2}\,dz}{(4-\frac{3}{z^2-2})xz}=\int\frac{1}{11-4z^2}\,dz$

এবার, $z=\frac{\sqrt{11}}{2}\sin\theta$ হলে, $dz=\frac{\sqrt{11}}{2}\cos\theta\,d\theta$

$\therefore\ I=\int\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}\cos\theta\,d\theta}{11-\frac{11}{4}4\sin^2\theta}=\frac{1}{2\sqrt{11}}\int\sec\theta\,d\theta=\frac{1}{2\sqrt{11}}\log|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2})|+C$

$= \frac{1}{2\sqrt{11}} \log|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2z}{\sqrt{11}}|+C = \frac{1}{2\sqrt{11}}\log|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{3+2x^2}}{\sqrt{11}}|+C$

(ii) ধরুন, $a^2+x^2 = x^2z^2 \therefore 2x\,dx = x^2 2z\,dz + 2xz^2\,dx \Rightarrow dx = \frac{xz}{1-z^2}dz$

এখন $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)3}} = \int\frac{\frac{xz}{1-z^2}dz}{x^3z^3} = \int \frac{dz}{x^2z^2(1-z^2)} = -\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{z^2}dz = \frac{1}{a^2 z}+C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৩

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $\int\frac{dx}{1+x^2}$ -এর যোজিত ফল কোনটি?

(ক) $\sin^{-1}x$ (খ) $\cot^{-1}x+C$ (গ) $\tan^{-1}x$ (ঘ) $\tan^{-1}x+C$

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ -এর যোজিত ফল কোনটি?

(ক) $\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$ (খ) $\cos^{-1}\frac{x}{a}+C$ (গ) $\cot^{-1}\frac{x}{a}$ (ঘ) $\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ -এ a এর মান কোনটি?

(ক) 2 (খ) $\sqrt{2}$ (গ) 3 (ঘ) $\sqrt{3}$

4. $\int \cos ecx dx$ কত?

$(i)\ -\ln|\cos ecx+\cot x|+C$ $(ii)\ -\ln\left|\cot\frac{x}{2}\right|+C$ $(iii)\ \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) $(i),(ii)$ ও (iii)

নিচের তথ্যের আলোকে 5-6 নং প্রশ্নের উত্তর দিন

$\int f(t)dt = g(t)+C$

5. $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}$ হলে $g(t)$ কোনটি?

(ক) $\ln\left|t-\sqrt{t^2+a^2}\right|$ (খ) $\ln\left|t-\sqrt{t^2-a^2}\right|$ (গ) $\ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right|$ (ঘ) $\ln\left|t+\sqrt{t^2+a^2}\right|$

6. $g(t)=\ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right|$ হলে $f(t)$ কোনটি?

(ক) $\frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}$ (খ) $\frac{a}{\sqrt{a^2+t^2}}$ (গ) $\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}$ (ঘ) $\frac{t}{\sqrt{t^2-a^2}}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

7. ধরুন, $f(t)=t^2$ এবং $g(t)=t$

(ক) $\int \frac{dt}{1+\cos^2 t}$ নির্ণয় করুন।

(খ) $\int g(t)\sin\left(f(t)\right)dt$ এবং $\int g(t)\sin^2\left(f(t)\right)dt$ নির্ণয় করুন।

(গ) $\frac{1}{\left[1-g(t)\right]\left[\sqrt{1-f(t)}\right]}$ এর যোগজ নির্ণয় করুন।

যোগজ নির্ণয় করুন

8. $(i)\int (4+3x)^5 dx$ $(ii)\int \frac{dx}{9-4x^2}$ $(iii)\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$ $(iv)\int \cot^6 x dx$

$(v)\int \sqrt{\left(\frac{3x+2}{2x+3}\right)}dx$ $(vi)\int \frac{3dx}{x^2-8x+25}$ $(vii)\int \frac{dx}{\sqrt{(3x^2-4x+2)^3}}$ $(viii)\int \frac{1}{(4+x^2)\sqrt{1+4x^2}}dx$

$(ix)\int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}dx$ $(x)\int \frac{1}{4x^2-9}dx$

9. $(i)\int \frac{dx}{16+9x^2}$ $(ii)\int \operatorname{cosec}^8 x dx$ $(iii)\int \sec^8 x dx$ $(iv)\int \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$

$(v)\int \frac{1}{\sin x+\cos x+2}dx$ $(vi)\int \frac{1}{5-3\cos x}dx$ $(vii)\int \frac{1}{5+4\sin^2 x}dx$ $(viii)\int \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x\cos^3 x}}dx$

$(ix)\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{2x^2-12x+17}}$ $(x)\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}dx$

পাঠ ১০.৪ আংশিক ভগ্নাংশ ব্যবহার করে অনির্দিষ্ট যোগজ (Integration by Partial Fractions)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- আংশিক ভগ্নাংশ ব্যবহার করে অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	মূলদ ভগ্নাংশ, অভেদ, পুনরাবৃত্ত উৎপাদক, আংশিক ভগ্নাংশ, কভার আপ রুল (Cover-up rule)

মূলপাঠ

যোজ্য ফাংশনটি যদি একটি বীজগাণিক মূলদ ভগ্নাংশ আকারে থাকে তবে এর যোগজ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রথমে মূলদ ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তরিত করে কয়েকটি সরল ভগ্নাংশে পরিবর্তন করতে হবে এবং পরে পৃথকভাবে এদের যোগজীকরণ করতে হবে। এখানে উদাহরণ হিসাবে বিভিন্ন প্রকারের মূলদ ভগ্নাংশের রূপান্তরের মাধ্যমে কয়েকটি যোগজীকরণ পদ্ধতি দেখানো হলো।

আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয়ের শর্ত: বীজগাণিক মূলদ ভগ্নাংশটির হরে অবস্থিত রাশিটিকে এর চলকের কয়েকটি একঘাত, দ্বিঘাত এবং একঘাত পুনরাবৃত্ত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে, এদেরকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করা যাবে।

মূলদ ভগ্নাংশের যোগজ নির্ণয়: যদি $g(x)$ এবং $h(x)$ বহুপদী হয়, তবে $\frac{g(x)}{h(x)}$ আকারের ফাংশনকে মূলদীয় ফাংশন বলে। মূলদীয় ফাংশনের যোগজীকরণের জন্য ফাংশনটিকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করার পর পৃথক পৃথকভাবে যোগজ নির্ণয় করতে হয়। মূলদীয় ফাংশনকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করার জন্য নিম্নলিখিত নিয়মগুলি অনুসরণ করা যেতে পারে।

নিয়ম ১: (i) লবের ঘাত $<$ হরের ঘাত হলে অর্থাৎ $\frac{ax^2+bx+c}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \equiv \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma}$

(ii) লবের ঘাত $=$ হরের ঘাত হলে অর্থাৎ $\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} \equiv A+\frac{B}{x-\alpha}+\frac{C}{x-\beta}+\frac{D}{x-\gamma}; a\neq 0$

(iii) লবের ঘাত $=$ হরের ঘাত $+1$ হলে অর্থাৎ $\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-\alpha)(x-\beta)} \equiv Ax+B+\frac{C}{x-\alpha}+\frac{D}{x-\beta}; a\neq 0$

(iv) হরের উৎপাদকে ঘাত পুনরাবৃত্ত হলে অর্থাৎ $\frac{ax^2+bx+c}{(x-\alpha)^2(x-\beta)} \equiv \frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{x-\beta}$

(v) হরের উৎপাদকে দ্বিঘাত হলে অর্থাৎ $\frac{ax^2+bx+c}{(x^2+\alpha)(x-\beta)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+\alpha}+\frac{C}{x-\beta}$

উদাহরণ 1: যোগজ নির্ণয় করুন, (i) $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)}$ (ii) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$ (iii) $\int \frac{dx}{(x-4)(x+7)}$

সমাধান: (i) মনেকরুন, $\frac{1}{(x-a)(x-b)} \equiv \frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$; $A,B\in\Re$

উভয় পক্ষকে $(x-a)(x-b)$ দ্বারা গুণ করে পাই, $1\equiv A(x-b)+B(x-a)$, যা x এর একটি অভেদ।

অভেদটিতে x এর মান a এবং b বসিয়ে পাই, $A=\frac{1}{a-b}$ এবং $B=\frac{1}{b-a}$

$$\therefore \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\frac{1}{a-b}}{x-a}+\frac{\frac{1}{b-a}}{x-b}$$

অতএব, $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \int \frac{\frac{1}{a-b}}{x-a}\,dx + \int \frac{\frac{1}{b-a}}{x-b}\,dx = \frac{1}{a-b}\int\frac{dx}{x-a}+\frac{1}{b-a}\int\frac{dx}{x-b}$

$$=\frac{1}{a-b}\ln|x-a|+\frac{1}{b-a}\ln|x-b|+C=\frac{1}{a-b}\ln|x-a|-\frac{1}{a-b}\ln|x-b|+C=\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C$$

(ii) ধরুন, $\frac{1}{(x-1)(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$; $A,B\in\Re$

উভয় পক্ষকে $(x-1)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই, $1\equiv A(x-2)+B(x-1)$, যা x এর একটি অভেদ।

অভেদটিতে x এর মান 1 এবং 2 বসিয়ে পাই, $A=-1$ এবং $B=1$

$$\therefore \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$$

অতএব, $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{-1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx = -1.\int\frac{dx}{x-1}+1.\int\frac{dx}{x-2}$

$$= -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln|x-2| - \ln|x-1| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$$

(iii) ধরুন, $\frac{1}{(x-4)(x+7)} \equiv \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+7}$; $A,B \in \Re$

উভয় পক্ষকে $(x-4)(x+7)$ দ্বারা গুণ করে পাই, $1 \equiv A(x+7) + B(x-4)$, যা x এর একটি অভেদ।

অভেদটিতে x এর মান 4 এবং -7 বসিয়ে পাই, $A = \frac{1}{11}$ এবং $B = \frac{-1}{11}$

$$\therefore \frac{1}{(x-4)(x+7)} = \frac{\frac{1}{11}}{x-4} + \frac{\frac{-1}{11}}{x+7}$$

অতএব, $\int \frac{dx}{(x-4)(x+7)} = \int \frac{\frac{1}{11}}{x-4} dx + \int \frac{\frac{-1}{11}}{x+7} dx = \frac{1}{11}\int \frac{dx}{x-4} - \frac{1}{11}\int \frac{dx}{x+7}$

$$= \frac{1}{11}\ln|x-4| - \frac{1}{11}\ln|x+7| + C = \frac{1}{11}\ln\left|\frac{x-4}{x+7}\right| + C$$

উদাহরণ 2: (i) $\int \frac{x}{(x-a)(x-b)} dx$ (ii) $\int \frac{xdx}{(x-2)(x+5)}$ (iii) $\int \frac{x}{(2x+1)(x+1)} dx$ নির্ণয় করুন ।

সমাধানঃ (i) মনে করুন, $\frac{x}{(x-a)(x-b)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$; $A,B \in \Re$

উভয় পক্ষকে $(x-a)(x-b)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x \equiv A(x-b) + B(x-a)$ ... ... (1) , যা x এর একটি অভেদ।

অভেদটিতে x এর মান a এবং b বসিয়ে পাই, $A = \frac{a}{a-b}$ এবং $B = \frac{b}{b-a}$

$$\therefore \frac{x}{(x-a)(x-b)} = \frac{\frac{a}{a-b}}{x-a} + \frac{\frac{b}{b-a}}{x-b}$$

অতএব, $\int \frac{x}{(x-a)(x-b)} dx = \int \frac{\frac{a}{a-b}}{x-a} dx + \int \frac{\frac{b}{b-a}}{x-b} dx = \frac{a}{a-b}\int \frac{dx}{x-a} + \frac{b}{b-a}\int \frac{dx}{x-b}$

$$= \frac{a}{a-b}\ln|x-a| + \frac{b}{b-a}\ln|x-b| + C = \frac{a}{a-b}\ln|x-a| - \frac{b}{a-b}\ln|x-b| + C$$

(ii) ধরুন, $\frac{x}{(x-2)(x+5)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$; $A,B \in \Re$

উভয় পক্ষকে $(x-2)(x+5)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x \equiv A(x+5) + B(x-2)$ ... ... (1), যা x এর একটি অভেদ।

অভেদটিতে x এর মান 2 এবং -5 বসিয়ে পাই, $A = \frac{2}{7}$ এবং $B = \frac{5}{7}$

$\therefore \dfrac{x}{(x-2)(x+5)} = \dfrac{\frac{2}{7}}{x-2} + \dfrac{\frac{5}{7}}{x+5}$

অতএব, $\int \dfrac{xdx}{(x-2)(x+5)} = \int \dfrac{\frac{2}{7}}{x-2}dx + \int \dfrac{\frac{5}{7}}{x+5}dx = \dfrac{2}{7}\int\dfrac{dx}{x-2} + \dfrac{5}{7}\int\dfrac{dx}{x+5} = \dfrac{2}{7}\ln|x-2| + \dfrac{5}{7}\ln|x+5| + C$

উদাহরণ 3: যোগজ নির্ণয় করুন, (i) $\int \dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\, dx$ (ii) $\int \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}\, dx$

সমাধান : (i) ধরুন, $\dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = \dfrac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+2}$; $A,B,C \in \Re$

বাম পক্ষের হর দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করে পাই, $2x+3 \equiv A(x-1)(x+2)+B\, x(x+2)+C\, x(x-1)$ ... ... (1) যা, x এর একটি অভেদ।

এখন, অভেদটিতে x এর মান 0,1,–2 বসিয়ে পাই, $A = -\dfrac{3}{2}, B = \dfrac{5}{3}, C = -\dfrac{1}{6}$

অতএব, $\int \dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx = -\dfrac{3}{2}\int \dfrac{1}{x}dx + \dfrac{5}{3}\int\dfrac{1}{x-1}dx - \dfrac{1}{6}\int\dfrac{1}{x+2} = -\dfrac{3}{2}\ln|x| + \dfrac{5}{3}\ln|(x-1)| - \dfrac{1}{6}\ln|(x+2)| + C$

(ii) মনে করুন, $\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x-2}$; $A,B,C \in \Re$

বাম পক্ষের হর দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করে পাই, $1 \equiv A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)^2$... (1) যা, x এর একটি অভেদ। এখন অভেদটিতে x এর মান 0, 1, 2 বসিয়ে পাই, A= –1, B = –1, C = 1

অতএব, $\int \dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}dx = -\int\dfrac{1}{(x-1)^2}dx - \int\dfrac{1}{x-1}dx + \int\dfrac{1}{x-2}dx$

$= \dfrac{1}{x-1} - \ln|(x-1)| + \ln|(x-2)| + C$

উদাহরণ 4: (i) $\int\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x+3)(x^2+4)}}\,\mathbf{dx}$ (ii) $\int\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}dx$ (iii) $\int\dfrac{x^2-1}{x^2-4}dx$ নির্ণয় করুন ।

সমাধান: (i) মনে করুন, $\dfrac{1}{(x+3)(x^2+4)} \equiv \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$; $A,B,C \in \Re$

বাম পক্ষের হর দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করে পাই, $1 \equiv A(x^2+4)+(Bx+C)(x+3)$ ... ... (1) যা, x এর একটি অভেদ।

