ইউনিট ৯

অন্তরীকরণ
(Differentiation)

ভুমিকা
গণিতের একটি অতি গুরুত্বপূর্ণ শাখা হচ্ছে ক্যালকুলাস যা লিমিটের ধারণার উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত। সপ্তদশ শতকের শেষে ইংরেজ বিজ্ঞানী স্যার আইজ্যাক নিউটন ও জার্মান বিজ্ঞানী গটফ্রেড লিবনিজ স্বাধীনভাবে ক্যালকুলাস আবিস্কার করেন। অন্তরীকরণ হচ্ছে এমন একটি গাণিতিক পদ্ধতি যার সাহায্যে পরিবর্তনশীল রাশির পরিবর্তনের হার নির্ণয় করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, সময়ের সাথে সাথে গাড়ীর অবস্থানের পরিবর্তনের হার অথবা গাড়ীর বেগ বৃদ্ধির হার অথবা চাহিদা বৃদ্ধির সাথে কোনো জিনিসের মূল্য বৃদ্ধির হার অথবা কোনো পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী শিক্ষার্থী ও পাশের হার অন্তরীকরণের উদাহরণ।

ইউনিটের উদ্দেশ্য
এই ইউনিট শেষে আপনি -
- ফাংশন ও লিমিটের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- বিভিন্ন ধরনের ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন,
- ফাংশনের পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন,
- ফাংশনের লঘুমান ও গুরুমান নির্ণয় করতে পারবেন।

ইউনিট সমাপ্তির সময়	ইউনিট সমাপ্তির সর্বোচ্চ সময় ৩০ দিন

এই ইউনিটের পাঠসমূহ

পাঠ ৯.১ লিমিট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লিমিটের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ঢালের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- উদাহরণ ও লেখচিত্রের সাহায্যে ফাংশনের লিমিট ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- একদিকবর্তী লিমিট কী বর্ণনা করতে পারবেন,
- লিমিটের মৌলিক ধর্মাবলি বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ফাংশন, লিমিট, স্বাধীন চলক, সীমাস্থ মান, বাস্তব সংখ্যা, ঢাল

মূলপাঠ

লিমিট

যদি একটি স্বাধীন চলক x এর মান a এর অতি নিকটবর্তী $(x \neq a)$ হওয়ায় $f(x)$ ফাংশনের মান একটি নিদ্রিষ্ট সংখ্যা L এর অতি সন্নিকটবর্তী হয় $[f(x) \neq L]$, তখন L কে $f(x)$ ফাংশনের লিমিট বা সীমাস্থ মান বলা হয় এবং ইহাকে $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। উদাহরণস্বরুপ,মনে করুন, $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$. তাহলে $f(5)=\dfrac{0}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত। অর্থাৎ $x=1$ বিন্দুতে $f(x)$ এর কোনো মান বিদ্যমান নাই। যদি ফাংশনটিকে সরল করুন তাহলে পাই $f(x)=\dfrac{(x+5)(x-5)}{(x\text{-}5)}=x+5$ এবং তখন $f(5)=10$ পাওয়া যায় কিন্তু $x=5$ এর জন্য লব ও হর কে $x-5$ অর্থাৎ শূন্য দিয়ে ভাগ করা বুঝায় যা অসম্ভব। এই সমস্যা সমাধানের জন্য $x=5$ না ধরে 5 এর খুব কাছাকাছি মান নেওয়া হলে $x-5$ এর মান শূন্য না হয়ে অতি ক্ষুদ্র বাস্তব সংখ্যা হয় যা বাস্তব সংখ্যার নিয়মের পরিপন্থি হয় না। যেমন: $x = 4.9, 4.99, 4.999, \ldots\ldots\ldots\ldots$ হলে $f(x) = 9.9, 9.99, 9.999, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ পাওয়া যায়। আবার $x = 5.1, 5.01, 5.001, 5.0001, \ldots\ldots\ldots\ldots$ হলে $f(x) = 10.1, 10.01, 10.001, 10.0001, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ পাওয়া যায়। অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রেই চলরাশি x এর মান 5 এর কাছাকাছি হলে $f(x)$ এর মান 10 এর কাছাকাছি হয়। এক্ষেত্রে 10 কে প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর লিমিট বা সীমাস্থ মান বলা হয়।

লিমিটের $\varepsilon-\delta$ সংজ্ঞা: স্বাধীন চলক x এর মান ক্রমশ একটি ধ্রুব সংখ্যা a এর নিকটবর্তী হলে L কে ফাংশন $f(x)$ এর লিমিট বলা হবে যদি কোনো পূর্ব নির্ধারিত যথেষ্ট ক্ষুদ্র ধনাত্বক সংখ্যা $\varepsilon > 0$ এর জন্য ε এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি ক্ষুদ্র ধনাত্বক সংখ্যা δ পাওয়া যায়, যেন $|f(x)-L| < \varepsilon$ যখন $0<|x-a|<\delta$ হয়।

উদাহরণ 1: লিমিটের $\varepsilon-\delta$ সংজ্ঞা ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে, $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

সমাধান: ধরুন, $\varepsilon = 0.01$, তখন আমরা পাই, $|(2x-1)-1|<0.01$ অর্থাৎ $|2x-1-1|<0.01$ অর্থাৎ $|2x-2|<0.01$ অর্থাৎ $|x-1|<\dfrac{0.01}{2}=0.005$ অর্থাৎ $|x-1|<0.005$. সুতরাং $\delta = 0.005$.

একই ভাবে, যদি $\varepsilon = 0.001$ হয় তবে আমরা পাই, $\delta = 0.0005$. সুতরাং $(2x-1)$, 1 এর যত কাছে যায়, x, 1 এর তত কাছে যায় অর্থাৎ

$|(2x-1)-1|<0.01$ যদি $0<|x-1|<0.005$

$|(2x-1)-1|<0.001$ যদি $0<|x-1|<0.0005$

$|(2x-1)-1|<0.0001$ যদি $0<|x-1|<0.00005$ হয়

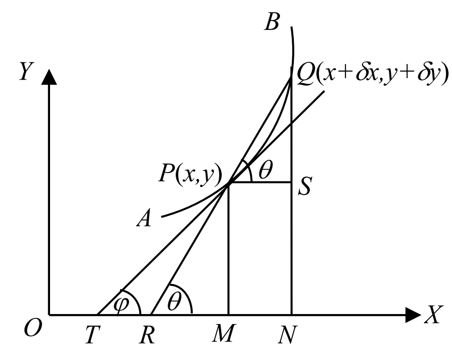
এবং সাধারণ ভাবে, $|(2x-1)-1|<\varepsilon$ যদি $0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}=?$ হয়।

সুতরাং $(2x-1)$ এর লিমিট 1 যখন $x \to 1$.

শিক্ষার্থীর কাজ	
	1. লিমিটের $\varepsilon-\delta$ সংজ্ঞা ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে, $\lim\limits_{x\to 3}(2x-2)=4$.
	2. লিমিটের $\varepsilon-\delta$ সংজ্ঞা ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে, $\lim\limits_{x\to 4}(3x-4)=8$.

ঢাল(Slope):

মনে করুন, AB বক্ররেখাটি $y=f(x)$ অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের একটি অংশ এবং $P(x,y)$ ও $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ এই রেখার উপর কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। মনে করুন, QP সরলরেখাকে বর্ধিত করলে তা x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ $\angle XRP=\theta$ । P ও Q হতে x অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব আঁকি। আবার, P হতে QN এর উপর PS লম্ব আঁকুন।



তাহলে, $PS=MN=ON-OM=x+\delta x-x=\delta x$

এবং $SQ=QN-SN=y+\delta y-y=\delta y$

$\angle SPQ=\theta=\angle XRP, \therefore \tan\theta=\dfrac{QS}{PS}=\dfrac{\delta y}{\delta x}$………(i)

যদি AB বক্ররেখার উপর দিয়ে ক্রম $Q\to P$ হয়, অর্থাৎ P ও Q খুব কাছাকাছি হয় তবে PQ জ্যা PT স্পর্শক এর সাথে সমাপতিত হবে। সেক্ষেত্রে $\delta x\to 0$ এবং $\theta\to\varphi$, হবে যেখানে $\varphi=\angle XTP$.

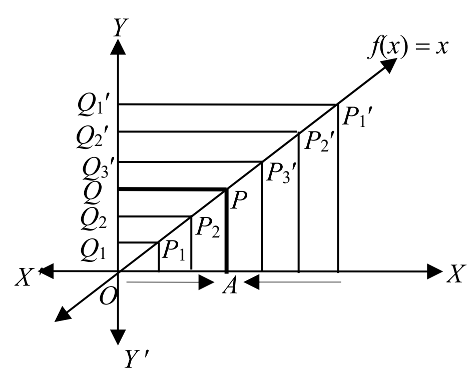
$\therefore \tan\theta=\lim\limits_{Q\to P}\tan\theta=\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{dy}{dx}$ ।

সুতরাং AB বক্ররেখার $P(x,y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল হচ্ছে $\dfrac{dy}{dx}$ ।

ফাংশনের লিমিট (উদাহরণ ও লেখচিত্রের সাহায্যে):

আমরা জানি, চলক x এর মান ক্রমশ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর নিকটবর্তী হতে থাকলে ফাংশন $f(x)$ এর মান যে নির্দ্রিষ্ট ধ্রুব সংখ্যা L এর নিকটবর্তী হতে থাকে, তাকে $f(x)$ এর সীমাস্থ মান বা লিমিট বলে। একে $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

মনে করুন, $f(x)=x$,যার লেখচিত্র একটি অবিচ্ছিন্ন সরলরেখা। A বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(3,0)$ হলে y-অক্ষের সমান্তরাল AP রেখা সরলরেখাটিকে $P(3,3)$ বিন্দুতে ছেদ করে। x-অক্ষের সমান্তরাল y-অক্ষকে $Q(0,3)$ বিন্দুতে ছেদ করে। $x=3$ হলে $OQ=3$ দ্বারা ফাংশনের মান সূচিত করে।



সরলরেখার উপরস্থ $P_1, P_2,$……………বিন্দুগুলোর ভুজ ও কোটি হতে দেখা যায় যে, চলমান বিন্দুটির বামদিক হতে A এর দিকে অগ্রসর হলে y-অক্ষের উপরস্থ বিন্দুগুলি নিচ হতে উপরে Q বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়। অর্থাৎ ফাংশনের মান $OQ=3$ এর দিকে অগ্রসর হয়।

$\therefore \lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}x=3$

আবার P_1', P_2' ,……….. বিন্দুগুলোর ভুজ ও কোটি হতে দেখা যায় যে, চলমান বিন্দুটির ডানদিক হতে A এর দিকে অগ্রসর হলে y -অক্ষের উপরস্থ বিন্দুগুলি উপর হতে উপরে Q বিন্দুর দিকে অগ্রসর হয়। অর্থাৎ ফাংশনের মান $OQ = 3$ এর দিকে অগ্রসর হয়।

$\therefore \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x = 3$ সুতরাং নির্ণেয় সীমার অস্তিত্ব আছে এবং এর মান 3 .

একদিকবর্তী লিমিট

ফাংশন $f(x)$ কে কখনও কখনও একাধিক শর্তাধীনের বিভিন্ন ফাংশনের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। যেমন:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{when} \quad x > 0 \\ 0 & \text{when} \quad x = 0 \\ x + 2 & \text{when}\ x < 0 \end{cases}$$

এক্ষেত্রে ফাংশনের বামদিকের লিমিট এবং ডানদিকের লিমিট জানা থাকলে উক্ত ফাংশনের লিমিট নির্ণয় করা যায়।

বাম লিমিট: চলক x এর মান a এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর মান থেকে ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হতে থাকলে $f(x)$ এর মান কোনো নিদ্রিষ্ট ধ্রুব সংখ্যা l_1 এর দিকে অগ্রসর হলে l_1 কে $f(x)$ এর বাম দিকের লিমিট বলে এবং একে $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l_1$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ডান লিমিট: চলক x এর মান a এর চেয়ে বৃহত্তর মান থেকে ক্রমশ a এর দিকে অগ্রসর হতে থাকলে $f(x)$ এর মান কোনো নিদ্রিষ্ট ধ্রুব সংখ্যা l_2 এর দিকে অগ্রসর হলে l_2 কে $f(x)$ এর ডান দিকের লিমিট বলে এবং একে $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l_1$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, কোনো বিন্দু $x = a$ তে লিমিট বিদ্যমান থাকবে অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ বিদ্যমান থাকবে যদি $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ হয়।

লিমিটের মৌলিক ধর্মাবলি

যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1$ হয় যেখানে L এবং L_1 হচ্ছে কোনো সসীম সংখ্যা, তখন

(i) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = L \pm L_1$

(ii) $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = L \times L_1$

(iii) $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{L_1}$, যখন $L_1 \neq 0$.

(iv) $\lim\limits_{x\to a}[Ff(x)] = F\lim\limits_{x\to a}[f(x)] = FL$ যেখানে $F(u)$ হচ্ছে এমন একটি ফাংশন যা $u = L$ এর জন্য অবিচ্ছিন্ন হয়।

(v) যদি $|f(x)| < |g(x)|$ অর্থা $f(x), -g(x)$ এবং $g(x)$ এর মধ্যে অবস্থান করে তবে যদি $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ হলে $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

(vi) যদি $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ এবং $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1$ এবং যদি a বাদে a এর যে কোনো কাছাকাছি বিন্দুর জন্য $f(x) < g(x)$ হলে $L < L_1$ হবে।

উদাহরণ 2: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 2x + 9)$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 2x + 9) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 - 2\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 9 = 1^2 - 2.1 + 9 = 8$

উদাহরণ 3: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{(x-1)}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)}{(x+1)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\dfrac{1-1}{1+1}=\dfrac{0}{2}=0$

উদাহরণ 4: $\lim\limits_{x\leftarrow 1}\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $x=1$ বসালে সীমা $\dfrac{0}{0}$ আকার ধারণ করে যা অসংজ্ঞায়িত।

এখানে, $\dfrac{x^3-3x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^3-x-2x+2}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x^2-1)-2(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{(x-1)\{x(x+1)-2\}}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

$=\dfrac{x^2+2x-x-2}{x-1}=\dfrac{x(x+2)-(x+2)}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$

সুতরাং $\lim\limits_{x\leftarrow 1}(x+2)=1+2=3$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+9)$ এর মান নির্ণয় করুন। 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-9)}{x-3}$ এর মান নির্ণয় করুন। 3. $\lim\limits_{x\to 3}x(x+5)(x^2-4)$ এর মান নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১

মান নির্ণয় করুন:

1. (i) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3-2x^2+7x-10)$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2}x(x^2+3)(2x-5)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

(vii) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ (viii) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{7-x}}$

পাঠ ৯.২ কতিপয় বিশেষ লিমিট

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অসীম লিমিট বর্ণনা ও প্রয়োগ করতে পারবেন,
- কতিপয় বিশেষ লিমিট বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অসীম লিমিট, সসীম লিমিট, চলক, সীমাস্থ মান, রেডিয়ান কোণ

মূলপাঠ

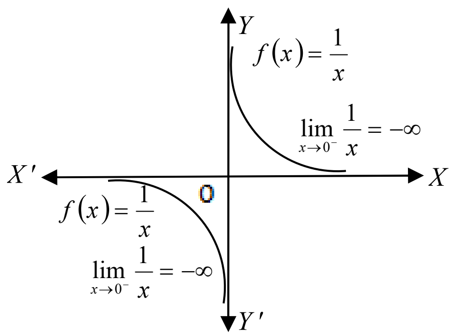
অসীম বিন্দুতে লিমিট এবং অসীম লিমিট (Limit at Infinity and infinite limit)

(a) **অসীম বিন্দুতে লিমিট:** চলক x এর মান অসীমের দিকে অগ্রসর হলে অর্থাৎ $x \to \infty$ বা $x \to -\infty$ এর জন্য $f(x)$ এর মান যে নির্দ্রিষ্ট সংখ্যার দিকে অগ্রসর হয় তাকে $f(x)$ এর জন্য অসীম বিন্দুতে লিমিট বলে। অসীম বিন্দুতে ফাংশনের মান অসীম বা সসীম হতে পারে। একে $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l_1$ বা $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণসরূপ: $\lim\limits_{x\to\infty}(4x) = \infty$ এবং $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right) = \frac{1}{\infty}+2 = 0+2 = 2$

(b) **অসীম লিমিট:**

চলক x নির্দিষ্ট সংখ্যা a এর দিকে অগ্রসর হওয়ায় $f(x)$ এর মান সীমাহীনভাবে বৃদ্ধি পেলে একে $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ অথবা $f(x)$ এর মান সীমাহীনভাবে হ্রাস পেলে একে $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একে ফাংশনের অসীম লিমিট বলে।



উদাহরণসরূপ: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ অথবা $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

এখানে উল্লেখ্য যে, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ বা $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ হলে $x=a$ বিন্দুতে লিমিট বিদ্যমান হবে না , কারণ $+\infty$ বা $-\infty$ কোনো বাস্তব মান নয়।

কতিপয় বিশেষ লিমিট

1. প্রমাণ করুন যে

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$ **যেখানে x রেডিয়ানে প্রকাশিত হয়েছে।**

সমাধান: (a) ত্রিকোণোমিতির ধারণা থেকে আমরা জানি, যদি x রেডিয়ানে প্রকাশিত কোনো সূক্ষ্ম কোণ হয় অর্থাৎ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ হয়, তবে $\sin x < x < \tan x$ বা $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$………………(i)

যখন $x \to 0$ তখন $\cos x \to 1$. সুতরাং যখন $x \to 0$ তখন $\frac{\sin x}{x}$ এর মান 1 এবং অন্য একটি সংখ্যা যা 1 এর খুব কাছাকাছি , এই দুইয়ের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

(b) আবার (i) নং কে $\tan x$ দ্বারা ভাগ করে পাই $\cos x < \frac{x}{\tan x} < 1$………………(i) . যখন $x \to 0$ তখন $\cos x \to 1$. সুতরাং যখন $x \to 0$ তখন $\frac{x}{\tan x}$ এর মান 1 এবং অন্য একটি সংখ্যা যা 1 এর খুব কাছাকাছি, এই দুইয়ের মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$

অনুসিদ্ধান্ত 1: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

অনুসিদ্ধান্ত 2: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{x}{\tan x}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}}=\dfrac{1}{1}=1$.

2. মান নির্ণয় করুন: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$

সমাধান: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(e^x-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left((1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+..............)-1\right)$

$$\left[\because e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+................\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...........\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}................\right)$$

$$=1+\frac{0}{2!}+\frac{0}{3!}+\frac{0}{4!}+...........=1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ **এর মান নির্ণয় করুন।**

সমাধান: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\{\ln(1+x)\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...........\right)$

$$\left[\because \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+..........\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+...........\right)=1-\frac{0}{2}+\frac{0}{3}-........=1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$

4. প্রমাণ করুন যে, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

সমাধান: ধরুন, $M=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore \ln M=\lim_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...........\right)=1$$

$$\left[\because \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+..........\right]$$

$\therefore \ln M=1=\ln e\Rightarrow M=e \qquad \because \ln e=1$

সুতরাং $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ বা $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

5. প্রমাণ করুন যে, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ **; যেখানে** a **মূলদ সংখ্যা এবং** $a>0.$

সমাধান: যখন n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা: এক্ষেত্রে লব কে হর দিয়ে ভাগ করে পাই

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+a^{n-1}=na^{n-1}\ \#$$

সুতরাং নির্ণেয় লিমিট $=\lim\limits_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots\ldots+a^{n-1}\right)=na^{n-1}$. যেহেতু ,লিমিট $x\to a$ তে প্রতিটি রাশির মান হয় a^{n-1} এবং এভাবে প্রত্যেকটি রাশির যোগফল হয় na^{n-1} এর সমান।

যখন n **ঋনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা:** ধরুন, $n=-m$ যেখানে m একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং $a\neq 0$. সুতরাং

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{x^{-m}-a^{-m}}{x-a}=-\frac{1}{x^m x^n}.\frac{x^m-a^m}{x-a}$$

এখানে $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x-a}=ma^{m-1}$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{x^n-a^n}{x-a}=-\frac{1}{a^{2m}}ma^{m-1}=-ma^{-m-1}=na^{n-1}$$

যখন n **একটি মূলদ ভগ্নাংশ:** ধরুন, $n=\dfrac{q}{p}$, যেখানে q একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং p যে কোনো পূর্ণ সংখ্যা (ধনাত্মক বা ঋনাত্মক)।

আবার, ধরুন $x^{\frac{1}{q}}=y$ এবং $a^{\frac{1}{q}}=b$.

$$\therefore\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{x^{\frac{q}{p}}-a^{\frac{q}{p}}}{x-a}=\frac{y^p-b^p}{y^q-b^q}=\frac{(y^p-b^p)(y-b)}{(y^q-b^q)(y-b)}$$

এখন, যেহেতু $x\to a$, $x^{\frac{1}{q}}\to a^{\frac{1}{q}}$ $\quad\therefore\ y\to b$. আবার $y\to b$ হলে লব হতে পাই, $\lim\limits_{y\to b}\dfrac{y^p-b^p}{y-b}=pb^{p-1}$ এবং হর হতে পাই $\lim\limits_{y\to b}\dfrac{y^q-b^q}{y-b}=qb^{q-1}$

$$\therefore\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{pb^{p-1}}{qb^{q-1}}=\frac{p}{q}b^{p-q}=\frac{p}{q}a^{\frac{1}{q}(p-q)}=\frac{p}{q}a^{\frac{p}{q}-1}=na^{n-1}$$

আবার, $n=0$ হলে পাই, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{0}{x-a}=0$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}}$$

সুতরাং সকল ক্ষেত্রেই আমরা বলতে পারি, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$.

6. প্রমাণ করুন যে, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=n$

সমাধান: দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির সূত্রানুসারে, x এর সকল মানের জন্য

$$(1+x)^n-1=\left\{1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots\ldots\right\}-1$$

$$=nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots\ldots$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+.........\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(n+\frac{n(n-1)}{2!}x+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^2+.........\right)=n$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n}$$

উদাহরণ 1: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-1}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $x=\infty$ বসালে সীমা $\frac{\infty}{\infty}$ আকার ধারণ করে যা অসংজ্ঞায়িত।

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{\infty+1}=\frac{1}{\infty}=0$$

উদাহরণ 2: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{2x+1}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{2x+1}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-1)}{\lim_{x\to 1}(2x+1)}=\frac{1^2+2.1-1}{2.1+1}=\frac{2}{3}$

উদাহরণ 3: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $x=0$ বসালে সীমা $\frac{0}{0}$ আকার ধারণ করে যা অসংজ্ঞায়িত।

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} \qquad [\because 1-\cos 2x=2\sin^2 x]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=1^2.\frac{0}{2}=0 \qquad \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right]$$

উদাহরণ 4: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $x=0$ বসালে সীমা $\frac{0}{0}$ আকার ধারণ করে যা অসংজ্ঞায়িত।

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} \qquad [\because 1-\cos 2x=2\sin^2 x]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}=1^2.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad\left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right]$$

উদাহরণ 5: $\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $x=a$ বসালে সীমা $\frac{0}{0}$ আকার ধারণ করে যা অসংজ্ঞায়িত।

ধরুন, $\sqrt{x}=y$ এবং $\sqrt{a}=b$, অতএব যখন $x\to a$ তখন $y\to b$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{y^3-b^3}{y-b}=3b^{3-1}=3b^2=3\left(\sqrt{a}\right)^2=3a\qquad\left[\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}\right]$$

উদাহরণ 6: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x+9}{x^2-7x+3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x+9}{x^2-7x+3}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2x+5+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+5+\frac{9}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^3}}=\frac{2\times\infty+5+\frac{9}{\infty}}{1-\frac{7}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{\infty+5-0}{1-0+0}=\infty$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x+9}{x^2-7x+3}=\infty$$

উদাহরণ 7 : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ এখানে, $x=0$ বসালে সীমা $\frac{0}{0}$ আকার ধারণ করে যা অসংজ্ঞায়িত।

সুতরাং $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-x+1}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=\frac{-1}{\sqrt{1-0}+1}=-\frac{1}{2}$$

উদাহরণ 8: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

উদাহরণ 9: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^{\circ}}{x}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: আমরা জানি, $x^{\circ}=\dfrac{\pi x}{180}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^{\circ}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}=\frac{\pi}{180}.1=\frac{\pi}{180}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ এর মান নির্ণয় করুন। 2. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi - x}$ এর মান নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.২

মান নির্ণয় করুন:

1. (i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x+9}{x^2-7x+3}$ (ii) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$

(vii) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ (viii) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ (ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\cos x+\cos 2x)}{\sin x}$

(x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$ (xi) $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}$

পাঠ ৯.৩ অবিচ্ছিন্ন ফাংশন

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

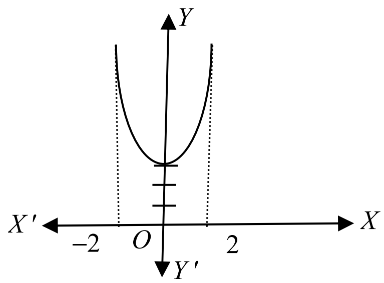
এই পাঠ শেষে আপনি-

- লেখচিত্রের সাহায্যে অবিচ্ছিন্ন ফাংশন বর্ণনা করতে পারবেন,
- অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধর্মাবলি বর্ণনা করতে পারবেন।

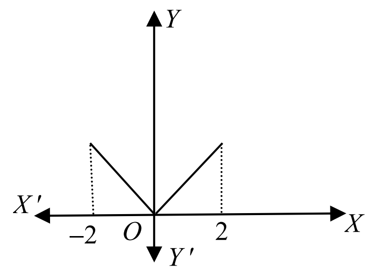
মুখ্য শব্দ	অবিচ্ছিন্ন ফাংশন, লেখচিত্র, ব্যবধি, বিন্দু

মূলপাঠ

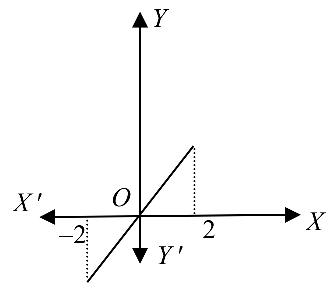
লেখচিত্রের সাহায্যে ফাংশনের অবিচ্ছিন্নতার বর্ণনা: (a,b) ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রে ব্যবধির মধ্যবর্তী কোনো বিন্দুতে যদি ফাঁকা বা লম্ফ না থাকে তবে ঐ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটিকে অবিচ্ছিন্ন (Continuous Function) বলা হয়। অর্থাৎ অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের ক্ষেত্রে পেন্সিল না তুলে এক টানে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়।



চিত্র-১: $f(x)=x^2+3$



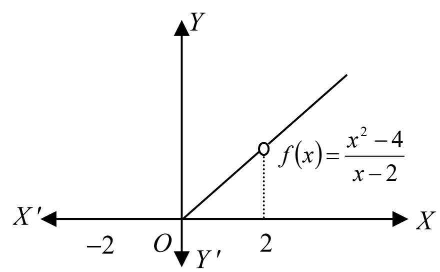
চিত্র-২: $f(x)=|x|$



চিত্র-৩: $f(x)=x$

চিত্র-১ এ $f(x)=x^2+3$ ফাংশনটি, চিত্র-২ এ $f(x)=|x|$ ফাংশনটি এবং চিত্র-৩ এ $f(x)=x$ ফাংশনটি $(-2,2)$ ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

একইভাবে, (a,b) ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্রে ব্যবধির মধ্যবর্তী কোনো বিন্দুতে যদি ফাঁকা বা লম্ফ থাকে তবে ঐ ব্যবধিতে $f(x)$ ফাংশনটিকে বিচ্ছিন্ন (Discontinuous Function) বলা হয়। অর্থাৎ বিচ্ছিন্ন ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের ক্ষেত্রে পেন্সিল না তুলে এক টানে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায় না। চিত্রে $x=2$ তে $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ফাংশনের মান অসজ্ঞায়ীত, তাই $x=2$ তে $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ এর লেখচিত্র ফাঁকা বা লম্ফ আছে।



অবিচ্ছিন্ন ফাংশনের ধর্মাবলি

যে কোনো বিন্দু $x=a$ তে $f(x)$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ হয়। সুতরাং $\mathrm{x=a}$ তে $\mathrm{f(x)}$ ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি $\mathrm{f(a)}$ সংজ্ঞায়িত হয় এবং $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ হয় অর্থাৎ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ অথবা $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=\lim\limits_{h\to 0} f(a-h)=f(a)$ হয়।

উদাহরণ 1: $x=2$ বিন্দুতে $f(x)=x^2+2$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা যাচাই করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=x^2+2$

এখানে, $f(2)=2^2+2=4+2=6$

এবং $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2)=2^2+2=6$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$, অর্থাৎ $x=2$ বিন্দুতে $f(x)=x^2+2$ ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 2: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনটি $x=1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করুন।

সমাধান: এখানে, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$

কিন্তু, $f(1)=\dfrac{1^2-1}{1-1}=\dfrac{0}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত । সুতরাং $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}\neq f(1)$.

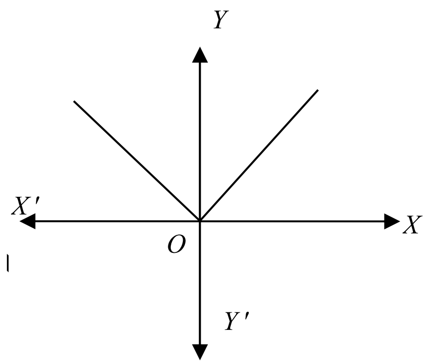
∴ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনটি $x=1$ বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 3: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করুন।

সমাধান: এখানে, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=2+1=3$

এবং $f(2)=\dfrac{2^2-1}{2-1}=\dfrac{4-1}{1}=3$ । সুতরাং $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x-1}=f(2)$.