এখন অভেদটির x এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ সমীকৃত করে পাই, A+B=0 ; 3B+C=0 ; 4A+3C=1

এবার সমীকরণ সমূহ সমাধান করে পাই, $A = \dfrac{1}{13}$, $B = -\dfrac{1}{13}$, $C = \dfrac{3}{13}$

অতএব, $\int\dfrac{1}{(x+3)(x^2+4)}dx = \dfrac{1}{13}\int\dfrac{1}{x+3}dx - \dfrac{1}{13}\int\dfrac{x-3}{x^2+4}dx = \dfrac{1}{13}\int\dfrac{1}{x+3}dx - \dfrac{1}{26}\int\dfrac{2x}{x^2+4}dx + \dfrac{3}{13}\int\dfrac{1}{x^2+4}dx$

$= \dfrac{1}{13}\ln|x+3| - \dfrac{1}{26}\ln|x^2+4| + \dfrac{3}{26}\tan^{-1}|\dfrac{x}{2}| + C$

(ii) ধরুন, $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} \equiv 1 + \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$; $A,B,C \in \Re$

বাম পক্ষের হর দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (x-a)(x-b)(x-c)+A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+C(x-a)(x-b)$ … … … (1) যা, x এর একটি অভেদ।

অভেদটিতে x এর মান a, b, c বসিয়ে পাই, $A=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}$, $B=\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}$, $C=\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

$$\therefore \int \frac{x^3dx}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \int 1.dx + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}\int \frac{dx}{x-a} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)}\int \frac{dx}{x-b} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\int \frac{dx}{x-c}$$

$$= x + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} \ln|x-a| + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} \ln|x-b| + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} \ln|x-c| + C$$

(iii) $\frac{x^2-1}{x^2-4} = \frac{x^2-4+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{3}{x^2-4} = 1 + \frac{3}{x^2-4} = 1 + \frac{3}{(x-2)(x+2)}$

ধরুন, $\frac{3}{(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

এখানে, $A = \left[\frac{3}{x+2}\right]_{x=2} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$ [Cover-up নিয়মে]

$B = \left[\frac{3}{x-2}\right]_{x=-2} = \frac{3}{-2-2} = \frac{-3}{4}$ [Cover-up নিয়মে]

$$\therefore \frac{3}{(x-2)(x+2)} = \frac{\frac{3}{4}}{x-2} + \frac{\frac{-3}{4}}{x+2}$$

$$\therefore \int \frac{x^2-1}{x^2-4}dx = \int 1.dx + \int \frac{3dx}{(x-2)(x+2)} = \int 1.dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{x-2}dx + \int \frac{\frac{-3}{4}}{x+2}dx$$

$$= \int 1.dx + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+2} = x + \frac{3}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{4}\ln|x+2| + C = x + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

উদাহরণ 5: যোগজ নির্ণয় করুন, (i) $\int \frac{3x^2-5}{(x+2)^3}\, dx$ (ii) $\int \frac{2x^2-7x+3}{x(x+2)^3}\, dx$

সমাধান: (i) ধরুন, $x+2=y$ সুতরাং $dx = dy$

$$\therefore \frac{3x^2-5}{(x+2)^3} = \frac{3(y-2)^2-5}{y^3} = \frac{3y^2-12y+12-5}{y^3} = \frac{3}{y} - \frac{12}{y^2} + \frac{7}{y^3} = \frac{3}{x+2} - \frac{12}{(x+2)^2} + \frac{7}{(x+2)^3}$$

$$\therefore \int \frac{3x^2-5}{(x+2)^3}\, dx = \int \frac{3\, dx}{x+2} - \int \frac{12\, dx}{(x+2)^2} + \int \frac{7\, dx}{(x+2)^3} = 3\ln|x+2| + \frac{12}{x+2} - \frac{7}{2(x+2)^2} + C$$

(ii) মনে করুন, $x+2=y$ সুতরাং $dx = dy$

$$\therefore \frac{2x^2-7x+3}{x(x+2)^3} = \frac{2(y-2)^2-7(y-2)+3}{(y-2)y^3} = \frac{2y^2-15y+25}{(y-2)y^3} = \frac{1}{y^3}\,\frac{25-15y+2y^2}{-2+y}$$

এখন ভাগ প্রক্রিয়া হতে পাই, $\frac{25-15y+2y^2}{-2+y} = -\frac{25}{2} + \frac{25}{4}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{\frac{3}{8}y^3}{y-2}$

$$\therefore \int \frac{2x^2-7x+3}{x(x+2)^3}\, dy = \int \frac{1}{y^3}\frac{25-15y+2y^2}{-2+y}\, dy = \int \frac{1}{y^3}\left[-\frac{25}{2} + \frac{25}{4}y - \frac{3}{8}y^2 + \frac{\frac{3}{8}y^3}{y-2}\right] dy$$

$$= -\int \frac{25}{2y^3}\, dy + \int \frac{25}{4y^2}\, dy - \int \frac{3}{8y}\, dy + \int \frac{3}{8(y-2)}\, dy$$

$$= -\frac{25}{2}\int \frac{1}{(x+2)^3}\, dx + \frac{25}{4}\int \frac{1}{(x+2)^2}\, dx - \frac{3}{8}\int \frac{1}{(x+2)}\, dx + \frac{3}{8}\int \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{25}{4(x+2)^2} - \frac{25}{4(x+2)} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

নিয়ম ২: কভার আপ রুল (Cover-up rule) ঃ মূলদীয় ভগ্নাংশকে কভার-আপ রুলের সাহায্যে সহজে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করে যোগজ নির্ণয় করা যায়। যেমন ঃ $\frac{ax^2+bx+c}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করতে হবে।

এখন, ধরুন, $\frac{ax^2+bx+c}{(x-a)(x-b)(x-c)} \equiv \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}; \quad A, B, C \in \Re$

এখানে, $A = \left[\frac{ax^2+bx+c}{(x-b)(x-c)}\right]_{x=a} = \frac{a.a^2+b.a+c}{(a-b)(a-c)} = \frac{a^3+ab+c}{(a-b)(a-c)}$

$$B = \left[\frac{ax^2+bx+c}{(x-a)(x-c)}\right]_{x=b} = \frac{a.b^2+b.b+c}{(b-a)(b-c)} = \frac{ab^2+b^2+c}{(b-a)(b-c)}$$

$$C = \left[\frac{ax^2+bx+c}{(x-a)(x-b)}\right]_{x=c} = \frac{ac^2+b.c+c}{(c-a)(c-b)} = \frac{ac^2+bc+c}{(c-a)(c-b)}$$

$$\therefore \frac{ax^2+bx+c}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{\frac{a^3+ab+c}{(a-b)(a-c)}}{x-a} + \frac{\frac{ab^2+b^2+c}{(b-a)(b-c)}}{x-b} + \frac{\frac{ac^2+bc+c}{(c-a)(c-b)}}{x-c}$$

উদাহরণ 6: যোগজ নির্ণয় করুন, (i) $\int \frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)}dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)(x-2)(x+2)}$

সমাধান: (i) ধরুন, $\frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+4}; \quad A, B, C \in \Re$

এখানে, $A = \left[\frac{x^2+5x-7}{(x-2)(x+4)}\right]_{x=1} = \frac{1^2+5.1-7}{(1-2)(1+4)} = \frac{1+5-7}{(-1).5} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$ [Cover-up নিয়মে]

$B = \left[\frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x+4)}\right]_{x=2} = \frac{2^2+5.2-7}{(2-1)(2+4)} = \frac{4+10-7}{1.6} = \frac{14-7}{6} = \frac{7}{6}$ [Cover-up নিয়মে]

$C = \left[\frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)}\right]_{x=-4} = \frac{(-4)^2+5.(-4)-7}{(-4-1)(-4-2)} = \frac{16-20-7}{(-5).(-6)} = \frac{16-27}{30} = \frac{-11}{30}$ [Cover-up নিয়মে]

$$\therefore \frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)} = \frac{\frac{1}{5}}{x-1} + \frac{\frac{7}{6}}{x-2} + \frac{-\frac{11}{30}}{x+4} = \frac{1}{5(x-1)} + \frac{7}{6(x-2)} - \frac{11}{30(x+4)}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+5x-7}{(x-1)(x-2)(x+4)}dx = \int \frac{1}{5(x-1)}dx + \int \frac{7}{6(x-2)}dx - \int \frac{11}{30(x+4)}dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| + \frac{7}{6}\ln|x-2| - \frac{11}{30}\ln|x+4| + C$$

(ii) ধরুন, $\frac{(x^2+1)}{(x-1)(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}; \quad A, B, C \in \Re$

এখানে, $A=\left[\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x+2)}\right]_{x=1}=\dfrac{1^2+1}{(1-2)(1+2)}=\dfrac{1+1}{(-1).3}=\dfrac{-2}{3}$ [Cover-up নিয়মে]

$B=\left[\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+2)}\right]_{x=2}=\dfrac{2^2+1}{(2-1)(2+2)}=\dfrac{4+1}{1.4}=\dfrac{5}{4}$ [Cover-up নিয়মে]

$C=\left[\dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}\right]_{x=-2}=\dfrac{(-2)^2+1}{(-2-1)(-2-2)}=\dfrac{4+1}{(-3)(-4)}=\dfrac{5}{12}$ [Cover-up নিয়মে]

$$\therefore \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x+2)}=\frac{\frac{-2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{5}{4}}{x-2}+\frac{\frac{5}{12}}{x+2}=\frac{-2}{3(x-1)}+\frac{5}{4(x-2)}+\frac{5}{12(x+2)}$$

$$\therefore \int\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x+2)}dx=\int\frac{-2}{3(x-1)}dx+\int\frac{5}{4(x-2)}dx+\int\frac{5}{12(x+2)}dx$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{(x-1)}dx+\frac{5}{4}\int\frac{1}{(x-2)}dx+\frac{5}{12}\int\frac{1}{(x+2)}dx=-\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+\frac{5}{12}\ln|x+2|+C$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৪

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $\int\dfrac{5}{t^2+t-6}dt=f(t)+C$ হলে, $f(t)$ কত?

(ক) $\ln\left|\dfrac{t+2}{t+3}\right|$ (খ) $\dfrac{1}{5}\ln\left|\dfrac{t+2}{t-3}\right|$ (গ) $\ln\left|\dfrac{t-2}{t+3}\right|$ (ঘ) $-\ln\left|\dfrac{t-2}{t+3}\right|$

2. $\int\dfrac{dt}{t+t^2}$ এর যোগজ কোনটি?

(ক) $\ln\left|\dfrac{t}{1+t}\right|+C$ (খ) $-\ln\left|\dfrac{t}{1+t}\right|+C$ (গ) $\ln\left|\dfrac{t}{1-t}\right|+C$ (ঘ) $\ln\left|\dfrac{1-t}{1+t}\right|+C$

3. u চলকের ক্ষেত্রে লিখা যাবে -

(i) $\int\dfrac{du}{a^2+u^2}=\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a}+C$ (ii) $\int\dfrac{dx}{a^2-u^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right|+C, u\neq\pm a$

(iii) $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\dfrac{1}{a}\sin^{-1}\dfrac{u}{a}+C$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

4. $\int\dfrac{t-3}{(t+1)(1-2t)}dt$ এর যোগজ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে যখন $\dfrac{t-3}{(t+1)(1-2t)}\equiv\dfrac{A}{t+1}+\dfrac{B}{1-2t}$ লিখা হবে।

(i) A এর মান হবে, $A=-\dfrac{4}{3}$ (ii) B এর মান হবে, $B=\dfrac{-5}{3}$

(iii) $\dfrac{t-3}{(t+1)(1-2t)}=\dfrac{-\frac{4}{3}}{t+1}+\dfrac{-\frac{5}{3}}{1-2t}$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

$\int \frac{x+35}{x^2-25}dx$ এর যোগজ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে যখন $\frac{x+35}{x^2-25} \equiv \frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-5}$ লিখা হলো ।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে 5-7 নং প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

5. A এর মান কোনটি?

(ক) 3 (খ) -3 (গ) $\frac{1}{3}$ (ঘ) $\frac{-1}{3}$

6. B এর মান কত?

(ক) 4 (খ) -4 (গ) $\frac{1}{4}$ (ঘ) $-\frac{1}{4}$

7. $\int \frac{x+35}{x^2-25}dx$ এর যোগজ কোনটি?

(ক) $\frac{1}{4}\ln|x-5|-3\ln|x+5|$ (খ) $4\ln|x-5|-\frac{1}{3}\ln|x+5|+C$

(গ) $4\ln|x-5|-3\ln|x+5|+C$ (ঘ) $4\ln|x-5|+3\ln|x+5|+C$

দেওয়া আছে ঃ $\int f(t)\,dt = \int \frac{2t+1}{(t+2)(t-3)^2}dt$ এবং ধরুন, $\frac{2t+1}{(t+2)(t-3)^2} \equiv \frac{A}{t+2}+\frac{B}{t-3}+\frac{C}{(t-3)^2}$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে 8-10 নং প্রশ্নের উত্তর দিন

8. A এর মান কোনটি?

(ক) -3 (খ) $\frac{7}{5}$ (গ) $\frac{-3}{25}$ (ঘ) $\frac{3}{25}$

9. B এর মান কত?

(ক) $\frac{25}{3}$ (খ) $\frac{7}{5}$ (গ) $\frac{5}{7}$ (ঘ) $-\frac{1}{4}$

10. C এর মান কত?

(ক) $\frac{25}{3}$ (খ) $\frac{7}{5}$ (গ) $\frac{-3}{25}$ (ঘ) $\frac{3}{25}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

11. $f(x)=\frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}$ এবং $h(x)=x$ ও $g(x)=(x+2)^2$ দেওয়া হলো।

(ক) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ নির্ণয় করুন। (খ) $\int \frac{h(x)}{(x^2-1)g(x)}dx$ নির্ণয় করুন।

(গ) $\int \frac{x+2}{(1-x)(x^2+4)}dx$ নির্ণয় করুন।

যোগজগুলি নির্ণয় করুন

12. (i) $\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$ (ii) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-3)}$ (iii) $\int \frac{dx}{(x+5)(x+7)}$ (iv) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$

(v) $\int \frac{dx}{x^2+x-30}$

13. (i) $\int \frac{x}{(2x-1)(x-1)} dx$ (ii) $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} dx$ (iii) $\int \frac{(2x-1)dx}{x(x-1)(x-2)}$ (iv) $\int \frac{(x+1)dx}{(x-3)(x+2)}$

(v) $\int \frac{(x+1)dx}{3x^2-x-2}$

14. (i) $\int \frac{dx}{x(x-1)(x-3)}$ (ii) $\int \frac{x+1}{x^3-3x^2+2x}dx$ (iii) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$

(iv) $\int \frac{(x+2)dx}{x^3-4x^2+3x}$

15. (i) $\int \frac{(x+3)dx}{(1-x)(x^2+4)}$ (ii) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$ (iii) $\int \frac{x^2}{x(x^2-1)} dx$ (iv) $\int \frac{x^2dx}{x(x-1)(x-3)}$

16. (i) $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$ (ii) $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$

17. (i) $\int \frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+4)} dx$ (ii) $\int \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}dx$ (iii) $\int \frac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}dx$

18. (i) $\int \frac{1}{x^3-1} dx$ (ii) $\int \frac{1}{x4-1} dx$ (iii) $\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}dx$ (iv) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$

19. (i) $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$ (ii) $\int \frac{1}{x^2(x-1)^2} dx$ (iii) $\int \frac{1}{(x^2-4)^2} dx$ (iv) $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)^2} dx$

(v) $\int \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} dx$ (vi) $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}dx$

20. (i) $\int \frac{2x-5}{(x+1)^2} dx$ (ii) $\int \frac{x^2-1}{(x-3)^3} dx$ (iii) $\int \frac{4x^2+7}{(x-2)^4} dx$

21. (i) $\int \frac{2x^2-7x+3}{x(x+2)^3} dx$ (ii) $\int \frac{3x-6}{x^3(x+2)} dx$ (iii) $\int \frac{x^3+5}{(x-1)^3(x-2)} dx$

পাঠ ৫ অংশায়ন সূত্রের সাহায্যে যোগজীকরণ (Integration by Parts)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অংশায়ন সূত্র ব্যবহার করে অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	অংশায়ন সূত্র, লগারিদমিক ফাংশন, ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের যোগজ, বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন, ধনাত্মক ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী ফাংশন

মূলপাঠ

যোজ্য ফাংশনটি যদি একই চলকের সাপেক্ষে দুটি ফাংশনের গুণফল আকারে দেয়া থাকে কিন্তু পূর্বে বর্ণিত কোন আকারে এর যোগজ নির্ণয় করা সম্ভব না হয় তবে এর যোগজ নির্ণয়ের জন্য সাধারণতঃ অংশায়ন সূত্র বা সখণ্ড যোগজ প্রক্রিয়া প্রয়োগ করা হয়।

প্রতিজ্ঞা: x-চলকের সাপেক্ষে u এবং v দুটি অন্তরীকরণযোগ্য ফাংশন হলে, $\int u\,v\,dx = u\int v\,dx - \int [\frac{du}{dx}\int v\,dx]\,dx$

প্রমাণ: u এবং w ফাংশনদ্বয় x- চলকের সাপেক্ষে অন্তরীকরণযোগ্য হলে, আমরা জানি, $\frac{d}{dx}(u\,w) = u\frac{dw}{dx}+w\frac{du}{dx}$

যোগজের সংজ্ঞা হতে যোগজীকরণ করে পাই,

$$\Rightarrow uw = \int [u\frac{dw}{dx}+w\frac{du}{dx}]\,dx \Rightarrow uw = \int u\frac{dw}{dx}\,dx+\int w\frac{du}{dx}\,dx$$

$\Rightarrow$ সুতরাং $\int u\frac{dw}{dx}\,dx = uw - \int \frac{du}{dx}\,w\,dx$

এবার যদি $\frac{dw}{dx} = v$ ধরা হয়, তবে $w = \int v\,dx$ হবে।

অতএব, $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int [\frac{du}{dx}\int v\,dx]\,dx$

দ্রষ্টব্য: উপরের প্রতিজ্ঞাটিতে u এবং v উভয়েই x-এর ফাংশন। এখন মনেকরুন, $u = f_1(x)$ এবং $v = f_2(x)$

তাহলে প্রতিজ্ঞাটির আকার $\int f_1(x)\,f_2(x)dx = f_1(x)\int f_2(x)dx - \int\left[\frac{df_1(x)}{dx}\int f_2(x)dx\right]dx$ হবে।

অর্থাৎ **দুটি ফাংশনের গুণফলের যোগজ = প্রথম ফাংশন × দ্বিতীয় ফাংশনের যোগজ – {প্রথম ফাংশনের অন্তরক × দ্বিতীয় ফাংশনের যোগজ} এর যোগজ**

উদাহরণ 1: $\int x\cos x\,dx$

সমাধান: [x-কে প্রথম এবং cosx-কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে সখণ্ড পদ্ধতিতে]

$$= x\int \cos x\,dx - \int [\frac{dx}{dx}\int \cos x\,dx] = x\sin x - \int 1.\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

পক্ষান্তরে cosx-কে প্রথম এবং x-কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে অংশায়ন পদ্ধতিতে যোগজীকরণ করে

$$\int x\cos x\,dx = \cos x\int x\,dx - \int [\frac{d(\cos x)}{dx}\int x\,dx] = \frac{x^2}{2}\cos x + \frac{1}{2}\int x^2\sin x\,dx = ?$$

লক্ষ্যনীয়: $f_1(x)$ এবং $f_2(x)$ এর যে কোনটিকে প্রথম ফাংশন মনে করে যোগজ নির্ণয় করা যেতে পারে কিন্তু উপরের উদাহরণটিতে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে x-কে প্রথম ফাংশন ধরে যোগজ নির্ণয় করা হয়েছে। অথচ cosx-কে প্রথম ফাংশন ধরে যোগজ নির্ণয় করতে গিয়ে, $\int x^2\sin x dx$ পাওয়া গেল। অর্থাৎ যোগজ নির্ণয় প্রক্রিয়া শেষ করা গেল না। যেখানে যোজ্য ফাংশনটি একটি ত্রিকোণমিতিক ফাংশন এবং একটি বহুপদী ফাংশনের গুণফল ছিল, পরবর্তীতে $\int x^2\sin x dx$ এ, x এর ঘাত আরোও বেড়ে গেল, ফলে যোগজ প্রক্রিয়া আরোও দীর্ঘতর হলো।

প্রথম ফাংশন নির্বাচন পদ্ধতি: সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় প্রথম ফাংশন নির্বাচন একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। এটি অনেকটা অভিজ্ঞতা ও পর্যবেক্ষণের উপর নির্ভরশীল। এই প্রক্রিয়ায় প্রথম ফাংশন নির্বাচনের কোন ধরাবাঁধা নিয়ম নাই। তবে সাধারণত যে ফাংশনের যোগজ নির্ণয় অপেক্ষাকৃত জটিলতর তাকেই প্রথম ফাংশন নির্বাচন করা সুবিধাজনক। অভিজ্ঞতার আলোকে এখানে কিছু পরামর্শ দেয়া হলো। তবে মনে রাখতে হবে যে, এই নিয়মের ব্যতিক্রমও হতে পারে। কিন্তু প্রাথমিক ভাবে এটি সহজে কার্যকরী হবে। নিচে কয়েকটি ফাংশনের তালিকা ধারাবাহিকভাবে দেয়া হলো। এদের ক্রমকে প্রথম ফাংশন নির্বাচনে অগ্রাধিকার দিতে হবে।

1. **L**ogarithmic Functions [লগারিদম্ ফাংশন]
2. **I**nverse Circular Functions [বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশন]
3. **P**olynomial Functions [ধনাত্মক ঘাতবিশিষ্ট বহুপদী ফাংশন]
4. **T**rigonometric Functions [ত্রিকোণমিতিক ফাংশন]
5. **E**xponential Functions [সূচক ফাংশন]

6. **R**epeated Functions [পূনরাবৃত্ত ফাংশন]
7. **O**ther Special Functions [অন্যান্য বিশেষ ফাংশন]

দ্রষ্টব্য: প্রথম ফাংশন নির্বাচনের নিয়মকে **LIPTERO** শব্দটি দ্বারা মনে রাখা যেতে পারে।

মনে করুন, যোজ্য ফাংশনটি $\int x\ln x dx$, এখানে x হলো Polynomial ফাংশন অর্থাৎ **P** ফাংশন এবং $\ln x$ হলো Logarithmic ফাংশন অর্থাৎ **L** ফাংশন। অতএব, **P** ও **L** ফাংশনের গুণফলের যোগজ নির্ণয় করতে **LIPTERO** শব্দটিতে প্রথমে **L** থাকায় $\ln x$ -কে প্রথম ফাংশন ধরতে হবে।

আবার যদি যোজ্য ফাংশনটি $\int x\sec^2 x\ dx$ হয় তবে এখানে x হলো Polynomial ফাংশন অর্থাৎ **P** ফাংশন এবং $\sec^2 x$ হলো তালিকা অনুযায়ী Others ফাংশন অর্থাৎ **O** ফাংশন। অতএব, **P** ও **O** ফাংশনের গুণফলের যোগজ নির্ণয় করতে **LIPTERO** শব্দটিতে **P** প্রথমে থাকায় x-কে প্রথম ফাংশন ধরতে হবে।

সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ার কয়েকটি বিশেষ আকার

নিয়ম ১: $\int f_1(x) f_2(x)\, dx$ **আকারের যোগজ**

যোজ্য ফাংশনটি দুটি ফাংশনের গুণফল হলে, প্রথমে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয়ের চেষ্টা করতে হবে। কিন্তু সম্ভব না হলে,উপরের তালিকা হতে প্রথম ফাংশন নির্বাচন করে সখণ্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় যোগজীকরণ করতে হবে।

উদাহরণ 2: (i) $\int x\ln x dx$ (ii) $\int x\tan^{-1}x\ dx$ (iii) $\int x\sec^2 x\ dx$ (iv) $\int xe^x\ dx$

সমাধান: (i) $\int x\ln x dx$ [প্রথম ফাংশন $\ln x$]

$$= \ln x\int x dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\ln x)\int x dx\right]dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\left[\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}\right]dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

(ii) $\int x\tan^{-1}x\ dx$ [প্রথম ফাংশন $\tan^{-1}x$]

$$= \tan^{-1}x\int x\ dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int x\ dx\right]dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\ dx = \frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \tan^{-1}x + C$$

(iii) $\int x\sec^2 x\ dx$ [প্রথম ফাংশন হবে, x]

$$= x\int\sec^2 x\ dx - \int\left[\frac{dx}{dx}\int\sec^2 x\ dx\right]dx = x\tan x - \int[1.\tan x]\ dx = x\tan x + \log_e\cos x + C$$

(iv) $\int x\,e^x\ dx$ [প্রথম ফাংশন হবে, x]

$$= x\int e^x\ dx - \int\left[\frac{dx}{dx}\int e^x dx\right]dx = x\,e^x - \int[1.\,e^x]\ dx = x\,e^x - e^x + C$$

নিয়ম ২: লগারিদম ফাংশনের যোগজ নির্ণয়

প্রতি অন্তরজ হিসাবে লগারিদম ফাংশনের যোগজ না থাকায় এর যোগজ নির্ণয়ের জন্য উক্ত ফাংশনকে প্রথম ফাংশন এবং **1** সংখ্যাটিকে একটি গুণিতক ফাংশন ধরে অংশায়ন প্রক্রিয়ায় লগারিদম ফাংশনের যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ 3: $(i)\ \int\ln x dx$ $(ii)\ \int(\ln x)^2 dx$ $(iii)\ \int\ln\left(x^2-5x+4\right)dx$

$(iv)\ \int\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)dx$

সমাধান: $(i)\ \int\ln x dx$ [$\ln x$ কে প্রথম ফাংশন এবং 1 কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে]

$$= \ln x\int 1\ dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\ln x)\int 1 dx\right]dx = x\ln x - \int\left[\frac{1}{x}.x\right]dx = x\ln x - x + C$$

(ii) $\int(\ln x)^2\ dx$ [$(\ln x)^2$ কে প্রথম ফাংশন এবং 1 কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে]

$$= (\ln x)^2\int 1\ dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\ln x)^2\int 1 dx\right]dx = x(\ln x)^2 - \int[2\frac{1}{x}\ln x.\,(x)\ dx$$

$= x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx = x(\ln x)^2 - 2[x\ln x - \int [\frac{1}{x}.x]\,dx] = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$

(iii) $\int \ln(x^2-5x+4)\,dx = \int \ln(x-1)dx + \int \ln(x-4)\,dx$

$= \ln(x-1)\int 1dx - \int\left[\frac{d}{dx}\left(\ln(x-1)\right)\int 1dx\right]dx + \ln(x-4)\int 1dx - \int\left[\frac{d}{dx}\left(\ln(x-4)\right)\int 1dx\right]dx$

$= x\ln(x^2-5x+4) - \int\frac{x}{x-1}dx - \int\frac{x}{x-4}dx = x\ln(x^2-5x+4) - 2\int dx + \int\frac{1}{x-1}dx - 4\int\frac{1}{x-4}dx$

$= x\ln(x^2-5x+4) - 2x - \ln(x-1) - 4\ln(x-4) + C$

(iv) ধরুন, $I = \int (\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\,dx$

$= (\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\int 1\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)\int 1dx\right]dx$

$= x(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$ মনে করুন, $I_1 = \int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

এখন ধরুন, $z^2 = x^2+a^2$ $\therefore$ $2z\,dz = 2x\,dx$ $\therefore$ $I_1 = \int\frac{z\,dz}{\sqrt{z^2}} = \int dz = z + C = \sqrt{x^2+a^2} + C$

সুতরাং $I = x(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) - \sqrt{x^2+a^2} + C$

নিয়ম ৩: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের যোগজ

প্রতিঅন্তরজ হিসাবে বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের যোগজ না থাকায় বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের যোগজ নির্ণয়ের জন্য উক্ত ফাংশনকে প্রথম ফাংশন এবং **1** কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে যোগজ প্রক্রিয়ায় বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ 4: (i) $\int\cos^{-1}x\,dx$ (ii) $\int(\sin^{-1}x)^2\,dx$

(iii) $\int\tan^{-1}x\,dx$ নির্ণয় কর এবং এটি হতে $\int\cot^{-1}x\,dx$ এর মান নির্ণয় কর ।

সমাধান: (i) ধরুন, $I = \int\cos^{-1}x\,dx = \cos^{-1}x\int 1\,dx - \int[\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)\int 1\,dx]\,dx$

$= x\cos^{-1}x + \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\cos^{-1}x + I_1$ যেখানে $I_1 = \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

এখন ধরুন, $z^2 = 1-x^2$ $\therefore$ $2z\,dz = -2x\,dx$ $\Rightarrow$ $-z\,dz = x\,dx$

$\therefore$ $I_1 = -\int dz = -z + C = -\sqrt{1-x^2} + C_1$ সুতরাং $I = x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2} + C$

(ii) মনে করুন, $I = \int(\sin^{-1}x)^2\,dx = (\sin^{-1}x)^2\int 1\,dx - \int[\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)^2\int 1\,dx]\,dx$

$= x(\sin^{-1}x)^2 + 2\int\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x(\sin^{-1}x)^2 + 2I_1$ যেখানে, $I_1 = \int\frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

এখন ধরুন, $z = \sin^{-1}x$ $\Rightarrow$ $x = \sin z$ সুতরাং $dz = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

এবার, $I_1 = \int z\sin z\,dz = z\int\sin z\,dz - \int[\frac{dz}{dz}\int\sin z\,dz]\,dz$

$= -z\cos z + \int\cos z\,dz = \sin z - z\cos z + C_1 = x - (\sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2} + C_1$

অতএব, $\int(\sin^{-1}x)^2\,dx = x(\sin^{-1}x)^2 + 2[x - \sin^{-1}x)\sqrt{1-x^2}] + C$

(iii) $\int\tan^{-1}x\,dx = \tan^{-1}x\int 1\,dx - \int[\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)\int 1\,dx]\,dx$

$= x\tan^{-1}x - \int\frac{x}{1+x^2}\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log_e(1+x^2) + C$