$\therefore f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন।



$|x|$ এর লেখচিত্র

উদাহরণ 4: প্রমান করুন যে, $y=|x|$ ফাংশন সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

প্রমাণ: আমরা জানি,

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{when } x>0 \\ -x & \text{when } x<0 \end{cases}$$

$|x|$ এর লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $(-\infty,\infty)$ ব্যবধিতে $|x|$ সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

তাহলে শুধু $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্নতা যাচাই করলেই চলবে।

এখন, $x=0$ বিন্দুতে,

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ এবং $f(0)=0$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

অর্থাৎ $x=0$ বিন্দুতে $|x|$ অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore |x|$ সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 5: নিম্নলিখিত ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করুন:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{when } x>2 \\ 4, & \text{when } x=2 \end{cases}$$

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(2)=4$

এখন, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)=4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4$

সুতরাং $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

$\therefore$ ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

শিক্ষার্থীর কাজ	$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ফাংশনটি $x=1$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৩

1. $x=2$ বিন্দুতে $f(x)=x^3+3x^2-x+5$ ফাংশনটির অবিচ্ছিন্নতা যাচাই করুন।
2. $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ ফাংশনটি $x=4$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করুন।
3. নিম্ন লিখিত ফাংশনটি $x=2$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন কিনা তা যাচাই করুন:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2}, & \text{if} \quad x\neq 2\\ 12, & \text{if} \quad x=2\end{cases}$$

4. প্রমাণ করুন যে, $y=|x-2|$ ফাংশন সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

পাঠ ৯.৪ অন্তরজ (Derivatives)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

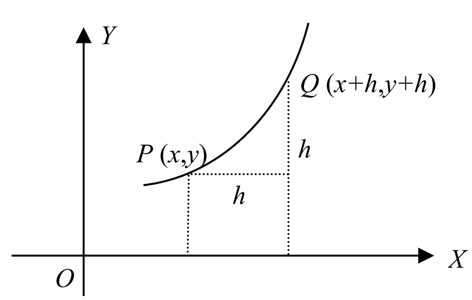
- লিমিট হিসাবে অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন,
- মূল নিয়মে x^n এর অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন,
- ধ্রুবক এর অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন,
- ফাংশনের যোগফলের অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অন্তরীকরণ, অন্তরজ, ধ্রুবক, পরিবর্তনের হার, মূল নিয়ম

মূলপাঠ

লিমিট হিসাবে অন্তরজ নির্ণয়:

যে কোনো রেখা $y=f(x)$ এর x বিন্দুতে x এর ক্ষুদ্র পরির্বতনের ফলে y এর পরিবর্তনের হারকে অন্তরজ বলে। একে সাধারণত $\dfrac{d}{dx}f(x)$ বা $f'(x)$ বা y_1 দ্বারা প্রকাশ করা হয়।



চিত্রে, $P(x,y)$ ও $Q(x+h,y+h)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

এখন Q বিন্দু P বিন্দুর খুব কাছাকাছি হলে অর্থাৎ $Q\to P$ হলে তাদের মধ্যবর্তী ব্যবধান h খুব ক্ষুদ্র হবে অর্থাৎ $h\to 0$ হবে।

তখন P বিন্দুতে অন্তরজের মান লিমিটের মাধ্যমে সংজ্ঞায়িত করলে পাই, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. সুতরাং $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

অন্তরজ নির্ণয়ের এই পদ্ধতিকেই মূল নিয়ম বলে। সুতরাং মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় করতে হলে কয়েকটি ধাপ মনে রাখতে হবে:

ধাপ-১: প্রদত্ত ফাংশনটিকে $f(x)$ ধরে x এর পরিবর্তে $x+h$ বসিয়ে $f(x+h)$ নির্ণয় করতে হবে।

ধাপ-২: $f(x+h)$ হতে $f(x)$ বিয়োগ করতে হবে।

ধাপ-৩: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর সীমা নির্ণয় করতে হবে। উহাই নির্ণেয় $\frac{d}{dx}f(x)$ বা $f'(x)$ বা y_1 নির্দেশ করে।

বি:দ্র: যে পদ্ধতিতে অন্তরজ নির্ণয় করা হয় তাকে অন্তরীকরণ বলে এবং অন্তরীকরণের ফলে প্রাপ্ত ফলাফলকে অন্তরজ বলে।

মূল নিয়মে x^n এর অন্তরজ নির্ণয়

মনে করুন, $f(x)=x^n$. সুতরাং $f(x+h)=(x+h)^n$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n(1+\frac{h}{x})^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^n\left\{(1+\frac{h}{x})^n-1\right\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n}{h}\left\{\left[1+\frac{n}{1!}.\frac{h}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{h}{x}\right)^3+.............\right]-1\right\}$$

$$\left[\because (1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-1)}{3!}x^3+..........\,........\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n}{h}\left(\frac{n}{1!}.\frac{h}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{h}{x}\right)^3+.............\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}x^n\left(\frac{n}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{h}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{h^2}{x^3}+.............\right)$$

$$=x^n.\frac{n}{x}=nx^{n-1}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x)^n=nx^{n-1}}$$

মূল নিয়মে যে কোনো ধ্রুবক C এর অন্তরজ নির্ণয়

মনে করুন, $f(x)=c$. সুতরাং $f(x+h)=c$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(c)=0}$$

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

অর্থাৎ যে কোনো ধ্রুবক সংখ্যার অন্তরজ শূন্য ।

দুইটি ফাংশনের যোগফলের অন্তরজঃ

মনে করুন, $F(x)=f(x)+g(x)$ সুতরাং $F(x+h)=f(x+h)+g(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}F(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}\{f(x)\}+\frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}+\frac{d}{dx}\{g(x)\}$

অনুরুপভাবে, প্রমাণ করা যায়,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}-\frac{d}{dx}\{g(x)\}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{f(x)\pm g(x)\}=\frac{d}{dx}\{f(x)\}\pm\frac{d}{dx}\{g(x)\}}$$

কোনো ধ্রুবক এবং একটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ

মনে করুন, $F(x)=cf(x)$ সুতরাং $F(x+h)=cf(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}F(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{c[f(x+h)-f(x)]}{h}=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\frac{d}{dx}f(x)$$

অর্থাৎ $\frac{d}{dx}[cf(x)]=c\frac{d}{dx}f(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[cf(x)]=c\frac{d}{dx}f(x)}$$

উদাহরণ 1: মূল নিয়মে x^2+2x+3 এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ ধরুন, $f(x)=x^2+2x+3$, $\quad\therefore f(x+h)=(x+h)^2+2(x+h)+3$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[(x+h)^2+2(x+h)+3\right]-\left[x^2+2x+3\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+2x+2h+3-x^2-2x-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+2)}{h}=2x+2$$

উদাহরণ 2: মূল নিয়মে $\sqrt{x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ ধরুন, $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad\therefore f(x+h)=\sqrt{x+h}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{x+h-x}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{h}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

উদাহরণ 3: মূল নিয়মে $\frac{1}{\sqrt{x}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad\therefore\quad f(x+h) = \frac{1}{\sqrt{x+h}}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{x+h}}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{x+h}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{x-x-h}{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$= \frac{-1}{\left(\sqrt{x}\sqrt{x+0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+0}\right)} = -\frac{1}{x.2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

উদাহরণ 4: মূল নিয়মে $\sin 2x$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, $f(x) = \sin 2x$ $\quad\therefore\quad f(x+h) = \sin 2(x+h) = \sin(2x+2h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2x+2h) - \sin 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{2\sin\left(\frac{2x+2h-2x}{2}\right).\cos\left(\frac{2x+2h+2x}{2}\right)\right\} \left[\because \quad \sin C - \sin D = 2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right).\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\right]$$

$$= 2\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sin h.\cos(2x+h)$$

$$= 2\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h\to 0} \cos(2x+h) = 2\times 1\times \cos 2x = 2\cos 2x$$

$\therefore \quad \dfrac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

উদাহরণ 5: মূল নিয়মে $\tan 2x$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, $f(x) = \tan 2x, \quad \therefore f(x+h) = \tan 2(x+h) = \tan(2x+2h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(2x+2h)-\tan 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(2x+2h)}{\cos(2x+2h)} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(2x+2h)\cos 2x - \sin 2x\cos(2x+2h)}{\cos(2x+2h)\cos 2x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{\sin(2x+2h-2x)}{\cos(2x+2h)\cos 2x} \qquad [\because \sin A\cos B - \cos A\sin B = \sin(A-B)]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{\sin 2h}{\cos(2x+2h)\cos 2x} = \frac{2}{\cos 2x}\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2h}{2h}\times\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(2x+2h)}$$

$$= \frac{2}{\cos 2x}\times 1\times\frac{1}{\cos 2x} = 2\sec^2 2x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\tan 2x) = 2\sec^2 2x$$

উদাহরণ 6: x এর সাপেক্ষে $5x^3 - 3x^2 + 8$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}(5x^3 - 3x^2 + 8) = 5\dfrac{d}{dx}(x^3) - 3\dfrac{d}{dx}(x^2) + \dfrac{d}{dx}(8)$

$$= 5\times 3x^{3-1} - 3\times x^{2-1} + 0 = 15x^2 - 6x \qquad \left[\because \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \text{ এবং } \frac{d}{dx}(c) = 0\right]$$

উদাহরণ 7: x এর সাপেক্ষে $x^5 - 3x^4 + 8x$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}(x^5 - 3x^4 + 8x) = \dfrac{d}{dx}(x^5) - 3\dfrac{d}{dx}(x^4) + 8\dfrac{d}{dx}(x)$

$$= 5x^{5-1} - 3\times 4x^{4-1} + 8.1.x^{1-1} = 5x^4 - 12x^3 + 8$$

উদাহরণ 8: x এর সাপেক্ষে $\dfrac{x^3 - x^5}{\sqrt{x}}$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $\dfrac{x^3 - x^5}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{x^5}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{3-\frac{1}{2}} - x^{5-\frac{1}{2}} = x^{\frac{6-1}{2}} - x^{\frac{10-1}{2}} = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{9}{2}}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{9}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{9}{2}}\right) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - \frac{9}{2}x^{\frac{9}{2}-1} = \frac{5}{2}x^{\frac{5-2}{2}} - \frac{9}{2}x^{\frac{9-2}{2}} = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	
	1. মূল নিয়মে $\sin(ax+b)$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন। 2. x এর সাপেক্ষে $\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৪

মূল নিয়মে অন্তরজ নির্ণয় করুন:

1. (i) $\dfrac{1}{x}$ (ii) $\dfrac{1}{x^2}$ (iii) e^{mx} (iv) $\sin 3x$ (v) $\cos 2x$ (vi) $5x^2-2x+6$
   (vii) x^3+2x (viii) $\ln x$ (ix) $\sin(3x+4)$ (x) e^x
2. নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় করুন:
   (i) $9x^5+3x^3+8x^2-10$ (ii) x^n+m^n (iii) ax^2+bx+c (iv) $\dfrac{(x+2)^2}{\sqrt[3]{x}}$
   (v) $s(s+1)^3$ (vi) $t^3+\dfrac{1}{t^3}$ (vii) $ax^5-3\log_a x$

পাঠ ৯.৫ বিভিন্ন ফাংশনের অন্তরীকরণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- বহুপদী ফাংশনের অন্তরীকরণ করতে পারবেন,
- ত্রিকোণমিতিক, সূচক ও লগারিদম ফাংশনের অন্তরীকরণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বহুপদী ফাংশন, সূচক, লগারিদম, অন্তরীকরণ, মূল নিয়ম

মূলপাঠ

(i) মূল নিয়মে বহুপদী ফাংশনের অন্তরীকরণ:

মনে করুন, $f(x)=x^3+x^2+x$ একটি বহুপদী ফাংশন যার অন্তরীকরণ করতে হবে।

$\therefore f(x+h)=(x+h)^3+(x+h)^2+(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3+(x+h)^2+(x+h)\}-\{x^3+x^2+x\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+x^2+2xh+h^2+x+h-x^3-x^2-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3+2xh+h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2+2x+h+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2+2x+h+1)=3x^2+0+0+2x+0+1=3x^2+2x+1$$

$\therefore f(x)=3x^2+2x+1$

$\therefore f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots\dots\dots\dots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_0\neq 0$ হলে

$f(x)=a_0n.x^{n-1}+a_1(n-1).x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+\dots\dots\dots\dots+a_{n-1}$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+.......+a_{n-1}x+a_n\right)=a_0n.x^{n-1}+a_1(n-1).x^{n-2}+a_2(n-2)x^{n-3}+........+a_{n-1}$$

(ii) মূল নিয়মে e^x এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x)=e^x$. $\therefore f(x+h)=e^{x+h}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x}$$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x.e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h}$$

$$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+...........\right)-1\right\}\quad\left[\because e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+..........\right]$$

$$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+.........\right)=e^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.h\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+.........\right)$$

$$=e^x\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+.........\right)=e^x(1+0+0+.....)=e^x$$

একই ভাবে, $\frac{d}{dx}\left(e^{mx}\right)=me^{mx}$

(iii) মূল নিয়মে a^x এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x)=a^x$. $\therefore f(x+h)=a^{x+h}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x.a^h-a^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(a^h-1\right)$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\left(1+h(\log_e a)+\frac{h^2}{2!}(\log_e a)^2+\frac{h^3}{3!}(\log_e a)^3+............\right)-1\right\}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(h(\log_e a)+\frac{h^2}{2!}(\log_e a)^2+\frac{h^3}{3!}(\log_e a)^3+..........\right)$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.h\left\{(\log_e a)+\frac{h}{2!}(\log_e a)^2+\frac{h^2}{3!}(\log_e a)^3+..........\right\}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\left\{(\log_e a)+\frac{h}{2!}(\log_e a)^2+\frac{h^2}{3!}(\log_e a)^3+..........\right\}$$

$$=a^x\left\{(\log_e a)+0+0+..........\right\}=a^x\log_e a$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\log_e a$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\log_e a}$$

(iv) মূল নিয়মে $\ln x$ এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x)=\ln x$. $\therefore f(x+h)=\ln(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \qquad \left[\because \ln A-\ln B=\ln\left(\frac{A}{B}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{h}{x}\right)^4+\ldots\ldots\ldots\ldots\right] \quad \left[\because \ln x=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ldots\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.h\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^2}{x^3}-\frac{1}{4}\frac{h^3}{x^4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^2}{x^3}-\frac{1}{4}\frac{h^3}{x^4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right]=\frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln\ x)=\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}$$

(v) মূল নিয়মে $\sin x$ এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x)\sin x$. $\therefore f(x+h)=\sin(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right).\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} \qquad \left[\because \sin C-\sin D=2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right).cox\left(\frac{C+D}{2}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right).\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=1.\cos(x+0)=\cos x$$

(vi) মূল নিয়মে $\cos x$ এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x)=\cos x$. $\therefore f(x+h)=\cos(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right).\sin\left(\frac{x-(x+h)}{2}\right)}{h} \qquad \left[\because \cos C-\cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h} = -\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h/2\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} = -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$$

(vii) মূল নিয়মে $\tan x$ এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x)=\tan x$. $\therefore f(x+h)=\tan(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x-\sin x\cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x}\right] \qquad [\because \sin A\cos B-\cos A\sin B = \sin(A-B)]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sinh}{\cos(x+h)\cos x}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos x.\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

(viii) মূল নিয়মে $\cot x$ এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x)=\cot x$. $\therefore f(x+h)=\cot(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)}-\frac{\cos x}{\sin x}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h)\sin x-\cos x\sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x-h-x)}{\sin(x+h)\sin x}\right] \qquad [\because \sin A\cos B-\cos A\sin B = \sin(A-B)]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(-h)}{\sin(x+h)\sin x}\right] \qquad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h)\sin x} = -1.\frac{1}{\sin x.\sin x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\text{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\text{cosec}^2 x}$$

(ix) মূল নিয়মে $\sec x$ **এর অন্তরজ নির্ণয়:**

মনে করুন, $f(x) = \sec x$. $\therefore f(x+h) = \sec(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x+x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x}\right] \qquad \left[\because \cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x} = 1.\frac{\sin x}{\cos x.\cos x} = \sec x.\tan x$$

(x) মূল নিয়মে $\text{cosec} x$ **এর অন্তরজ নির্ণয়:**

মনে করুন, $f(x) = \text{cosec}\, x$. $\therefore f(x+h) = \text{cosec}(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec} x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\text{cosec}(x+h)-\text{cosec}(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x-x-h}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x}\right] \qquad \left[\because \sin C - \sin D = 2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right).\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x} \qquad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

$$= -1.\frac{\cos x}{\sin x \sin x} = -\text{cosec} x.\cot x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{cosec} x) = -\text{cosec} x \cot x$$

(xi) মূল নিয়মে $\cos(mx)$**এর অন্তরজ নির্ণয়:**

মনে করুন, $f(x) = \cos(mx)$. $\therefore f(x+h) = \cos m(x+h) = \cos(mx+mh)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{\cos(mx)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(mx+mh)-\cos(mx)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{2\sin\left(\frac{mx+mh+mx}{2}\right)\cos\left(\frac{mx-(mx+mh)}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x}\right] \qquad \left[\because \cos C-\cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right).\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(mx+\frac{mh}{2}\right)}{h}.\sin\left(\frac{-mh}{2}\right) = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(-\frac{mh}{2}\right)}{\frac{mh}{2}}.m.\lim_{h\to 0}\sin\left(mx+\frac{mh}{2}\right) \qquad [\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$$

$$= -m\sin mx$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos mx) = -m\sin mx$$

(xii) মূল নিয়মে $\sin(mx)$ এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x)=\sin(mx)$. $\therefore f(x+h) = \sin m(x+h) = \sin(mx+mh)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}\{\sin(mx)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(mx+mh)-\sin(mx)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{2\sin\left(\frac{mx+mh-mx}{2}\right)\cos\left(\frac{mx+mx+mh}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x}\right] \qquad \left[\sin C-\sin D = 2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right).\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(mx+\frac{mh}{2}\right)}{h}.\sin\left(\frac{mh}{2}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{mh}{2}\right)}{\frac{mh}{2}}.m.\lim_{h\to 0}\cos\left(mx+\frac{mh}{2}\right) = m\cos mx$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin mx) = m\cos mx$$

(xiii) মূল নিয়মে $\log_a x$ এর অন্তরজ নির্ণয়:

মনে করুন, $f(x) = \log_a x = \log_a e.\log_e x = \log_a e..\ln x$

$\therefore f(x+h) = \log_a e.\ln(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a e..\ln(x+h)-\log_a e..\ln x}{h}$$

$$= \log_a e.\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \log_a e.\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log_a e.\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \log_a e.\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{h}{x}\right)^4+...........\right] \quad \left[\because \ln x = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+......\right]$$

$$= \log_a e.\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.h\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^2}{x^3}-\frac{1}{4}\frac{h^3}{x^4}+...........\right]$$

$$= \log_a e.\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^2}{x^3}-\frac{1}{4}\frac{h^3}{x^4}+...........\right]$$

$$= \log_a e.\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

উদাহরণ 1: x এর সাপেক্ষে $\sin x+5\cos x$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\sin x+5\cos x)=\frac{d}{dx}(\sin x)+\frac{d}{dx}(5\cos x)=\frac{d}{dx}(\sin x)+5\frac{d}{dx}(\cos x)=\cos x-5\sin x$

উদাহরণ 2: θ এর সাপেক্ষে $\sec\theta+\tan\theta$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\sec\theta+\tan\theta)=\frac{d}{dx}(\sec\theta)+\frac{d}{dx}(\tan\theta)=\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta=\sec\theta(\tan\theta+\sec\theta)$

উদাহরণ 3: t এর সাপেক্ষে $\ln t-\sec t+7\sin t$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\ln t-\sec t+7\sin t)=\frac{d}{dx}(\ln t)-\frac{d}{dx}(\sec t)+7\frac{d}{dx}(\sin t)=\frac{1}{t}-\sec t\ \tan t+7\cos t$.