অতএব, $\int \tan^{-1}x\,dx = x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log_e(1+x^2) + C$

এখন $\int \cot^{-1}x\,dx = \int [\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x]\,dx = \frac{\pi}{2}\int dx - \int \tan^{-1}x\,dx$

$= \frac{\pi}{2}x - [x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C] = x(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

সুতরাং $\int \cot^{-1}x\,dx = x\cot^{-1}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

নিয়ম ৪: $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ এবং $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ আকারের যোগজ

[যোজ্য ফাংশনটি যদি e^{ax} পুনরাবৃত্ত ফাংশন এবং অপর একটি পুনরাবৃত্ত ফাংশন sinbx অথবা cosbx এর গুণফল হয় তবে যোগজটিকে **I** মনে করে e^{ax} কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে যোগজ প্রক্রিয়ায় যোগজীকরণ করে যেতে হবে যতক্ষণ না যোজ্য ফাংশনটি পুনরাবৃত্ত হয়। যোজ্য ফাংশনটি পুনরাবৃত্ত হলে, **I** এর মান নির্ণয় করতে হবে। এছাড়া

$(i)\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$ এবং $(ii)\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C$

সূত্র ব্যবহার করেও যোগজ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 5: (i) $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$ (ii) $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

সমাধান: (i) মনেকরুন, $I = \int e^{3x}\sin 2x\,dx$ এখন e^{3x}কে প্রথম ফাংশন ধরে সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় পাই,

$I = -e^{3x}\frac{\cos 2x}{2} + \int 3e^{3x}\frac{\cos 2x}{2}dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

পুনরায় $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ যোগজের e^{3x}কে প্রথম ফাংশন ধরে সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় পাই,

$I = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{2}\,[\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx]$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x - \frac{9}{4}I + C_1$

$\Rightarrow \frac{13}{4}I = \frac{1}{4}e^{3x}(3\sin 2x - 2\cos 2x) + C_1 \quad \therefore I = \frac{1}{13}e^{3x}(3\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

(ii) ধরুন, $I = \int e^{2x}\cos 3x\,dx$ এখন e^{2x}কে প্রথম ফাংশন ধরে সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় পাই,

$I = e^{2x}\frac{\sin 3x}{3} - \int 2e^{2x}\frac{\sin 3x}{3}dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

পুনরায় $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ যোগজের e^{2x} কে প্রথম ফাংশন ধরে সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় পাই,

$I = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\,[-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x\,dx]$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}I + C_1$

$\Rightarrow \frac{13}{9}I = \frac{1}{9}e^{2x}(3\sin 3x - 2\cos 3x) + C_1 \quad \therefore I = \frac{1}{13}e^{3x}(3\sin 3x - 2\cos 3x) + C$

নিয়ম ৫: $\int e^{x}[f(x) + f'(x)]\,dx$ আকারের যোগজ

[পূর্বেই দেখানো হয়েছে যে, প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে উক্ত আকারের যোগজ নির্ণয় করা যায়। সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়া দ্বারাও উক্ত আকারের যোগজ নির্ণয় করা যেতে পারে।]

উদাহরণ 6: (i) $\int e^{x}(\ln\sin x + \cot x)\,dx$ (ii) $\int \frac{x e^{x}}{(1+x)^2}\,dx$

সমাধানঃ (i)$\int e^x (\ln\sin x + \cot x)\, dx = \int e^x \ln\sin x\, dx + \int e^x \cot x)\, dx$

$= e^x \ln\sin x + C - \int\left[\frac{d(\ln\sin x)}{dx}\int e^x dx\right]dx + \int e^x \cot x)dx$ [প্রথম অংশকে সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় যোগজীকরণ করে]

$= e^x \ln\sin x - \int e^x \cot x\, dx + \int e^x \cot x\, dx = e^x \ln\sin x + C$

(ii) $\int \frac{x\, e^x}{(1+x)^2}\, dx = \int e^x\left[\frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1+x)^2}\right] dx$

$= \int e^x \frac{1}{(1+x)}\, dx - \int e^x \frac{1}{(1+x)^2}\, dx$

$= \frac{e^x}{(1+x)} + C + \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\, dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2}\, dx$ [প্রথম অংশকে সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় যোগজীকরণ করে]

$= \frac{e^x}{(1+x)} + C$

নিয়ম ৬ঃ $\int \sqrt{ax+bx+c}\, dx$ আকারের যোগজ

দ্বিঘাত রাশি ax^2+bx+c কে সাধারণতঃ দ্বিপদী অথবা ত্রিপদী হিসাবে পাওয়া যায়। x^2 এর সহগকে উৎপাদক হিসাবে বের করে নেওয়ার পর, দ্বিপদী হলে, $x^2 \pm k^2$ ও $k^2 - x^2$ এবং ত্রিপদী হলে, $(x+\alpha)^2 \pm k^2$ ও $k^2-(x+\alpha)^2$ আকারে পাওয়া যাবে। যেখানে a এবং α দুটি পরিবর্তনশীল ধ্রুবক। এক্ষেত্রে $x+\alpha$ কে z ভাবলেই সেগুলো আগের মত আকার পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 7: (i) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$ (ii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

সমাধানঃ (i) মনে করুন, $I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,.\,1dx$

এখন $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ কে প্রথম ফাংশন ধরে সখন্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় পাই, $I = \sqrt{x^2 \pm a^2}\,.\int 1dx - \int\left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\int 1.dx\right]dx$ =

$x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2 \pm a^2 - (\pm a^2)}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$

$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}\sqrt{x^2 \pm a^2} - (\pm a^2)}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,.\,1\, dx + (\pm a^2)\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx$

$\Rightarrow\ 2I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} + (\pm a^2)\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$

সুতরাং $I = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2} a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C$

(ii) মনে করুন, $x = a\sin\theta \quad \therefore\ dx = a\cos\theta\, d\theta$

সুতরাং $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\; a\cos\theta\, d\theta = a^2\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2} a^2\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta$

$= \frac{1}{2} a^2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right] + C = \frac{1}{2} a^2\left[\theta + \sin\theta\cos\theta\right] + C = \frac{1}{2} a^2 \sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C$

নিয়ম ৭ঃ $\int \sec^n x\ dx$ অথবা $\int \mathrm{cosec}^n x\ dx$ আকারের যোগজ

যোজ্য ফাংশনটি যদি sec অথবা cosec অনুপাতের যে কোন বিজোড় পূর্ণ সাংখ্যিক ঘাত বিশিষ্ট হয় তবে, $\sec^2 x$ অথবা $\operatorname{cosec}^2 x$-কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে সখন্ড পদ্ধতিতে যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ 8: $\int \sec^3 x\, dx$

সমাধান: মনে করুন, $I = \int \sec^3 x\, dx = \int \sec x . \sec^2 x\, dx$ [$\sec^2 x$-কে দ্বিতীয় ফাংশন ধরে]

$= \sec x \int \sec^2 x\, dx - \int [\frac{d}{dx}(\sec x) \int \sec^2 x dx]\, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\, dx$

$= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1)\, dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$

সুতরাং $2I = \sec x \tan x + \int \sec x\, dx$ $\therefore$ $I = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x\, dx$

$= \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \log_e | \tan \frac{x}{2} | + C$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৫

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $\int \tan^{-1} x dx$ এর যোগজ কোনটি ?

(ক) $\tan^{-1} x - \ln |(x^2+1)|$ (খ) $\tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln |(x^2+1)|$

(গ) $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln |(x^2+1)|$ (ঘ) $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln |(x^2+1)| + C$

2. $\int x^2 e^x dx$ এর যোগজ কোনটি ?

(ক) $e^x(x^2-2x+2)$ (খ) $e^x(x^2-2x+2)+C$ (গ) $e^x(x^2-2x)$ (ঘ) x^2-2x+2

3. (i) অনির্দিষ্ট যোগজের ক্ষেত্রে যোগজীকরণ ধ্রুবক থাকবে।

(ii) $\int \ln x dx$ এর যোজিতফল হলো $x \ln x - x + C$ ।

(iii) $\int (\ln x)^2 dx$ এর যোজিতফল হলো $x(\ln x) - 2x \ln x + C$ ।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) $(i), (ii)$ ও (iii)

4. (i) $\int e^x \cos x dx$ এর যোজিতফল নির্ণয়ে সখণ্ড যোগজ প্রক্রিয়ায় যোগজীকরণ করতে হবে।

(ii) $\int e^x \cos x dx$ এর যোজিতফল হবে $\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$ ।

(iii) $\int e^x \cos x dx$ এর যোজিতফল নির্ণয়ে সরাসরি $\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2+b^2} + C$ সূত্র ব্যবহার করে করা যায়।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) $(i), (ii)$ ও (iii)

অংশায়ন সূত্রঃ $\int uv\, dx = u \int v\, dx - \int [\frac{du}{dx} \int v\, dx]\, dx$

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে 5-6 নং প্রশ্নের উত্তর দাও-

5. প্রদত্ত অংশায়ন সূত্র ব্যবহার করে $\int x \ln x dx$ এর যোগজ নির্ণয় করে সঠিক উত্তর বের করুন।

(ক) $\frac{x}{3}\ln x-\frac{1}{4}x+C$ (খ) $\frac{x}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$ (গ) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$ (ঘ) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2$

6. $\int x\ln x dx$ নির্ণয় করে সঠিক উত্তর বের করুন।

(ক) $x\ln x-x$ (খ) $x\ln x-x+C$ (গ) $x\ln x+x+C$ (ঘ) $x^2\ln x+x+C$

সৃজনশীল প্রশ্ন

7. $\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$ একটি সূত্র দেওয়া হলো ।

(ক) প্রদত্ত সূত্র ব্যবহার করে $\int e^{2x}\sin 3x dx$ নির্ণয় করুন।

(খ) অংশায়ন সূত্র ব্যবহার করে $\int e^{2x}\sin 3x dx$ নির্ণয় করুন।

(গ) প্রদত্ত সূত্র ব্যবহার করে $\int e^{5x}\sin 4x dx$ নির্ণয় করুন।

8. $(i)\int x^3 e^{2x}\,dx$ $(ii)\int x^3\log_e x\,dx$ $(iii)\int x\cos^2 3x\,dx$ $(iv)\int x^3(\ln x)^2dx$

$(v)\int\frac{x-\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$ $(vi)\int\frac{x+\sin x}{1-\cos x}dx$ $(vii)\int\frac{\cos^{-1}x}{x^2}dx$ $(viii)\int\cos x\ \ln(\sin x)\ dx$

$(ix)\int e^x\cos^{-1}(e^x)\,dx$ $(x)\int\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

9. $(i)\int\frac{e^x}{x}(1+x\ln x)dx$ $(ii)\int e^x\left[\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\right]dx$ $(iii)\int\sqrt{4x^2-9}\,dx$ $(iv)\int\sqrt{3+10x+3x^2}\,dx$

$(v)\int e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$ $(vi)\int e^{5x}\left(5\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$ $(vii)\int e^{-2x}\left(\frac{1}{x}-2\ln x\right)dx$

পাঠ ১০.৬ নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত সমস্যা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্দিষ্ট যোগজ সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	নির্দিষ্ট যোগজ, সমাকলনের মৌলিক উপপাদ্য, নির্দিষ্ট যোগজের স্কেলার গুণ, যোগজের উর্ধ্বপ্রান্ত ও নিম্নপ্রান্ত

মূলপাঠ

নির্দিষ্ট যোগজ (Definite Integral)

সমাকলনের মৌলিক উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Integral Calculus) যা পাঠ-১ এ আলোচনা করা হয়েছে। মৌলিক উপপাদ্যের সাহায্যে সহজেই নির্দিষ্ট যোগজের মান নির্ণয় সম্ভব।

নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করতে নিচের ধাপগুলি অনুসরন করা প্রয়োজন।

মনে করুন $\int_a^b f(x)\,dx$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রথমতঃ $\int f(x)dx$ এর অনির্দিষ্ট যোগজ $\phi(x)$ নির্ণয় করতে হবে।

দ্বিতীয়তঃ উর্ধ্বপ্রান্ত ও নিম্নপ্রান্ত যথাক্রমে b ও a বিন্দুতে $\phi(x)$এর মান বা, $[\phi(x)]_a^b$ অর্থাৎ $\phi(b)$এবং $\phi(a)$ বের করতে হবে।

তৃতীয়তঃ $\phi(b)$ হতে $\phi(a)$ বিয়োগ বা, $\phi(b)-\phi(a)$ নির্ণয় করলেই $\int_a^b f(x)\,dx$ এর মান পাওয়া যাবে।

চতুর্থতঃ নির্দিষ্ট যোগজের মান নির্ণয়ের সময়, অনির্দিষ্ট যোগজের অনুরূপ কোন ধ্রবক যোগ করার প্রয়োজন হয় না কারণ $\int f(x)\,dx = \phi(x)+K$ হলে, $\int_a^b f(x)\,dx = \phi(b) + K - \phi(a) - K = \phi(b) - \phi(a)$

নির্দিষ্ট যোগজের বৈশিষ্ট্যাবলিঃ (i) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$; যেমনঃ $\int_0^1 x^3 dx = \int_0^1 y^3 dy$

(ii) $\int_a^b f(y)dy = -\int_b^a f(y)dy$; যেমনঃ $\int_0^{\pi/2} \sin y dy = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin y dy$

(iii) $\int_0^a f(z)dz = \int_0^a f(a-z)dz$; যেমন ঃ $\int_0^2 t^2 dt = \int_0^2 (2-t)^2\, dt$

(iv) $\int_a^b cf(z)dz = c\int_a^b f(z)dz$ [নির্দিষ্ট যোগজের স্কেলার গুণ]

(v) $\int_a^b [f(z) \pm g(z)]dz = \int_a^b f(z)dz \pm \int_a^b g(z)dz$

(vi) $\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

(vii) ফাংশন পরিবর্তনের ক্ষেত্রে যোগজের উর্ধ্বপ্রান্ত ও নিম্নপ্রান্ত অবশ্যই পরিবর্তন করতে হয়।

চলকের প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়:

পূর্বেই দেখানো হয়েছে যে চলকের প্রতিস্থাপন পদ্ধতির সাহায্যে বিশেষ আকারের যোজ্য ফাংশনের অনির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয় করা যায়। একইভাবে চলকের প্রতিস্থাপনের মাধ্যমে নির্দিষ্ট যোগজের মান নির্ণয় করা যাবে।

মনে করুন, প্রতিস্থাপন পদ্ধতির সাহায্যে $\int_a^b f(x)dx$ নির্ণয় করতে হবে।

প্রথমে, প্রয়োজনীয় প্রতিস্থাপন [ধরুন $z=\phi(x)$] দ্বারা যোজ্য ফাংশন -কে z এর ফাংশন, $\int g(z)\,dz$ রূপে প্রকাশ করতে হবে। পরে, প্রতিস্থাপন সমীকরণ, $z=\phi(x)$ হতে x-চলকের উর্ধ্বপ্রান্ত ও নিম্নসীমার অনুরূপ z-চলকের উর্ধসীমা ও নিম্নপ্রান্ত নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ x-চলকের উর্ধ্বপ্রান্ত b এবং নিম্নপ্রান্ত a হওয়ায় প্রতিস্থাপন সমীকরণ, $z=\phi(x)$ হতে z-চলকের উর্ধ্বপ্রান্ত $\phi(b)$ এবং নিম্নপ্রান্ত $\phi(a)$ নির্ণয় করা যাবে।