উদাহরণ 4: x এর সাপেক্ষে $e^{2x}+\log_a x$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(e^{2x}+\log_a x)=\frac{d}{dx}(e^{2x})+\frac{d}{dx}(\log_a x)=e^{2x}\frac{d}{dx}(2x)+\frac{1}{x}\log_a e=2e^{2x}+\frac{1}{x}\log_a e$

উদাহরণ 5: x এর সাপেক্ষে $5a^x+x^a$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(5a^x+x^a)=5\frac{d}{dx}(a^x)+\frac{d}{dx}(x^a)=5a^x\log_e a+ax^{a-1}$

উদাহরণ 6: x এর সাপেক্ষে $\log_a x-3\log x+2\cos x$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x-3\log x+2\cos x)=\frac{d}{dx}(\log_a x)-3\frac{d}{dx}(\log x)+2\frac{d}{dx}(\cos x)=\frac{1}{x}\log_a e-3\frac{1}{x}-\sin x$$

উদাহরণ 7: x এর সাপেক্ষে $e^{-3x}+qx^p+\frac{5}{x^2}$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}+qx^p+\frac{5}{x^2}\right)=\frac{d}{dx}(e^{-3x})+\frac{d}{dx}(qx^p)+\frac{d}{dx}(5x^{-2})=-3e^{-3x}+qpx^{p-1}-10x^{-3}$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. x এর সাপেক্ষে $e^x-5\mathrm{cosec}x$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

	2. x এর সাপেক্ষে $\log_a x + e^{-4x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ফাংশনটির অন্তরজ নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৫

নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে নিম্নলিখিত ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় করুন:

1. (i) $\cos x + 6\sin x$ (ii) $e^{-3x} + \log x - 7\log_a x$ (iii) $3e^t - \operatorname{cosec} t$

(iv) $2\ln x - \cot x$ (v) $\sin 3x + 3\cos x$ (vi) $\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}$

(vii) $\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$ (viii) $3\log_a x + 2e^{-4x}$ (ix) $e^{-3t} + sx^{-p} + \frac{5}{x^3}$

পাঠ ৯.৬ স্পর্শকের নতি হিসাবে অন্তরজ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

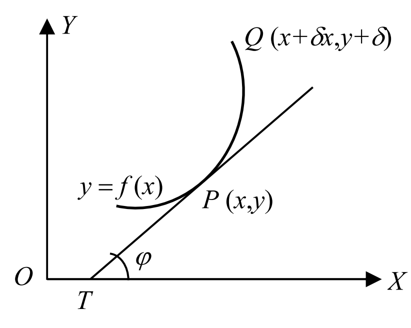
এই পাঠ শেষে আপনি-

- স্পর্শকের নতি হিসাবে অন্তরজের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	স্পর্শক, বক্ররেখা, সীমাস্থ অবস্থান, স্পর্শকের ঢাল

মূলপাঠ

মনে করুন, $y = f(x)$ বক্ররেখার উপর $P(x,y)$ এবং $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ দুইটি নিকটবর্তী বিন্দু। যদি Q বিন্দুটি P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হতে থাকে অর্থাৎ $Q \to P$ হয়, তবে P এবং Q বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার সীমাস্থ অবস্থানকে P বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক বলা হয়। Q বিন্দুটি P বিন্দুর যে কোনো পার্শ্বে থেকে স্পর্শক হতে পারে।



P এবং Q বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = \frac{(y+\delta y) - y}{(x+\delta x) - x}(x - x_1)$

যেখানে (x_1, y_1) বক্ররেখার উপর যে কোনো বিন্দু।

বা $y - y_1 = \frac{\delta y}{\delta x}(x - x_1)$.

যদি $Q \to P$ হয় অর্থাৎ $\delta x \to 0$ হয়, তবে PQ ছেদকটি সীমাস্থ অবস্থায় P বিন্দুতে PT স্পর্শক হবে। অতএব, $P(x,y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x}(x - x_1)$ বা $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$ $\left[\because \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}\right]$.

সুতরাং $y=f(x)$ বক্ররেখার উপর $P(x,y)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1)$ এবং স্পর্শকের ঢাল বা নতি $\frac{dy}{dx}$.

উদাহরণ 1: $x^2-y^2+7x-4y+9=0$ বক্ররেখার $(1,2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল এবং সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $x^2-y^2+7x-4y+9=0$.

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x-2y\frac{dy}{dx}+7-4\frac{dy}{dx}+0=0$

বা, $\frac{dy}{dx}(-2y-4)=-2x-7$ বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+7}{2y+4}$

$(1,2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $\frac{dy}{dx}=\frac{2.1+7}{2.2+4}=\frac{9}{8}$

এবং স্পর্শকের সমীকরণ: $y-2=\frac{9}{8}(x-1)$ বা, $8y-18-9x+9=0$ বা, $9x-8y+9=0$

উদাহরণ 2: $x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $x^2+2ax+y^2=0$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $2x+2a+2y\frac{dy}{dx}=0$ বা, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+a}{y}$

যেহেতু, স্পর্শকগুলি x-অক্ষের ওপর লম্ব, সুতরাং

$\frac{dy}{dx}=\tan 90^\circ=\infty=\frac{1}{0}$

বা, $-\frac{x+a}{y}=\frac{1}{0}$

$y=0$ প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x^2+2ax+0=0$ বা, $x(x+2a)=0$ $\therefore x=0,-2a$

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(0,0)$ ও $(-2a,0)$।

উদাহরণ 3: a এর মান কত হলে $y=ax(1+x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $y=ax(1+x)=ax+ax^2$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx}=a+2ax$

মূল বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=a+2a.0=a$

দেওয়া আছে, স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে, অর্থাৎ

$\frac{dy}{dx}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

শিক্ষার্থীর কাজ	$x^2-3xy+y^2=2$ বক্ররেখার $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৬

1. $(1,1)$ বিন্দুতে $y=2x^2$ বক্ররেখার ঢাল নির্ণয় করুন।
2. $x^3+xy^2-3x^2+4x+5y+2=0$ বক্ররেখার $(1,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল এবং সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. $x^2+xy+y^2=4$ বক্ররেখার $(2,-2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় করুন।
4. $x^2-2ax+y^2=0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
5. $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
6. $x^2+4y^2=8$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
7. $x^2+4x+y^2=0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের উপর লম্ব তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
8. $y=2x^3-21x^2+60x-9$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
9. a এর মান কত হলে $y=ax(1-x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে।
10. $y=x^3-3x^2-2x+1$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে তাদের ভুজ নির্ণয় করুন।

পাঠ ৯.৭ ফাংশনের গুণফল ও ভাগফলের অন্তরজ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ফাংশনের গুণফল ও ভাগফলের অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলপাঠ

দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ:

যদি u এবং v উভয়ই এর ফাংশন হয়, তবে $\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{d}{dx}(v)+v\frac{d}{dx}(u)$

প্রমাণ: মনে করুন, $u=f(x)$ এবং $v=g(x)$ এবং $uv=F(x)$

$\therefore F(x)=f(x)g(x)$ এবং $\therefore F(x+h)=f(x+h)g(x+h)$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}[F(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

বা, $$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[uv]=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)[g(x+h)-g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$= u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[uv] = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)$$

সুতরাং দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ = ১ম ফাংশন × ২য় ফাংশনের অন্তরজ + ২য় ফাংশন × ১ম ফাংশনের অন্তরজ।

দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজঃ

যদি u এবং v উভয় x এর ফাংশন হয়, তবে. $\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{u\frac{d}{dx}(v) - v\frac{d}{dx}(u)}{v^2}$

প্রমাণঃ মনে করুন, $u = f(x)$ এবং $v = g(x)$ এবং $\frac{u}{v} = F(x)$

$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ এবং $F(x+h) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)}$

মূল নিয়মে অন্তরজের সংজ্ঞা হতে পাই,

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} - \frac{f(x)g(x) + f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[g(x).\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x).\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{u\frac{d}{dx}(v) - v\frac{d}{dx}(u)}{v^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\right] = \frac{u\frac{d}{dx}(v) - v\frac{d}{dx}(u)}{v^2}$$

সুতরাং দুইটি ফাংশনের গুনফলের অন্তরজ $= \dfrac{\text{হর} \times \text{লবের অন্তরজ - লব} \times \text{হরের অন্তরজ}}{(\text{হর})^২}$

উদাহরণ 1: x এর সাপেক্ষে $(4x\text{-}5)(x^2\text{-}2x)$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}\left[(4x\text{-}5)(x^2\text{-}2x)\right]=(4x\text{-}5)\dfrac{d}{dx}(x^2\text{-}2x)+(x^2\text{-}2x)\dfrac{d}{dx}(4x\text{-}5)$

$=(4x\text{-}5)(2x\text{-}2)+(x^2\text{-}2x)(4\text{-}0)=8x^2-8x-10x+10+4x^2-8x=12x^2-26x+10$

উদাহরণ 2: x এর সাপেক্ষে $\dfrac{1}{x^3e^x}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^3e^x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x^{-3}e^{-x}\right)=x^{--3}\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)+e^{-x}\dfrac{d}{dx}\left(x^{-3}\right)$

$=x^{-3}.e^{-x}\dfrac{d}{dx}(-x)+e^{-x}(-3)x^{-3-1}$

$=-x^{-3}.e^{-x}-3x^{-4}e^{-x}=-e^{-x}x^{-3}\left(1+x^{-1}\right)=-\dfrac{1}{x^3e^x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

উদাহরণ 3: x এর সাপেক্ষে $x^2\log x$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}(x^2\log x)=x^2\dfrac{d}{dx}(\log x)+\log x\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)$

$=x^2\dfrac{1}{x}+\log x.2x=x+2x\log x=x(1+2\log x)$

উদাহরণ 4: x এর সাপেক্ষে $x^2\sin x-2x\log x$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\sin x\text{-}2x\log x\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x^2\sin x\right)-2\dfrac{d}{dx}(x\log x)$

$=\left[x^2\dfrac{d}{dx}(\sin x)+\sin x\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)\right]-2\left[x\dfrac{d}{dx}(\log x)+\log x\dfrac{d}{dx}(x)\right]$

$=\left(x^2\cos x+\sin x.2x\right)-2\left(x.\dfrac{1}{x}+\log x.1\right)=x^2\cos x+2x\sin x-2-2\log x$

উদাহরণ 5: x এর সাপেক্ষে $\log x\ \log_a x$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}(\log x\ \log_a x)=\log x\dfrac{d}{dx}(\log_a x)+\log_a x\dfrac{d}{dx}(\log x)$

$=\log x.\dfrac{1}{x}\log_a e+\log_a x\,.\dfrac{1}{x}$ $\qquad [\log_a e.\log_e x=\log_a x]$

$=\dfrac{1}{x}\log_a x+\dfrac{1}{x}\log_a x=\dfrac{2}{x}\log_a x$

উদাহরণ 6: x এর সাপেক্ষে $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)=\frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(x+1)-(x+1)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{(x^2+1)(1+0)-(x+1)(2x+0)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$

উদাহরণ 7: x এর সাপেক্ষে $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)=\frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(1+\sin x)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\frac{(1+\cos x)(0+\cos x)-(1+\sin x)(0-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$=\frac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}$ $\quad\left[\because \cos^2 x+\sin^2 x=1\right]$

উদাহরণ 8: x এর সাপেক্ষে $\frac{1}{1+\cos x}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)=\frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(1)-1.\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\frac{(1+\cos x).0-1.(0-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

উদাহরণ 9: x এর সাপেক্ষে $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{(\sqrt{x}-1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}+1)-(\sqrt{x}+1)\frac{d}{dx}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2}$

$=\frac{(\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+0\right)-(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-0\right)}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{(\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}-(\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}=-\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

উদাহরণ 10: x এর সাপেক্ষে $\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x\cos x\text{-}\sin x}{x^2}\right)=\dfrac{x^2\dfrac{d}{dx}(x\cos x-\sin x)-(x\cos x-\sin x)\dfrac{d}{dx}(x^2)}{(x^2)^2}$

$$=\frac{x^2\left[\dfrac{d}{dx}(x\cos x)-\dfrac{d}{dx}\sin x\right]-(x\cos x-\sin x)2x}{x^4}$$

$$=\frac{x^2\left[x\dfrac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\dfrac{d}{dx}(x)-\cos x\right]-(x\cos x-\sin x)2x}{x^4}$$

$$=\frac{x^2[x(-\sin x)+\cos x.1-\cos x]-(x\cos x-\sin x)2x}{x^4}=\frac{2\sin x-2x\cos x-x^2\sin x}{x^4}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	
	1. x এর সাপেক্ষে $\dfrac{x^3}{2+x}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন। 2. x এর সাপেক্ষে $x^3\log x$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৭

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করুন:

1. (i) $e^x\cos x$ (ii) x^4e^{2x} (iii) $x^3\log x$ (iv) $x^2\log_a x+7e^x\cos x$
   (v) $x^4\sin x$ (vi) $x^2e^x\log x$ (vii) $x^3\tan x$ (viii) $ax\log x+be^x\cos x$
   (ix) $e^x\log_a x$
2. (i) $\dfrac{4x-3}{2x^2+7}$ (ii) $\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}$ (iii) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$ (iv) $\dfrac{\sin x}{x^2+\cos x}$
   (v) $\dfrac{\log x}{x}$ (vi) $\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$ (vii) $\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$

পাঠ ৯.৮ সংযোজিত ও বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ (Derivative of Composite and Inverse Function)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- সংযোজিত ও বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	সংযোজিত ফাংশন, বিপরীত ফাংশন, চেইন রুল, অনুপাত

মূলপাঠ

সংযোজিত ফাংশনের অন্তরজঃ

মনে করুন, $y=F(z)$ এবং $z=f(x)$, অর্থাৎ $F\{f(x)\}$ তাহলে y হল $f(x)$ ফাংশনের ফাংশন। এ ধরনের ফাংশনকে সংযোজিত ফাংশন বা ফাংশনের ফাংশন বলে। এক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$ (একে অন্তরজের চেইন রুল বলে)।