সবশেষে, z এর ফাংশনরূপে যোজ্য ফাংশন $\int_{f(a)}^{f(b)} g(z)\,dz$ এর যোগজ নির্ণয় করতে হবে।

অতএব, $\int_a^b f(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(z)\,dz = G(\phi(b)) - G(\phi(a))$ যেখানে $\int g(z)dz = G(z)$

দ্রষ্টব্য ঃ নির্দিষ্ট যোগজ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ফাংশনটির চলকের পরিবর্তন করা দরকার হলেই এই পদ্ধতির প্রয়োজন।

উদাহরণ 1: $\int_a^b C dx$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $\int_a^b C dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$

উদাহরণ 2: $\int_1^3 x^3 dx$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখন, $\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{4}\left[3^4-1\right] = \frac{1}{4}[81-1] = \frac{80}{4} = 20.$

উদাহরণ 3: $\int_{-1}^2 \left(3x^3 - x^2\right)dx$ -এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখন, $\int_{-1}^2 \left(3x^3 - x^2\right)dx = \int_{-1}^2 \left(3x^3\right)dx - \int_{-1}^2 x^2 dx = 3\int_{-1}^2 x^3 dx - \int_{-1}^2 x^2 dx = 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2$

$$= \frac{3}{4}\left[2^4 - (-1)^4\right] - \frac{1}{3}\left[2^3 - (-1)^3\right] = \frac{3}{4}(16-1) - \frac{1}{3}(8+1) = \frac{3}{4}(15) - \frac{1}{3}(9) = \frac{45}{4} - 3 = \frac{45-12}{4} = \frac{33}{4}$$

উদাহরণ 4: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

সমাধান: ধরুন, $x = a\sin\theta \therefore dx = a\cos\theta d\theta$ এখন, $x = 0$ হলে, $\theta = 0$ এবং $x = a$ হলে, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta\right] = \frac{a^2}{2}[\theta]_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] + \frac{a^2}{4}\left[\sin 2.\frac{\pi}{2} - \sin 2.0\right] = \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} + 0 = \frac{a^2\pi}{4}$$

উদাহরণ 5: মান নির্ণয় করুন, $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2}$

সমাধান: মনে করুন, $\ln x = z \therefore \frac{1}{x} = \frac{dz}{dx}$ বা, $\frac{1}{x}dx = dz$ যখন, $x = 1, z = \ln 1 = 0$ এবং $x = e^2, z = \ln e^2 = 2$

$$\therefore \int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1+\ln x)^2} = \int_0^2 \frac{dz}{(1+z)^2} = \int_0^2 (1+z)^{-2} dz = \left[\frac{(1+z)^{-2+1}}{-2+1}\right]_0^2 = \left[\frac{(1+z)^{-1}}{-1}\right]_0^2$$

$$= -\left[(1+z)^{-1}\right]_0^2 = -\left[\frac{1}{1+z}\right]_0^2 = -\left(\frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+0}\right) = -\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\left(\frac{1-3}{3}\right) = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

উদাহরণ 6: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sqrt{\sin x}dx$

সমাধানঃ প্রথমে $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sqrt{\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos x\sqrt{\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)\cos x\sqrt{\sin x}dx$

ধরুন, $\sin x = z \therefore \cos x = \frac{dz}{dx}$ বা, $\cos xdx = dz$

এখন, পরিবর্তিত সীমাঃ $x=0$ হলে, $z=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ হলে, $z=1$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)\cos x\sqrt{\sin x}dx = \int_0^1 \left(1-z^2\right)\sqrt{z}dz = \int_0^1 \left(z^{\frac{1}{2}} - z^{2+\frac{1}{2}}\right)dz = \int_0^1 z^{\frac{1}{2}}dz - \int_0^1 z^{\frac{5}{2}}dz$$

$$= \left[\frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 - \left[\frac{z^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}\right]_0^1 = \left[\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{z^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2}{7}\left(1^{\frac{7}{2}} - 0^{\frac{7}{2}}\right) = \frac{2}{3}(1-0) - \frac{2}{7}(1-0) = \frac{2}{3} - \frac{2}{7}$$

$$= \frac{7\times 2 - 3\times 2}{21} = \frac{14-6}{21} = \frac{8}{21}$$

উদাহরণ 7: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

সমাধানঃ মনে করুন, $\sin^{-1} x = t \therefore \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dt}{dx}$ বা, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt$

এখন, পরিবর্তিত সীমা ঃ $x=0$ হলে, $t=0$ এবং $x=1$ হলে, $t=\frac{\pi}{2}$

তাহলে, $\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} tdt = \left[\frac{t^{1+1}}{1+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{4} - 0 = \frac{\pi^2}{8}$

উদাহরণ 8: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a\sin^2\theta + b\cos^2\theta}d\theta$

সমাধানঃ প্রথমে $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a\sin^2\theta + b\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{a\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + b}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{a\tan^2\theta + b}d\theta$

ধরুন, $\tan\theta = u \therefore \sec^2\theta = \frac{du}{d\theta}$ বা, $\sec^2\theta d\theta = du$

এখন, পরিবর্তিত সীমা ঃ $\theta = 0$ হলে, $u = 0$ এবং $\theta = \frac{\pi}{2}$ হলে, $u = \infty$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{a\tan^2\theta + b} d\theta = \int_0^{\infty} \frac{du}{au^2 + b} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 + \frac{b}{a}} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2} + u^2} = \frac{1}{a}.\frac{1}{\sqrt{\frac{b}{a}}}\left[\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{\frac{b}{a}}}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\left[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right] = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

উদাহরণ 9: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

সমাধানঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^3 x.\cos x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x + 3\cos x)\cos x dx$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x dx + \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + \cos 2x) dx + \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}\left[\sin 4x\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{8}\left[x\right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi/0}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\sin 2\pi - \sin 0\right) + \frac{1}{16}\left(\sin\pi - \sin 0\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{3}{16}\left(\sin\pi - \sin 0\right)$$

$$= \frac{1}{32}(0-0) + \frac{1}{16}(0-0) + \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{16}(0-0) = 0 + 0 + \frac{3\pi}{16} + 0 = \frac{3\pi}{16} \approx 0.58905$$

উদাহরণ 10: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos x \, dx$

সমাধানঃ ধরুন, $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos x dx$ মনে করুন, $\sin x = u \therefore \cos x = \frac{du}{dx}$ বা, $\cos x dx = du$

ফলে, পরিবর্তিত সীমাঃ $x = 0$ হলে, $u = 0$ এবং $x = \frac{\pi}{4}$ হলে, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} u^3 du = \left[\frac{u^{3+1}}{3+1}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left[u^4\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left[\left(1/\sqrt{2}\right)^4 - 0\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

উদাহরণ 11: মান নির্ণয় করুন, $\int_1^5 \ln x dx$

সমাধানঃ এখানে, $\int \ln x dx = \ln x \int 1 dx - \int \left\{\frac{d(\ln x)}{dx}\int 1 dx\right\} dx$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{x}.x dx = x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x$$

$$\therefore \int_1^5 \ln x dx = \left[x\ln x - x\right]_1^5 = \left[x\ln x\right]_1^5 - \left[x\right]_1^5 = \left(5\ln 5 - 1\ln 1\right) - \left(5-1\right) = 5\ln 5 - 0 - 5 + 1$$
$$= 5\ln 5 - 4 \approx 4.0472$$

উদাহরণ 12: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos t}$

সমাধানঃ $\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos t} = \int_0^\pi \frac{dt}{2+\frac{1-\tan^2\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}} = \int_0^\pi \frac{\left(1+\tan^2 t/2\right)dt}{2+2\tan^2\frac{t}{2}+1-\tan^2\frac{t}{2}} = \int_0^\pi \frac{\sec^2 t/2}{3+\tan^2 t/2}dt$

মনে করুন, $\tan t/2 = u \quad \therefore \sec^2\frac{t}{2}.\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{du}{dt}$ বা, $\sec^2\frac{t}{2}.\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{du}{dt}$ বা, $\sec^2\frac{t}{2}dt = 2du$

ফলে, পরিবর্তিত সীমা ঃ $t=0$ হলে, $u=0$ এবং $t=\pi$ হলে, $u=\infty$

$$\therefore \int_0^\pi \frac{\sec^2 t/2}{3+\tan^2 t/2}dt = \int_0^\infty \frac{2du}{3+u^2} = \int_0^\infty \frac{2du}{\left(\sqrt{3}\right)^2+u^2} = 2.\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\frac{\infty}{\sqrt{3}} - \tan^{-1}\frac{0}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

উদাহরণ 13: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^4 y\sqrt{4-y}dy$

সমাধানঃ $\int y\sqrt{4-y}dy = y\int\sqrt{4-y}dy - \int\left\{\frac{d(y)}{dy}\int\sqrt{4-y}dy\right\}dy$

$$= -y\frac{(4-y)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \int 1.(-1)\frac{(4-y)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}dy = -\frac{2}{3}y(4-y)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\int(4-y)^{\frac{3}{2}}dy$$

$$= -\frac{2}{3}y(4-y)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times\frac{(4-y)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = -\frac{2}{3}y(4-y)^{3/2} - \frac{4}{15}(4-y)^{5/2} + C$$

$$\therefore \int_0^4 y\sqrt{4-y}dy = -\frac{2}{3}\left[y(4-y)^{3/2}\right]_0^4 - \frac{4}{15}\left[(4-y)^{5/2}\right]_0^4 = -\frac{2}{3}(0-0) - \frac{4}{15}\left(0-4^{5/2}\right) = -\frac{4}{15}(-32) = \frac{128}{15}$$

উদাহরণ 14: মান নির্ণয় করুন, $\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$

সমাধানঃ $\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$

ধরুন, $\cos t = u \therefore -\sin t = \frac{du}{dt}$ বা, $\sin t dt = -du$;

ফলে, পরিবর্তিত সীমাঃ $t=0$ হলে, $u=1$ এবং $t=\pi$ হলে, $u=-1$

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt = \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = -\int_1^{-1} \frac{du}{1+u^2} = \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \left[\tan^{-1} u\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\tan^{-1} u\right]_{-1}^{1} = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1) = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\tan\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

উদাহরণ 15: সৃজনশীল প্রশ্ন: ধরুন, $h(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)$ । এখান থেকে (ক) $\int \frac{1}{1+16t^2} dt$ নির্ণয় করুন।

(খ) $\int g(t)dt = h(t)$ হলে $g(t)$ নির্ণয় করুন।

(গ) $\int g\left(\frac{1}{t}\right) dt$ নির্ণয় করুন এবং তা থেকে $\int_0^1 g\left(\frac{1}{t}\right) dt$ নির্ণয় করুন ।

সমাধান: (ক) $\int \frac{1}{1+16t^2} dt = \int \frac{1}{1+(4t)^2} dt = \frac{1}{4}\tan^{-1}(4t) + C$

(খ) $\int g(t)dt = h(t)$ বা, $\int g(t)dt = h(t) = \ln\left(t + \sqrt{t^2-1}\right)$ বা, $\frac{d}{dt}\left(\int g(t)dt\right) = \frac{d}{dt}\left(\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\right)$

$$\text{বা}, g(t) = \frac{1}{\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)} \frac{d}{dt}\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}}(2t)}{\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)} = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}}{\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{t^2-1}+t}{\sqrt{t^2-1}}}{t+\sqrt{t^2-1}}$$

$$= \frac{t+\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{t^2-1}} \times \frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} \qquad \therefore g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

(গ) $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ $\therefore g\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

এখন, $\int_0^1 g\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$ ধরুন, $1-t^2 = u \therefore -2t = \frac{du}{dt}$ বা, $-2tdt = du$ $\therefore tdt = -\frac{1}{2}du$

ফলে, পরিবর্তিত সীমা ঃ $t=0$ হলে, $u=1$ এবং $t=1$ হলে, $u=0$

$$\therefore \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{2}du\right) = -\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{-1}{2}} du = \frac{1}{2} \times \left[\frac{u^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \times \left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \left[\sqrt{u}\right]_0^1$$

$$= \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1$$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৬

মান নির্ণয় করুন

1. (i) $\int_0^2 x^n \, dx \ (n \neq -1)$ (ii) $\int_0^3 \frac{1}{1+x} dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

2. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta + \cos\theta)^2 \, d\theta$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx$

3. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin t}dt$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1-\cos 2t}dt$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

4. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin 2x}}\, dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1\pm x^2}}dx$

5. (i) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}\, dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{\left(\cos^{-1} x\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

6. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin t}dt$ (ii) $\int_0^1 x^3\sqrt{1+3x^4}\, dx$ (iii) $\int_0^1 x^2 e^{x^3}\, dx$

7. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\, dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{5+4\cos x}\, dx$

8. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\, dx$

9. (i) $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$ (ii) $\int_0^1 \cot x\, dx$ (iii) $\int_2^3 \frac{2x}{1+x^2}dx$

10. (i) $\int_1^3 \frac{1+\log_e x}{x}\, dx$ (ii) $\int_0^1 \tan^2 x \sec^2 x\, dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{\log_e \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

11. (i) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$ (iii) $\int_0^1 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\, dx$

12. (i) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{9-2x^2}}\, dx$ (ii) $\int_0^1 \cos^3 x\, dx$ (iii) $\int_0^1 \sin^5 x\, dx$

13. (i) $\int_0^1 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$ (ii) $\int_0^1 e^x(\cos x+\sin x)\, dx$ (iii) $\int_0^1 \cos^2 x\, dx$

14. (i) $\int_0^1 \sin x \sin 2x\, dx$ (ii) $\int_0^1 \sin 2x \cos 3x dx$ (iii) $\int_0^1 \cos 2x \cos 3x\, dx$

15. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x\, dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^3 x dx$

16. (i) $\int_0^1 (1+x)\sqrt{1+2x}\, dx$ (ii) $\int_0^1 \cos^3 x \sqrt[4]{\sin x}\, dx$ (iii) $\int_0^1 \sin^3 x\sqrt{\cos x}\, dx$

17. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin x+4\cos x}\, dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+4\sin x)^2\cos x dx$

18. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\cos x}\,dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3+5\sin x}\,dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$

19. (i) $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}\,dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx$ (iii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

20. (i) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{1}{(x-3)\sqrt{x+1}}\,dx$

21. (i) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\,dx$ (ii) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-2x^2}}dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{1}{3+5x^2}\,dx$

22. (i) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$ (ii) $\int_2^5 \sqrt{(x-2)(5-x)}\,dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

23. (i) $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$ (ii) $\int_0^1 \frac{1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} 1)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

24. (i) $\int_0^2 x\sin x\,dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx$

25. (i) $\int_1^2 x\ln x\,dx$ (ii) $\int_0^1 2x^3e^{-x^2}\,dx$ (iii) $\int_0^1 x\log_e(1+2x)\,dx$

26. (i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx$ (iii) $\int_0^1 x\sin x\cos x\,dx$

27. (i) $\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx$ (ii) $\int_0^1 x\sin^{-1}x\,dx$ (iii) $\int_0^1 \frac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

28. (i) $\int_0^1 \sqrt{16-x^2}\,dx$ (ii) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}\,dx$

29. (i) $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$ (ii) $\int_0^1 \sin^{-1}x\,dx$ (iii) $\int_0^1 \log_e x\,dx$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

30. $\int_0^2 x^2dx$ এর মান কোনটি?

(ক) 8 (খ) $\sqrt{8}$ (গ) -8 (ঘ) $-\sqrt{8}$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ এর মান কোনটি?

(ক) -1 (খ) 1 (গ) 0 (ঘ) $\frac{\pi}{2}$

32. দেওয়া আছে, $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$

(i) ইহাকে প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করতে হবে।

(ii) ইহা একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র মূলবিন্দু।

(iii) নির্দিষ্ট যোগজের মান 4π

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

33. প্রদত্ত নির্দিষ্ট যোগজ ঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

(i) ইহাকে প্রতিস্থাপন পদ্ধতি ছাড়া সমাধান করা যায়।

(ii) ইহা একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র মূলবিন্দু নয়।

(iii) নির্দিষ্ট যোগজের মান $\frac{\pi}{4}$

(ক) (i) ও (ii) (খ) (ii) ও (iii) (গ) (i) ও (iii) (ঘ) (i), (ii) ও (iii)

নিচের তথ্যের আলোকে 34, 35, 36 নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(t)=\frac{1}{t^2-1}$ এবং $I=\int_2^3 f(t)dt$

34. যদি $f(t)=\frac{A}{t+1}+\frac{\frac{1}{2}}{t-1}$ হয় তবে $A=$ কত?

(ক) 1 (খ) -1 (গ) $\frac{1}{2}$ (ঘ) $-\frac{1}{2}$

35. $\int f(t)dt=$ কত?

(ক) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ (খ) $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ (গ) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$ (ঘ) $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$

36. $I=$ কত?

(ক) $-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$ (খ) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ (গ) $-\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ (ঘ) $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$

পাঠ ১০.৭ নির্দিষ্ট যোগজের সাহায্যে ক্ষেত্রফল

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, বৃত্তের ক্ষেত্রফল, উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল।

মূলপাঠ

বর্তমান ইউনিটের পাঠ-১ এ যোগজীকরণ ক্ষেত্রফল প্রকাশক, তা আলোচনা করা হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে, বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের প্রচেষ্টা হতে ধারার উদ্ভব এবং এর যোগফলের মান নির্ণয়ের প্রচেষ্টা হতে যোগজের উৎপত্তি। যোগফলের সীমারূপে যোগজের সংজ্ঞায়ন সমাকলন বিদ্যাকে একটি প্রায়োগিক ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত করেছে। এর ফলে অনেক ব্যবহারিক প্রশ্নের সমাধান খুব সহজেই সম্ভব হয়েছে। উদাহরণ স্বরূপ, মনে করুন $y=x^2$ ফাংশনটি, $X-$ অক্ষ, $x=2$ এবং $x=3$ কোটিদ্বয়ের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ 1: $y^2=4x$ পরাবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y^2=4x\cdots(\text{i})$

এবং সরলরেখার সমীকরণ, $y=x\cdots(\text{ii})$

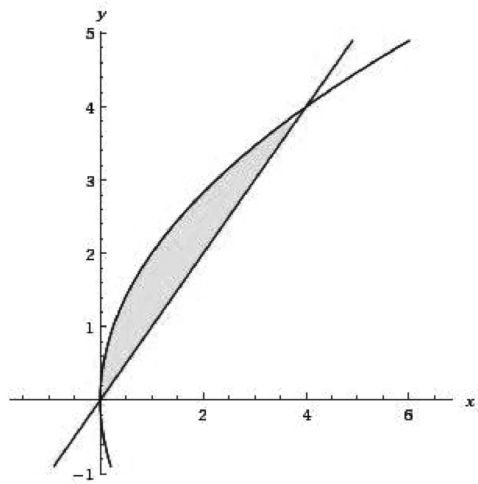
(i) নং ও (ii) নং থেকে পাই,

$x^2=4x\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow x(x-4)=0$

$\therefore x=0, x=4$

এখানে $y^2=4x$ পরাবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখার সংযোগ বিন্দু দুইটি যথাক্রমে $(0,0)$ এবং $(4,4)$

$\therefore y^2=4x$ পরাবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের



ক্ষেত্রফল $=\int_0^4 (y_1-y_2)dx$

$$=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-x\right)dx=2\int_0^4\sqrt{x}dx-\int_0^4 xdx=2\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4-\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_0^4$$

$$=2.\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-0\right)-\frac{1}{2}\left(4^2-0\right)=\frac{4}{3}(8)-\frac{1}{2}(16)=\frac{32}{3}-8=\frac{32-24}{3}=\frac{8}{3}$$ বর্গ একক।

উদাহরণ 2: $y=x^2$ পরাবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ, $y=x^2\cdots(\text{i})$

এবং সরলরেখার সমীকরণ, $y=x\cdots(\text{ii})$

(i) নং ও (ii) নং থেকে পাই,

$x^2=x\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0$

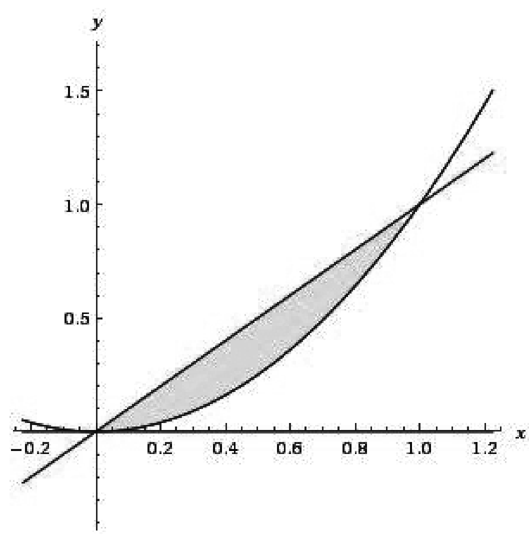
$\therefore x=0, x=1$

এখানে $y=x^2$ পরাবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখার সংযোগ বিন্দু দুইটি যথাক্রমে $(0,0)$ এবং $(1,1)$

$\therefore y=x^2$ পরাবৃত্ত এবং $y=x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের

ক্ষেত্রফল $=\int_0^1 (y_2-y_1)dx=\int_0^1 (x-x^2)dx$

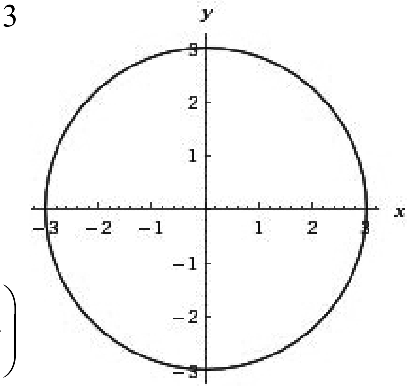
$$=\int_0^1 xdx-\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_0^1-\left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_0^1$$



$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$ বর্গ একক।

উদাহরণ 3: $x^2+y^2=9$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।

সমাধান: প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2=9$ যার কেন্দ্র $(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ 3



এখানে, $x^2+y^2=9 \Rightarrow y^2=9-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{9-x^2}$

তাহলে বৃত্তটির ১ম চৌকণের ক্ষেত্রফল $=\int_0^3 ydx=\int_0^3\sqrt{9^2-x^2}\,dx$

$$=\left[\frac{x\sqrt{3^2-x^2}}{2}+\frac{3^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3$$

$$=\left(\frac{3\sqrt{3^2-3^2}}{2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{3}{3}\right)-\left(\frac{0\sqrt{3^2-3^2}}{2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{0}{3}\right)$$

$=0+\frac{9}{2}\sin^{-1}1-(0+0)=\frac{9}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{4}$ বর্গ একক।

$\therefore$ সমগ্র বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=4\times\frac{9\pi}{4}=9\pi$ বর্গ একক।

বিকল্প পদ্ধতি: তাহলে বৃত্তটির ১ম চৌকণের ক্ষেত্রফল $=\int_0^3 ydx=\int_0^3\sqrt{9^2-x^2}\,dx$

ধরুন, $x=3\sin\theta \therefore dx=3\cos\theta d\theta$. তাহলে, পরিবর্তিত সীমা ঃ $x=0$ হলে, $\theta=0$ এবং $x=3$ হলে,

$\theta=\frac{\pi}{2}\left[\because 3=3\sin\theta \Rightarrow 1=\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\sin\frac{\pi}{2}\right]$

$$\therefore \int_0^3\sqrt{3^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3^2-(3\sin\theta)^2}\,3\cos\theta d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos^2\theta}\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta\cos\theta d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta d\theta=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{9}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}1.d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{9}{2}\left[[\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{9}{2}\left[\frac{\pi}{2}-0+\frac{1}{2}\left(\sin 2.\frac{\pi}{2}-\sin 2.0\right)\right]=\frac{9}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(0-0)\right]=\frac{9\pi}{4}$$ বর্গ একক।

$\therefore$ সমগ্র বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=4\times\frac{9\pi}{4}=9\pi$ বর্গ একক।

উদাহরণ 4: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।

সমাধান: উপবৃত্তটির কেন্দ্র $O(0,0)$ । ধরুন, $a>b$ তাহলে বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2a$, ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য $=2b$,

$\therefore$ ১ম চৌকণের শীর্ষদ্বয় যথাক্রমে $A(a,0)$ ও $B(0,b)$ ।

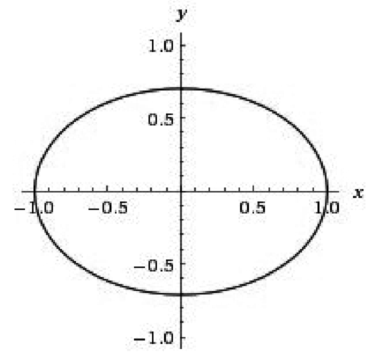
তাহলে উপবৃত্তটির ১ম চৌকণের ক্ষেত্রফল $=\int_0^a ydx=\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$\left[\because \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow y=\pm b\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right]$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$=\frac{b}{a}\left[\left(\frac{a\sqrt{a^2-a^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{a}{a}\right)-\left(\frac{0\sqrt{a^2-0}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{0}{a}\right)\right]$$

$=\frac{b}{a}\left[0+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1-0-\frac{a^2}{2}\sin^{-1}0\right]=\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi ab$ বর্গ একক।



$\therefore$ সমগ্র উববৃত্তের ক্ষেত্রফল $=4\times\frac{1}{4}\pi ab=\pi ab$ বর্গ একক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৭

1. $y=2x$ সরলরেখা, $y=0$ বা $X-$ অক্ষ ও $x=3$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
2. $y=4x$ ফাংশনটি, $X-$ অক্ষ, x=2 এবং x=4 কোটিদ্বয়ের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
3. $y=x^2$ ফাংশনটি, $X-$ অক্ষ, x=2 এবং x=3 কোটিদ্বয়ের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
4. $y=x^2$ পরাবৃত্ত এবং $X-$ অক্ষ, x=-5 ও x= 5 রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
5. $y^2=x$ পরাবৃত্ত এবং x=0 ও x= 4 রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
6. $y^2=4x$ এবং $x=1$ ও x= 6 রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
7. $y^2=4x$ এবং $x^2=4y$ বক্র রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
8. $x^2+y^2=r^2$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।
9. $x^2+y^2=16$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।
10. $x^2+y^2=16$ এবং $x=2$ ও $x=4$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
11. $x^2+y^2=25$ এবং $x=-2$ ও $x=5$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।
12. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।
13. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।
14. $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{81}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। উক্ত উপবৃত্ত এবং $x=0$ ও $x=12$ এর মধ্যবর্তী ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।
15. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ বক্ররেখা ও অক্ষদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন ।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

16. বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সূত্র কোনটি?

(ক) πr^2 বর্গ একক (খ) πab বর্গ একক (গ) πr বর্গ একক (ঘ) $\frac{1}{2}\pi r^2$ বর্গ একক

17. $y=\sin x$, $X-$ অক্ষ এবং $x=0$ ও $x=\pi$ রেখাদ্বয় দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কত?

(ক) 2 বর্গ একক (খ) $\sqrt{2}$ বর্গ একক (গ) 3 বর্গ একক (ঘ) $\sqrt{3}$ বর্গ একক

18. (i) নির্দিষ্ট যোগজের ক্ষেত্রে যোগজীকরণ ধ্রুবক থাকবে না।

(ii) $x^2+y^2=100$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল হলো 100π বর্গ একক।

(iii) $x^2+y^2=100$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে নির্দিষ্ট যোগজের নিম্নপ্রান্ত 0 এবং উর্ধ্বপ্রান্ত 10 ধরা হবে।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) $(i),(ii)$ ও (iii)

19. (i) $y^2 = x$ এবং $x^2 = y$ বক্র রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{3}$ বর্গ একক।

(ii) $y^2 = x$ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ বক্র রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ বর্গ একক।

(iii) $x^2 = y$ এবং $x = 0$ ও $x = 2$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{8}{3}$ বর্গ একক।

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) (i) ও (ii) (খ) (i) ও (iii) (গ) (ii) ও (iii) (ঘ) $(i),(ii)$ ও (iii)

$y^2 = 8x$ একটি বক্র রেখার সমীকরণ। উপরের তথ্যের ভিত্তিতে 20-22 নং প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

20. প্রদত্ত বক্র রেখা $y^2 = 8x$ এবং $y = x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(ক) $\frac{31}{3}$ বর্গ একক (খ) $\frac{32\pi}{3}$ বর্গ একক (গ) $\frac{32}{3}$ বর্গ একক (ঘ) $\frac{\pi}{3}$ বর্গ একক

21. প্রদত্ত বক্র রেখা এবং $y = 3x$ সরলরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

(ক) $\frac{32}{31}$ বর্গ একক (খ) $\frac{32}{81}$ বর্গ একক (গ) 32π বর্গ একক (ঘ) $\frac{32\pi}{81}$ বর্গ একক

22. $y^2 = 8x$ এবং $x^2 = 8y$ বক্র রেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?