আবার $y=F(z), z=g(t)$ এবং $t=f(x)$ অর্থাৎ $F[g\{f(x)\}]$ হয় তবে, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dt}.\frac{dt}{dx}$

বিপরীত ফাংশনের অন্তরজ

একটি ফাংশন $f(x)$ কে ফাংশন $g(x)$ এর বিপরীত ফাংশন অথবা $g(x)$ কে $f(x)$ ফাংশন এর বিপরীত ফাংশন বলা হবে যদি $f\{g(x)\}=g\{f(x)\}=x$ হয় ।

মনে করুন, $x=f(y)$ এবং $y=\varphi(x)$ দুইটি বিপরীত ফাংশন যেখানে প্রথম ফাংশনের স্বাধীন চলক y এবং অধীন চলক x. যদি স্বাধীন চলকের মান δy পরিমান বৃদ্ধি পাওয়ায় অধীন চলক x এর মান δx পরিমান বৃদ্ধি পায়,তাহলে তাদের অনুপাত $\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{\frac{\delta x}{\delta x}}{\frac{\delta y}{\delta x}}$ হর ও লব কে δx দ্বারা ভাগ করে।

এখানে $\delta y\to 0$ হলে $\delta x\to 0$ হবে।

তাহলে $\lim_{\delta y\to 0}\frac{\delta x}{\delta y}=\lim_{\delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\delta y}{\delta x}}\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

$\therefore\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ অর্থাৎ বিপরীত ফাংশনের অন্তরজদ্বয় পরস্পর বিপরীত।

(i) $\sin^{-1}x$ **এর অন্তরজ নির্ণয়ঃ** মনে করুন, $y=\sin^{-1}x\Rightarrow x=\sin y$

$$\therefore\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}(\sin y)=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

সুতরাং $\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{\therefore\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

(ii) $\cos^{-1}x$ **এর অন্তরজ নির্ণয়ঃ**

মনে করুন, $y=\cos^{-1}x\Rightarrow x=\cos y$

$$\therefore\frac{dx}{dy}=\frac{d}{dy}(\cos y)=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{\therefore\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

সুতরাং $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $\tan^{-1} x$ **এর অন্তরজ নির্ণয়:**

মনে করুন, $y = \tan^{-1} x \Rightarrow x = \tan y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\tan y) = \sec^2 y = 1 + \tan^2 x = 1 + x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$

সুতরাং $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}}$$

(iv) $\cot^{-1} x$ **এর অন্তরজ নির্ণয়:**

মনে করুন, $y = \cot^{-1} x \Rightarrow x = \cot y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\cot y) = -\text{cosec}^2 y = -\left(1 + \cot^2 y\right) = -\left(1 + x^2\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{-1}{1+x^2}$$

সুতরাং $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{1+x^2}$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+x^2}}$$

(v) $\sec^{-1} x$ **এর অন্তরজ নির্ণয়:**

মনে করুন, $y = \sec^{-1} x \Rightarrow x = \sec y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\sec y) = \sec y \tan y = \sec y\sqrt{\sec^2 y - 1} = x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

সুতরাং $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

(vi) $\text{cosec}^{-1} x$ **এর অন্তরজ নির্ণয়:**

মনে করুন, $y = \text{cosec}^{-1} x \Rightarrow x = \text{cosec}\, y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\text{cosec}\, y) = -\text{cosec}\, y \cot y = -\text{cosec}\, y\sqrt{\text{cosec}^2 y - 1} = -x\sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\boxed{\therefore \frac{d}{dx}\left(\text{cosec}^{-1} x\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

সুতরাং $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

উদাহরণ 1: x এর সাপেক্ষে $\sqrt[3]{2x^3+5}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=\sqrt[3]{2x^3+5}=(2x^3+5)^{\frac{1}{3}}=u^{\frac{1}{3}}$ যেখানে $u=2x^3+5$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$..................................(i)

এখানে, $\frac{dy}{du}=\frac{d}{du}\left(u^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}$ এবং $\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2x^3+5\right)=6x^2$

সুতরাং (i) নং হতে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}.6x^2=\frac{1}{3}\left(2x^3+5\right)^{-\frac{2}{3}}.6x^2=2x^2\left(2x^3+5\right)^{-\frac{2}{3}}$$

উদাহরণ 2: x এর সাপেক্ষে $\sqrt{(x-3)(x-4)}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: এখানে, $\sqrt{(x-3)(x-4)}=\left(x^2-7x+12\right)^{\frac{1}{2}}$

সুতরাং $\frac{d}{dx}\left(x^2-7x+12\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(x^2-7x+12\right)^{\frac{1}{2}-1}\frac{d}{dx}\left(x^2-7x+12\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2-7x+12\right)^{\frac{-1}{2}}(2x-7+0)=\frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+12}}$$

উদাহরণ 3: x এর সাপেক্ষে $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-4}}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^2-4\right)^{-\frac{1}{3}}$

$$=-\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^{-\frac{1}{3}-1}\frac{d}{dx}\left(x^2-4\right)=-\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^{\frac{-1-3}{3}}(2x-0)=-\frac{2}{3}x\left(x^2-4\right)^{\frac{-4}{3}}=\frac{-2x}{3\left(x^2-4\right)^{\frac{4}{3}}}$$

উদাহরণ 4: x এর সাপেক্ষে $\sin^3\left(x^2\right)$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=\sin^3\left(x^2\right)$ এবং $z=x^2$ $\therefore y=\sin^3\left(x^2\right)=\sin^3 z$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}$ এখানে, $\frac{dy}{dz}=\frac{d}{dz}\left(\sin^3 z\right)=3\sin^{3-1}z\frac{d}{dz}(\sin z)=3\sin^2 z.\cos z=3\sin^2\left(x^2\right)\cos\left(x^2\right)$

এবং $\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}=3\sin^2\left(x^2\right)\cos\left(x^2\right)2x=6x^2\sin^2\left(x^2\right)\cos\left(x^2\right)$$

উদাহরণ 5: x এর সাপেক্ষে $\sin\sqrt{x}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=\sin\sqrt{x}$ এবং $z=\sqrt{x}$ $\therefore y=\sin z$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}.\dfrac{dz}{dx}$ এখানে, $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{d}{dz}(\sin z)=\cos z=\cos\sqrt{x}$ এবং $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d}{dz}x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\cos\sqrt{x}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

উদাহরণ 6: x এর সাপেক্ষে $\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ এবং $z=e^{x}+e^{-x}$ $\therefore y=\ln z$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}.\dfrac{dz}{dx}$ এখানে, $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{d}{dz}(\ln z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}$ এবং $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d}{dz}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=e^{x}-e^{-x}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

উদাহরণ 7: x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ এবং $z=\sqrt{x}$ $\therefore y=\sqrt{\sin z}=(\sin z)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}.\dfrac{dz}{dx}$ এখানে, $\dfrac{dy}{dz}=\dfrac{d}{dz}\,(\sin z)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}(\sin z)^{\frac{1}{2}-1}\dfrac{d}{dx}(\sin z)=\dfrac{\cos z}{2\sqrt{\sin z}}=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$

এবং $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d}{dz}\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$

উদাহরণ 8: x এর সাপেক্ষে $x^{2}\sin^{-1}x$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: $\dfrac{d}{dx}\left(x^{2}\sin^{-1}x\right)=x^{2}\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)+\sin^{-1}x\dfrac{d}{dx}\left(x^{2}\right)$

$$=x^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)+\sin^{-1}x.2x=\frac{x^{2}}{\sqrt{1-x^{2}}}+2x\sin^{-1}x$$

উদাহরণ 9: x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}\dfrac{4\sqrt{x}}{1-4x}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: ধরুন, $y=\tan^{-1}\dfrac{4\sqrt{x}}{1-4x}=\tan^{-1}\dfrac{2.2\sqrt{x}}{1-\left(2\sqrt{x}\right)^{2}}$ আবার, ধরুন, $2\sqrt{x}=\tan\theta\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\left(2\sqrt{x}\right)$

$\therefore y=\tan^{-1}\dfrac{2.\tan\theta}{1-(\tan\theta)^{2}}=\tan^{-1}\tan(2\theta)=2\theta=2\tan^{-1}\left(2\sqrt{x}\right)$

সুতরাং $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left\{2\tan^{-1}\left(2\sqrt{x}\right)\right\}=2\dfrac{1}{1+\left(2\sqrt{x}\right)^{2}}\dfrac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}\right)=\dfrac{2}{1+4x}.\dfrac{2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$

উদাহরণ 10: x এর সাপেক্ষে $\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=\cot^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}=\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x}=\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}(x)$

সুতরাং $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{\pi}{4}-\tan^{-1}(x)\right\}=0-\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{-1}{1+x^2}.$

নির্ণেয় অন্তরজ $\dfrac{-1}{1+x^2}$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. x এর সাপেক্ষে $(3-5x)^{-\frac{3}{2}}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন। 2. x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\sin^{-1}x^3}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন। 3. x এর সাপেক্ষে $2x^\circ\cos 3x^\circ$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন। 4. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}(e^x)$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৮

নিজ নিজ চলকের সাপেক্ষে নিম্ন লিখিত ফাংশনগুলোর অন্তরীকরণ করুন:

1. (i) $\sqrt[3]{ax^2+b+c}$ (ii) $\sqrt[5]{3x^2+3}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+8}}$ (iv) $\sqrt{(x-4)(x-1)}$
   (v) $(2-7x)^{3/2}$

2. (i) $e^{\sqrt{x}}$ (ii) $x\sqrt{\sin x}$ (iii) $x^n\log 2x$
   (iv) $(1+\sin 2\theta)^2$ (v) $\sin^2(x^3)$ (vi) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{5}{4}}$

3. (i) $\tan^{-1}\sqrt{x}$ (ii) $\sec^{-1}\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{4x}{1-4x^2}\right)$
   (iv) $(\sin^{-1}x)^2$ (v) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ (vi) $\log(\tan^{-1}x)$
   (vii) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (viii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (ix) $\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right\}$
   (x) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

পাঠ ৯.৯ লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	লগারিদম, সূচক, ফাংশন, অন্তরীকরণ

মূলপাঠ

কোনো ফাংশনের সূচক যদি একটি চলক বা চলক সমন্বিত ফাংশন বা দুই বা ততোধিক ফাংশনের গুন বা ভাগ আকারের হয় তাহলে প্রথমে লগারিদম নিয়ে উক্ত ফাংশনের অন্তরীকরণ করতে হয়। এইভাবে অন্তরীকরণ করা কে লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ করা বুঝায়।

যেমনঃ $x^x, x^{\tan^{-1}x}, (\cos x)^x$ ইত্যাদি ফাংশনের অন্তরীকরণ করতে লগারিদমের সাহায্যে অন্তরীকরণ করলে সহজেই তা নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1: x এর সাপেক্ষে $\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\frac{d}{dx}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)\right]$$

$$=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left[1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(2x-0)\right]=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left[\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\right]=-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

উদাহরণ 2: x এর সাপেক্ষে x^x এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=x^x$

$\therefore \log y=\log x^x=x\log x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{d}{dx}(x\log x)=x\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=x\frac{1}{x}+\log x.1=1+\log x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y(1+\log x)=x^x(1+\log x)$$

অতএব নির্ণেয় অন্তরজ $x^x(1+\log x)$

উদাহরণ 3: x এর সাপেক্ষে $x^{\tan^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=x^{\tan^{-1}x}$

$\therefore \log y=\log x^{\tan^{-1}x}=\tan^{-1}x\log x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\log x\right)=\tan^{-1}x\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\tan^{-1}x\frac{1}{x}+\log x.\frac{1}{1+x^2}=\frac{\tan^{-1}x}{x}+\frac{\log x}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{\tan^{-1}x}{x}+\frac{\log x}{1+x^2}\right)=x^{\tan^{-1}x}\left(\frac{\tan^{-1}x}{x}+\frac{\log x}{1+x^2}\right)$$

উদাহরণ 4: x এর সাপেক্ষে $x^{\cos^{-1}x}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y=x^{\cos^{-1}x}$

$\therefore \log y = \log x^{\cos^{-1} x} = \cos^{-1} x \log x$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x \log x\right) = \cos^{-1} x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \cos^{-1} x \frac{1}{x} + \log x . \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\cos^{-1} x}{x} - \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{\cos^{-1} x}{x} - \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x^{\cos^{-1} x}\left(\frac{\cos^{-1} x}{x} - \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

উদাহরণ 5: x এর সাপেক্ষে $(\cos x)^x$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y = (\cos x)^x$

$\therefore \log y = \log(\cos x)^x = x \log(\cos x)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\{x \log(\cos x)\} = x \frac{d}{dx}(\log(\cos x)) + \log(\cos x) \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x \frac{1}{\cos x}(-\sin x) + \log(\cos x).1 = -x \tan x + \log(\cos x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y(\log(\cos x) - x \tan x) = (\cos x)^x (\log(\cos x) - x \tan x)$$

উদাহরণ 6: x এর সাপেক্ষে $e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: মনে করুন, $y = e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore \log y = \log\left\{e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}\right\} = \log e^x + \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}} = x + \frac{2}{3}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x + \frac{2}{3}[\log(x+1) - \log(x-1)]$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\left\{x + \frac{2}{3}[\log(x+1) - \log(x-1)]\right\} = 1 + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right]$$

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(1 + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right]\right) = e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right]\right)$$

শিক্ষার্থীর কাজ	1. x এর সাপেক্ষে $\log\left[e^{2x}\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right]$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

	2. x এর সাপেক্ষে $\log\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৯

x এর সাপেক্ষে নিম্ন লিখিত ফাংশনগুলোর অন্তরীকরণ করুন:

1. (i) $\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ (ii) $\ln\left(\dfrac{x^2+6}{x^2-2}\right)$ (iii) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$ (iv) $x^3\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x^2+3}}$
 (v) $\dfrac{(1+x^2)^2}{\sqrt[3]{x^2}}$ (vi) $\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$
2. (i) $x^{\frac{1}{x}}$ (ii) $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$ (iii) $(1+x^2)^{2x}$ (iv) $(1+x)^x$ (v) $x^x e^x$
3. (i) a^{a^x} (ii) $x^{\sin x}$ (iii) $(\cos x)^{\tan x}$ (iv) $(\sin x)^x$ (v) $(\sin x)^{\tan x}$
 (vi) x^{e^x} (vii) $x^{\ln x}$

পাঠ ৯.১০ অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরজ (Derivative of implicit function)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	অব্যক্ত ফাংশন, অন্তরীকরণ, অন্তরজ

মূলপাঠ

যদি দুইটি চলক x এবং y এমন ভাবে সম্পর্কিত থাকে যে, $\varphi(x,y)=0$, তখন উক্ত ফাংশনকে অব্যক্ত ফাংশন বলা হয়। যেমন: $x^2+y^2+xy=a^2,\quad x^2y+xy^2+x^3=3$ ইত্যাদি অব্যক্ত ফাংশন। অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরজ নির্ণয় করার ক্ষেত্রে x কে পরিবর্তনশীল এবং y কে x এর ফাংশন হিসাবে বিবেচনা করে প্রত্যেক পদকে পৃথক পৃথক ভাবে অন্তরীকরণ করে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে হয়।

উদাহরণ 1: $x^2+y^2+xy=a^2$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2+y^2+xy=a^2$
উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+xy\right)=\frac{d}{dx}\left(a^2\right) \Rightarrow 2x+2y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow (2x+y)+\frac{dy}{dx}(x+2y)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{2x+y}{x+2y}\right)$$

উদাহরণ 2: $x^2y+xy^3+x^3=3$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^2y+xy^3+x^3=3$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{d}{dx}\left(x^2y+xy^3+x^3\right)=\frac{d}{dx}(3) \Rightarrow 2xy+x^2\frac{dy}{dx}+y^3+x3y^2\frac{dy}{dx}+3x^2=0$$

$$\Rightarrow \left(2xy+y^3+3x^2\right)+\frac{dy}{dx}\left(x^2+3xy^2\right)=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\left(2xy+y^3+3x^2\right)}{\left(x^2+3xy^2\right)}$$

উদাহরণ 3: $x=a\cos^3\theta,\ \ y=a\sin^3\theta$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x=a\cos^3\theta,$ এবং $y=a\sin^3\theta$

সুতরাং $\frac{dx}{d\theta}=3a\cos^2\theta(-\sin\theta)$ এবং $\frac{dx}{d\theta}=3a\sin^2\theta(\cos\theta)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=-\tan\theta$$

উদাহরণ 4: x কে পরিবর্তনশীল ধরে $x^y=y^x$ এর অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^y=y^x$. উভয় পক্ষে লগারিদম নিয়ে পাই,

$$\log\left(x^y\right)=\log\left(y^x\right)$$

$$\Rightarrow y\log x=x\log y$$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y\frac{1}{x}+\log x\frac{dy}{dx}=x\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\log y.1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\log x-\frac{x}{y}\right)=\log y-\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$$

উদাহরণ 5: $\log(xy)=x^2+y^2$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\log(xy)=x^2+y^2$

বা, $\log x+\log y=x^2+y^2 \quad [\because \log(AB)=\log A+\log B]$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y}-2y\right)=2x-\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y\left(2x^2-1\right)}{x\left(1-2y^2\right)}$$

শিক্ষার্থীর কাজ	$x^2y+xy^3+x^3=3$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১০

নিম্নলিখিত অব্যক্ত ফাংশনগুলির ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন:

1. $x^2+y^2=10$
2. $y^2=4ax$
3. $x^2+xy+y^2=3$
4. $y=\sin(x+y)^2$
5. $x^y y^x=3$
6. $\log(xy)=x+y$
7. $e^{xy}-xy=1$
8. $x+y=\cos^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
9. $x=at^2, y=2at$
10. $x=a\ \sin\theta, y=a\ \cos\theta$

পাঠ ৯.১১ পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ (Successive Differentiation)

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- পর্যায়ক্রমিক অন্তরজ ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- অন্তরজের বিভিন্ন প্রতীক ব্যবহার করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ, পরিবর্তনশীল, n-তম অন্তরজ

মূলপাঠ

কোনো ফাংশনকে ধারাবাহিক ভাবে অন্তরীকরণ করার প্রক্রিয়াকে পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ বলে। x কে পরিবর্তনশীল ধরে $y=f(x)$কে একবার অন্তরীকরণ করলে প্রাপ্ত ফলকে ১ম পর্যায়ের অন্তরজ বলে এবং একে y_1 বা y' বা $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ বা Dy দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ১ম পর্যায়ে প্রাপ্ত ফলকে পূনরায় অন্তরীকরণ করলে প্রাপ্ত ফলকে ২য় পর্যায়ের অন্তরজ বলে এবং একে y_2 বা y'' বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা $f''(x)$ বা D^2y দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এভাবে, n-তম অন্তরজকে y_n বা y^n বা $\frac{d^ny}{dx^n}$ বা $f^n(x)$ বা D^ny দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ 1: $y=x^6+3x^3+15$ এর তৃতীয় ক্রমের অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y=x^6+3x^3+15$

∴ ১ম ক্রমের অন্তরজ: $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^6+3x^3+15\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=6x^5+9x^2$

প্রাপ্ত ফলকে পুনরায় x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

২ম ক্রমের অন্তরজ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(6x^5+9x^2\right)=6.5x^4+9.2x=30x^4+18x \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=30x^4+18x$$

প্রাপ্ত ফলকে পুনরায় x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

৩ম ক্রমের অন্তরজ: $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(30x^4+18x\right)=30.4x^3+18.1=120x^3+18$.

∴ নির্ণেয় অন্তরজ: $\frac{d^3y}{dx^3}=120x^3+18$

উদাহরণ 2: $y=x^n$ ফাংশনের n-তম অন্তরজ নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y=x^n$......................(i)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে পর্যায়ক্রমে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1=\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$$

$$y_2=\frac{d}{dx}\left(y_1\right)=\frac{d}{dx}\left(nx^{n-1}\right)=n(n-1)x^{n-2}$$

$$y_3=\frac{d}{dx}\left(y_2\right)=\frac{d}{dx}\left(n(n-1)x^{n-12}\right)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

$\vdots$

$$y_n=\frac{d}{dx}\left(y_{n-1}\right)=\frac{d}{dx}\left[n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\{n-(n-1)\}x^{n-(n-1)}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots\{n-(n-1)\}x\right]$$

$$=\left[n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots 3.2.1\right].1=n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots\ldots 3.2.1=n!$$

∴ নির্ণেয় অন্তরজ: $y_n=\frac{d^ny}{dx^n}=n!$

উদাহরণ 3: $y=px+\frac{q}{x}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}=2p$.

সমাধান: দেওয়া আছে, $y=px+\frac{q}{x}$......................(i)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx}=p-\frac{q}{x^2}$ এবং $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2q}{x^3}$

$\therefore x\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2qx}{x^3}=\frac{2q}{x^2}$

এবং $2\frac{dy}{dx}=2\left(p-\frac{q}{x^2}\right)=2p-\frac{2q}{x^2}$

সুতরাং $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2q}{x^2}+2p-\dfrac{2q}{x^2}=2p$ অর্থাৎ $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}=2p$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 4: $y=\sqrt{4+3\sin x}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $2yy_2+2{y_1}^2+y^2=4$

প্রমাণঃ দেওয়া আছে, $y=\sqrt{4+3\sin x}$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$y_1=\frac{1}{2\sqrt{4+3\sin x}}\frac{d}{dx}(4+3\sin x)=\frac{1}{2\sqrt{4+3\sin x}}(0+3\cos x)=\frac{3\cos x}{2y}$$

$\Rightarrow 2yy_1=3\cos x$

উভয় পক্ষকে x এর সাপেক্ষে পুনরায় অন্তরীকরণ করে পাই,

$2yy_2+2y_1.y_1=-3\sin x \Rightarrow 2yy_2+2{y_1}^2=-(4+3\sin x)+4$

$\Rightarrow 2yy_2+2{y_1}^2=-y^2+4 \Rightarrow 2yy_2+2{y_1}^2+y^2=4$ (প্রমাণিত)

শিক্ষার্থীর কাজ	$y=x^4-3x^3+5x+2$ হলে $x=2$ বিন্দুতে y_2 ও y_3 এর মান নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১১

1. $y=x^2\log x$ হলে y_3 এর মান নির্ণয় করুন।
2. $y=\sin^{-1}x$ হলে y_2 এর মান নির্ণয় করুন।
3. $\sin x+\cos y=1$ হলে y_2 এর মান নির্ণয় করুন।
4. $y=ax+\dfrac{b}{x}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}=2a$
5. $y=\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $2x\dfrac{dy}{dx}+y=2\sqrt{x}$.
6. $y=\sin x$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $y_4-y=0$.
7. $y=a\cos x+b\sin x$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $y_4-y=0$
8. $y=\sec x$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $y_2=y(2y^2-1)$
9. $y=Ae^{mx}+Be^{-mx}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $y_2-m^2y=0$
10. $y=\dfrac{\ln x}{x}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $y_2=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$
11. $y=e^x\cos x$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $y_2-2y_1+2y=0$
12. যদি $x=\cos t$ এবং $y=\log t$ হয়, তবে $t=\dfrac{\pi}{2}$ এর জন্য প্রমাণ করুন যে, $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$
13. $y=\tan^{-1}x$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(1+x^2)y_2+2xy_1=0$
14. $y=(\sin^{-1}x)^2$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(1-x^2)y_2-xy_1-2=0$
15. $y=(\cos^{-1}x)^2$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(1-x^2)y_2-xy_1-2=0$
16. $y=e^{a\sin^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(1-x^2)y_2-xy_1-a^2y=0$

17. $y = e^{\tan^{-1}x}$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(1+x^2)y_2 + (2x-1)y_1 = 0$
18. $y = \sin(m\sin^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$
19. $y = \tan(m\tan^{-1}x)$ হলে, প্রমাণ করুন যে, $(1+x^2)y_2 - x(2y-1)y_1 = 0$

পাঠ ৯.১২ অন্তরকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

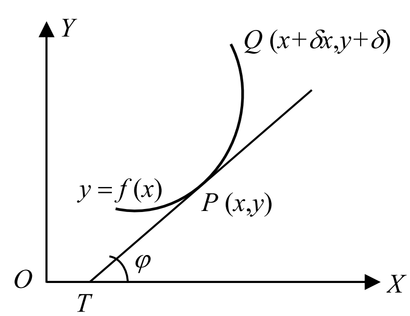
এই পাঠ শেষে আপনি-

- $\frac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা প্রদান করতে পারবেন,
- স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	বক্ররেখা, স্পর্শক, অভিলম্ব, ঢাল

মূলপাঠ

$\frac{dy}{dx}$ এর জ্যামিতিক ব্যাখ্যা



মনে করুন, $y = f(x)$ বক্ররেখার উপর $P(x,y)$ এবং $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ দুইটি নিকটবর্তী বিন্দু। যদি Q বিন্দুটি P বিন্দুর দিকে অগ্রসর হতে থাকে অর্থাৎ $Q \to P$ হয়, তবে P এবং Q বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার সীমাস্থ অবস্থানকে(যদি সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব থাকে) P বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শক বলা হয়। Q বিন্দুটি P বিন্দুর যে কোনো পার্শ্ব থেকে স্পর্শক হতে পারে।

$\therefore P$ এবং Q বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$y - y_1 = \frac{(y+\delta y - y)}{(x+\delta x - x)}(x - x_1)$ যেখানে (x_1, y_1) বক্ররেখার উপর যে কোনো বিন্দু।

বা $y - y_1 = \frac{\delta y}{\delta x}(x - x_1)$.

যদি $Q \to P$ হয় অর্থাৎ $\delta x \to 0$ হয়, তবে PQ ছেদকটি সীমাস্থ অবস্থায় P বিন্দুতে PT স্পর্শক হবে। অতএব, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x}(x - x_1)$ বা $y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1)$ $\left[\because \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}\right]$.

বা, $y = \frac{dy}{dx}.x + \left(y_1 - x_1\frac{dy}{dx}\right)$ যা সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ $y = mx + c$ এর সাথে তুলনা করে পাই $m = \frac{dy}{dx}$.

যদি স্পর্শকটি P বিন্দুতে x-অক্ষের ধনাত্বক দিকের সাথে φ কোণ উৎপন্ন করে, তাহলে $m=\frac{dy}{dx}=\tan\varphi$ হবে। $\frac{dy}{dx}$ কে $P(x,y)$ বিন্দুতে বক্ররেখার ঢাল বলে।

বি.দ্র.(ক) যদি $\frac{dy}{dx}=0$ হয়, তবে উক্ত বিন্দুতে রেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল।

(খ) যদি $\frac{dy}{dx}=\tan 90^0=\infty$ হয়, তবে উক্ত বিন্দুতে রেখাটির স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব।

স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ

উপরের আলোচনা থেকে আমরা পাই, $y=f(x)$ বক্ররেখার $P(x_1,y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1)$ যেখন $P(x_1,y_1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ সজ্ঞায়িত। আবার, যেহেতু, স্পর্শক ও অভিলম্ব পরস্পর লম্ব, সুতরাং অভিলম্বের ঢাল হবে $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ $[\because m.m_1=-1]$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ $y-y_1=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x-x_1)$ বা, $(x-x_1)+\frac{dy}{dx}(y-y_1)=0$

উদাহরণ 1: $x^2+y^2+xy+2x-3y-8=0$ বক্ররেখার (1,-2) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

সমাধান: প্রদত্ত বক্ররেখার সমীকরণ $x^2+y^2+xy+2x-3y-8=0$................(i)

(i) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}+y+2-3\frac{dy}{dx}-0=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y+x-3)=-(2x+y+2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\left(\frac{2x+y+2}{2y+x-3}\right)$$

সুতরাং $(1,-2)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{2.1+(-2)+2}{2(-2)+1-3}\right)=-\left(\frac{2}{-6}\right)=\frac{1}{3}$

∴ $(1,-2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ:

$$y+2=\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow 3y+6-x+1=0$$

$$\Rightarrow 3y-x+7=0\Rightarrow x-3y-7=0$$

(1,-2) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ:

$$(x-1)+\frac{1}{3}(y+2)=0 \Rightarrow 3x-3+y+2=0\Rightarrow 3x+y-1=0.$$

উদাহরণ 2: k এর মান কত হলে $y=kx(1+x)$ বক্ররেখার (1,2) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে ?

সমাধান: দেওয়া আছে, $y=kx(1+x)=kx+kx^2$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$\frac{dy}{dx}=k+2kx$ সুতরাং (1,2) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=k+2k.1=3k$

আবার, দেওয়া আছে, $(1,2)$ বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে, অর্থাৎ $\frac{dy}{dx}=\tan 45^\circ=1$

$\Rightarrow 3k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$ উত্তর: $k=\frac{1}{3}$

শিক্ষার্থীর কাজ	$x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সাথে সমান্তরাল, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১২

1. $y=x^3-2x^2+4$ বক্ররেখার $(2,4)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
2. $x^2-y^2=7$ বক্ররেখার $(4,-3)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
3. $x^2+y^2+6x-3y-5=0$ বৃত্তের $(1,2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
4. $x^2+y^2-6x-10y+21=0$ বৃত্তের $(1,2)$ বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন।
5. $x^2+y^2-2x-3=0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
6. $y^3=x^2(2a-x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
7. $y=x^2$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে ঢাল -1 তা নির্ণয় করুন।
8. $y=\sqrt{x}$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
9. $x^2+2ax+y^2=0$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।
10. $y=x^2+\sqrt{1-x^2}$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের উপর লম্ব, তাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

পাঠ ৯.১৩ স্বাধীন ও অধীন চলকের অন্তরক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- স্বাধীন ও অধীন চলকের অন্তরক বর্ণনা করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	স্বাধীন চলক, অধীন চলক, অন্তরক, অনুপাত

মূলপাঠ

মনে করুন, অধীন চলক y, স্বাধীন চলক xএর একটি ফাংশন অর্থাৎ $y=f(x)$. এখন যদি $y=f(x)$ ফাংশনের বক্ররেখার উপর Pএবং Q দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $P(x,y)$ এবং $Q(x+\delta x, y+\delta y)$হয় তবে

$$y+\delta y=f(x+\delta x)$$

$$\therefore \delta y=f(x+\delta x)-y=f(x+\delta x)-f(x)$$

অর্থাৎ $\delta y=f(x+\delta x)-f(x)$.

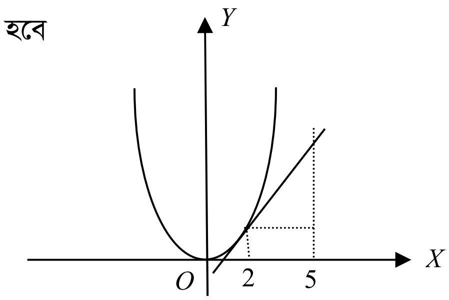
আবার স্বাধীন চলক x এর অন্তরজ $dx = \delta x$ এবং অধীন চলক y এর অন্তরজ হচ্ছে, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ বা $dy = f'(x)dx$. সুতরাং dx এবং dy হচ্ছে যথাক্রমে স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরক(Differentials) যখন তাদের অনুপাত হয় $f'(x)$ যা x বিন্দুতে $y = f(x)$ রেখার ঢাল।

উদাহরণ 1: $y = \frac{x^3}{3}$ ফাংশনের $x = 2$ বিন্দুতে অন্তরক আকার (Differentials) নির্ণয় করে ব্যাখ্যা করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y = \frac{x^3}{3}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}.3x^2 = x^2$. সুতরাং $dy = x^2\, dx$.