(ক) $\frac{64}{3}$ বর্গ একক (খ) $\frac{64\pi}{3}$ বর্গ একক (গ) $\frac{61}{3}$ বর্গ একক (ঘ) $\frac{61\pi}{3}$ বর্গ একক

সৃজনশীল প্রশ্ন

23. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ একটি বক্র রেখার সমীকরণ দেওয়া হলো ।

(ক) প্রদত্ত বক্র রেখাটি কিসের সমীকরণ চিত্র অংকন করুন।

(খ) প্রদত্ত বক্র রেখাটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

(গ) প্রদত্ত বক্র রেখাকে $x = 0$ ও $x = 2$ রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ করলে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হয় তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন।

পাঠ ১০.৮ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

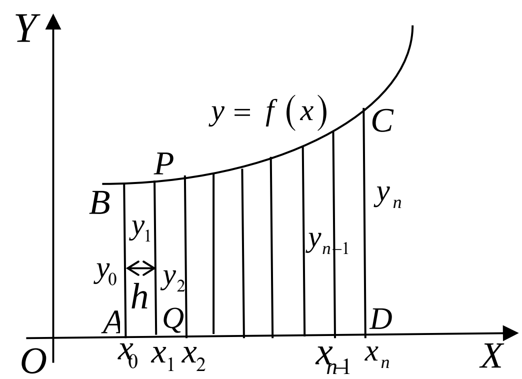
এই পাঠ শেষে আপনি-

- $y = f(x)$ সমীকরণের লেখ এবং $X-$অক্ষ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয় করতে পারবেন।

মূখ্য শব্দ	সীমাবদ্ধ বা আবদ্ধ ক্ষেত্র, ক্ষেত্রফল, লেখ, আসন্ন মান, গ্রাফপেপার, সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর, গ্রাফিং ক্যালকুলেটর

মূলপাঠ

নির্দিষ্ট যোগজ ব্যবহার করে $y = f(x)$ রেখা এবং $X-$অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়। ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয়ের জন্য ট্রাপিজিয়াম সূত্র (Trapezoidal Rule) গুরুত্বপূর্ণ, যা নিচে আলোচনা করা হলো।



মনে করুন, $[p,q]$ ব্যবধির মধ্যে $y = f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন (continuous) ফাংশন। অর্থাৎ p এবং q এর মধ্যে ফাংশনটির লেখচিত্রে কোথাও কোনো ছেদ নেই। চিত্রে $y = f(x)$ বক্ররেখা $X-$অক্ষ, $x_0 = p$ এবং $x_n = q$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটি দেখানো হলো।ক্ষেত্র $ABCDA$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। $[p,q]$ ব্যবধিকে $x_0 = p, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n = q$ ভুজ বিশিষ্ট n সংখ্যক ভাগে বিভক্ত করা হলো। তাহলে, $nh = x_n - x_0$ অর্থাৎ $h = \frac{x_n - x_0}{n}$. ফলে ক্ষেত্রটি n সংখ্যক ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত হলো। ধরুন, প্রত্যেক ক্ষুদ্র ব্যবধির প্রস্থ বা উচ্চতা $= h$ অর্থাৎ $x_n - x_0 = h, x_2 - x_1 = h, \cdots$ ইত্যাদি।

$\therefore x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \cdots$ ইত্যাদি। তাহলে, $y_0 = f(x_0) = AB, y_1 = f(x_1) = PQ, y_2 = f(x_2), \cdots$ $, y_n = f(x_n) = CD$ ইত্যাদি। এখানে ১ম কোটি $y_1 = AB$, ২য় কোটি $y_2 = PQ$, ... n তম কোটি $y_n = CD$ ইত্যাদি।

প্রথমে একটি ক্ষুদ্র ট্রাপিজিয়াম $ABPQ$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। ট্রাপিজিয়াম $ABPQ$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি $\times$ উচ্চতা(এদের লম্ব দূরত্ব) $= \frac{y_0 + y_1}{2} \times AQ = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h;$ যেখানে $AQ = h.$

$\therefore ABCDA$ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}h\{(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + \cdots + (y_{n-1} + y_n)\}.$

$$= \frac{1}{2}h(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

সুতরাং ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফলের সূত্রটি হলো $A = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right]$

এখন $\int_p^q f(x)\,dx$ নির্দিষ্ট যোগজটি $y = f(x)$ বক্ররেখা $X-$অক্ষ, $x_0 = p$ এবং $x_n = q$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

$$\therefore \int_p^q f(x)\,dx = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right]$$

নোট-১: n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ছোট হবে ফলে ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান তত শুদ্ধ হবে।
নোট-২: যত সংখ্যক প্রয়োজন তত সংখ্যক কোটির সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব।

নোট-৩: নির্দিষ্ট যোগজ $\int_a^b f(x)\,dx$ এর মান নির্ণয়ের এই সূত্রকে ট্রাপিজিয়াম সূত্র (Trapezium Rule) বলা হয়।

সমস্যা নং 1	আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখঃ

সমস্যাঃ ছয় কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{10} x^2 dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ ধরুন, $A = \int_0^{10} x^2 dx$

তত্ত্ব: ছয়টি কোটির জন্য ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র, $A=h\left[\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right]$ ব্যবহার করে $\int_0^{10} x^2 dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) সাদা গ্রাফপেপার, (ii) পেন্সিল, (iii) ইরেজার, (iv) শার্পনার, (v) স্কেল, (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর, (vii) গ্রাফিং ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি: 1. $0 \le x \le 10$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী ছয়টি কোটি $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর জন্য ব্যবধির উর্ধ্বপ্রান্ত ও নিম্নপ্রান্তের বিয়োগফলকে $(6-1)$ বা 5 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h নির্ণয় করুন ।$\therefore h=\frac{10-0}{5}=2$

2. h এর মান থেকে $h=x_n-x_{n-1}$ বা, $x_n=x_{n-1}+h$ সূত্র প্রয়োগ করে x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 নির্ণয় করুন যেখানে, $x_0=0$ ।

3. $y=f(x)=x^2$ সূত্র প্রয়োগ করে $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ এর মান নির্ণয় করুন ।

4. গ্রাফ কাগজের $X-$অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 5 বাহু $=1$ একক ও $Y-$অক্ষ বরাবর 0.5 বাহু $=1$ একক ধরে $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4),(x_5,y_5)$ প্রাপ্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করে $0 \le x \le 10$ ব্যবধিতে $y=x^2$ - এর লেখ চিত্র অংকন করুন ।

5. এখন প্রত্যেকটি বিন্দু থেকে $X-$অক্ষের উপর লম্ব টেনে $\int_0^{10} x^2 dx$ এর ক্ষেত্রফল চিহ্নিত করুন।

6. এখন প্রাপ্ত ছয়টি কোটিকে $X-$অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5 টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করুন।

7. ট্রাপিজিয়াম সূত্র, $A=h\left[\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4+\frac{y_5}{2}\right]$ -এ h ও $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ প্রয়োগ করে A নির্ণয় করুন।

8. আবার যোগজীকরণ করেও A এর মান নির্ণয় করুন।

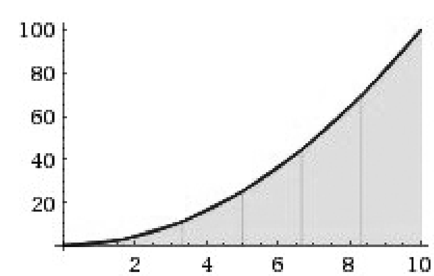
ফল সংকলন:

$h=\frac{x_n-x_0}{5}$	x_0	$x_1=x_0+h$	$x_2=x_1+h$	$x_3=x_2+h$	$x_4=x_3+h$	$x_5=x_4+h$
বা, $h=\frac{10-0}{5}=2$	0	2	4	6	8	10
	$y_0={x_0}^2$	$y_1={x_1}^2$	$y_2={x_2}^2$	$y_3={x_3}^2$	$y_4={x_4}^2$	$y_5={x_5}^2$
$y=x^2$	0	4	16	36	64	100

হিসাব: ট্রাপিজিয়াম সূত্র প্রয়োগ করে ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{10} x^2 dx$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

$$A=h\left[\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+y_4+\frac{y_5}{2}\right] \text{ বর্গ একক}$$

$$=2\left[\frac{0}{2}+4+16+36+64+\frac{100}{2}\right] \text{ বর্গ একক} = 340 \text{ বর্গ একক}$$



আবার, যোগজীকরণ করে $\int_0^{10} x^2 dx$ এর মান নির্ণয় ঃ

ফলাফল: নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $A=\int_0^{10} x^2 dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=\frac{10^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1000}{3}-0=333.33$ বর্গ একক

নোট-১: ছয়টি কোটি ব্যবহারের ফলে পাঁচটি ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্র তৈরি হয়।
নোট-২: n এর মান যত বেশি হবে h এর মান তত ছোট হবে। ফলে ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান তত শুদ্ধ হবে।

সমস্যা নং 2	আসন্ন মান নির্ণয়	তারিখ:

সমস্যা: পাঁচ কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{0.80} e^{x^2} dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, $A=\int_0^{0.80} e^{x^2} dx$

তত্ত্ব: পাঁচ কোটির জন্য ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র, $A=h\left[\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right]$ ব্যবহার করে $\int_0^{0.80} e^{x^2} dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: (i) সাদা গ্রাফপেপার, (ii) পেন্সিল, (iii) ইরেজার, (iv) শার্পনার, (v) স্কেল, (vi) সায়েন্টিফিক ক্যালকুলেটর, (vii) গ্রাফিং ক্যালকুলেটর ইত্যাদি।

কার্যপদ্ধতি: 1. $0 \le x \le 0.80$ ব্যবধিতে সমদূরবর্তী পাঁচটি কোটি y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর জন্য ব্যবধির উর্ধ্বপ্রান্ত ও নিম্নপ্রান্তের বিয়োগফলকে $(5-1)$ বা 4 দ্বারা ভাগ করে প্রত্যেক ক্ষুদ্র অংশের দৈর্ঘ্য h নির্ণয় করুন।
$\therefore h=\frac{0.80-0}{4}=0.20$

2. h এর মান থেকে $h=x_n-x_{n-1}$ বা, $x_n=x_{n-1}+h$ সূত্র প্রয়োগ করে x_1, x_2, x_3, x_4 নির্ণয় করুন যেখানে, $x_0=0$ ।

3. $y=f(x)=e^{x^2}$ সূত্র প্রয়োগ করে y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 এর মান নির্ণয় করুন।

4. গ্রাফ কাগজের $X-$অক্ষ বরাবর ছোট বর্গের 30 বাহু $=1$ একক ও $Y-$অক্ষ বরাবর 15 বাহু $=1$ একক ধরে $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4)$ প্রাপ্ত বিন্দুগুলি গ্রাফ পেপারে স্থাপন করে $0 \le x \le 0.80$ ব্যবধিতে $y=e^{x^2}$ - এর লেখ চিত্র অংকন করুন।

5. এখন প্রত্যেকটি বিন্দু থেকে $X-$ অক্ষের উপর লম্ব টেনে $\int_0^{0.80} e^{x^2} dx$ এর ক্ষেত্রফল চিহ্নিত করুন।

6. এখন প্রাপ্ত পাঁচটি কোটিকে $X-$ অক্ষের সহিত স্কেলের সাহায্যে সংযুক্ত করে 5 টি ট্রাপিজিয়াম আকারে প্রকাশ করুন।

7. ট্রাপিজিয়াম সূত্র, $A=h\left[\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+y_3+\frac{y_4}{2}\right]$ -এ h ও y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 প্রয়োগ করে A নির্ণয় করুন।

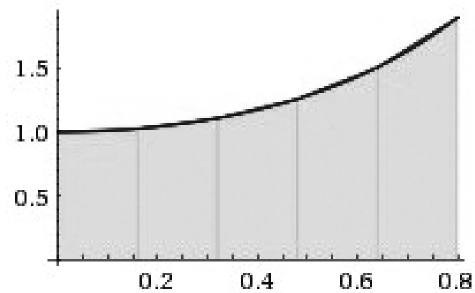
8. আবার যোগজীকরণ করেও A এর মান নির্ণয় করুন।

ফল সংকলন:

$h=\frac{x_n-x_0}{4}$	x_0	$x_1=x_0+h$	$x_2=x_1+h$	$x_3=x_2+h$	$x_4=x_3+h$
বা, $h=\frac{0.80-0}{4}=0.20$	0	0.20	0.40	0.60	0.80

	$y_0 = e^{x_0^2}$ $= e^{0^2} = e^0$	$y_1 = e^{(.20)^2}$ $= e^{(.20)^2} = e^{.04}$	$y_2 = e^{x_2^2}$ $= e^{(.40)^2} = e^{.16}$	$y_3 = e^{x_3^2}$ $y_3 = e^{(.60)^2} = e^{.36}$	$y_4 = e^{x_4^2}$ $= e^{(.80)^2} = e^{.64}$
$y = f(x) = e^{x^2}$	1	1.04081	1.17351	1.43332	1.89648

হিসাব: ট্রাপিজিয়াম সূত্র প্রয়োগ করে ছয়টি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{0.80} e^{x^2}dx$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় ঃ



$$A = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}\right] \text{বর্গ একক}$$

$$= 0.20\left[\frac{1}{2} + 1.04081 + 1.17351 + 1.43332 + \frac{1.89648}{2}\right]$$

বর্গ একক $= 1.019176$ বর্গ একক

আবার, যোগজীকরণ করে $\int_0^{0.80} e^{x^2}dx$ এর মান নির্ণয় ঃ

ফলাফল: নির্ণেয় ক্ষেত্রফল, $A = \int_0^{0.80} e^{x^2}dx = 1.009120$ বর্গ একক

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৮

1. পাঁচ কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{12} \sqrt{x}dx$ মান নির্ণয় করুন।

2. এগারটি কোটি ব্যবহার করে $\int_0^{4} xe^x dx$ মান নির্ণয় করুন।

3. ট্রাপিজিয়াম সূত্র প্রয়োগ করে ছয়টি কোটি নিয়ে $(i)\int_1^4 \left(x^2+1\right)dx, (ii)\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx, (iii)\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ মান নির্ণয় করুন।

4. পাঁচ কোটি ব্যবহার করে $\int_{0.6}^{1} \frac{\cos x}{x}dx$ মান নির্ণয় করুন।

5. ছয় কোটি ব্যবহার করে $(i)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx, (ii)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx$ মান নির্ণয় করুন।

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.২

1. $(i)\ \tan x+\sec x+C,\quad (ii)\ \tan\frac{x}{2}+C, or, \cos ecx-\cot x+C,$

$(iii)\ -\cot\frac{x}{2}+C,\ (iv)\ -\sqrt{2}\cos x+C,\quad (v)\ \sqrt{2}\sin x+C,\quad (vi)\ 2\sqrt{1-\sin x}+C,$

$(vii)\ \sin x-\cos x+C,\quad (viii)\ -(\sin x+\cos x)+C,\quad (ix)\ 2\sqrt{\tan x}+C,\quad (x)\ \frac{1}{2}\tan x+C,$

$(xi)\ 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+C,\quad (xii)\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+C$

2. $(i)\ \frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C,\quad (ii)\ \ln\tan\frac{x}{2}+C,\quad (iii)\ \frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t+C,$

$(iv)\ \frac{t}{8}-\frac{1}{32}\sin 4t+C,\quad (v)\ \frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$

$(vi)\ \frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x-\cos x+C\quad (vii)\ \frac{1}{24}\cos 6x-\frac{3}{8}\cos 2x+C$

$(viii)\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x+C\quad (ix)\ -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q}+\frac{\cos(p-q)x}{p-q}\right]+C$

$(x)\ \frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 8x}{16}+C\quad (xi)\ \frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 6x}{12}+C$

$(xii)\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+C\quad (xiii)\ \frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{16}-\frac{x}{4}+C$

$(xiv)\ \frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 8x}{16}+C$

3. $(i)\ \cos 2x=-1+2\cos^2 x=1-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$(ii)\ \frac{5}{8}\sin x+\frac{5}{48}\sin 3x+\frac{1}{80}\sin 5x+C\quad (iii)\ \frac{\cos^2 x}{2}-\frac{1}{24}\cos 12x+C$