অতএব, $x = 2$ বিন্দুতে $dy = 2^2\, dx = 4dx$. অর্থাৎ $y = \frac{x^3}{3}$ রেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শক বরাবর x এর বৃদ্ধি dx একক হলে y এর বৃদ্ধি হবে $4dx$ একক।

যেমন: যদি x এর বৃদ্ধি $dx = 3$ হয়, তখন স্পর্শক বরাবর y এর বৃদ্ধি হবে $dy = 4 \times 3 = 12$ একক।



এবং $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$
$= f(2+3) - f(2)$
$= f(5) - f(2)$
$= \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{125-8}{3} = \frac{117}{3}$

অতএব নির্ণেয় অন্তরক $dy = 4dx$ এবং $\delta y = \frac{117}{3}$.

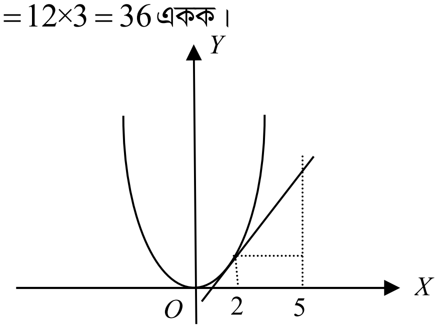
উদাহরণ 2: $y = x^3$ ফাংশনের $x = 2$ বিন্দুতে অন্তরক আকার (Differentials) নির্ণয় করে ব্যাখ্যা করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y = x^3$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2$. সুতরাং $dy = 3x^2\, dx$.

অতএব, $x = 2$ বিন্দুতে $dy = 3.2^2\, dx = 12dx$. অর্থাৎ $y = x^3$ রেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শক বরাবর x এর বৃদ্ধি dx একক হলে y এর বৃদ্ধি হবে $12dx$ একক।

যেমন: যদি x এর বৃদ্ধি $dx = 3$ হয়, তখন স্পর্শক বরাবর y এর বৃদ্ধি হবে $dy = 12 \times 3 = 36$ একক।

এবং $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$
$= f(2+3) - f(2)$
$= f(5) - f(2)$
$= 125 - 8 = 117$



অতএব নির্ণেয় অন্তরক $dy = 36dx$ এবং $\delta y = 117$.

শিক্ষার্থীর কাজ	$y = \frac{x^2}{2} + 1$ ফাংশনের $x = 2$ বিন্দুতে অন্তরক আকার থেকে dy এবং δy নির্ণয় করুন যখন $dx = 4$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১৩

1. $y=\frac{x^2}{3}+1$ ফাংশনের $x=3$ বিন্দুতে অন্তরক আকার (Differentials) থেকে dy এবং δy নির্ণয় করুন যখন $dx=2$
2. $y=x^2$ ফাংশনের $x=1$ বিন্দুতে অন্তরক আকার থেকে dy এবং δy নির্ণয় করুন যখন $dx=2$
3. $y=x^2+2$ ফাংশনের $x=2$ বিন্দুতে অন্তরক আকার থেকে dy এবং δy নির্ণয় করুন যখন $dx=1$
4. $y=\sqrt{x}$ ফাংশনের $x=9$ বিন্দুতে অন্তরক আকার থেকে dy এবং δy নির্ণয় করুন যখন $dx=1$
5. $y=\frac{x^2}{2}+1$ ফাংশনের $x=2$ বিন্দুতে অন্তরক আকার থেকে dy এবং δy নির্ণয় করুন যখন $dx=4$

পাঠ ৯.১৪ ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান, ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

- ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবেন,
- ফাংশনের স্থানীয় চরমবিন্দু নির্ণয় করতে পারবেন,
- চরম মান সংক্রান্ত প্রায়োগিক সমস্যা সমাধান করতে পারবেন।

মুখ্য শব্দ	ক্রমবর্ধমান ফাংশন, ক্রমহ্রাসমান ফাংশন, ধ্রুব ফাংশন, চরম মান, চরম বিন্দু, ব্যবধি

মূলপাঠ

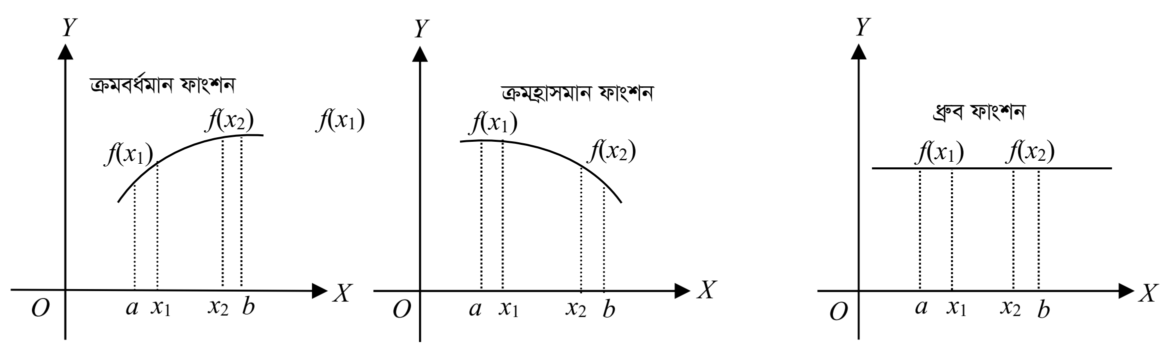
ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান ফাংশন (Increasing and Decreasing function):

সংজ্ঞা: মনে করুন, $y=f(x)$ ফাংশনটি (a,b) ব্যবধিতে সংজ্ঞায়িত এবং x_1,x_2 যেখানে $x_1<x_2$ উক্ত ব্যবধিতে যে কোনো দুইটি বিন্দু। তাহলে উক্ত ব্যবধিতে

(i) $f(x)$ কে একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলা হবে যদি $f(x_1)<f(x_2)$ হয় যেখানে $a<x_1<x_2<b$.

(ii) $f(x)$ কে একটি ক্রমহ্রাসমান ফাংশন হবে যদি $f(x_1)>f(x_2)$ হয় যেখানে $a<x_1<x_2<b$.

(iii) $f(x)$ কে একটি ধ্রুব ফাংশন বলা হবে যদি $f(x_1)=f(x_2)$ হয় যেখানে $a<x_1<x_2<b$.



উপপাদ্যঃ মনে করুন, $y=f(x)$ ফাংশনটি বদ্ধ ব্যবধি $[a,b]$ তে অবিচ্ছিন্ন এবং খোলা ব্যবধি (a,b) তে অন্তরীকরণযোগ্য। তাহলে
(i) যদি $f'(x)>0$ যেখানে $x\in(a,b)$ হয় তবে $f(x)$ কে বদ্ধ ব্যবধি $[a,b]$ তে ক্রমবর্ধমান ফাংশন বলে।
(ii) যদি $f'(x)<0$ যেখানে $x\in(a,b)$ হয় তবে $f(x)$ কে বদ্ধ ব্যবধি $[a,b]$ তে ক্রমহ্রাসমান ফাংশন বলে।
(iii) যদি $f'(x)=0$ যেখানে $x\in(a,b)$ হয় তবে $f(x)$ কে বদ্ধ ব্যবধি $[a,b]$ তে ধ্রুবক ফাংশন বলে।

ফাংশনের চরমবিন্দু (Extreme point)

$y=f(x)$ বক্ররেখার যে সকল বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}=0$ অর্থাৎ স্পর্শক রেখা x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের কে ঐ বক্ররেখার চরম বিন্দু বলে।

সুতরাং $y=f(x)$ বক্ররেখার চরম বিন্দু নির্ণয় করতে হলে প্রথমে $\frac{dy}{dx}$ বের করতে হবে এবং তারপর এর মান শূন্য ধরে সমাধান করতে হবে।

ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান (Maximum and Minimum value of a function)

$x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান $f(a)$ কে সর্বোচ্চ বলা হবে যদি যে কোনো ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা h এর জন্য $f(x)<f(a)$ হবে যেখানে $x\in(a\text{-}h,a+h)$। অনুরূপভাবে $x=a$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান $f(a)$ কে সর্বনিম্ন বলা হবে যদি যে কোনো ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা h এর জন্য $f(x)>f(a)$ হবে যেখানে $x\in(a\text{-}h,a+h)$।

চরম মান নির্ণয়ের পদ্ধতি

(i) প্রথমে দেওয়া ফাংশনটিকে $f(x)$ ধরে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে $f'(x)$ এবং $f''(x)$ নির্ণয় করতে হবে।
(ii) এরপর $f'(x)=0$ ধরে x এর বিভিন্ন মান বের করতে হবে। ধরুন, মানগুলি $a, b, c,\ldots.$ইত্যাদি।
(iii) $x=a$ এর জন্য $f''(a)$ নির্ণয় করুন। যদি $f''(a)>0$ হয় তবে $x=a$ এর জন্য $f(x)$ একটি সর্বনিম্ন মান বা লঘুমান থাকবে এবং মানটি হবে $f(a)$। আবার যদি $f''(a)<0$ হয় তবে $x=a$ এর জন্য $f(x)$ একটি সর্বোচ্চ মান বা গুরুমান থাকবে এবং মানটি হবে $f(a)$। একই ভাবে $x=b,c,\ldots.$ এর জন্য চরম মান নির্ণয় করতে হবে।
(iv) যদি $x=a$ এর জন্য $f''(a)=0$ হয় তবে $x=a$ বিন্দুতে ফাংশনের কোনো চরম মান থাকবে না। এক্ষেত্রে $f'''(x)$ এবং $f^{iv}(x)$ নির্ণয় করতে হবে এবং একই ভাবে $f'''(x)=0$ ধরে x এর বিভিন্ন মান বের করে $f^{iv}(x)$ বসাতে হবে। যদি $f^{iv}(a)>0$ হয় তবে $x=a$ এর জন্য $f(x)$ এর একটি সর্বনিম্ন মান বা লঘুমান থাকবে এবং মানটি হবে $f(a)$। আবার যদি $f^{iv}(a)<0$ হয় তবে $x=a$ এর জন্য $f(x)$ এর একটি সর্বোচ্চ মান বা গুরুমান থাকবে এবং মানটি হবে $f(a)$।

উদাহরণ 1: $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+6$ ফাংশনটির চরম বিন্দু এবং চরম মান নির্ণয় করুন।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $f(x)=x^3+\frac{9}{2}x^2+6x+6$. সুতরাং $f'(x)=3x^2+9x+6$ এবং $f''(x)=6x+9$
আমরা জানি, চরম বিন্দুতে, $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+9x+6=0$ বা $x^2+3x+2=0$ বা $(x+2)(x+1)=0$
অর্থাৎ $x=-1,-2$
এখন, $x=-1$ বিন্দুতে $f''(-1)=6(-1)+9=3>0$ এবং $x=-2$ বিন্দুতে $f''(-2)=6(-2)+9=-3<0$.
সুতরাং $x=-1$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান সর্বনিম্ন

এবং সর্বনিম্ন মান $f(-1)=(-1)^3+\frac{9}{2}(-1)^2+6(-1)+6=-1+\frac{9}{2}-6+6=\frac{7}{2}$ এবং $x=-2$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান সর্বোচ্চ এবং সর্বোচ্চ মান $f(-2)=(-2)^3+\frac{9}{2}\ (-2)^2+6(-2)+6=-8+18-12+6=4$

উদাহরণ 2: $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x)=2x^3-21x^2+36x-20$.

সুতরাং $f'(x)=6x^2-42x+36$ এবং $f''(x)=12x-42$.

আমরা জানি, সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের জন্য $f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-42x+36=0$ বা, $x^2-7x+6=0$ বা,

$(x\text{-}1)(x\text{-}6)=0$ বা, $x=1,6$

এখন $f''(1)=12(1)-42=-30<0$

সুতরাং $x=1$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান সর্বোচ্চ এবং সর্বোচ্চ

মান $f(1)=2.1^3-21.1^2+36.1-20=2-21+36-20=-3$

আবার, $f''(6)=12(6)-42=72-42=30>0$

সুতরাং $x=6$ বিন্দুতে ফাংশনটির মান সর্বনিম্ন এবং সর্বনিম্ন

মান $f(1)=2\times6^3-21\times6^2+36\times6-20=432-756+216-20=-128$

উদাহরণ 3: প্রমাণ করুন যে, x^3-3x^2+6x+3 ফাংশনের কোনো লঘুমান বা গুরুমান নাই।

প্রমাণ: মনে করুন, $f(x)=x^3-3x^2+6x+3$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x+6=3(x^2-2x+2)=3\{(x^2-2x+1)+1\}=3\{(x^2-1)^2+1\}$ যা সর্বদাই একটি ধনাত্বক সংখ্যা।

সুতরাং x এর কোনো বাস্তব মানের জন্য $f'(x)$ শূন্য হতে পারে না। কিন্তু লঘুমান বা গুরুমান এর জন্য $f'(x)$ শূন্য হতে হবে।

সুতরাং ফাংশনটির কোনো লঘুমান বা গুরুমান নাই।

উদাহরণ 4: $y=x^2$ ফাংশনটি যে ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান তা নির্ণয় করুন।

সমাধান: দেওয়া আছে, $y=x^2$

$\therefore f'(x)=\frac{dy}{dx}=2x$

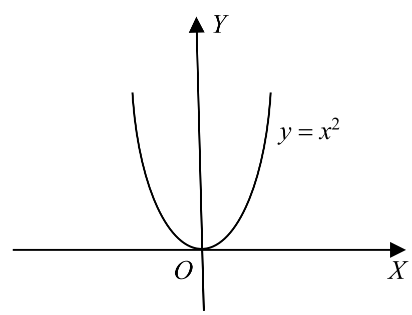
$x>0$ হলে, $f'(x)>0$ হয় এবং

$x<0$ হলে, $f'(x)<0$ **হয়।**

এবং $x=0$ বিন্দুতে ফাংশনটি অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore [0,\infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান এবং

$[0,\infty)$ ব্যবধিতে ফাংশনটি ক্রমহ্রাসমান।



শিক্ষার্থীর কাজ	$[0,6]$ ব্যবধিতে $f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১৪

1. $f(x)=x^3-3x^2-45x+13$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন (যদি থাকে)।
2. $f((x)=x^3-6x^2+9x+5$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন (যদি থাকে)।

3. $f(x)=x^2+1$ ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন (যদি থাকে)।
4. $f(x)=2x^3-6x+1$ ফাংশনটির চরম মান নির্ণয় করুন (যদি থাকে)।
5. $f(x)=x^5-1$ ফাংশনটির স্থানীয় চরম বিন্দু নির্ণয় করুন (যদি থাকে)।
6. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন (যদি থাকে)।
7. $(0,2)$ ব্যবধিতে $3x^4-2x^3-6x^2+6x+1$ ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন।
8. প্রমাণ করুন যে, $\frac{\ln x}{x}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $\frac{1}{e}$.
9. প্রমাণ করুন যে, $\frac{x}{\ln x}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান e.
10. প্রমাণ করুন যে, $x+\frac{1}{x}$ ফাংশনের গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
11. প্রমাণ করুন যে, $4e^x+9e^{-x}$ ফাংশনের ক্ষুদ্রতর মান 12.
12. প্রমাণ করুন যে, $x^3-6x^2+24x+4$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান ও সর্বনিম্ন মান নেই।
13. $y=-x^2+5$ ফাংশনটি যে ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান তা নির্ণয় করুন।
14. $y=5x+1$ ফাংশনটি যে ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান ও ক্রমহ্রাসমান তা নির্ণয় করুন।

পাঠ ৯.১৫ ব্যবহারিক

পাঠভিত্তিক উদ্দেশ্য

এই পাঠ শেষে আপনি-

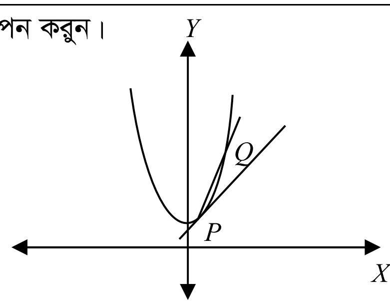
- নির্দিষ্ট বিন্দুর সন্নিকটে ফাংশনটির লেখকে আসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থায়ীভাবে প্রতিস্থাপন করতে পারেবেন,
- ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন করতে পারবেন,
- স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার সম্পর্ক ব্যবহার করে আসন্নমান নির্ণয় করতে পারবেন।

মূলপাঠ

নির্দিষ্ট বিন্দুর সন্নিকটে ফাংশনটির লেখকে আসন্নভাবে ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের লেখ দ্বারা স্থায়ীভাবে প্রতিস্থাপন:

সমস্যা নং-	তারিখ:.....................

সমস্যা: $f(x)=x^2+1$ ফাংশনের লেখচিত্রে $(1,2)$ বিন্দুর স্পর্শকের লেখ প্রতিস্থাপন করুন।



প্রয়োজনীয় উপকরণ: সরু পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

প্রদত্ত ফাংশন $y=f(x)=x^2+1$..............(i)

(i) নং সমীকণে x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর বিভিন্ন মান নির্ণয় করুন

x	0	1	-2	3	-3	1	-1
y	1	2	5	10	10	2	2

সুতরাং $(x,y) = (0,1),(1,2),(-2,5),(3,10),(-3,10),(1,2),(-1,2)$

ছক কাগজের ছোট বর্গের 5 বাহুকে 1 একক ধরে উপরোক্ত বিন্দু গুলি স্থাপন করে মুক্ত হস্তে যোগ করে লেখচিত্রটি অংকন করুন।

বক্ররেখার PQ জ্যা এর P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1,2)$ এবং $Q(x,y)$ যে কোনো একটি বিন্দু। P বিন্দুতে স্পর্শক হবে PQ জ্যা এর সীমাস্থ অবস্থান, অর্থাৎ Q ক্রমশ: P এর দিকে অগ্রসর হয় এবং অবশেষে P এর সাথে মিলিয়া যায়। এক্ষেত্রে PQ রেখা বক্ররেখাটির একটি স্পর্শক হয়।

ফাংশনের লেখকে আসন্নভাবে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন:

সমস্যা নং-	তারিখ:.....................

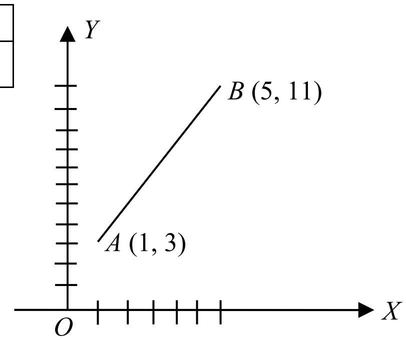
সমস্যা: $[1,5]$ ব্যবধিতে $f(x) = 2x+1$ ফাংশনের লেখতে আসন্ন ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন করুন।

প্রয়োজনীয় উপকরণ: সরু পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

প্রদত্ত ফাংশনটি একটি সরলরেখা এবং $[1,5]$ ব্যবধিতে $f(x) = 2x+1$ ফাংশনের লেখচিত্র অংকনের জন্য এর উপর কয়েকটি বিন্দু নির্ণয় করুন।

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	5	7	9	11



মনে করুন, A (1, 3) এবং B (5, 11) দুইটি প্রান্তবিন্দু। A ও B যোগ করে AB রেখাংশটি অংকন করুন।

এখন এই লেখকে আসন্ন ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন করুন। যেহেতু, লেখটি একটি সরলরেখাংশ, তাই ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশ লেখের সহিত মিলিয়া যায়।

স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার সর্ম্পক ব্যবহার করে আসন্নমান নির্ণয়:

সমস্যা নং-	তারিখ:.....................

সমস্যা: $f(x) = x^2+3$ ফাংশনের ক্ষেত্রে $x=2$ এর জন্য স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার সর্ম্পক নির্ণয় করুন।

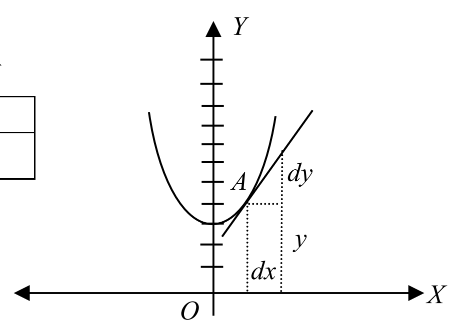
প্রয়োজনীয় উপকরণ: সরু পেন্সিল, স্কেল, ইরেজার, ছক কাগজ, ক্যালকুলেটর।

কার্যপদ্ধতি:

প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x^2+3$..............(i)

(i) নং সমীকণে x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর বিভিন্ন মান নির্ণয় করুন

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
$f(x)$	3	4	4	7	7	12	12



আবার, $y = f(x) = x^2+3$

সুতরাং $\frac{dy}{dx} = 2x$ বা, $dy = 2x\,dx$ ইহাই অন্তরক আকার সমীকরণ।

$x=2$ হলে পাই, $dy = 2\times 2\,dx$ অর্থাৎ $dy = 4dx$.

সুতরাং $y = x^2 + 3$ রেখার $x = 2$ বিন্দুতে স্পর্শক বরাবর x
এর dx একক বৃদ্ধির জন্য y চলকে $4dx$ একক বৃদ্ধি হয় যা
নির্ণেয় স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার সর্ম্পক।

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১৫

1. স্বাধীন চলক ও অধীন চলক বলতে কী বুঝেন।
2. $f(x) = x^2+2$ ফাংশনের লেখচিত্রে $(2,1)$ বিন্দুর স্পর্শকের লেখ প্রতিস্থাপন করুন।
3. $[1,7]$ ব্যবধিতে $f(x) = x+1$ ফাংশনের লেখতে আসন্ন ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র সরলরেখাংশের সমন্বয়ে গঠিত লেখ দ্বারা প্রতিস্থাপন করুন।
4. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 1$ ফাংশনের ক্ষেত্রে $x = 2$ এর জন্য স্বাধীন চলক ও অধীন চলকের অন্তরকের মধ্যকার সর্ম্পক নির্ণয় করুন।

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^{\circ}}{x}$ এর মান নিচের কোনটি?

   (i) π (ii) $\dfrac{180}{\pi}$ (iii) $\dfrac{\pi}{180}$ (iv) $\dfrac{\pi}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\theta}{\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)}$ এর মান নিচের কোনটি?

   (i) 0 (ii) -1 (iii) 1 (iv) $\dfrac{\pi}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan ax}{\sin bx}$ এর মান নিচের কোনটি?

   (i) $\dfrac{a}{b}$ (ii) $\dfrac{b}{a}$ (iii) a (iv) b

4. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin x$ এর মান নিচের কোনটি?

   (i) 0 (ii) -1 (iii) 1 (iv) $\dfrac{\pi}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$ এর মান নিচের কোনটি?

   (i) 0 (ii) -1 (iii) 1 (iv) $\dfrac{\pi}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ এর মান নিচের কোনটি?

(i) 0 (ii) -1 (iii) 1 (iv) $\frac{\pi}{2}$

7. নিচের কোনটি x এর সাপেক্ষে $\frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}$ এর অন্তরজ?

(i) $\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x}$ (ii) $\frac{1}{2}\left(x^{-\frac{4}{2}}+x^{-\frac{5}{3}}\right)$ (iii) $\frac{1}{3}\left(5x^{\frac{2}{3}}-4x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}\right)$ (iv) $\frac{1}{4}\left(5x^{\frac{4}{3}}-4x^{-\frac{1}{3}}-x^{-\frac{2}{3}}\right)$

8. নিচের কোনটি x এর সাপেক্ষে $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ এর অন্তরজ?

(i) $\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$ (ii) $\frac{2\sin x}{(1-\sin x)^2}$ (iii) $\frac{2\cos x}{(1-\cos x)^2}$ (iv) $\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$

9. নিচের কোনটি x এর সাপেক্ষে $a^x x^a$ এর অন্তরজ?

(i) $\frac{a}{x}+\log x$ (ii) $\frac{x}{a}+\log a$ (iii) $a^x x^a\left(\frac{a}{x}+\log a\right)$ (iv) $\frac{a}{x}+\log a$

10. $y=x^2\ln x$ হলে $y_3=?$

(i) $\frac{a}{x}$ (ii) $x^2+\ln x$ (iii) $\frac{2}{x}$ (iv) $\frac{2}{x}+\ln x$

উত্তরমালা

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১

1. (i) -2 (ii) -14 (iii) 84 (iv) 3 (v) 2 (vi) 1
(vii) $\frac{5}{4}$ (viii) 2

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.২

1. (i) 2 (ii) $5a^2$ (iii) 1 (iv) 1 (v) $\frac{49}{6}$ (vi) $\frac{1}{2}$
(vii)1 (viii) 0 (ix) 2 (x) $\frac{5}{2}$ (xi) $\cos y$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৪

1. (i) $-\frac{1}{x^2}$ (ii) $-\frac{2}{x^3}$ (iii) me^{mx} (iv) $3\cos 3x$ (v) $-2\sin 2x$ (vi) $10x-2$
(vii) $3x^2+2$ (viii) $\frac{1}{x}$ (ix) $3\cos(3x+4)$ (x) e^x

2. (i) $45x^4+9x^2+16x$ (ii) nx^{n-1} (iii) $2ax+b$ (iv) $\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{4}{3}}$
(v) $4s^3+9s^2+6s+1$ (vi) $3t^2-\frac{3}{t^4}$ (vii) $5ax^4-\frac{3}{x\log_e a}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৫

1. (i) $-\sin x+6\cos x$ (ii) $-3e^{-3x}+\frac{1}{x}-\frac{7}{x}\log_a e$ (iii) $3e^t+\cos ect\cot$

(iv) $\frac{2}{x}-\cos ec^2 x$ (v) $3\cos 3x+3\sin x$ (vi) 0

(vii) $\sec^2\theta$ (viii) a (ix) $-3e^{-3t}-psx^{-p-1}-\frac{15}{x^4}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৬

1. 4
2. ঢাল $=-\frac{2}{3}$, $2x+3y+1=0$
3. 1
4. $(0,0)$ ও $(2a,0)$
5. (-1.1) ও $(1,1)$
6. $(-2\sqrt{2},0)$ ও $(2\sqrt{2},0)$
7. $(4,0)$ ও $(0,0)$
8. $(2,43)$ ও $(5,16)$
9. $\sqrt{3}$
10. $1\pm\sqrt{2}, 1\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৭

1. (i) $e^x(\cos x-\sin x)$ (ii) $2e^{2x}(x^4+3x^3)$ (iii) $x^2(1+3\log x)$

(iv) $x(\log_a e+2\log_a x)+7e^x(\cos x-\sin x)$ (v) $x^3(4\sin x+x\cos x)$

(vi) $xe^x(1+2\log x+x\log x)$ (vii) $x^2(3\tan x+x\sec^2 x)$

(viii) $a(1+\log x)+be^x(\cos x\text{-}\sin x)$ (ix) $e^x\left(\frac{1}{x}\log_a e+\log_a x\right)$

2. (i) $\frac{24x-8x^2+28}{(2x^2+7)^2}$ (ii) $\frac{1+\cos x+\sin x}{(1+\cos x)^2}$ (iii) $\frac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$ (iv) $\frac{x^2\cos x-2x\sin x+1}{(x^2+\cos x)^2}$

(v) $\frac{1-\log x}{x^2}$ (vi) $\frac{x\sin x}{1+\cos x}$ (vii) $2\frac{4x}{(x^2+3)^2}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৮

1.(i) $\frac{1}{3}(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{-\frac{3}{2}}$ (ii) $\frac{6}{5}x(3x^2+3)^{-\frac{4}{3}}$ (iii) $\frac{-2x}{(2x^2+8)^{3/2}}$

(iv) $\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+4}}$ (v) $-\frac{21}{2}\sqrt{2-7x}$

2. (i) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ (ii) $\sqrt{\sin x}+\frac{x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (iii) $x^{n-1}(1+n\log 2x)$

(iv) $4\cos 2\theta+\sin 4\theta$ (v) $3x^2\sin(2x^3)$ (vi) $\frac{5}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

3. (i) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ (ii) $\frac{2}{1+x^2}$ (iii) $\frac{4}{1+4x^2}$

(iv) $\frac{2\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (v) $\frac{2}{1+x^2}$ (vi) $\frac{1}{(1+x^2)\tan^{-1}x}$

(vii) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (viii) $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (ix) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

(x) $-\frac{2}{1+x^2}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.৯

1. (i) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ (ii) $\frac{8x}{x^4+4x^2-12}$ (iii) $\frac{4(1+x)}{(1-x)^3}$ (iv) $-\frac{8x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$

(v) $\frac{2}{3}\left(5x^{\frac{7}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{5}{3}}\right)$ (vi) $\cos ecx$

2. (i) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ (ii) $\frac{1}{4}\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x)$ (iii) $(1+x^2)^{2x}\left[\frac{4x}{1+x^2}+2\ln(1+x^2)\right]$

(iv) $(1+x)^{x-1}[(1+x)\ln(1+x)+x]$ (v) $x^x e^x(2+\ln x)$

3. (i) $a^{a^x}a^x(\log_e a)^2$ (ii) $x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right)$ (iii) $(\cot x)^{\tan x}\sec^2 x[\log(\cot x)-1]$

(iv) $(\sin x)^x[x\cot x+\ln(\sin x)]$ (v) $(\sin x)^{\tan x}[1+\sec^2 x\ln(\sin x)]$

(vi) $x^{e^x}e^x\left(\frac{1}{x}+\log x\right)$ (vii) $2x^{\ln x-1}.\ln x$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১০

1. $-\frac{y}{x}$ 2. $\frac{2a}{y}$ 3. $-\frac{2x+y}{x+2y}$ 4. $\frac{2(x+y)\cos(x+y)^2}{1-2(x+y)\cos(x+y)^2}$ 5. $-\frac{y(y+x\log y)}{x(ylox+x)}$

6. $\frac{y(x-1)}{x(1-y)}$ 7. $\frac{y}{x}$ 8. $\frac{y-x^2\sin(x+y)}{x[1+x\sin(x+y)]}$ 9. $\frac{1}{t}$ 10. $-\tan\theta$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১১

1. $\frac{2}{x}$ 2. $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 3. $-\frac{\sin^2 x+\cos y}{\sin^3 y}$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১২

1. $4x-y-4=0;\ x-4y\text{-}18=0$ 2. $4x+3y-7=0;\ 3x-4y-24=0$

3. $8x+y-10=0;\ x-8y+15=0$ 4. $2x+3y-8=0;\ 3x-2y+1=0$

5. (1,2); (1,-2) 6. $(0,0);\left(\frac{4}{3}\text{a},\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\text{a}\right)$ 7. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$

8. $\left(\frac{1}{4},\pm\frac{1}{2}\right)$ 9. (0,0); (-2a,0) 10. (-1,1);(1,1)

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১৩

1. $dy=4,\ \delta y=5.33$ 2. $dy=4,\ \delta y=8$ 3. $dy=4,\ \delta y=5$ 4. $dy=\frac{1}{6},\ \delta y=\sqrt{10}-3$

5. $dy = 8, \delta y = 16$

পাঠোত্তর মূল্যায়ন ৯.১৪

1. সর্বোচ্চ মান 94; সর্বনিম্ন মান -162 2. সর্বোচ্চ মান 5; সর্বনিম্ন মান 9 3. সর্বনিম্ন মান 1

4. সর্বোচ্চ মান 5; সর্বনিম্ন মান -3 5. স্থানীয় চরম বিন্দু নাই 6. সর্বোচ্চ মান $\frac{43}{2}$; সর্বনিম্ন মান $\frac{2}{3}$

7. সর্বোচ্চ মান $\frac{39}{16}$; সর্বনিম্ন মান 2 13. $[0, \infty)$ ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান এবং $(-\infty, 0]$ ব্যবধিতে ক্রমহ্রাসমান।

14. $(-\infty, +\infty)$ ব্যবধিতে ক্রমবর্ধমান

চূড়ান্ত মূল্যায়ন

1. (iii)	2. (iii)	3. (i)	4. (i)	5. (iii)
6. (i)	7. (iii)	8. (i)	9. (iii)	10. (iii)