4. গ 5. ক 6. গ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৩

1. ঘ 2. ক 3. খ 4. ঘ 5. ঘ 6. গ

7. ক $\dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{\tan t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}+C$ (খ) $-\frac{1}{2}\cos t^2+C$ এবং $\frac{1}{4}\left(t^2-\sin t^2\cos t^2\right)+C$ বা, $\frac{1}{4}\left(t^2-\frac{1}{2}\sin 2t^2\right)+C$ বা, $\frac{1}{8}\left(2t^2-\sin 2t^2\right)+C$ বা, $\frac{t^2}{4}-\frac{1}{8}\left(\sin 2t^2\right)+C$ (গ) $\frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}+C$ বা, $\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}+C$ বা, $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+C$

8. $(i)\ \frac{1}{18}(4+3x)^6+C\quad (ii)\ \frac{1}{12}\ln\left|\frac{3+2x}{3-2x}\right|+C\quad (iii)\ \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{4x}{3}+C$

$(iv)\ \frac{1}{15}\left[\cot x\left(-3\cos ec^4x+11\cos ec^2x\right)-23\right]-x+C$

$(v)\ \frac{1}{12}\left[\left(6\sqrt{2x+3}\sqrt{3x+2}\right)-5\sqrt{6}\ln\left|3\sqrt{2x+3}+\sqrt{6}\sqrt{3x+2}\right|\right]+C$ $(vi)\ \tan^{-1}\frac{x-4}{3}+C$

$(vii)\ \frac{3x-2}{2\sqrt{3x^2-4x+2}}+C$

$(viii)\ \frac{\ln\left|\left(31x^2+4\sqrt{60x^2+15x}+4\right)\right|-\ln\left|\left(31x^2-4\sqrt{60x^2+15x}+4\right)\right|}{8\sqrt{15}}+C$

$(ix)\ 2\ln\left|\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{2}}\right|+C$ $(x)\ \frac{1}{12}\ln\left|\frac{3-2x}{3+2x}\right|+C$

9. $(i)\ \frac{1}{12}\tan^{-1}\left(\frac{3x}{4}\right)+C$ $(ii)\ \frac{1}{70}(29\cos 2x-8\cos 4x+\cos 6x-32)\cot x\cos ec^6x+C$

$(iii)\ \frac{1}{70}(29\cos 2x+8\cos 4x+\cos 6x+32)\tan x\sec^6 x+C$

$(iv)\ \frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\tan x\right)}{\sqrt{3}}+C$ $(v)\ \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)+C$

$(vi)\ \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(2\tan\frac{x}{2}\right)+C$ $(vii)\ \frac{\tan^{-1}\left(\frac{3\tan x}{\sqrt{5}}\right)}{3\sqrt{5}}+C$

$(viii)\ -\frac{2\sin^3 x\cos x\left(\cot^2 x-3\right)}{3\sqrt{\sin^5 x\cos^3 x}}+C$ **বা,** $\frac{2\sin x\cos x\left(4\sin^2 x-1\right)}{3\sqrt{\sin^5 x\cos^3 x}}+C$

$(ix)\ -\cot^{-1}\sqrt{2(x-3)^2-1}+C$ **বা,** $-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2(x-3)^2-1}\right)+C$ $(x)\ -\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{4x^2-9}}\right)+C$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৪

1. গ 2. ক 3. ক 4. ঘ 5. খ 6. ক 7. গ 8. গ 9. খ 10. ঘ

11. (ক) $\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$ (খ) $\frac{2}{3(x+2)}+\frac{1}{18}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{5}{9}\ln|x+2|+C$

(গ) $-\frac{3}{5}\ln|1-x|+\frac{3}{10}\ln\left|x^2+4\right|-\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

12. $(i)\ -\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|3-x|+C$ বা, $-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+C$ $(ii)\ \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$

$(iii)\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+5}{x+7}\right|+C$ $(iv)\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$ $(v)\ \frac{1}{11}\ln\left|\frac{x-5}{x+6}\right|+C$

13. $(i)\ \ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$ $(ii)\ 2\ln|x-3|-\ln|x-2|+C$

$(iii)\ -\ln|1-x|+\frac{3}{2}\ln|2-x|-\frac{1}{2}\ln|x|+C$ বা, $-\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x-2|+C$

$(iv)\ \frac{4}{5}\ln|x-3|+\frac{1}{5}\ln|x+2|+C$ $(v)\ \frac{2}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{15}\ln|3x+2|+C$

14. $(i)\ \frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln|x-3|+C$ $(ii)\ -2\ln|1-x|+\frac{3}{2}\ln|2-x|+\frac{1}{2}\ln|x|+C$

$(iii)\ \frac{-4}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$ $(iv)\ -\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{5}{6}\ln|x-3|+\frac{2}{3}\ln|x|+C$

15. $(i)\ \frac{3}{10}\ln|x^2+4|-\frac{3}{5}\ln|x-1|-\frac{1}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$ $(ii)\ \ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$ বা,

$\ln|x|-\ln\left|\sqrt{x^2+1}\right|+C$ বা, $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$

$(iii)\ \frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$ $(iv)\ -\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{2}\ln|x-3|+C$

16. $(i)\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C$ $(ii)\ x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

17. $(i)\ x-\frac{5}{2}\ln|x+4|-\frac{3}{2}\ln|x+2|+C$ $(ii)\ x+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C$ $(iii)\ 2x-\ln|x-1|+2\ln|x+3|+C$

18. $(i)\ \frac{1}{6}\left(2\ln|x-1|-\ln|x^2+x+1|\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$ $(ii)\ \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

$(iii)\ \frac{1}{4}\ln|x^2+1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$ $(iv)\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+1}{x^2+3}\right|+C$

19. $(i)\ \frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$ $(ii)\ \frac{1}{1-x}-\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$ $(iii)\ -\frac{x}{8(x^2-4)}+\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|+C$

$(iv)\ \frac{-7}{5(x-3)}+\frac{3}{25}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$ $(v)\ \frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C$ $(vi)\ \frac{-1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$

20. $(i)\ \frac{7}{x+1}+2\ln|x+1|+C$ $(ii)\ \frac{14-6x}{(x-3)^2}+\ln|x-3|+C$ $(iii)\ \frac{-12x^2+24x-23}{3(x-2)^3}+C$

21. $(i)\ \frac{-5(x-3)}{4(x+2)^2}+\frac{3}{8}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$ $(ii)\ \frac{3}{2}\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|+C$

$(iii)\ \frac{3(3x-2)}{(x-1)^2}+13\ln|x-2|-12\ln|x-1|+C$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৫

1. ঘ 2. খ 3. ক 4. ঘ 5. গ 6. খ

৭. (ক) $\frac{e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)}{13}+C$ (খ) $\frac{e^{2x}(2\sin 3x-3\cos 3x)}{13}+C$ (গ) $\frac{e^{5x}(5\sin 4x-4\cos 4x)}{41}+C$

8. $(i)\ \frac{e^{2x}}{8}\left(4x^3-6x^2+6x-3\right)+C$ $(ii)\ \frac{1}{16}x^4\left(4\ln|x|-1\right)+C$

$(iii)\ \frac{1}{72}\left[6x(3x+\sin 6x)+\cos 6x\right]+C$ $(iv)\ \frac{1}{32}x^4\left[8(\ln|x|)^2-4\ln|x|+1\right]+C$

$(v)\ \frac{1}{2}x\tan x+\frac{3}{2}\ln|\cos x|+C$ $(vi)\ 4\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|-x\cot\frac{x}{2}+C$

$(vii)\ \ln\left|\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)\right|-\ln|x|-\dfrac{\cos^{-1}x}{x}+C$ $(viii)\ \sin x\left[\ln|\sin x|-1\right]+C$

$(ix)\ e^x\cos^{-1}\left(e^x\right)-\sqrt{1-e^{2x}}+C$ $(x)\ x\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}-\dfrac{1}{2}(1+x)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C$

9. $(i)\ e^x\ln|x|+C$ $(ii)\ \dfrac{e^x}{1-x}+C$ $(iii)\ \dfrac{1}{2}x\sqrt{4x^2-9}-\dfrac{9}{4}\ln\left|\sqrt{4x^2-9}+2x\right|+C$

$(iv)\ \dfrac{1}{6}(3x+5)\sqrt{3x^2+10x+3}-\dfrac{8\ln\left|\left(\sqrt{9x^2+30x+9}+(3x+5)\right)\right|}{3\sqrt{3}}+C$ $(v)\ e^x\ln x+C$

$(vi)\ e^{5x}\ln x+C$ $(vii)\ e^{-2x}\ln x+C$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৬

1. $(i)\ \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$, $(ii)\ 2\ln 2$, $(iii)\ 1$

2. $(i)\ \dfrac{\pi}{2}+1$, $(ii)\ 2$, $(iii)\ -\dfrac{\pi}{4}+1$,

3. $(i)\ \sqrt{3}+1$, (ii) অসংজ্ঞায়িত, $(iii)\ \dfrac{\pi}{4}$,

4. $(i)\ 1-\dfrac{\pi}{4}$, $(ii)\ 0$, $(iii)\ \sqrt{2}-1(Taking\ '+'),1(Taking\ '-')$,

5. $(i)\ \dfrac{\pi}{4}$, $(ii)\ 1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $(iii)\ \dfrac{\pi^3}{24}$,

6. $(i)\ 2-\sqrt{2}$, $(ii)\ \dfrac{7}{18}$, $(iii)\ \dfrac{1}{3}(e-1)\approx 0.57276$,

7. $(i)\ \ln 2\approx 0.69315$, $(ii)\ \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$, $(iii)\ \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{9}{5}\right)\approx 0.14695$,

8. $(i)\ \dfrac{\pi}{4}\approx 0.78540$, $(ii)\ \dfrac{\pi}{4}\approx 0.78540$, $(iii)\ \dfrac{1}{4}\ln 3\approx 0.27465$,

9. $(i)\ \dfrac{\pi^2}{32}\approx 0.30843$, (ii) অসংজ্ঞায়িত, $(iii)\ \ln 2\approx 0.69315$,

10. $(i)\ \dfrac{1}{2}\ln 3(2+\ln 3)\approx 1.7021$, $(ii)\ \dfrac{\tan^3(1)}{3}\approx 1.2592$, $(iii)\ -2$,

11. $(i)\ \dfrac{a\sin^{-1}\frac{1}{a}}{|a|}, a>1 and a<-1$, $(ii)\ -\dfrac{i\pi}{6}\approx -0.523599i$, $(iii)\ \dfrac{1}{2}$,

12. $(i)\ \dfrac{1}{2}\left(3-\sqrt{7}\right)\approx 0.17712$, $(ii)\ \dfrac{1}{12}\left(9\sin(1)+\sin 3\right)\approx 0.64286$,

$(iii)\ \dfrac{4}{15}\sin^6\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(19+18\cos(1)+3\cos(2)\right)\approx .088974$,

13. $(i)\ e\sin(1)\approx 2.2874$, $(ii)\ 2\sin(1)\approx 1.6829$, $(iii)\ \dfrac{1}{4}(2+\sin 2)$,

14. $(i)\ \dfrac{2\sin^3(1)}{3}$, $(ii)\ \dfrac{1}{10}\left(-4+5\cos(1)-\cos(5)\right)$, $(iii)\ \dfrac{1}{10}\left(5\sin(1)+\sin(5)\right)$,

15. $(i)\ \dfrac{1}{3}$, $(ii)\ \dfrac{\pi}{16}$, $(iii)\ \dfrac{1}{12}$,

16. $(i)\ \frac{7\sqrt{3}}{5}-\frac{4}{15}\approx 2.1582$, $(ii)\ \frac{1}{65}\sqrt[4]{\sin(1)}\left\{37\sin(1)+5\sin(3)\right\}$, $(iii)\ \frac{1}{42}\left(16+\sqrt{\cos(1)}\left(3\cos(3)-19\cos(1)\right)\right)$,

17. $(i)\ \frac{8}{5}$, $(ii)\ \frac{\ln 6}{5}\approx 0.35835$, $(iii)\ \frac{79}{3}$, 18. $(i)\ \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, $(ii)\ \frac{\ln 3}{4}\approx 0.27465$, $(iii)\ \frac{\pi}{4}\approx 0.78540$,

19. $(i)\ \frac{\pi}{3}$, $(ii)\ 2\ln 2-1$, $(iii)\ \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$, 20. $(i)\ \frac{\pi}{2}$, $(ii)\ \pi$, $(iii)\ \frac{1}{2}\ln\left(9-6\sqrt{2}\right)$,

21. $(i)\ \frac{14}{3}+2\sqrt{3}$, $(ii)\ 1$, $(iii)\ \frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}{\sqrt{15}}$,

22. $(i)\ \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ (ii), $\frac{9\pi}{8}\approx 3.5343$, $(iii)\ \tan^{-1}(4)-\tan^{-1}(2)$,

23. $(i)\ \sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $(ii)\ \frac{1}{10}\left(\pi+\ln\left(\frac{9}{8}\right)\right)$, $(iii)\ \frac{\pi^3}{24}$,

24. $(i)\ \sin 2-2\cos 2$, $(ii)\ \frac{1}{2}(\pi-2)$, $(iii)\ \pi-2\approx 1.1416$,

25. $(i)\ \ln 4-\frac{3}{4}$, $(ii)\ \frac{e-2}{e}$, $(iii)\ \frac{3\log_e 3}{8}$,

26. $(i)\ \frac{1}{16}\left(4+\pi^2\right)$, $(ii)\ \frac{1}{16}\left(\pi^2-4\right)$, $(iii)\ \frac{1}{8}(\sin 2-2\cos 2)$,

27. $(i)\ \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$, $(ii)\ \frac{\pi}{8}$, $(iii)\ 1$, 28. $(i)\ \frac{\sqrt{15}}{2}+8\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$, $(ii)\ \frac{\pi}{4}$, $(iii)\ \frac{\pi}{2}-\log 2$,

29. $(i)\ \frac{\pi}{4}-\frac{\log 4}{4}$, $(ii)\ \frac{\pi}{2}-1$, $(iii)\ -1$

30. ক 31. খ 32. ঘ 33. গ 34. ঘ 35. ক 36. খ

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ১০.৭

1. 9 বর্গ একক 2. 24 বর্গ একক 3. $\frac{19}{3}$ বর্গ একক 4. $\frac{250}{3}$ বর্গ একক

5. $\frac{32}{3}$ বর্গ একক 6. $16\sqrt{6}-\frac{8}{3}$ বর্গ একক 7. 16 বর্গ একক 8. πr^2 বর্গ একক

9. 16π বর্গ একক 10. $\frac{16\pi}{3}-4\sqrt{3}$ বর্গ একক 11. $2\sqrt{21}+\frac{25\pi}{2}+25\sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ বর্গ একক

12. 6π বর্গ একক 13. $30\pi\approx 94.2478$ বর্গ একক 14. $108\pi\approx 339.292$ বর্গ একক এবং $54\pi\approx 169.646$ বর্গ একক 15. $\frac{1}{6}a^2$ বর্গ একক।

16. ক 17. খ 18. ঘ 19. ঘ 20. গ 21. খ 22. ক

23. (ক) ইহা উপবৃত্তের সমীকরণ, চিত্র নিজে অংকন করুন, (খ) ক্ষেত্রফল 12π বর্গ একক, (গ) ক্ষেত্রফল $3\sqrt{3}+2\pi$ বর্গ একক